G. CASTELNUOVO

Professore all' Università di Roma

LEZIONI

DI

GEOMETRIA

ANALITICA E PROIETTIVA

Volume I

(Forme di prima specie — Geometria analitica del piano — Curve di secondo ordine).

ROMA-MILANO

SOCIETÀ EDITRICE DANTE ALIGHIERI

DI

ALBRIGHI, SEGATI E C.

—

1904

cat for Math-Stat. Lib

Gift of M. W. Haskell

PREFAZIONE

Per far cosa grata ai miei studenti mi son deciso a raccogliere queste lezioni, delle quali pubblico oggi una prima parte; seguirà un secondo volume, più breve, dedicato alla geometria dello spazio ed alle proprietà fondamentali delle quadriche. Ma io spero che questo trattato possa destare qualche interesse presso un pubblico più vasto; non già per i risultati, tutti noti ed ormai classici, che esso contiene, bensì per l'indirizzo, in parte nuovo, che lo ispira (¹).

Nell'Università di Roma infatti, per iniziativa del Prof. Cremona (di cui noi tutti, discepoli ed ammiratori, piangiamo la perdita) e del Prof. Cerruti, ai corsi tradizionali di Geometria proiettiva sintetica e di Geometria analitica si volle sostituire un unico insegnamento, allo scopo di associare, in armonica unione, i due metodi cui la Geometria deve le sue vittorie, e rivolgerli insieme ad accrescere la cultura scientifica dei giovani. Come io abbia tradotto in atto tale pensiero apparirà dalla presente opera.

In essa il lettore non deve adunque cercare quella unità di mezzi, quella purezza di linee, che attribuiscono ad un trattato di Geometria proiettiva i caratteri di un'opera d'arte. Ma

(¹) Lo stesso ordine di idee si ritrova nelle Lezioni di *Geometria proiettiva ed analitica* del Prof. Del Re (Modena, 1900), le quali però, nella parte sinora uscita, riguardano soltanto le forme ad una dimensione.

non troverà nemmeno traccia dello sforzo, a cui deve adattarsi chi vuole da un unico punto di vista osservare un orizzonte troppo vasto. Ogni questione vien qui discussa col metodo che più si presta ad approfondirla, e vari argomenti, esaminati sotto molteplici aspetti, acquistano un singolare rilievo.

I mezzi di ricerca di cui il lettore dispone fin dai primi capitoli, avrebbero consentito di dare al mio corso una maggiore ampiezza ed un carattere più elevato. Non ho ceduto a questa tendenza, pensando che i giovani, a cui le mie lezioni si rivolgono, sono avviati, per la maggior parte, alla Scuola degli Ingegneri; perciò, ad es., nella geometria piana ho fatto uso continuo di coordinate cartesiane, relegando in alcuni paragrafi secondari le coordinate proiettive, che, a giudicare dal titolo della presente opera, avrebbero dovuto tenervi una parte essenziale. Ma, pur astraendo dalla ragione suddetta, io penso che, di fronte al continuo sviluppo della scienza, intesa nel senso più largo, di fronte alle cognizioni sempre più varie che ormai si esigono da ogni spirito colto, non convenga dare ai nostri primi corsi universitari una soverchia estensione. Ciò che importa è di mettere in piena luce le idee larghe e feconde che reggono un determinato ramo di studi, per ricavarne coi mezzi più semplici i risultati essenziali, lasciando in ombra i particolari minuziosi che solo interessano chi di tutta la scienza guardi un campo ristretto.

Ad accrescere in varie direzioni la cultura dei volonterosi, ad educarne il gusto, provvedono i numerosi esercizi di cui ho voluto arricchire questo volume. Con assidua cura ho cercato di disporli in ordine logico, distribuendoli, per ciascun capitolo, in gruppi a seconda delle loro mutue affinità, e spesso li ho forniti di un cenno di risoluzione, affinchè il lettore possa gradatamente, e senza sforzo eccessivo, giungere a nuove verità importanti e riposte. E nella scelta ho ricorso, quante volte ho potuto, alle opere dei fondatori della Geometria moderna, procurando sempre, e cogli esercizi, e col testo, e colle note storiche che lo accompagnano, di far penetrare nello studioso lo spirito di quei Grandi, nei quali è dubbio se debba più ammirarsi l'acume dello scienziato o la grazia dell'artista.

Io spero che quest'opera possa dare ai giovani, cui è dedicata, solide basi per progredire negli studi geometrici; ad essi riuscirà facile ed istruttivo approfondire in vari punti queste prime cognizioni colla lettura di qualcuno degli ottimi trattati, ove la Geometria proiettiva o la analitica vengono esposte separatamente, coi metodi propri a ciascuno dei due rami (1).

Non mi fermerò qui ad enunciare i singoli argomenti trattati nel presente volume; l'indice particolareggiato di cui esso è fornito provvede a ciò. Ma prima di chiudere queste righe, debbo esprimere viva riconoscenza al D.r G. Bisconcini per la cura con cui volle disegnare le numerose figure intercalate nel testo.

Roma, Luglio 1903.

(1) Fra i molti, citerò solo quei trattati di cui ho più particolamente profittato nella redazione di quest' opera. Per la Geometria analitica:

D'Ovidio, *Geometria analitica* (3a ediz.), Torino, 1903.

Salmon, *A treatise on Conic Sections*; opera di cui esistono traduzioni in francese, tedesco, ed anche in italiano (*Trattato analitico delle sezioni coniche....*, Napoli, 1868), quest' ultima però fatta sopra una delle prime edizioni inglesi.

Per la Geometria proiettiva:

v. Staudt, *Die Geometrie der Lage* (1847), di cui fu pubblicata una traduzione italiana (*Geometria di posizione*, Torino, 1889).

Reye, *Die Geometrie der Lage*, varie edizioni tedesche (l'ultima in 3 vol.), una traduzione francese (in 2 vol.) ed una italiana del 1° volume (*La Geometria di posizione*, Venezia, 1884).

Enriques, *Lezioni di Geometria proiettiva*, (Bologna, 1898).

INTRODUZIONE

Gli studi geometrici, tenuti in altissimo onore presso i Greci, dopo un lungo periodo di sosta rifiorirono negli ultimi tre secoli per opera principalmente di due metodi d'importanza, a dir vero, molto diversa: il *metodo analitico* ed il *metodo delle proiezioni*. Dell'uno e dell'altro dovremo occuparci nel corso di queste lezioni; ad essi ricorreremo per estendere il campo delle nostre cognizioni geometriche. E accanto a quelli vedremo sorgere tutta una serie di concetti generali, che hanno aperto nuovi orizzonti alla geometria e ne hanno reso più simmetrico l'edificio, permettendo di abbracciare sotto un unico sguardo problemi in apparenza molto diversi e di evitare continue distinzioni di casi particolari, così nocive al progresso scientifico.

Ora di siffatti concetti generali possiamo subito indicarne uno. Intendiamo parlare della *libertà nella scelta dell'elemento generatore di una figura geometrica*.

1. Elementi generatori delle figure. — Nella Geometria elementare, stabiliti i concetti di *punto*, *linea*, *superficie*, si osserva che un punto movendosi con data legge può generare una linea od una superficie; la linea o la superficie vien riguardata come *luogo di un punto*. Ora noi, estendendo tale concetto secondo le idee di Plücker (1830), vogliamo anche considerare enti generati dal movimento di una retta o di un piano, *luoghi di rette* e *luoghi di piani*.

Così saremo condotti a concepire, tra i luoghi di rette, l'insieme delle rette di un piano o dello spazio che passano per un determinato punto, l'insieme delle rette che toccano un determinato cerchio o una determinata sfera; e tra i luoghi di piani potremo immaginare l'insieme dei piani che passano per una determinata retta o per un determinato punto, che toccano una data sfera, ecc.

In conclusione, per noi gli *elementi* generatori degli enti geometrici sono il punto, la retta ed il piano.

Indicheremo di solito i punti colle lettere maiuscole latine $A, B \ldots$, le rette colle minuscole $a, b \ldots$, i piani colle minuscole greche $\alpha, \beta \ldots$ Spesso la retta (indefinita) congiungente due punti A, B, o intersezione di due piani α, β sarà designata con AB o, rispettivamente, $\alpha\beta$; e in tutti i casi analoghi faremo uso di analoghe notazioni.

Diremo, per abbreviare, che due *elementi* di nome diverso *si appartengono* (che il primo appartiene al secondo o il secondo al primo), quando l'uno sta sull'altro, o passa per l'altro.

2. Forme geometriche fondamentali. (Steiner, 1832). — Gli enti più semplici, che avremo da considerare, diconsi *forme fondamentali;* alcune sono generate da punti, altre da rette, altre da piani.

a) Le forme fondamentali in cui l'*elemento generatore è il punto*, sono:

I°. *La retta punteggiata*, o semplicemente *punteggiata*, insieme di tutti i punti che appartengono ad una linea retta; la retta dicesi il *sostegno* della forma.

II°. *Il piano punteggiato,* insieme di tutti i punti che appartengono ad un piano; il piano è il *sostegno* della forma.

III°. *Lo spazio punteggiato*, insieme di tutti i punti dello spazio; lo spazio è il *sostegno* della forma.

b) Le forme fondamentali in cui l'*elemento generatore è il piano*, sono:

I°. *Il fascio di piani*, insieme di tutti i piani che appartengono ad una retta; in esso il *sostegno* è la retta comune a tutti i piani (*asse del fascio*).

II°. *La stella di piani*, insieme di tutti i piani che appartengono ad un punto; qui il *sostegno* è il punto comune a tutti i piani (*centro della stella*).

III°. *Lo spazio di piani*, insieme di tutti i piani dello spazio; qui il *sostegno* è lo *spazio*.

c) Le forme fondamentali in cui l'*elemento generatore è la retta*, sono:

I°. *Il fascio di rette* (*o di raggi*), insieme di tutte le rette che appartengono ad un punto e ad un piano per esso, vale a dire che passano per un punto e giacciono in un piano condotto pel punto; qui i *sostegni* della forma sono il punto comune (*centro del fascio*) ed il piano comune (*piano del fascio*).

II°. *Il piano di rette* o *piano rigato*, insieme di tutte le rette che appartengono ad un piano; il *sostegno* è il *piano*.

III°. *La stella di rette* (*o di raggi*), insieme di tutte le rette (dello spazio) che appartengono ad un punto; il *sostegno* è il punto comune a tutte le rette (*centro della stella*) (1).

Si osserverà subito che se nelle definizioni precedenti si scambiano tra loro le parole *punto* e *piano*, lasciando inalterata la parola *retta,* le forme generate dal punto, cioè la retta punteggiata, il piano punteggiato e lo spazio punteggiato, si trasformano rispettivamente nelle forme generate dal piano, cioè nel fascio di piani, nella stella di piani, nello spazio di piani. E tra le forme generate dalla retta, il fascio di rette si muta in sè stesso, ed il piano rigato e la stella di rette si scambiano tra loro.

Un siffatto modo di trasformare le proposizioni geometriche col nominato scambio di parole si dice *trasformazione per dualità* (nello spazio). E *duali* diconsi due proposizioni, due enti, due figure che si corrispondano in tal guisa. Le forme geometriche generate dal punto sono dunque duali delle forme generate dal piano, il fascio di rette è duale di sè stesso ed il piano di rette duale della stella di rette.

Un altro modo per classificare le forme fondamentali consiste nel dividerle in forme di 1ª. specie, di 2ª. specie, di 3ª. specie, comprendendo nelle forme di prima specie la retta punteggiata, il fascio di piani, il fascio di rette, tra quelle di 2ª. specie il piano punteggiato, la stella di piani, il piano di rette e la

(1) Lo *spazio rigato*, o insieme di tutte le rette dello spazio, non viene considerato d'ordinario come forma fondamentale.

stella di rette, e tra quelle di 3ª. specie lo spazio punteggiato e lo spazio di piani.

Di questa classificazione, che si riferisce alla maggior o minor libertà di un elemento, il quale si muova generando la forma, si vedrà più tardi la vera ragione. Per ora ci limitiamo a giustificarla osservando che ogni forma fondamentale di 2ª. e 3ª. specie, generata da un certo elemento, contiene infinite forme di specie inferiore, generate dallo stesso elemento. Aggiungeremo esservi molte proprietà che spettano a tutte le forme di una stessa specie, e non appartengono più alle forme di specie diversa. Queste proprietà si potranno enunciare come relazioni tra più elementi di una o più forme della stessa specie, senza precisare la natura dell'elemento. Sostituendo poi, alla parola *elemento*, i termini più precisi *punto*, *retta* o *piano*, si avranno altrettante proposizioni relative alle diverse forme fondamentali (di quella specie), che abbiamo introdotto (1).

3. **Elementi impropri.** — Prima di enunciare le principali relazioni che passano tra elementi e forme fondamentali, conviene introdurre il concetto degli *elementi impropri*, il quale ci permetterà di evitare distinzioni di casi ed eccezioni che continuamente si presentano nella geometria elementare.

Ricordiamo che due rette a, b di un piano π si segano in un punto O, o sono parallele. Nel primo caso esiste *un* fascio di rette che contiene a e b, ed è costituito dalle rette di π passanti per O. Invece nel secondo caso non esiste un fascio contenente a e b. Se però osserviamo che tutte le rette del piano parallele ad a e b costituiscono pure un sistema di rette il quale, come si vedrà, ha molte proprietà comuni col fascio sopra nominato, si presenta naturale l'idea di estendere nel modo seguente il significato della locuzione *fascio di rette*.

Da ora in poi per *fascio di rette* intenderemo sia l'insieme delle rette di un piano uscenti da un dato punto, sia l'insieme delle rette di un piano parallele tra loro. E solo quando sarà necessario di distinguere i due casi, diremo *improprio* l'ultimo

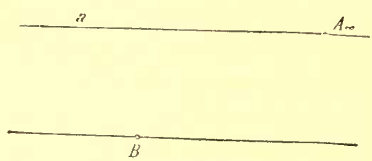
---

(1) Come si classificano le forme fondamentali a seconda del loro sostegno?

fascio, chiamando *proprio* il fascio costituito da rette concorrenti in un punto.

Le rette di un fascio proprio hanno tutte un punto comune che dicesi *centro* del fascio; le rette di un fascio improprio non hanno in comune *un punto*, bensì *una direzione*. Per riunire in una sola queste due osservazioni, conviene sostituire alla parola *direzione*, la locuzione *punto improprio*, o *punto all' infinito*, che nulla significava finora. Volendo poi (quando occorra) distinguere l'ente a cui convenzionalmente attribuiamo il nome di *punto improprio* dai punti intuitivi dello spazio, chiameremo questi ultimi *punti propri*. Ora possiamo dire che le rette di un fascio hanno sempre un punto comune (*centro*), *proprio* se il fascio è proprio, *improprio*, cioè una direzione, se il fascio è improprio. In particolare: due rette di un piano hanno sempre un punto in comune, *proprio* quando si segano (nel senso della Geometria elementare), *improprio* se sono parallele.

Una retta a possiede infiniti punti propri ed un punto improprio o all' infinito A_∞, cioè una direzione; questo punto (o questa direzione) è completamente definito quando è data la retta, e non varia quando la retta venga sostituita con una ad essa parallela. *Congiungere un punto proprio* B *con* A_∞ vuol dire condurre per B la retta parallela ad a; questo problema ha sempre *una* soluzione, come quello di congiungere B con un punto proprio A.



In modo perfettamente analogo introdurremo il concetto di *retta impropria*. Partiamo da due piani α e β. Se questi hanno una retta comune r, resta individuato un fascio di piani che contiene α e β, ed è costituito da tutti i piani dello spazio che passano per la r. Se invece i due piani α e β sono paralleli (hanno la stessa *giacitura*) rimane individuato il sistema dei piani paralleli ad α e β; poichè il detto sistema ha molte proprietà comuni col fascio, conviene di estendere il nome di *fascio di piani* anche al sistema di piani tutti paralleli. Quando occorra distinguere i due casi, chiameremo *fascio proprio* l'ente costituito da tutti i piani che passano per una retta; *improprio* quello costituito dai piani che sono paralleli ad uno stesso piano. E potremo dire ormai che due piani dello spazio determinano sempre un fascio, proprio od improprio, che li contiene.

I piani di un fascio proprio hanno in comune *una retta* (asse del fascio), mentre quelli di un fascio improprio hanno in comune *una giacitura*. Sostituendo alla locuzione *giacitura* quella, non ancora adoperata, di *retta impropria* o *all' infinito*, potremo dire che i piani di un fascio proprio o improprio hanno sempre in comune una retta (propria, cioè una retta intuitiva, nel 1°. caso, impropria nel 2°.) che chiameremo *asse del fascio;* in particolare due piani dello spazio hanno sempre una retta comune, *propria* se si segano (nel senso della Geometria elementare), *impropria* se sono paralleli.

Una retta all' infinito è individuata quando si dia un piano che la contenga, che abbia la giacitura definita dalla retta. *Congiungere un punto* (proprio) *B colla retta all' infinito a_∞ di un dato piano α*, vuol dire condurre per B il piano parallelo ad α; il problema ha sempre *una* soluzione come quello di congiungere, mediante un piano, il punto B con una retta propria a, che non passi per B.

4. Relazione tra elementi impropri. — Mettiamo ora in connessione i punti e le rette improprie. Noi diciamo che *un punto improprio A_∞ appartiene ad una retta impropria r_∞*, quando, tracciata una retta propria che definisca A_∞ ed un piano che definisca r_∞, quella retta è parallela a questo piano o vi giace per intero. Segue dalla definizione che una retta propria ed un piano, che non si appartengano, hanno sempre *un* punto comune, proprio se i due elementi si segano nel senso della Geometria elementare, improprio se sono paralleli.

Per verificare se un punto improprio A_∞ appartiene ad una retta impropria r_∞, basta congiungere un punto ausiliare proprio P ad A_∞ e ad r_∞ mediante una retta a ed un piano ϱ, e verificar poi se a appartiene a ϱ. Valendosi di questa osservazione si giustificano subito le due proposizioni seguenti:

Due punti impropri individuano una retta impropria che appartiene a quelli (la loro congiungente).

Due rette improprie individuano un punto improprio che appartiene a quelle (la loro intersezione).

Segue che i punti impropri e le rette improprie si comportano come i punti e le rette di un piano. Sorge quindi l'idea di chiamare *piano improprio* o *all'infinito*, l'insieme dei punti impropri e delle rette improprie dello spazio. Il piano improprio è unico; *ad esso appartengono tutti i punti impropri e tutte le rette improprie*. Ogni retta propria ha con esso un punto comune, il punto all'infinito della retta; ogni piano proprio ha con esso una retta comune, la retta all'infinito del piano proprio (1).

Abbiamo introdotto così accanto agli elementi propri, o intuitivi, dello spazio, gli elementi convenzionali che abbiamo detto impropri (infiniti punti o direzioni, infinite rette o giaciture, ed *un* piano, che è l'insieme delle direzioni e giaciture), ed abbiamo definito la relazione di *appartenersi* di due elementi propri od impropri, di nome diverso. Se ora torniamo alle definizioni di forme geometriche fondamentali (n.° 2), possiamo attribuire a quelle la massima generalità, coll'ammettere che gli elementi o i sostegni, di cui ivi si parla, possano essere indifferentemente propri od impropri. Lasciamo al lettore la cura di enumerare tutti i casi che così si presentano, e di esaminare volta per volta se la forma possegga elementi impropri. Solo, in via di esempio, faremo notare che accanto al fascio proprio di rette avente il centro e il piano proprio, ed al fascio improprio di rette avente centro improprio e piano proprio, va considerato inoltre *il fascio di rette improprie*, che ha improprio tanto il centro quanto il piano. Ed accanto alla stella *propria* di rette e di piani, avente il centro proprio, vanno considerate la *stella impropria di rette*, costituita da tutte le rette dello spazio parallele ad una retta data, e la *stella impropria di piani*, costituita da tutti i piani dello spazio paralleli a una retta data; il centro della stella impropria è un punto improprio.

Osservazione. — Sebbene nel fissare le convenzioni relative agli elementi impropri si sia fatto uso tacitamente del postulato V di Euclide, il quale afferma in sostanza che sopra un piano e per un punto si può condurre una sola retta la quale non incontri una retta assegnata in quel piano, fu osservato tuttavia (dal Klein) che la Geometria proiettiva è indipendente da quel postulato, e vale anche quando il postulato stesso venga

---

(1) I concetti di punto e retta all' infinito si trovano già in Desargues (1639); mentre il piano all'infinito fu introdotto da Poncelet (1822).

sostituito con una delle due ipotesi a cui si perviene negandolo (ipotesi di Lobatschefskij, o della *geometria iperbolica*, la quale afferma che per un punto e sopra un piano si possono condurre infinite rette non secanti una retta del piano; ipotesi di Riemann, o della *geometria ellittica*, secondo la quale due rette di un piano si incontrano sempre). Si dovranno veramente modificare in conseguenza le convenzioni con cui gli elementi impropri furono introdotti (convenzioni che anzi non occorrono nella ipotesi di Riemann), ma sempre si potrà procedere in modo da far sì che valgano le proposizioni sopra le quali la Geometria proiettiva è fondata.

5. Proposizioni fondamentali relative all' appartenersi degli elementi. — La opportunità delle convenzioni fatte per introdurre gli elementi impropri, apparirà chiaramente quando si osservi che le numerose proposizioni di geometria elementare relative alle mutue posizioni di punti, rette e piani, possono ormai riassumersi in pochi principi, che valgono, senza eccezioni, per elementi propri od impropri. Nel presentare quei principi fondamentali terremo conto del fatto che ciascuno di essi ha come duale (n.° 2) un altro dei principi stessi; porremo l'una di fronte all'altra due proposizioni siffatte.

a) *Due punti individuano una retta, a cui essi appartengono* (la loro congiungente).	*a'*) *Due piani individuano una retta, a cui essi appartengono* (la loro intersezione).
b) *Tre punti che non appartengano ad una stessa retta, individuano un piano, a cui essi appartengono* (il piano che li congiunge).	*b'*) *Tre piani che non appartengano ad una stessa retta, individuano un punto, a cui essi appartengono* (in cui si segano).
c) *Un punto ed una retta che non si appartengano, individuano un piano* (congiungente), *a cui entrambi appartengono.*	*c'*) *Un piano ed una retta che non si appartengano, individuano un punto* (intersezione), *a cui entrambi appartengono.*
d) *Se due punti di una retta appartengono ad un piano, la retta appartiene al piano;* (segue da *c'*) per assurdo).	*d'*) *Se due piani* (*passanti*) *per una retta appartengono ad un punto, la retta appartiene al punto;* (segue da *c*) per assurdo).
e) *Due rette appartenenti ad uno stesso punto, appartengono pure ad uno stesso piano;*	*e'*) *Due rette appartenenti ad uno stesso piano, appartengono pure ad uno stesso punto;*

(segue da b) e d) purchè sulle due rette si fissino due punti distinti dal punto comune).

(segue da b') e d') purchè per le due rette si conducano due piani distinti dal piano comune).

Abbiamo detto che le dieci proposizioni valgono per elementi propri od impropri. Ciò si giustifica osservando che, se si parte da una qualsiasi delle proposizioni stesse, e si fanno le varie ipotesi possibili relative all'esser propri od impropri gli elementi ivi considerati, si ricade sempre in note proposizioni di Geometria elementare. Così ad es. la a), secondo che dei punti ivi nominati si suppongono propri due, uno o nessuno, si traduce rispettivamente nel primo postulato della retta, nel postulato delle parallele, o nella prima proposizione del n° 4 (la quale si riduce in sostanza al teorema: tutti i piani paralleli a due rette non parallele son paralleli tra loro). Ma da questa semplice verifica segue una conseguenza notevole: *Ogni proposizione dedotta logicamente da quelle dieci fondamentali (senza introdurre nuovi concetti) vale indifferentemente per elementi propri od impropri.* La stessa conseguenza sussisterebbe per un teorema la cui dimostrazione si fondasse, oltre che sulle dieci proposizioni nominate, anche sopra altre pur valide per elementi propri od impropri. E siccome a questa condizione soddisfano tutti i principi che servono di base alla Geometria proiettiva, si conclude: *Ogni proprietà di Geometria proiettiva sussiste indifferentemente per elementi propri od impropri.* Quando adunque nella Geometria proiettiva si nomina un punto, una retta, od un piano, è sottinteso che l'elemento potrà essere proprio o improprio. Va notato però sin d'ora che i teoremi di Geometria proiettiva contemplano soltanto la mutua posizione degli elementi (appartenenza, allineamento di punti, concorrenza di rette . . .), sono, come suol dirsi, di *natura grafica*; ma non riguardano questioni di misure, o *metriche*, non si occupano adunque di eguaglianze di segmenti, angoli . . . Nella *Geometria metrica*, la distinzione tra elementi propri e impropri va sempre fatta, e quando non vi si accenni esplicitamente, si intende che i punti, le rette e i piani di cui si parla, sono *propri*.

6. Legge di dualità. — Ad un'altra conseguenza di importanza anche maggiore si perviene con un ragionamento analogo, se si osserva che le dieci proposizioni fondamentali si mutano l'una nell'altra per dualità nello spazio. Noi ci limitiamo a constatare questo fatto; esso dipende in parte dalla natura dello spazio come ci vien rappresentato dai sensi aiutati dalla facoltà di astrazione, in parte dalle convenzioni con cui abbiamo introdotti gli elementi impropri. Ma da questa osservazione segue che *ogni proposizione dedotta logicamente da quelle dieci fondamentali (senza introdurre nuovi concetti) dà luogo ad un' altra proposizione pur vera, quando l'enunciato della prima si trasformi per dualità nello spazio*, vale a dire quando in esso si scambino tra loro le parole *punto* e *piano* lasciando inalterata la parola *retta*; infatti la stessa dimostrazione della prima proposizione si muta, con quello scambio, nella dimostrazione della seconda. Siccome poi tutta la Geometria proiettiva si fonda sopra le dieci proposizioni fondamentali già enunciate, e sopra altre a cui si applica la stessa osservazione relativa alla dualità, si conclude: *Ogni proprietà di Geometria proiettiva dà luogo ad un' altra proprietà pur vera* (che in casi particolari può coincidere colla prima), *quando nell' enunciato di quella si eseguisca lo scambio per dualità.* Di due proposizioni *duali*, basta dimostrare una per esser sicuri che sussiste anche l'altra. In tale affermazione consiste la *legge di dualità nello spazio.*

Si osservi però, in primo luogo, che la legge si potrà applicare ad una proposizione solo quando la dimostrazione di questa si appoggi esclusivamente sopra proposizioni fondamentali trasformabili per dualità; da questa condizione potremo in certi casi liberarci nel seguito, quando riusciremo a giustificare per altra via la legge di dualità.

Si osservi, in secondo luogo, che per applicare ad una proposizione la legge di dualità, occorre che la proposizione sia enunciata in *forma grafica* (n.° 5); alle proposizioni metriche la legge di dualità, in generale, non è applicabile.

Due proposizioni duali si riferiscono a due figure che si chiamano pur *duali.* Ad ogni punto, retta, o piano dell' una corrisponde rispettivamente un piano, una retta od un punto dell' altra; e se più elementi della prima figura sono legati da qualche relazione grafica, la relazione duale passerà tra gli elementi della seconda figura. Così ad es. se due elementi della prima figura si appartengono, si apparterranno gli elementi corrispondenti della seconda; se tre o più punti della prima figura sono allineati, i piani corrispondenti della seconda passeranno per una stessa retta, ecc.

Accanto alla legge di dualità *nello spazio* di cui ora abbiamo discorso, vanno ricordate altre due leggi di dualità, l'una valida in *geometria piana*, la seconda nella *geometria della stella*. La legge di dualità piana afferma che da una proposizione grafica di geometria piana si può dedurne un'altra collo scambio delle parole *punto* e *retta*. La legge di dualità nella stella autorizza lo scambio delle parole *retta* e *piano* (uscenti dal centro della stella).

Le due leggi ora menzionate si giustificano in modo analogo, sebbene meno semplice, di quello tenuto a proposito della dualità nello spazio; si osserverà ad es. che la geometria proiettiva del piano si potrebbe dedurre tutta (sebbene ciò non si soglia fare) da alcune proposizioni fondamentali di planimetria, e basterà allora constatare che a queste la legge di dualità piana è applicabile. Noi del resto dovremo in seguito giustificare per altra via queste leggi, e per ora ci limiteremo ad applicarle a quelle proposizioni le cui dimostrazioni possono trasformarsi immediatamente coi detti scambi di parole, senza perdere la loro validità.

La legge di dualità (o reciprocità) nel piano e nello spazio fu rilevata da Poncelet (1818) partendo da considerazioni di tutt' altra natura, ed enunciata in tutta la sua estensione da Gergonne (1826).

7. Esempi di proposizioni grafiche. — Le considerazioni dei n^i. 5 e 6 si applicano ad es. alle seguenti proposizioni che si appoggiano soltanto sui principi del n.° 5. Si osserverà nel confrontare gli enunciati, corrispondentisi per dualità nello spazio, che la *coppia di rette secantisi* (in un punto proprio od improprio) o, come si suol dire, *coppia di rette incidenti*, è un ente duale di sè stesso (n.° 5, e), e')); e per conseguenza è duale di sè stessa la *coppia di rette non incidenti* o *rette sghembe*.

Occupiamoci anzitutto dei due problemi:

a) *Per un dato punto condurre una retta che incontri due rette sghembe assegnate, nessuna delle quali passi pel punto.*	a') *In un dato piano condurre una retta che incontri due rette sghembe assegnate, nessuna delle quali giaccia nel piano.*

Se P è il punto ed a, b sono le rette date, la retta richiesta dovrà appartenere al piano Pa ed al piano Pb, sarà dunque l'intersezione dei piani Pa, Pb.

Se π è il piano ed a, b sono le rette date, la retta richiesta dovrà appartenere al punto πa ed al punto πb, sarà dunque la congiungente i due punti πa, πb.

I due problemi hanno sempre una ed una sola soluzione; questo risultato ci conduce al seguente teorema che è *duale di sè stesso*:

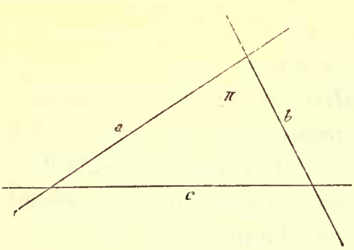
β) *Il sistema delle infinite rette che segano due rette sghembe è tale che ad ogni punto o ad ogni piano dello spazio appartiene una sola retta del sistema; eccettuati i punti di una qualsiasi delle due rette, ed i piani per una qualsiasi delle due rette, ai quali punti o piani appartengono infinite rette del sistema* (formanti fascio).

γ) *Esistono infinite rette che segano tre rette date, sghembe a due a due*; ed una qualsiasi di quelle può costruirsi:

o assumendo un punto arbitrario sopra una delle tre rette date, e conducendo per esso la retta che sega le altre due.

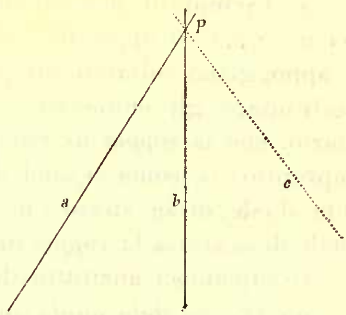
o conducendo un piano arbitrario per una delle tre rette date, e costruendo in esso la retta che sega le altre due.

δ) *Se più rette si segano a due a due senza passare tutte per uno stesso punto, esse stanno in uno stesso piano.*



Infatti: due qualunque a e b delle rette date, segandosi in un punto, staranno in uno

δ') *Se più rette si segano a due a due senza stare tutte in uno stesso piano, esse passano per uno stesso punto.*



Infatti: due qualunque a e b delle rette date, giacendo nello stesso piano, si segheranno stesso piano π. Fra le altre rette del sistema, ve ne sarà per ipotesi una almeno, c, che non passerà pel punto ab; essa però, dovendo segare a e b, starà nel piano π. Ogni altra retta del sistema poi, o non passerà pel punto ab ed allora (come la c) starà nel piano π; o passerà pel punto ab ed allora, dovendo incontrare la c, starà anche essa nel piano π delle tre rette a, b, c.

in un punto P. Fra le altre rette del sistema, ve ne sarà per ipotesi una almeno, c, che non starà nel piano ab; essa però, dovendo segare a e b, passerà pel punto P. Ogni altra retta del sistema poi, o non starà nel piano ab ed allora, (come la c) passerà pel punto P, o starà nel piano ab ed allora, dovendo segare la c, passerà anch' essa pel punto P comune alle tre rette a, b, c.

Esercizi. — 1) Come è formato il sistema delle rette che segano due rette incidenti? quante rette di esso appartengono ad un punto o ad un piano assegnato?

2) Enunciare col linguaggio della Geometria elementare tutti i casi a cui danno luogo le proposizioni α), α'), β), γ), quando si supponga che uno o più degli elementi ivi nominati siano impropri.

3) Se una retta a ed un piano α sono perpendicolari, il punto A_∞ della retta e la retta a'_∞ del piano sono tali che ogni retta per A_∞ è perpendicolare ad ogni piano per a'_∞. Le rette dello spazio che formano angolo retto con a (e colle sue parallele) segano tutte a'_∞, e viceversa; quindi le rette perpendicolari ad a danno un particolar sistema di rette secanti due rette sghembe a, a'_∞. Si applichino ad esse i problemi α) ed α') ed il teorema β): come si presentano gli enunciati?

4) Dedurre che esiste sempre una ed una sola retta perpendicolare a due rette sghembe a, b, e costruirla; di qual problema può questo riguardarsi come caso particolare?

8. Poligoni e moltilateri completi. — Prima di procedere nello studio delle proprietà grafiche gioverà accennare a certe figure che, essendo definite mediante caratteri grafici, possono offrire esempi alle considerazioni dei n.[i] 5 e 6.

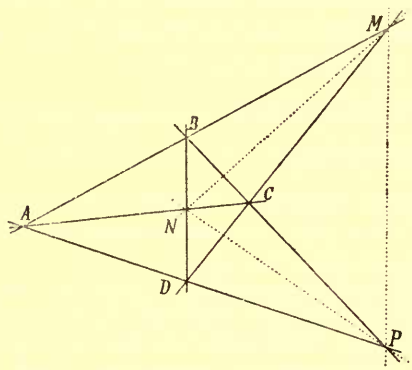
I. In una *forma di prima specie* avremo spesso occasione di considerare gruppi di un certo numero finito n di elementi: *n.upla* di punti di una punteggiata, di rette o di piani di un fascio.

II. In una *forma di seconda specie*, e precisamente in un piano punteggiato o rigato, si sogliono definire due figure che si corrispondono per dualità piana:

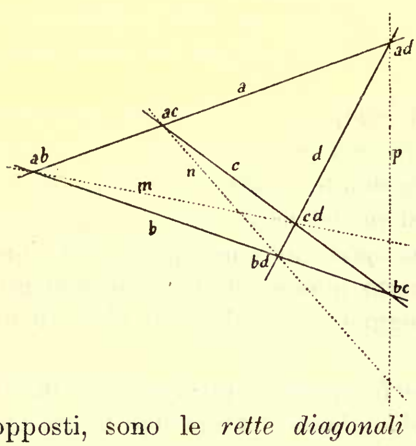
a) l' *n.gono completo*, figura costituita da n punti (*vertici*) di cui mai tre siano allineati, e dalle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette indefinite (*lati*) che congiungono quei punti a due a due;

b) l' *n.latero completo*, figura costituita da n rette (*lati*), di cui mai tre concorrano in un punto, e dagli $\frac{n(n-1)}{2}$ punti (*vertici*) in cui quelle rette si segano a due a due.

I casi più semplici corrispondono ai valori $n = 3$ (triangolo o trilatero ordinario, coll' avvertenza che i vertici o lati possono anche essere impropri, ed in ogni caso i lati si intendono prolungati all' infinito), ed $n = 4$; fermiamoci su quest' ultimo.



Il *quadrangolo completo* possiede quattro vertici A, B, C, D, e sei lati AB, AC, AD, BC, BD, CD. Due lati, come AB e CD non aventi un vertice in comune, diconsi *opposti*; ed il punto M in cui si segano si dice *punto diagonale*. Si hanno tre coppie di lati opposti e quindi tre punti diagonali, M, il punto $AC \cdot BD \equiv N$ e il punto $AD \cdot BC \equiv P$; il triangolo $M\,N\,P$ che essi formano, dicesi *triangolo diagonale* del quadrangolo completo.



Il *quadrilatero completo* (Carnot, 1801) invece possiede quattro lati a, b, c, d e sei vertici ab, ac, ad, bc, bd, cd, i quali si raggruppano in tre coppie di vertici opposti ab e cd, ac e bd, ad e bc; le rette $ab \cdot cd \equiv m$, $ac \cdot bd \equiv n$, $ad \cdot bc \equiv p$, che congiungono vertici opposti, sono le *rette diagonali* del quadrilatero completo, e formano il *trilatero diagonale*.

a') Ritornando alla figura determinata da n punti di un piano, se questi si considerano in un determinato ordine, e si congiunge ciascun punto col consecutivo, e l'ultimo col primo si ottiene un *n. gono semplice*, figura che possiede n vertici ed n lati.

b') Similmente si definisce l'*n.latero semplice* (n lati ed n vertici), figura che non differisce dall'n.gono semplice.

Finalmente partendo da n rette o da n piani di una stella si determinano in modo analogo a quello esposto in *a*) e *b*) due figure corrispondenti per dualità nella stella, e precisamente:

c) *l'angoloide n.spigolo completo* che possiede *n spigoli* e $\frac{n(n-1)}{2}$ *facce* e corrisponde per dualità nello spazio all' n. latero piano completo;

d) *l'angoloide n. edro completo* che possiede *n faccie* e $\frac{n(n-1)}{2}$ *spigoli*, e corrisponde per dualità nello spazio all' n.gono piano completo.

III. Nelle *forme di terza specie* (spazio di punti e di piani) si possono definire due figure corrispondentisi per dualità nello spazio:

a) l' *n. gono sghembo completo* (*n vertici*, $\frac{n(n-1)}{2}$ *lati* o *spigoli*, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ *facce*).

b) l' *n.edro sghembo completo* (*n facce*, $\frac{n(n-1)}{2}$ *lati* o *spigoli*, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ *vertici*).

Lasciamo al lettore la cura di completare, guidato dalla analogia, queste ultime definizioni a cui non avremo occasione di ricorrere in seguito.

Esercizi. — 1) Enumerare i casi a cui danno luogo il triangolo, quadrangolo, quadrilatero, tetraedro . . . quando si suppongono impropri uno o più vertici, lati, facce, punti o rette diagonali. Come si ottiene il parallelogramma quale caso particolare del quadrilatero completo? come è costituito il trilatero diagonale? E se il parallelogramma si riguarda come caso particolare del quadrangolo completo, quali ne saranno i lati, i punti diagonali?

2) Se in un quadrangolo completo due coppie di lati opposti si compongono di rette ortogonali, anche la terza coppia si comporrà di rette ortogonali; il quadrangolo in tal caso si dice *ortogonale*.

3) Coi vertici (o lati) di un quadrangolo (o quadrilatero) completo si possono formare tre diversi quadrangoli (o quadrilateri) semplici. Come si estende questa osservazione al caso di un n. gono (o n. latero) per $n > 4$?

9. Proiezione e sezione. — La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, *proiezione* e *sezione*, le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.

Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura $(A, B, \ldots, a, b \ldots)$ composta di punti e rette, significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura. La nuova figura così ottenuta, composta di rette e piani uscenti da S, si designa con $S\ (A, B, \ldots, a, b, \ldots)$ e si chiama *proiettante* o *visuale* della figura primitiva dal centro S.

Segare con un piano σ (piano di sezione o *quadro)* una figûra $(\alpha, \beta, \ldots, a, b \ldots)$ composta di piani e rette, significa determinare le rette e i punti in cui σ sega i piani e le rette della figura. La nuova figura così ottenuta, composta di rette e punti giacenti in σ, si desigua con $\sigma\ (\alpha, \beta, \ldots, a, b \ldots)$ e si chiama *sezione* o *traccia* della figura primitiva (eseguita) col piano σ.

Proiettare da una retta s (asse di proiezione) una figura composta di punti, significa condurre i piani che congiungono la retta s ai punti della figura.

Segare con una retta s (trasversale) una figura composta di piani, significa determinare i punti intersezioni della retta s coi piani della figura.

È chiaro poi che in geometria piana si potrà proiettare da un punto una figura composta di punti e segare con una retta una figura composta di rette.

Spesso le due operazioni di proiezione da un punto e sezione con un piano si riuniscono per formare una sola operazione, che prende il nome di *proiezione da un centro S sopra un piano σ*. La operazione si eseguisce proiettando la figura data $(A, B, \ldots, a, b, \ldots)$ dal centro S e segandone la visuale $S(A, B, \ldots, a, b \ldots)$ col piano σ. La figura $(A', B', \ldots, a', b' \ldots)$ che così si ottiene in σ, dicesi appunto *proiezione* della figura primitiva da S sopra σ.

La *teoria delle ombre* e la *prospettiva* forniscono esempi di proiezioni da centri sopra piani; ad es. nel disegno prospettico il centro di proiezione è l'occhio dell'osservatore ed il piano è il *quadro* sopra cui si disegna.

E sembra appunto che gli studi di prospettiva richiesti dallo sviluppo delle arti belle nel Rinascimento, studi di cui si occuparono LEON BATTISTA ALBERTI e PIER DELLA FRANCESCA (verso la metà del secolo XV), LEONARDO DA VINCI e ALBERTO DÜRER (sul principio del secolo XVI), richiamando l'attenzione sulle leggi delle proiezioni, abbiano dato con DESARGUES (sulla prima metà del secolo XVII) il primo impulso alle ricerche di Geometria proiettiva.

10. Relazioni tra forme fondamentali ottenute mediante proiezione e sezione. — Mediante le nominate operazioni una forma fondamentale di prima o seconda specie si trasforma in un' altra forma della stessa specie, che si suol dire *prospettiva* alla primitiva. Così una punteggiata, proiettata da un punto fuori di essa, dà un fascio di rette, ed ogni punto della punteggiata dà una determinata retta del fascio. Viceversa il fascio di rette segato da una traversale che non ne contenga il centro, dà, sopra questa, una punteggiata. Similmente si ottiene un fascio di piani proiettando una punteggiata da una retta che non ne incontri il sostegno, o un fascio di rette da un punto che non appartenga al piano del fascio; e colle operazioni inverse (sezione mediante retta o piano) si ritorna dal fascio di piani alla punteggiata o al fascio di rette.

Finalmente proiettando un piano punteggiato o rigato da un punto esterno si ottiene rispettivamente una stella di rette o di piani; e dalla stella si ritorna al piano mediante sezione (1).

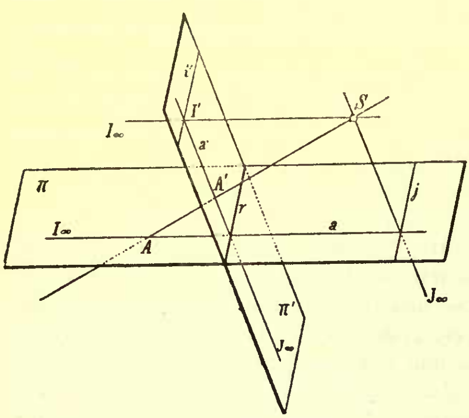
Sia F ad es. una figura piana, la quale mediante proiezione da un centro S dia una figura F' nella stella S (figura che si suol dire *prospettiva* ad F). Ogni punto A o retta a della figura piana F ha, come *corrispondente* nella figura F', la retta proiettante $SA \equiv a'$ od il piano proiettante $Sa \equiv \alpha'$. Ed è chiaro che se i due elementi A ed a della figura F si appartengono, si apparterranno pure in F' i due elementi a' ed α' corrispondenti a quelli; donde segue che a punti di F situati in linea retta corrispondono in F' rette giacenti in un piano, ed a rette di F concorrenti in un punto corrispondono in F' piani passanti per una retta. In breve ogni carattere grafico di F dà luogo ad un carattere grafico di F', il cui enunciato si ottiene dall'enunciato del primo sostituendo alle parole *punto* e *retta* le parole *retta* e *piano*. *Ogni proprietà grafica del piano conduce mediante quello scambio di parole ad una proprietà grafica della stella.* Ed in generale una pro-

(1) Come deve esser disposto il piano secante perchè un fascio proprio di piani fornisca un fascio improprio di rette?

prietà grafica di una forma di prima o seconda specie dà mediante un semplice scambio di parole una proprietà grafica di una forma della stessa specie, che si possa ottener da quella con una proiezione o sezione.

11. Proiezione di una figura piana sopra un altro piano. — Partiamo ora da una figura F situata sopra un piano π, e proiettiamola da un centro generico S sopra un piano π' ottenendo così la figura proiezione F'. È chiaro che ogni punto A ed ogni retta a di F dà per proiezione un punto A' ed una retta a' di F'; sicchè ad ogni elemento di F *corrisponde* un elemento dello stesso nome in F'; e viceversa, giacchè la F' potrebbe a sua volta riguardarsi come proiezione della F da S. È chiaro inoltre che, se gli elementi A ed a di F si appartengono, si apparterranno pure gli elementi corrispondenti A' ed a' di F', e viceversa; in breve i caratteri grafici (allineamento di punti, concorrenza di rette...) si trasmettono dall'una all'altra figura. Si osserverà poi che ogni punto della retta $r \equiv \pi\pi'$ considerato nell'un piano ha per corrispondente sè stesso nell'altro piano; e che ogni altra retta a di π ha una proiezione a' la quale passa per il punto $a\pi$, donde segue che rette corrispondenti a, a' dei due piani segano r in uno stesso punto.

Supposti propri i due piani π, π', la retta all'infinito i_∞ di π ha per corrispondente su π' quella retta i', generalmente *propria* e parallela ad r, che è l'intersezione di π' col piano parallelo a π condotto per S; i' si dice *retta limite* o *retta di fuga* del piano π'. Similmente si avrebbe da considerare la retta limite j del piano π che corrisponde alla retta all'infinito j'_∞ di π'.



Due rette parallele in π (secantisi in un punto di i_∞) hanno per corrispondenti due rette di π' che si segano in un punto, generalmente proprio, di i'; un fascio improprio di π

ha dunque per corrispondente, in generale, un fascio proprio di π', il cui centro sta sopra i'. Ed un parallelogramma $ABCD$ di π ha per corrispondente un quadrangolo semplice $A'B'C'D'$, in cui le coppie di lati opposti si segano in punti, generalmente propri, di i'; ecc.

12. Caratteri proiettivi di una figura; scopo della Geometria proiettiva. — Le considerazioni precedenti dimostrano l'opportunità di introdurre una distinzione nei caratteri di una figura piana F, quando questa si paragoni con una figura F' proiezione di quella sopra un altro piano.

Infatti alcuni caratteri della F si trasmettono ad ogni figura proiezione F', e diconsi perciò *caratteri proiettivi*. Tali sono ad es. l'allineamento di punti, la concorrenza di rette, in breve i caratteri che abbiamo chiamato *grafici* ([1]).

Invece altri caratteri della figura F, caratteri *non proiettivi*, si alterano in generale quando la figura si assoggetti ad una proiezione sopra un altro piano; tali sono ad es. il parallelismo di rette, la distanza di due punti, l'area, in breve la maggior parte dei caratteri in cui comparisce il concetto di misura (caratteri *metrici*). Una analoga distinzione si potrà fare in seguito fra i caratteri delle figure solide; ma quel che abbiamo detto sinora è sufficiente per comprendere la definizione che segue:

La Geometria proiettiva si propone lo studio dei caratteri proiettivi delle figure, e delle relazioni che legano quei caratteri tra loro (proprietà proiettive).

La Geometria proiettiva, in senso stretto, fa astrazione dalle proprietà metriche delle figure; ma essa riesce ad estendere il suo dominio fino a quelle, in base all'osservazione che le proprietà metriche possono dedursi come corollari dalle proprietà proiettive, quando le figure cui si riferiscono abbiano speciali relazioni con enti particolari, come sono le rette o il piano all'infinito, ... Così avviene che le proprietà proiettive di un quadrangolo piano si riducono a proprietà metriche

---

([1]) Inversamente si può dimostrare che ogni carattere proiettivo può enunciarsi sotto tal forma da apparire come un carattere grafico. Perciò nel seguito non faremo distinzione fra caratteri grafici e caratteri proiettivi.

(considerate in geometria elementare), quando il quadrangolo abbia speciali relazioni colla retta all'infinito, sia dunque un trapezio, un parallelogramma, ecc. (cfr. pure n° 8, es. 1)) (1).

Di fronte a questo indirizzo moderno della Geometria proiettiva che subordina le proprietà metriche alle proprietà proiettive, va ricordato un altro indirizzo, il cosidetto *metodo della proiezione centrale*, che procede in senso inverso, ed ebbe la massima importanza nello sviluppo della nostra scienza. Val la pena di esporne il concetto direttivo. Volendo studiare le proprietà proiettive di una figura piana F, si cerchi se tra le proiezioni di F eseguite da centri arbitrari sopra piani arbitrari, ve ne sia qualcuna F' dotata di particolarità metriche; (se F è ad es. un quadrangolo semplice, si potrà supporre che F' sia un parallelogramma). Trovata una tal figura F', se ne ricerchino le proprietà coi noti metodi della Geometria elementare; e tra le proprietà stesse si distinguano quelle che hanno carattere proiettivo dalle altre; le prime potranno senz' altro trasportarsi alla figura F, e condurranno a proprietà proiettive di questa. Nello sviluppo del nostro corso, e colla scelta degli esercizi vedremo anche più chiaramente le particolarità dell'uno e dell'altro indirizzo.

La distinzione tra proprietà proiettive e non proiettive delle figure è dovuta a Poncelet (1822), che adoperò sistematicamente il metodo della proiezione centrale per arricchire la Geometria proiettiva. Lo Staudt per primo (1847) riuscì a liberare dalle nozioni metriche i fondamenti di questa scienza, e segnò così la strada che attualmente si tiene nello studio della Geometria proiettiva. I rapporti che passano tra la Geometria proiettiva e la Geometria metrica furono messi in piena luce dal Cayley e dal Klein.

Esercizi. — 1) Segando un tetraedro con un piano generico si ottiene un quadrilatero completo; come deve esser condotto il piano secante per ottenere un parallelogramma? Proiettando un tetraedro da un punto sopra un piano si ottiene un quadrangolo completo; fissato il centro di proiezione, come deve esser scelto il piano, perchè i vertici del quadrangolo formino un parallelogramma?

2) Dato sopra un piano un quadrangolo semplice, proiettarlo da un tal centro sopra un tale piano che la proiezione risulti: *a*) un trapezio, *b*) un parellogramma, *c*) un rettangolo, *d*) un rombo (o losanga), *e*) un

---

(1) Con questa segnatura, adottata sempre nel seguito, viene indicato l'esercizio 1) che segue il n.° 8.

quadrato; negli ultimi quattro casi quale sarà la retta limite del piano primitivo?

3) Dato un triangolo qualsiasi proiettarlo in guisa che la proiezione risulti un triangolo simile od anche uguale a un triangolo dato; (si può sciegliere ad arbitrio la retta limite).

4) Chiamando proiezione di un segmento o di un' area l'insieme delle proiezioni dei punti del segmento o dell' area, si esamini a quali casi può dar luogo la proiezione di un segmento o di un'area (per es. triangolare) di un piano π sopra π', a seconda della posizione del segmento o dell'area rispetto alla retta limite di π.

5) Quando la retta limite di π è propria, vi è un solo punto improprio di π che ha per proiezione un punto improprio di π', e quindi vi è un solo fascio improprio in π che ha per proiezione un fascio improprio.

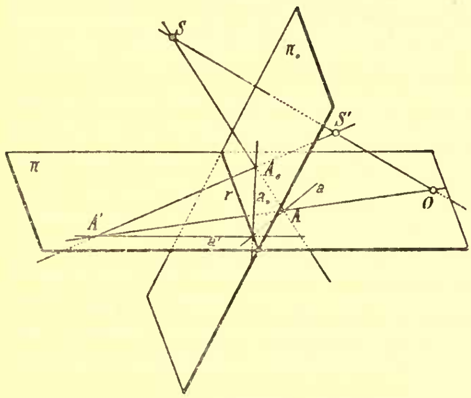
6) Se la retta all'infinito di π si proietta nella retta all'infinito di π', allora rette parallele di π si proiettano in rette parallele di π', ogni parallelogramma di π si proietta in un parallelogramma di π', ecc. Ora due sono i casi in cui quel fatto si presenta; l'uno corrisponde ad una particolarità nella posizione del centro di proiezione, i due piani essendo arbitrari (*proiezione parallela*), l'altro ad una particolarità nella posizione reciproca dei due piani, essendo arbitrario il centro di proiezione (*omotetia*); i due casi possono del resto presentarsi insieme.

7) Una particolare proiezione parallela è la proiezione *ortogonale*, che ha luogo quando il centro di proiezione è all'infinito nella direzione normale al piano su cui si proietta. Si dimostri che la condizione perchè un angolo retto si proietti ortogonalmente in un angolo retto è che l'angolo primitivo abbia uno (almeno) dei suoi lati parallelo al piano di proiezione; in altre parole, la sezione piana di un diedro retto è un angolo retto solo quando un lato dell'angolo è perpendicolare allo spigolo del diedro.

13. Altre osservazioni sulle proiezioni di una figura piana sopra un piano. — Fu già osservato (n° 11) che se due figure $F \equiv (A, \dots, a, \dots)$, $F' \equiv (A', \dots, a' \dots)$ appartenenti a due piani π, π', sono proiezioni l'una dell'altra da un centro S, allora tutte le rette $AA', \dots$ che congiungono punti corrispondenti distinti delle due figure, passano per uno stesso punto S, mentre tutti i punti $aa', \dots$ in cui si segano rette corrispondenti distinte delle due figure, appartengono ad una stessa retta $r \equiv \pi\pi'$.

Consideriamo ora due figure $F \equiv (A, \dots, a \dots)$, $F' \equiv (A', \dots, a' \dots)$ le quali appartengano ad uno stesso piano π, e siano proiezioni da due centri diversi S, S' di una stessa terza figura $F_0 \equiv (A_0, \dots, a_0 \dots)$ appartenente ad un altro piano π_0. Riguardiamo come corrispondenti nelle figure

F, F' due elementi (come A ed A', oppure a ed a') i quali siano proiezioni di uno stesso elemento (A_0 od a_0) di F_0. Allora una retta congiungente punti corrispondenti distinti A, A' di F, F' appartiene al piano π ed inoltre al piano $SS'A_0$, quindi passa per il punto fisso O traccia di SS' su π. D'altra parte due rette corrispondenti a, a' delle due figure F, F' devono passare per la traccia della retta a_0 sul piano π_0 (n.° 11), traccia la quale appartiene alla retta $r \equiv \pi\pi_0$; dunque rette corrispondenti distinte di F ed F' si segano in un punto della retta fissa r. Concludendo: se due figure di uno stesso piano sono proiezioni da centri diversi di una stessa figura di un secondo piano, allora nelle due prime figure le rette che congiungono punti corrispondenti distinti passano per uno stesso punto, e le intersezioni di rette corrispondenti distinte stanno sopra una stessa retta.



Nell'uno e nell'altro dei casi ora considerati ci si presentano due figure piane ($A, \ldots, a, \ldots$), ($A', \ldots, a' \ldots$) così riferite che ad ogni punto o retta dell'una corrisponde un punto od una retta dell'altra, in guisa che le rette congiungenti punti corrispondenti passano tutte per uno stesso punto, ed i punti di incontro di rette corrispondenti stanno tutti sopra una stessa retta. Due figure in tal relazione si dicono *omologiche* (o *prospettive*); il punto per cui passano tutte le congiungenti nominate è il *centro di omologia*, mentre la retta sopra cui si trovano tutte le intersezioni nominate è *l'asse di omologia.*

Riservandoci di studiare in seguito la relazione di omologia in generale, ci interessa ora il caso particolare che le due figure siano triangoli. Le considerazioni precedenti si riassumono allora nel seguente lemma:

Due triangoli sono omologici, sia quando, giacendo in piani *diversi, sono l'uno proiezione dell'altro, sia quando, giacendo in uno stesso piano, sono entrambi proiezioni (da centri diversi) di uno stesso triangolo situato in un altro piano.*

14. Teorema dei triangoli omologici. — Detti A, B, C e A', B', C' i vertici dei due triangoli, a, b, c e a', b', c' i lati rispettivamente opposti, perchè i due triangoli siano omologici devono verificarsi le due condizioni seguenti:

1) le rette AA', BB', CC', congiungenti vertici corrispondenti, devono passare per uno stesso punto P (centro di omologia);

2) i punti aa', bb', cc', intersezioni di lati corrispondenti, devono appartenere ad una stessa retta p (asse di omologia).

Ora è notevole il fatto che delle due condizioni una qualsiasi è conseguenza dell'altra. Ciò afferma l'importante *teorema dei triangoli omologici* dovuto a Desargues (1639), che noi enunceremo spezzandolo in due parti, inversa l'una dell'altra, secondo la ipotesi 1) o 2) da cui vorremo partire.

1) *Se due triangoli, non aventi alcun elemento comune, sono così riferiti che le rette congiungenti i vertici dell'uno coi vertici corrispondenti dell'altro passino per uno stesso punto, le intersezioni dei lati dell'uno coi lati corrispondenti dell'altro appartengono a una medesima retta.*

2) *Se due triangoli, non aventi alcun elemento comune, sono così riferiti che le intersezioni dei lati dell'uno coi corrispondenti lati dell'altro stiano in una stessa retta, le rette congiungenti i vertici dell'uno coi vertici corrispondenti dell'altro passano per uno stesso punto.*

I due triangoli possono del resto stare in piani diversi o in uno stesso piano.

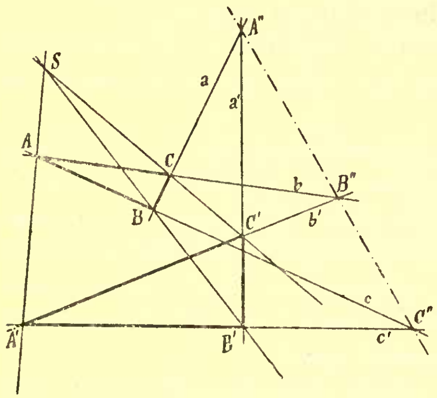
I° *Caso — I due triangoli stiano in piani diversi* π, π'.

Supposto che la intersezione $\pi\pi'$ non sia lato nè del primo nè del secondo triangolo [1], basterà dimostrare che uno dei due triangoli può considerarsi come proiezione dell'altro da un centro conveniente; giacchè, visto ciò, possiamo applicare senz'altro il lemma del n° 13.

---

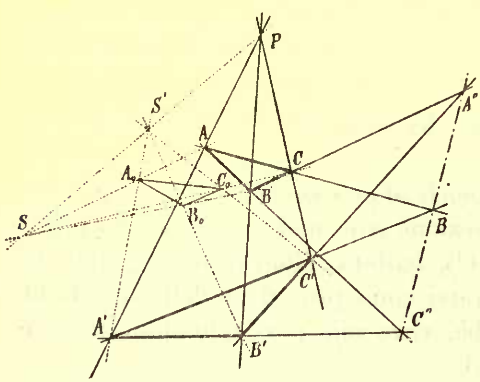
[1] Nella ipotesi opposta, ad es. se $\pi\pi' \equiv a$, i teoremi continuano a sussistere ma divengono senz'altro evidenti, come risulta eseguendo la figura.

Ora se si ammette (teorema 1)) che le rette AA', BB', CC', congiungenti vertici corrispondenti, passino per uno stesso punto P (il quale non potrà appartenere nè a π nè a π' per la restrizione sopra imposta), risulta che il triangolo $A'B'C'$ può ottenersi proiettando il triangolo ABC dal punto P sul piano π'; e ciò a noi basta. È in tal caso $p \equiv \pi\pi'$ l'asse di omologia.



Se si ammette invece (teorema 2)) che i lati a, b, c del primo triangolo seghino i lati a', b', c' del secondo triangolo in tre punti (della retta $p \equiv \pi\pi'$), allora i tre piani aa', bb', cc', dei quali nessuno coincide con π o π', avranno in comune un punto P; ma in tal caso, proiettando da P i lati del primo triangolo su π', si ottengono i lati del secondo triangolo; questo è dunque proiezione del primo, *c. d. d.*

II° *Caso — I due triangoli stiano in uno stesso piano* π.



Basterà dimostrare questa volta, in virtù del lemma n.° 13, che essi possono considerarsi come proiezioni su π da due centri diversi di un triangolo ausiliare giacente fuori di π.

Ora, se le rette AA', BB', CC' passano per uno stesso punto P (teorema 1)), per costruire il triangolo ausiliare si fissino fuori del piano π due punti S, S' che siano allineati con P. Si conducano poi le due rette SA, $S'A'$ che, giacendo nel piano PSA, devono segarsi in un punto A_0, il quale è proiettato da S in A e da S' in A'. Si costruiscano similmente i punti $B_0 \equiv SB \cdot S'B'$ e $C_0 \equiv SC \cdot S'C'$. I tre punti A_0, B_0, C_0 formano un triangolo che, proiettato su π una volta da S ed una seconda volta da S', fornisce i triangoli ABC, $A'B'C'$; dunque ecc. Si osserverà che questa volta l'asse di omologia p è la traccia su π del piano del triangolo ausiliare, i cui lati a_0, b_0, c_0 hanno per tracce i punti A'', B'', C''.

Se invece (teorema 2)) le intersezioni dei lati omologhi dei due triangoli $A'' \equiv aa'$, $B'' \equiv bb'$, $C'' \equiv cc'$ stanno sopra una stessa retta p, si conduca per p un piano qualsiasi diverso da π, e su quello si tracci un triangolo $A_0 B_0 C_0$ i cui lati a_0, b_0, c_0 passino rispettivamente per A'', B'', C''. Allora per costruzione i due triangoli abc, $a_0 b_0 c_0$, in piani diversi, sono riferiti in modo che le intersezioni dei lati corrispondenti stanno in una stessa retta p, quindi (teorema 2), I° caso) il triangolo abc può riguardarsi come proiezione del triangolo $a_0 b_0 c_0$ da un centro conveniente S. Similmente si potrà ottenere il triangolo $a'b'c'$ proiettando il triangolo ausiliare $a_0 b_0 c_0$ da un secondo centro S'; e tanto basta per dimostrare il nostro teorema. Il centro di omologia P dei due triangoli di π sarà ora la traccia su π della retta SS'.

15. Osservazioni sul teorema precedente. — Il teorema dei triangoli omologici offre un esempio notevole di una proposizione grafica la cui dimostrazione si appoggia soltanto sulle proposizioni fondamentali del n.° 5. Al teorema stesso potranno adunque applicarsi tutte le considerazioni generali fatte nei n.i 5, 6, 10.

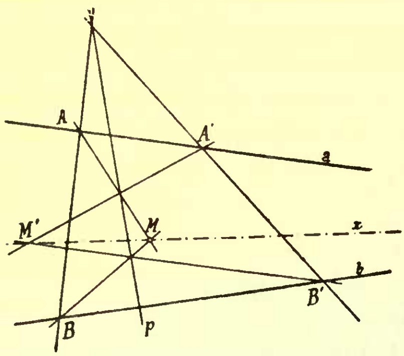
Risulta così (n.° 6) che del teorema è vero anche il duale nello spazio relativo ai triedri omologici; può esser lasciata al lettore la cura di enunciarlo e dimostrarlo. Inoltre si osserverà che nel caso (II°) in cui i due triangoli omologici stanno in uno stesso piano, le due parti 1), 2) del nostro teorema si corrispondono per dualità piana ([1]).

([1]) Un modo per dedurre il teorema 2) dal teorema 1) nel caso II° senza uscire dal piano, consiste nell'osservare che se i due triangoli ABC, $A'B'C'$ soddisfanno alla ipotesi 2), allora i due triangoli $CC'A''$ e $AA'C''$ soddisfanno alla ipotesi 1), per modo che ad essi si può applicare il teorema 1) già dimostrato; ecc.

Risulta ancora (n.° 5) che il teorema dei triangoli omologici vale pure se alcuni degli elementi (punti o rette) che compariscono nell'enunciato, sono impropri; e dalle varie ipotesi che si possono fare in proposito discendono vari corollari metrici. Limitiamoci ad enunciarne uno: *Se due triangoli in un piano sono così riferiti che le rette congiungenti vertici corrispondenti passino per uno stesso punto, e due lati del primo triangolo sono paralleli ai corrispondenti lati del secondo, anche il terzo lato del primo triangolo sarà parallelo al terzo lato del secondo.* Ora questo corollario si può dimostrare facilmente coi mezzi della Geometria elementare (trasversali a rette parallele); e da esso si può risalire al teorema generale 1) (caso II°) col metodo della proiezione centrale (n.° 12), di cui si ha così una notevole applicazione.

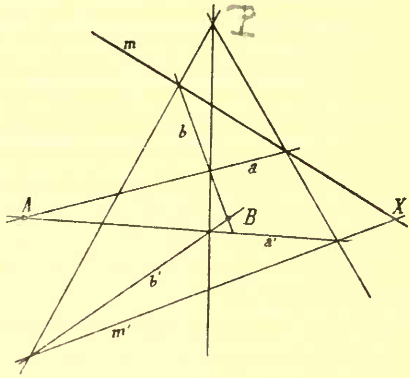
16. Applicazioni grafiche del teorema dei triangoli omologici; costruzioni lineari. — Siamo ora in grado di risolvere i due problemi seguenti:

I°. *Date in un piano due rette* a, b *ed un punto* M, *che non appartenga a nessuna di quelle, congiungere* M *col punto* ab *senza far uso di quest'ultimo punto.* Basta ad es. costruire due triangoli ABM, $A'B'M'$ omologici, scegliendo A ed A' arbitrariamente sopra a, B, B' arbitrariamente sopra b, ed assumendo come asse di omologia una retta p arbitraria passante per il punto $AB \cdot A'B'$. Resta allora determinato il punto M' che congiunto con M dà la retta x richiesta.



Caso particolare metrico: *date in un piano due rette parallele ed un punto, condurre per questo la parallela alle rette servendosi della sola riga.*

II°. *Dati in un piano due punti* A, B *ed una retta* m, *non passante per nessuno di quelli, determinare la intersezione di* m *colla retta* AB *senza servirsi di questa retta.* Basta ad es. costruire due trilateri omologici abm, $a'b'm'$, conducendo a ed a' arbitrariamente per A, b e b' arbitrariamente per B, ed assumendo il centro di omologia P arbitrariamente sulla retta $ab \cdot a'b'$. Il punto $mm' \equiv X$ risolve il problema. Un caso particolare metrico notevole si presenta quando a ed a' sono parallele tra loro, e son pur parallele tra loro b e b', giacchè allora, tenendo conto del caso metrico già trattato, si ha il modo di risolvere (colla costruzione indicata da PONCELET) il problema: *dato un parallelogramma, una retta qualsiasi ed un punto, condurre per questo la parallela alla retta facendo uso della sola riga.*



I risultati precedenti ci fanno vedere che le due costruzioni fondamentali di geometria piana eseguibili colla sola *riga*: *congiungere due punti mediante una retta; trovare la intersezione di due rette*, sono eseguibili con quello strumento anche quando qualcuno dei punti dati sia fuori del foglio del disegno, o sia improprio, purchè allora il punto nominato sia definito come intersezione di due rette tracciate in parte nel foglio; o quando qualcuna delle rette date cada totalmente fuori del foglio del disegno, o sia impropria, purchè la retta in questione sia definita mediante due suoi punti, dati alla loro volta nel modo ora indicato.

Esercizi. I. *Sulle figure omologiche.* — 1) Date in un piano due rette r, r' ed un punto P non appartenente a nessuna di quelle, se per P si conducono più trasversali che seghino r, r' nelle coppie di punti AA', BB', CC'..., i punti di incontro di AB' con $A'B$, di AC' con $A'C$, di BC' con $B'C$,.... stanno sopra una stessa retta p che passa per il punto $rr' \equiv O$, e dicesi *polare* di P rispetto alla coppia di rette r, r'.

2) Un punto P' qualsiasi della retta p ora nominata ha per polare (rispetto ad r, r') la retta $OP \equiv p'$; in altre parole: se di due punti il secondo sta sulla polare del primo, il primo apparterrà alla polare del secondo. Segue che ogni punto di p ha per polare p', ed ogni punto di p' ha per polare p; la polare di un punto rispetto ad r, r' non varia dunque quando il punto descrive una retta passante per la intersezione rr'.

3) Si supponga in particolare che le due rette r, r' sopra nominate siano parallele e sia improprio il punto P, e si approfitti di questo caso metrico per dimostrare gli esercizi 1) e 2) col metodo della proiezione centrale.

4) Si enuncino e dimostrino le proposizioni duali nel piano delle 1) e 2); si arriverà alla nozione di *polo* di una retta rispetto ad una coppia di punti. In particolare quale è il polo della retta all'infinito rispetto ad una coppia di punti propri?

5) Si approfitti degli esercizi 1) e 4) per risolvere in altro modo i problemi del n° 16.

6) Se i vertici A_1, A_2, A_3, A_4 di un quadrangolo semplice appartengono ordinatamente ai lati a_1, a_2, a_3, a_4 di un quadrilatero semplice, ed i lati opposti A_1A_2, A_3A_4 del primo si segano sopra la diagonale $a_4a_1 \cdot a_2a_3$ del secondo, i rimanenti lati opposti del primo si segheranno sulla rimanente diagonale del secondo.

7) Se due quadrangoli completi $ABCD$, $A'B'C'D'$, privi di elementi comuni, son così riferiti che cinque lati $AB, \ldots$ del primo seghino i corrispondenti cinque lati $A'B', \ldots$ del secondo in cinque punti di una stessa retta, i sesti lati dei due quadrangoli si segheranno in un punto di quella retta, e le congiungenti vertici corrispondenti passeranno per uno stesso punto; i due quadrangoli in tal caso sono omologici. (Caso particolare metrico: la retta sia all'infinito). Trasformare il teorema per dualità piana.

8) In generale, se due n.goni completi $A_1A_2 \ldots A_n$, $A_1'A_2' \ldots A'_n$ sono così riferiti che il lato A_1A_2 e gli altri $2(n-2)$ lati passanti per A_1 o A_2 del primo seghino i corrispondenti lati del secondo in punti di una stessa retta, i rimanenti lati del primo segheranno i corrispondenti lati del secondo in punti della retta nominata, e le rette congiungenti vertici corrispondenti dei due n.goni passeranno per uno stesso punto. Teorema duale.

9) L'es. 7) permette di dare un'altra risoluzione (dovuta a Lambert) del problema: dato un parallelogramma, condurre per un punto la parallela a una retta data servendosi della sola riga. Basta considerare il quadrangolo completo determinato da due vertici opposti del parallelogramma e dai punti all'infinito dei lati, e costruire un secondo quadrangolo omologico a quello rispetto alla retta data, e di cui il punto dato sia un vertice.

10) Se si congiunge il punto di incontro M delle diagonali di un quadrangolo semplice $ABCD$ coi punti di incontro P e Q delle coppie di lati opposti, le due congiungenti segano ancora i lati del quadrangolo nei vertici di un nuovo quadrangolo, i cui lati opposti vanno ad incontrarsi nelle intersezioni della retta PQ colle diagonali del primo quadrangolo, (si dimostri in base all'es. 7) o col metodo della proiezione centrale).

11) Date tre rette a, b, c e tre punti allineati A', B', C', costruire un triangolo i cui vertici A, B, C appartengano ordinatamente alle tre rette date e i cui lati BC, CA, AB passino ordinatamente per i tre punti dati (es. 7). Nel caso che le tre rette a, b, c passino per uno stesso punto, il

problema generalmente non ammette soluzione; se ne ammette una, ne ammette infinite. Questione duale.

12) Se due tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D'$ privi di elementi comuni sono così riferiti che le rette congiungenti i vertici dell'uno coi corrispondenti vertici dell'altro passino per uno stesso punto, i punti e le rette intersezioni di spigoli e faccie corrispondenti stanno in uno stesso piano. Enunciare e dimostrare il teorema duale (nello spazio).

II. *Sul teorema di* Pascal — 13) Chiameremo *seilatero sghembo semplice* la figura composta di sei rette $a_1, a_2, \dots a_6$, considerate nell'ordine scritto, non appartenenti tutte ad un piano, e tali che ciascuna incontri la successiva e l'ultima incontri la prima; il seilatero ha sei vertici $A_{12} \equiv a_1 a_2, \dots$ e sei facce $\alpha_{12} \equiv a_1 a_2, \dots$, ed è una figura duale di sè stessa. Ora si dimostri che se in un seilatero sghembo semplice ciascun lato (a_i) sega il lato opposto (a_{i+3}), allora le tre rette congiungenti coppie di vertici opposti $(A_{12} \cdot A_{45}, \dots)$ passano per uno stesso punto, e le tre rette intersezioni di coppie di facce opposte $(\alpha_{12} \cdot \alpha_{45}, \dots)$ stanno in uno stesso piano; (un tale seilatero si ottiene assumendo tre rette a_1, a_3, a_5 sghembe a due a due e tre rette a_2, a_4, a_6 che seghino quelle).

14) Segando con un piano il seilatero dell'esercizio precedente, si ottiene un esagono semplice tale che i punti intersezioni delle coppie di lati opposti appartengono ad una stessa retta (*esagono di* Pascal); proiettando invece da un punto sopra un piano il seilatero stesso, si ottiene un seilatero piano semplice tale che le rette congiungenti le coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto (*seilatero di* Brianchon).

15) Una applicazione notevole delle osservazioni precedenti si ottiene ove si consideri la superficie (*iperboloide rotondo ad una falda*) generata da una retta mobile a, la quale ruoti intorno ad una retta fissa o sghemba con a ed invariabilmente collegata con essa. La superficie contiene infinite rette a, a_1, $a_2, \dots$, successive posizioni di a, le quali sono sghembe a due a due. Siccome però la superficie è simmetrica rispetto ad ogni piano π passante per l'*asse* o (come risulta ad es. dal notare che le sezioni di quella con piani normali ad o sono cerchi), segue che la superficie conterrà un secondo sistema di rette b, b_1, $b_2 \dots$, pure sghembe a due a due, che sono simmetriche delle a, a_1, $a_2 \dots$ rispetto al piano π; e la superficie stessa può generarsi facendo ruotare intorno all'asse o, una retta b. Una qualsiasi retta del primo sistema sega una qualsiasi retta del secondo sistema; per ogni punto della superficie passa una retta del primo ed una retta del secondo sistema. Tre rette del primo sistema e tre rette del secondo sistema possono riguardarsi come lati (rispett. primo, terzo, quinto; secondo, quarto, sesto) di un seilatero sghembo semplice del tipo considerato nell'es. 13).

16) Segando la figura con un piano normale all'asse o, si deduce che « se un esagono semplice è iscritto in un cerchio, le tre intersezioni delle tre coppie di lati opposti appartengono ad una retta » (teorema di Pascal, dimostrazione di Dandelin). Proiettando invece la figura sul detto piano da

un punto dell'asse o (anche dal punto all'infinito di o), si deduce: « se un seilatero semplice è circoscritto ad un cerchio, le tre rette congiungenti le coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto » (teorema di BRIANCHON).

17) Se la stessa figura si sega con un piano contenente due rette della superficie (una del primo sistema e l'altra del secondo sistema), si ha: « se un esagono semplice ha i vertici di posto dispari sopra una retta e i vertici di posto pari sopra una seconda retta, i punti di incontro delle tre coppie di lati opposti appartengono ad una terza retta » (teorema di PAPPO); mentre si ottiene il teorema duale nel piano se la stessa figura si proietta da un punto della superficie sopra un piano arbitrario.

18) Un corollario metrico del teorema di PAPPO dice: « se in un trapezio, di cui AB e CD siano le basi, si congiungono i vertici A e C con un punto del lato BD, le parallele alle due congiungenti condotte per D e B rispettivamente si segheranno sopra AC ». Ora questo corollario si dimostra facilmente coi mezzi della Geometria elementare; se ne deduca il teorema generale di PAPPO ricorrendo alla proiezione centrale.

19) Del teorema di Pappo e del suo duale si approfitti per dare nuove soluzioni dei problemi indicati nel n° 16.

Parte Prima.

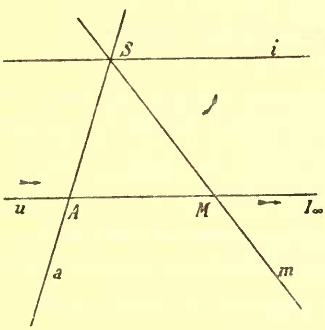
Forme di prima specie.

Capitolo I.

Sistemi di coordinate sulle forme di prima specie.

17. I due versi sopra una forma di prima specie. — Vogliamo ora occuparci in particolare delle forme di prima specie (punteggiata, fascio di rette e fascio di piani). Stabiliremo anzitutto alcune nozioni proiettive sulle dette forme, nozioni le quali dovranno valere indifferentemente per la punteggiata e per i fasci (n.° 10). Poi passeremo ad introdurre i concetti di misura, ed allora saremo costretti a distinguere le varie forme tra loro.

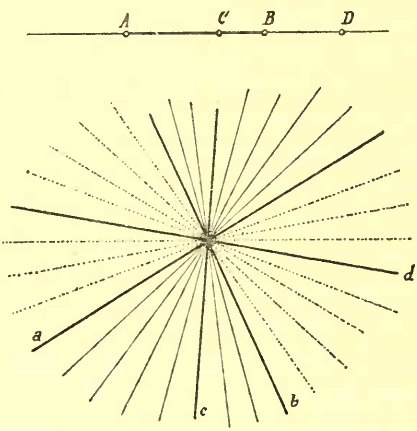
Una osservazione immediata mostra che sopra una forma di prima specie un elemento può muoversi in due *sensi* o *versi* distinti, l' uno opposto all' altro. Di questi versi uno a nostro arbitrio si chiamerà *positivo* e si designerà ad es. con una freccia, l'altro si chiamerà *negativo*. Immaginiamo ora un elemento mobile il quale parta da una posizione iniziale e si muova sulla forma in un determinato verso, per es. in verso positivo; quell'elemento descriverà tutta la forma e ritornerà in fine alla posizione iniziale? Questo fatto certamente si verifica nel fascio proprio di rette (o di piani), dove la rotazione di un mezzo giro dell'elemento mobile intorno al centro (od asse) del fascio, basta per descrivere tutta la forma. Invece sulla punteggiata propria, secondo il concetto che ci formiamo comunemente di movimento, dobbiamo concludere che un elemento, il quale parta da una posizione fissa e si muova sempre nello stesso verso, va allontanandosi all'infinito in quel verso, e descrive così solo una metà della forma. Ora se noi vogliamo introdurre nella Geometria proiettiva le nozioni di verso, di movimento . . . , dobbiamo cercare di assimilare tra loro, anche sotto questo rapporto, le varie forme di prima specie, stabilendo opportune convenzioni. Noi riusciamo allo scopo, nel modo più naturale, se mettiamo in relazione prospettiva (mediante una proiezione) una punteggiata u con un fascio S proprio di rette. Sia M il punto mobile sopra u, m la retta mobile corrispondente nel fascio S; e siano A (punto proprio) ed a le due posizioni iniziali corrispondenti del punto M e della retta m. Mentre m si muove entro al fascio sempre nello stesso verso (ad es. quello indicato dalla freccia), il punto corrispondente M varia sopra u in un determinato verso descrivendo anzitutto una metà della retta (a destra di A sulla figura). Quando m si è portato sulla parallela i ad u condotta per S, il punto M, secondo le nostre convenzioni, cade nel punto all'infinito I_∞ di u. Ora se m continua il suo movimento sempre nello stesso verso, il punto M ricompare sopra u dall'altra banda (a sinistra) di A, e descrive, sempre nello stesso verso, l'altra metà della retta u ritornando in fine alla posizione iniziale A. Questa considerazione ci porta a modificare il concetto intuitivo (metrico) di movimento sopra una retta, ed a sostituirlo nella Geometria proiettiva col concetto convenzionale di *movimento proiettivo*, in virtù del quale un punto che si muova sempre nello stesso verso sopra una retta propria partendo da una posizione iniziale, ritorna alla posizione di partenza, dopo aver descritta tutta la retta, ed oltrepassato il punto all'infinito. La stessa nozione di movimento proiettivo si estende facilmente, operando per proiezione e sezione, ad ogni altra forma di prima specie (retta impropria, fascio proprio già considerato, ed improprio . . .), e porta alla seguente conseguenza: *ogni forma di prima specie può esser descritta per intero da un suo elemento che parta da una posizione fissa e si muova sempre nello stesso verso.* Od anche: *una forma di prima specie non è spezzata in parti da un suo elemento*, giacchè, fissato l'elemento A, si può passare da una posizione M ad una seconda posizione N qualsiasi seguendo la



forma e senza oltrepassare A, pur di muoversi in un verso conveniente.

Una forma di prima specie va dunque riguardata, nella Geometria proiettiva, come *chiusa*; col fissarne, o meglio col toglierne un elemento la forma, senza spezzarsi in parti, si muta da chiusa in *aperta*. Lo stesso fatto si presenta ad es. per una circonferenza quando la si tagli in un suo punto.

18. Segmenti, angoli, diedri in senso proiettivo. Coppie che si separano. — Siano A e B due elementi di una forma di prima specie. Un elemento mobile il quale si porti da A in B con un determinato verso, assume una serie di infinite posizioni che costituiscono *un tratto di forma avente gli estremi* A, B. Se invece l'elemento mobile va da A in B nel verso opposto, esso descrive un secondo tratto di forma che ha gli stessi estremi A, B, ma non ha alcun altro punto comune col primo. Dunque *una forma di prima specie è spezzata da due suoi elementi in due tratti che hanno solo gli estremi comuni.* I tratti AB prendono nomi diversi secondo la natura della forma; si chiamano *segmenti* (proiettivi) se si tratta di una punteggiata, avvertendo che se A e B sono due punti propri, l'un segmento coincide col segmento finito AB della Geometria elementare, mentre l'altro si compone dei prolungamenti del primo segmento; si chiamano *angoli* o *diedri completi* se si tratta di un fascio di rette o di piani, avvertendo che se ad es. il fascio di rette è proprio, ciascun angolo completo è formato dalle rette che cadono in uno degli angoli nel significato ordinario, e nell'opposto al vertice. Per distinguere sulla forma l'uno dall'altro i due tratti AB basta dare o il verso in cui il tratto di cui si parla vien descritto da un elemento che vada da A in B, oppure una posizione intermedia dell'elemento mobile; sicchè ad es. per tratto ACB si intenderà quel



tratto AB in cui cade C. Ed assegnando i tre elementi ACB nell'ordine scritto, sarà pure determinato quel verso in cui si muove un elemento che vada A in B passando per C. Risulta poi che le tre permutazioni pari di ACB individuano uno stesso verso, e le tre permutazioni dispari il verso opposto.

Se C e D sono due elementi di cui uno appartenga all'uno dei due tratti AB, e l'altro all'altro, è chiaro che per andare da A in B un elemento mobile lungo la forma dovrà oltrepassare o C, o D (secondochè si muoverà nel verso ACB o nel verso opposto ADB); si dice perciò in tal caso che gli elementi C e D *separano* o *dividono* gli elementi A e B. E risulta allora che anche A e B separano C e D; in breve, le due coppie AB e CD *si separano*. Dei tre modi in cui quattro elementi $ABCD$ della forma possono distribuirsi in due coppie, uno solo conduce a coppie che si separano; se tali sono ad es. le coppie AB, CD, gli altri due modi AC, BD e AD, BC danno luogo a quattro elementi che *si succedono* nell'uno o nell'altro verso.

Osserveremo infine che, sia per la natura stessa delle forme di prima specie, sia per la convenzione fatta nell'introdurre il movimento proiettivo, tutti i concetti sopra esposti hanno carattere proiettivo. In particolare, elementi che si succedono in un dato verso sopra una forma di prima specie danno per proiezione o sezione, sopra una forma prospettiva, elementi che si succedono in un certo verso (prospettivo a quello); e coppie che si separano danno coppie che si separano.

* **19. Postulati relativi alla successione degli elementi di una forma di prima specie.** — Noi avremo spesso occasione di valerci delle nozioni ora esposte che provengono dalla nostra intuizione, convenientemente guidata, e che sembrano così chiare da togliere ogni possibilità di equivoco. Si osservi però che volendo introdurre quelle nozioni in un sistema logicamente organico, come aspira ad essere la geometria, occorre esporle in termini precisi sotto forma di postulati, i quali dispensino dal ricorrere ulteriormente alla osservazione del mondo esterno.

---

* I paragrafi preceduti da un asterisco possono omettersi in una prima lettura.

Noi possiamo far ciò seguendo, con minime modificazioni, la via indicata da Enriques [1].

Premettiamo una definizione: un insieme di infiniti elementi di natura qualsiasi (numeri, punti, ecc.) si dice *ordinato,* quando per la natura o per la legge con cui l'insieme è formato, resti fissato un criterio in base al quale, di due elementi qualisivogliano A e B dell'insieme, si possa decidere se A *precede* B, o B *precede* A. Il significato di questo verbo rimane per ora indeterminato, solo si esige che esso soddisfi alla condizione seguente: *se* A *precede* B *e* B *precede* C, *allora* A *precede* C. Gli elementi di un insieme ordinato si possono disporre o pensare in due *ordini* (naturali) opposti; giacchè si può collocare ciascun elemento *prima,* o *dopo* degli elementi che esso precede. È ordinato per esempio l'insieme dei numeri interi, o dei numeri razionali, o di tutti i numeri reali, intendendo che, di due numeri a e b, il primo a preceda il secondo b, quando $a < b$. I due ordini opposti secondo cui si possono disporre i detti numeri, sono rispettivamente *l'ordine crescente* e *l'ordine decrescente.*

Ora possiamo enunciare le proprietà delle forme di prima specie che abbiamo in vista mediante i seguenti *postulati.*

I. *Fissato* (*o soppresso*) *un elemento in una forma di prima specie, gli elementi che restano formano un insieme ordinato*, e possono quindi esser pensati in due ordini opposti; l'elemento fissato si può ritenere aggregato come primo, o come ultimo elemento a ciascuno dei due ordini.

Un secondo postulato stabilisce la relazione che passa tra due ordini fissati sopra una stessa forma di prima specie, ma differenti per l'elemento iniziale. Si osservi a tale scopo che se in uno dei due ordini che hanno come origine un elemento fissato A, si incontrano successivamente gli elementi A, B, C, . . , H, K . . . , allora in uno degli ordini che hanno per elemento iniziale B, si troveranno successivamente gli elementi B, C, . . , H, K, . . . A; dunque:

II. *Se* A e B *sono due elementi di una forma di prima specie, ed in uno dei due ordini che hanno per primo elemento* A

[1] *Geometria proiettiva*, §§ 5, 6.

si eseguisce una permutazione circolare che porti B *in primo posto, si ottiene uno dei due ordini che hanno per primo elemento* B; questo nuovo ordine si può dire *concorde* al primitivo.

Il carattere comune agli infiniti ordini concordi, differenti per l'elemento iniziale, dicesi *verso*; la forma possiede dunque due versi opposti; ed un ordine è fissato quando se ne dia l'elemento iniziale ed il verso.

Un terzo postulato afferma che in ogni tratto di forma di prima specie esistono infiniti elementi:

III. *In ciascuno degli ordini aventi* A *per elemento iniziale esistono infiniti elementi che precedono un secondo elemento* B *assegnato ad arbitrio.* In altre parole: *gli elementi di una forma di prima specie costituiscono un insieme denso* (*o condensato*); adottando l'ultimo aggettivo per designare un insieme ordinato (di numeri, punti, ecc.) tale che, fissati comunque due elementi A e B dell'insieme, esistano infiniti elementi dell'insieme che seguono A e precedono B. Tra gli esempi sopra citati, suggeriti dall'aritmetica, si osserverà che è *denso* l'insieme dei numeri razionali e, a più forte ragione, di tutti i numeri reali; mentre non è denso l'insieme dei numeri interi.

Un quarto postulato stabilisce il carattere proiettivo degli ordini, ecc.:

IV. *L'ordine, e quindi il verso, sopra una forma di prima specie, hanno carattere proiettivo.*

Esercizi (*). — 1) Fissato sopra una punteggiata a di un piano il verso positivo, in ogni fascio S del piano rimane fissato il verso positivo, precisamente quel verso $S(a)$ che si ottiene proiettando il verso di a; fanno solo eccezione quei fasci i cui centri appartengono ad a. Se a è la retta all'infinito, in ogni fascio proprio del piano rimane fissato il *verso positivo delle rotazioni*, il quale ha dunque carattere metrico. Per dualità piana: fissato in un fascio A il verso positivo, sopra ogni retta s del piano non passante per A rimane fissato un verso positivo $s(A)$. Qui non si presenta una particolarità metrica come nel caso duale.

2) Fissati i versi positivi sopra due punteggiate a, b di un piano, i punti S del piano vengono distribuiti in due regioni angolari; alla prima

(*) Gli esercizi di questo n°. possono dedursi rigorosamente dai postulati che precedono. Ma lo studioso può limitarsi a giustificare questi esercizi in base a considerazioni intuitive; notando ad es., per l'es. 2), che, se il punto S descrive un cammino continuo nel piano, i due versi $S(a)$, $S(b)$ rimangono concordi o discordi finchè uno dei due non diviene indeterminato, finchè dunque S non attraversa a o b; ecc.

regione (+) appartengono i punti per cui *verso* $S(a) = $ *verso* $S(b)$; alla seconda regione (—) i punti per cui *verso* $S(a) = -$ *verso* $S(b)$; fanno solo eccezione i punti di a e di b, che separano l'una dall'altra le due regioni. Due punti di regioni diverse sono separati dalle intersezioni della loro congiungente con a e b; mentre il contrario succede per due punti di una stessa regione. Si faccia vedere come dualmente il piano rigato venga diviso in due regioni col fissare i versi positivi in due fasci A, B.

3) Fissati i versi positivi sopra tre punteggiate a, b, c, non concorrenti, di un piano punteggiato, questo viene diviso in $2^2 = 4$ regioni triangolari $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$; la regione a cui un punto S appartiene dipende dai segni con cui valgono le uguaglianze *verso* $S(a) = \pm$ *verso* $S(b) = \pm$ *verso* $S(c)$. Le rette a, b, c stabiliscono i confini tra le dette regioni. Questione duale relativa al piano rigato.

4) Questioni analoghe alle precedenti nella ipotesi che siano date n punteggiate od n fasci coi versi positivi.

5) Fissato il verso positivo sopra un fascio di rette di sostegno α entro una stella di rette, nel fascio di piani che ha per asse una retta s della stella (non appartenente ad α) rimane fissato un verso positivo $s(\alpha)$ prospettivo al verso del fascio. Questione duale nella stella di piani.

6) Fissati i versi positivi sopra due fasci di rette α, β di una stella di rette, questa vien divisa in due regioni, appartenendo alla prima (+) o alla seconda (—) regione una retta s, secondo che *verso* $s(\alpha) = \pm$ *verso* $s(\beta)$. Questione duale per la stella di piani.

7) Fissato il verso positivo sopra una punteggiata a, in ogni fascio di piani il cui asse s non incontri a, rimane fissato un verso positivo $s(a)$; e dualmente se a è l'asse di un fascio di piani ed s il sostegno di una punteggiata.

8) Fissati i versi positivi sopra due punteggiate a. b comunque situate nello spazio, le rette (assi) dello spazio vengono distribuite in due regioni, ed una retta s appartiene alla prima o alla seconda regione secondo che *verso* $s(a) = \pm$ *verso* $s(b)$. Dualmente: fissati i versi positivi nei fasci di piani aventi per assi a e b, le rette (punteggiate) dello spazio vengono distribuite in due regioni, ed una retta t appartiene alla prima o alla seconda regione secondo che i due versi $t(a)$, $t(b)$ segati dai due fasci sopra t sono uguali od opposti. Questa seconda distribuzione non differisce dalla prima; precisamente, fissati comunque i versi positivi sulle punteggiate a, b (versi di *traslazione*) e il verso positivo (di *rotazione*) nel fascio a, si può fissare il verso positivo (di rotazione) nel fascio b in tal guisa, che le rette s da cui i versi positivi di traslazione sopra a e b vengono proiettati mediante uno stesso verso, coincidano colle rette t sopra cui i versi positivi di rotazione intorno ad a e b segano uno stesso verso. A queste distribuzioni sfuggono soltanto le rette che si appoggiano ad a o b.

9) L'ultimo risultato dimostra che, quando per una determinata retta a dello spazio venga associato ad un determinato verso di traslazione un determinato verso di rotazione, sopra ogni altra retta b dello spazio rimane

associato ad un verso di traslazione un verso di rotazione; (se ad es. b è sghemba con a, si associerà al verso di traslazione segato su b dal fascio a il verso di rotazione proiettante da b la punteggiata a). Chiamando *verso elicoidale* intorno ad una retta a la riunione di un verso di traslazione lungo a con un verso di rotazione intorno ad a, possiamo dire: « fissato un verso elicoidale intorno ad una retta, rimane pure fissato il verso elicoidale intorno ad ogni altra retta dello spazio ». Lo spazio possiede due versi elicoidali che ordinariamente vengono detti *destrorso* e *sinistrorso*. Questi sono definiti per via proiettiva, come accade per i versi sopra una forma di prima specie. Invece i versi sopra una forma di seconda specie (ad es. il verso di rotazione sopra un piano) non possono esser definiti, se non quando si fissi un ente convenzionale di riferimento (ad es. la retta all'infinito).

* **20. Il postulato della continuità.** — I postulati I e III, secondo i quali gli elementi di una forma di prima specie (fatta astrazione da uno tra questi) formano un insieme ordinato e denso, stabiliscono una analogia tra le forme di prima specie e l'insieme dei numeri reali. L'analogia appare anche più spiccata quando si faccia la considerazione seguente, la quale è affine a quella che serve nell'aritmetica per introdurre i numeri irrazionali.

Si concepiscano gli elementi di una forma di prima specie, ad es. di una punteggiata, in uno dei loro ordini, che si otterrà fissando un primo elemento A ed un verso. Allora un elemento X della forma, distinto da A, determina una separazione in due classi degli elementi della forma; la prima classe essendo costituita dagli elementi che in quell'ordine *precedono* X, la seconda classe dagli elementi che *non precedono* X (cioè che seguono X, più lo stesso X). Le due classi hanno, come è chiaro, le proprietà seguenti: 1) ogni elemento della forma, senza eccezioni, appartiene alla prima o alla seconda classe (ad es. A appartiene alla prima classe, ed X alla seconda); 2) ogni elemento della prima classe precede nel verso fissato ogni elemento della seconda classe.

Ora volendo invertire questa osservazione, supponiamo che in un modo qualsiasi, ma senza l'intervento dell'elemento X, gli elementi di una forma di prima specie, sopra cui sia già fissato un ordine, vengano separati in due classi soddisfacenti alle due condizioni enunciate: 1) che ogni elemento della forma, senza eccezione, appartenga alla prima o alla seconda classe;

2) che ogni elemento della prima classe preceda un elemento della seconda classe. Si domanda se rimanga con ciò completamente individuato un elemento (di separazione) X dotato della proprietà che ogni elemento precedente X appartenga alla prima classe, ed ogni elemento seguente X appartenga alla seconda classe. La questione non può venir risolta mediante una deduzione logica dai postulati già ammessi, perchè qui si tratta di un concetto essenzialmente distinto da quelli a cui i detti postulati si riferiscono; non può nemmeno venir risolta sperimentalmente, giacchè è chiaro che una esperienza in proposito non potrebbe dare nessuna risposta precisa. Tuttavia il concetto che generalmente ci formiamo di tratto continuo di retta (o curva, o forma di prima specie), ci induce a rispondere affermativamente alla domanda ora enunciata; tanto più che una risposta negativa porterebbe complicazioni, almeno di linguaggio, nello sviluppo della Geometria.

Siamo dunque portati ad ammettere il seguente:

Postulato della continuità (1). *Fissato un ordine sopra una forma di prima specie e distribuiti gli elementi della forma in due classi, in guisa che ogni elemento appartenga alla prima o alla seconda classe, ed ogni elemento della prima classe preceda ogni elemento della seconda, rimane individuato sulla forma un elemento X, dotato della proprietà che ogni elemento precedente X appartiene alla prima classe, ed ogni elemento seguente X appartiene alla seconda classe.* L'elemento X stesso appartiene alla prima o alla seconda classe, secondo la legge con cui le due classi sono definite.

Il postulato si può anche presentare premettendo la definizione di insieme continuo. Si dice che un insieme ordinato e denso (di numeri, punti, ecc.) è *continuo*, quando ogni divisione dell'insieme in due classi soddisfacenti alle proprietà 1) e 2) sopra riferite individua un elemento x (di separazione) appartenente all'insieme, e tale che ogni elemento precedente x appartenga alla prima classe ed ogni elemento seguente x appartenga alla seconda classe. Così ad es. è chiaro che l'insieme

(1) Enunciato in termini precisi da DEDEKIND (1872), ma del resto ammesso come evidente anche prima.

dei numeri razionali *non è continuo*, mentre *è continuo*, per definizione, l'insieme di tutti i numeri reali. Orbene il postulato di Dedekind afferma che *gli elementi di una forma di prima specie costituiscono un insieme continuo.*

* **21. Corrispondenze fra punti di una retta e numeri reali.** — L'analogia rilevata tra elementi di una forma di prima specie e numeri reali appare sotto l'aspetto più luminoso, quando si dimostri che si può associare ad ogni elemento della forma un numero reale, in guisa che dato l'elemento sia individuato il numero, e dato il numero sia individuato l'elemento, e in guisa che siano soddisfatte inoltre certe condizioni di ordinamento e continuità sulle quali ci fermeremo poi.

A stabilire una corrispondenza siffatta tra elementi e numeri si potrebbe arrivare per via puramente proiettiva, senza introdurre (almeno sotto la forma ordinaria) il concetto di misura. Ma occorrebbe premettere una lunga serie di proprietà che noi stabiliremo nel seguito, e solo in parte. Si riesce invece allo scopo nel modo più semplice se si fa uso dei concetti metrici noti dalla Geometria elementare. Questa via noi seguiremo, abbandonando pel momento la Geometria proiettiva pura. Noi faremo uso adunque delle comuni nozioni di uguaglianza di segmenti, angoli . . . ; ci serviremo di segmenti o angoli multipli o summultipli di un dato segmento o angolo; e supporremo tacitamente, finchè non si avverta il contrario, che i punti, le rette, o i piani, di cui parleremo, siano *propri*, i segmenti finiti ecc. Dovremo poi distinguere e trattare a parte il caso della punteggiata dal caso dei fasci perchè, come fu già avvertito più volte, queste forme differiscono sotto l'aspetto metrico. Occupiamoci anzitutto delle punteggiate.

Sia data una retta u, col verso positivo, e sopra questa un punto 0 che diremo *origine* o *punto zero*; il detto punto, insieme al punto all'infinito di u, spezza la retta u in due semirette che potranno dirsi *positiva* e *negativa* secondo il verso che dovrebbe seguire un punto, il quale si allontanasse da 0 sulla corrispondente semiretta. Si fissi inoltre sopra u e dalla banda positiva di 0 un punto che indicheremo con 1 e chiameremo *punto unità*; il segmento 01 sarà *l'unità lineare.*

1) Costruiamo anzitutto sopra u una serie di segmenti 12,

23, 34 . . . tutti uguali al segmento unità ed ugualmente diretti, ciascuno dei quali abbia come primo estremo l'ultimo estremo del precedente; ed una serie di segmenti uguali ma diretti in senso opposto 0 — 1, — 1 — 2, — 2 — 3 . . . costruiamo dalla banda negativa di 0. Questa operazione si può continuare all'infinito senza mai esaurire la retta, giacchè la retta (secondo la geometria metrica euclidea) è infinita nei due sensi. Otteniamo così sopra u una serie di infiniti punti, a ciascuno dei quali è associato un numero intero, positivo o negativo, che diremo *ascissa* del punto; chiameremo, pel momento, *punti interi* i punti così segnati. Osserviamo che l'insieme dei punti interi è *ordinato* come l'insieme dei numeri corrispondenti, perchè ad ascisse crescenti corrispondono punti procedenti in verso positivo: non è denso, al contrario è, come si vuol dire, *discreto*, esprimendo con ciò il fatto che tra due punti dell'insieme è contenuto un numero finito (zero incluso) di punti dell'insieme. Osserviamo finalmente che è soddisfatto il *postulato di* Archimede (1), il quale afferma, in sostanza, che un punto qualsiasi, proprio, della retta u, o coincide con uno dei punti interi già segnati, o si trova compreso tra due punti interi consecutivi.

2) Dividiamo, in secondo luogo, il segmento unità 01 in un numero intero n qualsiasi di parti uguali, e sia $^1/_n$ il primo punto di divisione a partire da 0. Operiamo col segmento $0\ ^1/_n$ nello stesso modo come abbiamo operato col segmento unità, ottenendo così i punti $^2/_n$, $^3/_n$, . . . e i punti $-\ ^1/_n$, $-\ ^2/_n$ . . .; e immaginiamo di ripetere la stessa operazione in corrispondenza ad ogni valore intero di n. Costruiremo così infiniti punti (tra cui sono compresi i punti interi), ognuno dei quali sarà associato ad un numero razionale $\frac{m}{n}$, *ascissa* del punto, m ed n essendo interi che possono supporsi primi tra loro; e viceversa ad ogni numero razionale sarà associato uno dei detti punti. Chiameremo questi ultimi, provvisoriamente, *punti razionali*. L'insieme dei punti razionali è *ordinato* come l'insieme dei numeri corri-

(1) Non si tratta veramente di un nuovo postulato, giacchè si dimostra che esso è un corollario del postulato della continuità.

spondenti; ed è *denso* (n.° 19), giacchè tra due punti razionali esistono infiniti altri punti razionali. Tuttavia il detto insieme non è *continuo*, e non esaurisce la retta; sopra u esistono infiniti punti che non appartengono all'insieme dei punti razionali. Uno di quelli si ottiene ad es. portando sopra u a partire da 0, in verso arbitrario, un segmento uguale alla diagonale del quadrato avente per lato il segmento unità. Noi cercheremo ora di associare i punti rimanenti di u ai numeri irrazionali, di cui non ci siamo ancora serviti.

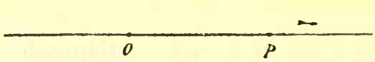
3) Sia x un punto della retta u non appartenente all'insieme dei punti razionali. Il punto x determina una divisione in due classi A, B dei punti razionali, in virtù della quale entrano nella prima classe A quei punti razionali a che precedono x (nel verso positivo), e nella seconda classe B i punti razionali b rimanenti, i quali tutti seguono x. Se ora formiamo similmente due classi numeriche, l'una A colle ascisse a dei primi punti, l'altra B colle ascisse b dei secondi punti, avremo diviso l'insieme dei numeri razionali in due classi A, B tali che ogni numero razionale appartiene alla prima classe o alla seconda, e che ogni numero della classe A precede ogni numero della classe B. Ma una siffatta spartizione aritmetica definisce un numero, nel nostro caso irrazionale, $x = (A, B)$, che si dice superiore ai numeri di A e inferiore ai numeri di B. Noi associeremo questo numero irrazionale x al punto x assegnato; diremo che quel numero è l'*ascissa* del detto punto. Vediamo così che dato il punto x, è pienamente determinata la sua ascissa.

Inversamente, sia dato un numero irrazionale x, definito mediante la spartizione in due classi A, B di tutti i numeri razionali. Sostituendo ad ogni numero razionale il punto corrispondente sulla retta, verremo a distribuire in due classi A e B i punti razionali della retta, per modo che ogni punto razionale appartiene alla classe A o alla classe B, ed ogni punto della classe A precede ogni punto della classe B. Le due classi non contengono però complessivamente *tutti* i punti della retta u; ma è facile inserire in quelle i punti che vi mancano. Basta infatti aggregare alla classe A ogni altro punto che preceda un qualche punto della classe stessa, ottenendo così una classe più ampia che chiameremo A_0; poi aggregare alla classe B tutti i punti rimanenti della retta, vale a dire i punti che seguono tutti i punti di A, ottenendo così una nuova classe B_0 contenente B. Ora è chiaro che ogni punto della retta entra nella classe A_0 o nella classe B_0; che inoltre ogni punto della classe A_0 precede ogni punto della classe B_0. Ma due classi così fatte definiscono, per il postulato della continuità, un punto x della retta, tale che ogni punto precedente x appartiene ad A_0 ed ogni punto seguente x appartiene a B_0. Diremo che quel punto x corrisponde al numero irrazionale x assegnato (ascissa del punto); il punto in questione ha la proprietà di seguire i punti di ascissa inferiore e precedere i punti di ascissa superiore.

Con ciò è pienamente raggiunto lo scopo propostoci di stabilire una corrispondenza fra i punti della retta e i numeri reali.

22. Ascisse sulla punteggiata. (Viète, secolo XVI). — Riassumiamo in due parole il risultato della discussione precedente.

« Data una retta propria, sopra cui siano fissati il verso « positivo ed un punto proprio O, *origine*, dato inoltre un seg- « mento finito che si assume come unità lineare, ad ogni punto P « della retta viene associato *un* numero reale, *ascissa del punto*, il « quale misura la distanza OP, ed è preceduto dal segno $+$ o $-$, « secondo che per andare da O in P lungo il segmento finito « si percorre la retta in verso positivo o negativo. Viceversa « ad ogni numero reale è associato *un* punto della retta avente « quel numero come ascissa ». La corrispondenza fra punti ed ascisse si suol dire perciò *univoca in doppio senso* o *biunivoca*.



L' origine ha per ascissa *zero*; due punti simmetrici rispetto ad O hanno ascisse uguali ed opposte; il punto all'infinito della retta non ha alcuna ascissa, o, se si vuole, ha per ascissa $\pm \infty$, intendendo dire con ciò che se un punto si allontana all'infinito sulla retta, la sua ascissa va crescendo senza limite in valore assoluto, con segno dipendente dal verso in cui il punto si muove.

23. Sistema di coordinate sopra una forma fondamentale. — La corrispondenza che, col mezzo delle ascisse, viene a stabilirsi tra punti propri di una retta e numeri reali, oltre ad essere biunivoca, è pure *ordinata* e *continua*. È *ordinata*, perchè a numeri disposti in ordine crescente, corrispondono punti procedenti in un dato verso (positivo) sulla retta. È *continua*, perchè, detta x l'ascissa di un punto proprio qualsiasi X, si può includere il detto punto in un segmento MN tale, che la differenza tra l'ascissa y di un punto qualsiasi del detto segmento MN e l'ascissa x di X riesca in valore assoluto minore di una quantità positiva comunque assegnata d, cioè $|y - x| < d$; basta infatti a tale scopo assumere come punti M ed N quelli che hanno per ascissa rispettivamente $x - \frac{d}{2}$ e $x + \frac{d}{2}$, osservando che ogni punto del segmento MN ha allora una ascissa y tale che $x - \frac{d}{2} \leqq y \leqq x + \frac{d}{2}$, donde segue $|y - x| \leqq \frac{d}{2} < d$.

Ora esistono svariatissimi metodi, di cui alcuni saranno indicati nel seguito, per riferire in modo biunivoco e continuo i punti di una punteggiata (uno escluso) ai numeri reali; ognuno di questi metodi dà luogo ad un *sistema di coordinate*, chiamandosi *coordinata* di un punto il numero che gli corrisponde. Un particolare sistema di coordinate è il *sistema delle ascisse* di cui ora abbiamo discorso.

Anche gli elementi (uno eccettuato) di un fascio di rette o di piani possono riferirsi in modo biunivoco e continuo [1] ai valori di una variabile reale, che si dirà *coordinata* del corrispondente elemento. Ciò si ottiene ad es. quando si seghi il detto fascio con una trasversale propria u, per modo che ad ogni elemento a del fascio corrisponda sopra u un punto A, sezione di a; si fissi poi sopra u un sistema di coordinate, ad es. di ascisse, e si associ ad ogni elemento a del fascio quel numero x che è ascissa del corrispondente punto A di u.

Osservazione. — Appunto per la possibilità di rappresentare in modo biunivoco e continuo ciascun elemento di una punteggiata o di un fascio di rette o piani mediante *un* numero reale, queste tre forme fondamemtali

[1] La definizione di corrispondenza continua data sopra a proposito delle punteggiate si trasporta subito al fascio di rette o piani, pur di sostituire alla parola *segmento*, la parola *angolo* o *diedro*.

furono dette di *prima specie*. Si riconosce infatti che la stessa possibilità non sussiste per le forme di specie superiore; ad es. nel piano punteggiato (o nelle altre forme di *seconda* specie) occorre la conoscenza di *due* numeri, *coordinate*, per definire un punto (o un elemento) quando si esiga che la corrispondenza tra punto e numero, oltre ad esser biunivoca, sia continua. Si noti però che queste considerazioni cadrebbero quando si abbandonasse la condizione della continuità nella corrispondenza. Infatti G. Cantor ha dimostrato (1877) che si può stabilire una corrispondenza biunivoca, ma non continua, tra i singoli punti di un piano, o dello spazio, e i *singoli* numeri reali.

24. Il metodo analitico. — Lo scopo per cui si fissa un sistema di coordinate sopra una forma geometrica non è veramente quello di mettere in luce l'analogia che passa tra la forma e l'insieme dei numeri, ma piuttosto quello di approfittare della detta analogia per tradurre ogni relazione geometrica tra gli elementi della forma in una relazione analitica tra i numeri che son coordinate degli elementi stessi, sfruttando in tal guisa le risorse dell'analisi a vantaggio della geometria.

Così, per limitarci alle forme di prima specie, anzi alle punteggiate, osserveremo che un problema relativo ad una punteggiata potrà in generale enunciarsi nei termini seguenti: « Dati più punti A, B, ... di una retta, determinare sulla retta « uno o più punti X, ... legati ai punti dati da relazioni geo- « metriche assegnate ». Se ora noi fissiamo sulla retta un sistema di coordinate, ad es. ascisse, e chiamiamo a, b ... le coordinate di A, B ... che potremo ritener *note*, ed x, ... le coordinate *incognite* di X, ..., il problema geometrico proposto si tradurrà in un problema analitico « dati più numeri a, b ..., calcolarne « altri x, ... che siano legati a quelli da relazioni analitiche « assegnate ».

Anzi il primo passo da percorrere nella via qui tracciata consiste nel tradurre le relazioni geometriche del primo enunciato nelle relazioni analitiche equivalenti del secondo; fatto ciò, si sarà *messo in equazione* il problema primitivo. Il secondo passo consiste nel trasformare e risolvere, quando sia possibile, le equazioni rispetto alle incognite x, ... che esse contengono, ufficio questo spettante all'Analisi (Algebra, Calcolo infinitesimale ...). Il terzo passo finalmente consiste nella interpretazione sulla figura primitiva dei risultati del procedimento analitico (costruzione dei punti incogniti X, ..., discussione, ecc.).

Similmente si procede quando si debba dimostrare analiticamente un teorema relativo a una figura geometrica; si tradurranno le ipotesi e la tesi in relazioni analitiche tra le coordinate degli elementi della figura; e tutto si ridurrà a far vedere che la relazione traducente la tesi è conseguenza delle relazioni traducenti le ipotesi.

Il complesso di tutti quei procedimenti che permettono di trattare una questione geometrica col mezzo delle coordinate, costituisce la *Geometria analitica*, la quale è dunque un insieme di metodi e non un insieme di proprietà (a differenza della *Geometria proiettiva*, n.° 12). Di fronte alla Geometria analitica sta la *Geometria sintetica*, la quale studia direttamente le figure geometriche senza il sussidio del calcolo, e le trasforma mediante operazioni geometriche anzichè mediante procedimenti analitici. Una stessa questione geometrica, in particolare di Geometria proiettiva, può esser trattata o per via analitica o per via sintetica, come apparirà chiaramente dal seguito.

25. Relazioni tra più segmenti di una retta. — Per applicare il sistema delle ascisse allo studio delle proprietà della punteggiata, occorre premettere una osservazione. Sopra una retta u, sulla quale sia fissato il verso positivo, stiano due punti A, B. Noi indicheremo con AB il valore del segmento finito congiungente i due punti, misurato con una unità lineare prestabilita, e preso col segno $+$ o $-$ secondo che per andare da A in B, seguendo il segmento stesso, si percorre la retta in verso positivo, o negativo; in altri termini AB è l'ascissa di B rispetto all'origine A. Segue subito che sarà

(1) $\qquad AB = -BA, \quad \text{ossia} \quad AB + BA = 0.$

Se C è un terzo punto qualsiasi della retta, *tra le mutue distanze dei tre punti vale sempre la relazione*

(2) $\qquad AB + BC = AC,$

ossia $AB + BC + CA = 0;$

la quale si giustifica, ad es., facendo vedere che sussiste nei sei casi che i tre punti possono presentare rispetto all'ordine di successione. La (2) può anche scriversi sotto la forma

(2′) $\qquad AB = CB - CA.$

Col metodo da n ad $n+1$ si riesce poi ad estendere la (2) ad un numero qualsiasi di punti $A, B, C \ldots, H, K$ comunque situati sopra u; si ha precisamente

(3) $$AB + BC + \ldots + HK = AK,$$

ossia $$AB + BC + \ldots + HK + KA = 0.$$

26. Distanza di due punti espressa mediante le loro ascisse. — La (2′), quando si riguardi C come origine di un sistema di ascisse, ci dice subito che *la distanza di due punti è espressa dalla differenza tra l'ascissa del secondo e l'ascissa del primo*; in formula

(4) $$AB = b - a,$$

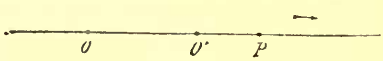
se a e b sono le ascisse di A e B.

Come applicazione cerchiamo l'ascissa x del punto medio M del segmento AB; sarà per ipotesi $AM = MB$ ossia

$$x - a = b - x, \text{ donde } x = \frac{a+b}{2};$$

l'ascissa del punto medio di un segmento è la semisomma delle ascisse degli estremi.

27. Trasformazione delle ascisse. — Può accadere che dopo aver riferito i punti di una retta ad una origine O, convenga riferire i punti stessi ad una nuova origine O' (restando immutato il verso e l'unità lineare).



Quando sia nota la posizione relativa di O ed O', assegnando ad es. l'ascissa h di O' rispetto all'origine O, si scrive subito la relazione che lega le ascisse $OP = x$, $O'P = x'$ di uno stesso punto P riferito alle due origini (formola per la *trasformazione delle ascisse*). Si ha infatti $OP = OO' + O'P$, ossia

$$x = x' + h, \quad x' = x - h.$$

Esercizi. I. — 1) Se A, B, C, D sono quattro punti di una retta, vale la relazione (di Eulero) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$.

2) Se M ed N sono i punti medi dei segmenti AB e CD, si ha $2MN = AC + BD = AD + BC$.

3) Essendo M il punto medio di AB e P un punto qualsiasi della retta, si ha $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM}^2 - \overline{MA}^2$.

4) Date le ascisse degli estremi di un segmento, calcolare le ascisse dei punti che dividono il segmento in n parti uguali. Calcolare l'ascissa del punto che divide il segmento in media ed estrema ragione.

5) Date (mediante le ascisse) due coppie di punti AB, EF sopra una retta, determinar su questa (l'ascissa di) un punto M tale che sia $MA \cdot MB = ME \cdot MF$.

6) Il verso in cui si succedono tre punti di una retta aventi le ascisse a, b, c, concorda col segno della espresssione $(a - b)(b - c)(c - a)$.

II. — 7) Dati n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di una retta, determinare su questa un punto M tale che risulti nulla la somma delle distanze di M dai punti dati moltiplicate per n numeri dati (positivi o negativi) $p_1, p_2, \ldots p_n$; in simboli

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i\, MA_i = 0.$$

Il punto M dicesi *baricentro* dei punti dati presi coi *pesi* $p_1, p_2, \ldots p_n$ (¹); e nel caso che i pesi siano tutti uguali (ad es. uguali ad 1), M dicesi *centro delle medie distanze*. In qual caso il baricentro è improprio? quando indeterminato? Si dimostri che nell'ultima ipotesi ciascuno dei punti dati è baricentro dei rimanenti presi coi pesi loro spettanti.

8) Coi dati dell'esercizio precedente determinare sulla retta un punto N tale che la somma dei quadrati delle distanze di N da $A_1, A_2, \ldots$ moltiplicate per $p_1, p_2, \ldots$ abbia un dato valore k:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i\, \overline{NA_i}^2 = k.$$

In quale caso il problema ammette due, una, o nessuna soluzione? Si dimostri che il primo membro dell'ultima uguaglianza ha valore minimo o massimo (secondo che $\Sigma p_i \gtrless 0$) quando N cade nel baricentro dei punti dati. Quale particolarità presenta il problema se $\Sigma p_i = 0$?

9) Nella trattazione dei due ultimi problemi e degli analoghi, conviene introdurre la nozione seguente. Detta x_i l'ascissa di A_i rispetto ad un origine O, dicesi *momento d'ordine* m dei punti A_i coi pesi p_i rispetto al punto O la somma

$$I_m = \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, x_i^m \qquad (m = 0, 1, \ldots);$$

per $m = 1$, il momento dicesi pure *statico* o *baricentrico*; per $m = 2$, *momento d'inerzia*. Riferiti i punti A_i ad una seconda origine O' tale che $OO' = h$, e indicati con $I_1', I_2', \ldots$ i momenti dei punti stessi rispetto ad O', si dimostrino le relazioni

$$I_1' = I_1 - h I_0, \quad I_2' = I_2 - 2 h I_1 + h^2 I_0.$$

10) La somma dei quadrati delle mutue distanze di n punti allineati è uguale ad n volte la somma dei quadrati delle distanze dei punti stessi dal centro delle medie distanze. In simboli, indicando con O il detto centro,

$$n \Sigma_i \overline{OA_i}^2 = \Sigma_{ik} \overline{A_i A_k}^2,$$

dove la prima somma va estesa ai valori $i = 1, 2 \ldots n$, e l'ultima alle combinazioni binarie ik dei numeri stessi.

(¹) Per la costruzione del baricentro, conforme a quella insegnata dalla statica, si veda n.° 32, es. 3).

11) Attribuendo ai punti A_i i pesi p_i, e indicando con O il baricentro dei punti stessi, si ha la relazione più generale

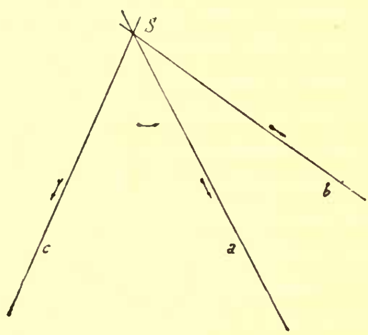
$$\left(\Sigma_i\, p_i\right)\left(\Sigma_i p_i\, \overline{OA_i}^2\right) = \Sigma_{ik}\, p_i\, p_k\, \overline{A_iA_k}^2 .$$

12) Nelle ipotesi ultime, detto P un punto qualunque della retta, vale la formola (data da Lagrange per punti comunque situati nello spazio)

$$\left(\Sigma_i\, p_i\right)\left(\Sigma_i\, p_i\, \overline{PA_i}^2\right) - \overline{OP}^2\left(\Sigma_i p_i\right)^2 = \Sigma_{ik}\, p_i p_k\, \overline{A_iA_k}^2 .$$

28. Ascisse angolari nel fascio di rette. — Volendo estendere, per quanto è possibile, la nozione delle ascisse al fascio proprio di rette, siamo indotti ad operare sopra gli angoli come abbiamo operato precedentemente sopra i segmenti.

Sia S il centro di un fascio proprio, del quale sarà considerato per ora come elemento la *intera* retta. Nel fascio sia segnato il verso positivo e sia fissata una *retta origine o*. Si assuma poi un determinato angolo come unità di misura; tale angolo può esser preso ad arbitrio, ma si conviene d'ordinario di scegliere quell'angolo che intercetta sopra un cerchio, avente il centro nel vertice, un arco uguale al raggio (angolo misurato in gradi da 57° 17′ 54″ ...). Ciò posto, ad ogni valore assegnato φ, positivo o negativo, corrisponde *una* determinata retta a, tale che l'angolo $\widehat{oa}$ abbia il valore φ; questa retta a sarà la posizione finale di una retta mobile la quale parta da o e ruoti intorno ad S, in verso positivo o negativo secondo il segno di φ, di un angolo misurato dal valore assoluto di φ. Qui però non può dirsi inversamente che ad ogni retta a del fascio corrisponda *un solo* angolo φ, a meno che non si facciano nuove convenzioni. Ciò dipende dal fatto che la retta mobile, dopo aver rotato di un angolo finito π (mezzo giro) intorno ad S, in verso positivo o negativo, riprende la posizione iniziale; in breve il fascio è una forma di estensione *finita* e di misura π. Se dunque indichiamo con $\widehat{oa}$ il valore di ogni angolo misurante una rotazione, che porti



la retta mobile da o in a, dovremo scrivere, ove sia k un numero intero, positivo, nullo o negativo,

$$\widehat{oa} = \varphi + k\pi, \quad \text{ossia} \quad \widehat{oa} \equiv \varphi \ (\text{mod. } \pi).$$

Possiamo assumere il valore di $\widehat{oa}$ come *ascissa angolare* od *anomalia* della retta a rispetto all' origine o; ricordando però che data la retta, l'anomalia è determinata solo *a meno di multipli di* π (1).

Estesa la definizione data per l' angolo $\widehat{oa}$, ai mutui angoli di più rette $a, b, c, \ldots$ di un fascio, si possono scrivere alcune relazioni analoghe a quelle del n.° 25 colleganti più segmenti di una retta, sostituendo però l' uguaglianza colla congruenza, od anche (quando non si temano equivoci) scrivendo l'uguaglianza, e ricordando che questa vale *a meno di multipli di* π. In tal senso vanno intese le relazioni

$$(1)\left\{\begin{aligned} \widehat{ab} &= -\widehat{ba}, \quad \text{ossia} \quad \widehat{ab} + \widehat{ba} = 0 \\ \widehat{ab} + \widehat{bc} &= \widehat{ac}, \quad \text{ossia} \quad \widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ca} = 0 \\ \widehat{ab} &= \widehat{cb} - \widehat{ca}. \end{aligned}\right.$$

Talvolta nelle questioni metriche si preferisce assumere come elemento del fascio proprio la *semiretta* uscente dal centro, o la intera retta dotata di un verso, *retta orientata*, ciò che produce lo stesso effetto quando si osservi che, dato il verso, rimane ben definita sulla intera retta la *semiretta* positiva uscente dal centro. Nella nuova ipotesi si può ripetere tutto ciò che sopra si disse a proposito degli angoli, colla sola avvertenza che questa volta la semiretta o retta orientata, deve ruotare di un *intero* giro, misurato da 2π, per descrivere tutto il fascio; sicchè l' ambiguità nella valutazione degli angoli sarà questa volta di *multipli di* 2π. Le formole (1) varranno ancora, però *a meno di multipli di* 2π.

Osservazione. — Se sopra tutto il piano (cioè per ogni fascio proprio) è definito il verso positivo delle rotazioni, ad es. il verso opposto a quello descritto dalle lancette di un orologio, e si suppone inoltre che una retta orientata, la quale si muova mantenendosi parallela a sè stessa, tra-

(1) Una siffatta indeterminazione potrebbe togliersi quando si lasciasse variare l' ascissa angolare soltanto fra zero e π (l'ultimo valore escluso). Questa convenzione, la quale però porta altri inconvenienti, potrà farsi caso per caso, ove se ne presenti l' opportunità.

scini con sè il proprio verso, si osserverà che l' angolo di due rette orientate non varia quando le rette si spostino mantenendosi parallele alle posizioni iniziali. Segue che la relazione (1) fra tre rette (e le analoghe fra più rette) vale anche se le rette stesse non appartengono ad un fascio, ma sono disposte comunque in un piano. Si noti ad es. che quella relazione, tenuto conto dell' ambiguità di un multiplo di 2π, esprime, in altra forma, il teorema sulla somma dei tre angoli di un triangolo.

29. Coordinate tangenti nel fascio di rette. — Sebbene l' angolo $\widehat{ab}$ di due semirette, o rette orientate, sia determinato solo a meno di multipli di 2π, tuttavia le funzioni goniometriche $\operatorname{sen} ab$, $\cos ab$, $\operatorname{tg} ab, \ldots$ sono pienamente individuate, perchè $\operatorname{sen}(\varphi + 2k\pi) = \operatorname{sen}\varphi$, ecc. E qui si noti che se ad uno dei lati, ad es. a b, si sostituisce la semiretta prolungamento b', o la retta stessa col verso invertito, dall' essere

$$\widehat{ab'} = \widehat{ab} + \pi,$$

seguono le relazioni

$$\operatorname{sen} ab' = -\operatorname{sen} ab,\quad \cos ab' = -\cos ab,\quad \operatorname{tg} ab' = \operatorname{tg} ab.$$

Vediamo così che la tangente dell' angolo di due rette non dipende dai versi positivi che si assumono sopra queste, ma solo dal verso positivo delle rotazioni, a differenza di ciò che accade pel seno e pel coseno.

Segue che, volendo fissare nel fascio proprio S un sistema di coordinate atto ad individuare le *rette intere*, si può assumere come coordinata di una retta a la tangente dell' angolo $\widehat{oa}$ che a forma con una retta fissa (*origine*) o. Si noterà allora che mentre la retta a varia descrivendo il fascio in verso positivo, partendo ad es. dalla posizione b normale ad a condotta per S, la sua *coordinata tangente*, $x = \operatorname{tg} oa$, varia percorrendo tutto il campo dei numeri reali da $-\infty$ a $+\infty$; e tra la posizione della retta e il valore di x si viene a stabilire una corrispondenza biunivoca, ordinata e continua, fatta astrazione per la retta b del fascio, alla quale si dovrebbe attribuire la coordinata $\pm\infty$.

Aggiungiamo che, dette x, x' le coordinate tangenti di due rette a, a' del fascio, l' angolo che esse formano è determinato dalla formola

$$\operatorname{tg} aa' = \operatorname{tg}(oa' - oa) = \frac{x' - x}{1 + xx'},$$

e la condizione di perpendicolarità delle due rette è espressa da

$$xx' + 1 = 0.$$

Osservazione. — Fissato il verso positivo delle rotazioni nel piano, ed attribuita ad ogni retta del piano un verso positivo, gli angoli di due rette e le loro funzioni goniometriche acquistano, secondo le nostre convenzioni, certi segni. È dunque il caso di verificare se le formole trigonometriche, che ordinariamente vengono stabilite *in valore assoluto*, siano valide anche nei segni, quando si rispettino quelle convenzioni. Pel seguito interessa solo osservare che, dato un triangolo di vertici A, B, C, i cui lati rispettivamente opposti siano le rette orientate a, b, c, *le note relazioni di proporzionalità tra lati e seni degli angoli opposti valgono anche nei segni quando si scrivano così:*

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} ab} = \frac{BC}{\operatorname{sen} bc} = \frac{CA}{\operatorname{sen} ca}.$$

Si giustifica l' affermazione considerando anzitutto il caso che i versi positivi sui lati siano diretti da A a B, da B a C, da C ad A (giacchè allora i tre numeratori sono positivi ed i tre denominatori hanno uno stesso segno), ed osservando poi che l' inversione del verso sopra uno dei lati produce il cambiamento di segno nel numeratore di una frazione e nei denominatori delle altre due.

Esercizi. — 1) Si dimostri che il sistema delle coordinate tangenti, ove si seghi il fascio con una trasversale conveniente, rientra nel sistema di coordinate proposto al n.° 23.

2) Data la coordinata tangente di una retta rispetto ad una origine o, calcolare la coordinata tangente della stessa retta rispetto ad una nuova origine o'.

3) Date le coordinate tangenti di due rette a, b, calcolare le coordinate tangenti delle bisettrici degli angoli $\widehat{ab}$, e verificarne la perpendicolarità.

30. Cenno sul fascio di piani. — Le proprietà metriche del fascio proprio di piani si traducono subito in proprietà del fascio di rette, come risulta segando il fascio di piani mediante un piano normale al suo asse. Segue che ogni sistema di coordinate introdotto nel fascio di rette dà luogo ad un analogo sistema pel fascio di piani. Qui ci limiteremo a notare che nel fascio di piani si può riguardare come elemento o l'intero piano (come sempre deve farsi nelle considerazioni di natura proiettiva), o il semipiano, una delle due metà in cui un piano è diviso dall' asse del fascio; avvertendo che talora, in luogo dei due semipiani formanti l' intero piano, si considerano le due *facce* o *pagine* del piano, che son viste da un osservatore giacente nell' una o nell' altra delle due regioni di spazio separate dal piano.

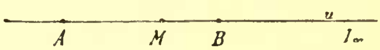
Quando sia fissato il verso positivo delle rotazioni intorno all' asse, il valore del diedro $\widehat{\alpha\beta}$ formato da due piani o semipiani α, β è determinato a meno di un multiplo di π o 2π, mentre $\mathrm{tg}\,\alpha\beta$ è determinata senza ambiguità.

31. Rapporto di tre punti sulla punteggiata. — Ritorniamo alla punteggiata propria u, per fissar su questa un nuovo sistema di coordinate, intermedio fra il sistema delle ascisse ed il sistema delle coordinate proiettive di cui dovremo presto occuparci.

Presi due punti propri A e B sopra u, e detto M un terzo punto della retta, è determinato in valore e segno il rapporto $\frac{AM}{BM}$, che non dipende nè dall'unità di lunghezza, nè dalla scelta del verso positivo. Quel rapporto noi chiameremo *rapporto semplice dei tre punti* A, B, M, ed indicheremo con [1]

$$(ABM) = \frac{AM}{BM}.$$

Anche quando M cada in A quel rapporto è determinato, giacchè per definizione è $(ABA) = 0$; occorrono invece speciali convenzioni quando M cade in B o nel punto all'infinito della retta. A tal fine osserviamo anzitutto che (ABM) è negativo o positivo secondo che M cade nel segmento finito AB o in uno dei suoi prolungamenti: osserviamo inoltre che se M si avvicina sempre più a B, il rapporto semplice



$$(ABM) = 1 + \frac{AB}{BM}$$

va crescendo oltre ogni limite, in valore assoluto, mantenendosi positivo o negativo secondo che M è fuori o dentro al segmento finito AB; osserviamo infine che mentre M si allontana sopra u (in un verso o nell'altro), tendendo al punto all'infinito I_∞ di u, il rapporto semplice tende al limite 1. Porremo perciò

$$(ABB) = \pm\,\infty, \quad (ABI_\infty) = 1.$$

Così ad ogni posizione di M corrisponde un determinato valore r del rapporto semplice (ABM). Viceversa dato il nu-

---

(1) È essenziale badare all'ordine in cui si considerano i tre punti; giacchè, ad es., è $(BAM) = \frac{1}{(ABM)}$.

mero reale r e noti i due punti A e B, è pienamente determinato il punto M tale che sia $(ABM) = r$; giacchè è noto $BM = \frac{AB}{r-1}$.

Se M parte dalla posizione B, si porta in A percorrendo il segmento finito BA, e continua a muoversi nello stesso verso fino a ritornare alla posizione iniziale B, il rapporto semplice $r = (ABM)$ parte dal valore $-\infty$, e va sempre crescendo algebricamente, passa pel valore -1 quando M si trova nel punto medio di AB, pel valore 0 quando M giunge in A, percorre l'intervallo da 0 a $+1$ quando M varia tra A ed I_∞, e percorre infine l'intervallo da $+1$ a $+\infty$ quando M varia tra I_∞ e B. La corrispondenza biunivoca, che passa tra la posizione di M ed il valore di r, è adunque ordinata, e, come si vede facilmente, continua, fatta astrazione dal punto B. Potremo perciò assumere il valore $r = (ABM)$ come una particolare coordinata, *coordinata rapporto semplice*, o *coordinata baricentrica*, del punto M variabile sulla retta; A e B, di coordinate 0 e $\pm\infty$, sono i *punti fondamentali* del nuovo sistema di coordinate.

32. Relazione tra l'ascissa e la coordinata rapporto semplice di uno stesso punto. — Il passaggio dall'uno all'altro dei due sistemi di coordinate introdotti sinora sulla punteggiata si fa colle formole seguenti.

I. *Date le ascisse a, b, x di tre punti di una retta, esprimere il loro rapporto semplice r;* è per definizione (n. 31, 26)

$$(1) \qquad r = \frac{a-x}{b-x}.$$

II. *Date le ascisse a, b di due punti ed il rapporto semplice r che un terzo punto forma con quelli, determinare l'ascissa x di questo*; risolvendo la (1) rispetto ad x, si ottiene

$$(2) \qquad x = \frac{a-rb}{1-r}.$$

Esercizi — 1) Dati due punti A, B di una retta, costruire su questa un punto M tale che (ABM) sia uguale al rapporto di due dati segmenti, ed abbia un segno convenuto.

2) Esprimere la distanza di due punti M, N, o il rapporto semplice di tre punti M, N, P, date le coordinate baricentriche dei punti stessi rispetto a due punti fondamentali A, B di cui sia nota la distanza.

3) Il baricentro di due punti A_1, A_2, presi coi pesi p_1, p_2 (n.° 27, es. 7)), è quel punto M che forma coi detti punti il rapporto semplice

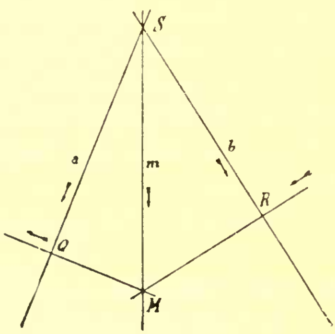
$(A_1 A_2 M) = -\frac{p_2}{p_1}$; si ha di qua una nuova definizione del baricentro che concorda con quella suggerita dalla statica.

4) Dati più punti allineati $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coi pesi $p_1, p_2, \ldots, p_n$, si costruisca il baricentro di A_1, A_2 presi coi pesi p_1, p_2; poi il baricentro del baricentro trovato preso col peso $p_1 + p_2$ e di A_3 col peso p_3; poi il baricentro del nuovo baricentro preso col peso $p_1 + p_2 + p_3$ e di A_4 col peso p_4; e così si continui. Quando si siano esauriti tutti i punti dati, si sarà ottenuto un punto, il quale non dipende dall'ordine in cui quelli furono adoperati, ed è il baricentro dei punti A_i coi pesi p_i.

5) Sulla retta che congiunge due centri luminosi A, B di intensità α, β, determinare un punto che sia ugualmente illuminato dai detti centri; il problema ha due soluzioni. (Si ricordi che l'intensità luminosa varia inversamente al quadrato delle distanze).

33. Rapporto semplice di tre rette in un fascio. — Cerchiamo ora di estendere al fascio di rette il concetto di rapporto semplice introdotto sulla punteggiata.

Siano a, b, m, tre rette di un fascio proprio o improprio, di centro S, sulle quali siano fissati comunque i versi positivi. Scelto un punto M ad arbitrio su m, distinto da S, si conducano le rette MQ, MR perpendicolari ad a e b, e sopra ciascuna perpendicolare si fissi il verso positivo, ad es. colla convenzione che la perpendicolare debba ruotare intorno al suo piede dell'angolo $+\frac{\pi}{2}$, affinchè il suo verso positivo venga a coincidere col verso positivo della retta alla quale è condotta. Allora sono determinati in valore e segno i segmenti MQ, MR e quindi il loro rapporto $\frac{MQ}{MR}$. Ora è facile vedere che $\frac{MQ}{MR}$ non dipende dalla posizione del punto M scelto sopra m; ma solo dalla mutua posizione delle tre rette a, b, m. Ciò è chiaro nel caso del fascio improprio; e nel caso del fascio proprio, risulta ad es. dalla considerazione dei triangoli rettangoli SQM, SRM, i quali danno (anche tenendo conto dei segni)



$$MQ = MS \operatorname{sen} ma, \quad MR = MS \operatorname{sen} mb,$$

donde $$\frac{MQ}{MR} = \frac{\operatorname{sen} ma}{\operatorname{sen} mb} = \frac{\operatorname{sen} am}{\operatorname{sen} bm}.$$

In base a questa osservazione possiamo definire come *rapporto semplice* (abm) *di tre rette* a, b, m *di un fascio, il rapporto delle distanze (prese coi debiti segni) che un punto arbitrario della terza retta ha dalle due prime*; od anche

$$(abm) = \frac{\text{sen}\, am}{\text{sen}\, bm} \quad \text{pel fascio proprio,}$$

$$(abm) = \frac{\text{dist}\, am}{\text{dist}\, bm} \quad \text{pel fascio improprio,}$$

(indicando con dist am la distanza delle due rette parallele a ed m, ecc.).

Dalla definizione segue subito (n.° 29) che il rapporto semplice (abm) non dipende dal verso positivo che si assume sopra m, nè dal verso positivo delle rotazioni [1]. Segue poi che dati a e b, coi loro versi positivi, ad ogni posizione di m corrisponde un determinato valore di $r = (abm)$, purchè si ponga convenzionalmente $(abb) = \pm\infty$. Se m cade in a, è $r = 0$, se m si trova nell'angolo formato dai due versi positivi di a e b e nell'opposto al vertice (supposto proprio il fascio), allora r è negativo, mentre r è positivo se m si trova nell'angolo completo rimanente; e in particolare r vale -1 o $+1$ secondochè m biseca il primo od il secondo angolo. Osservazioni analoghe pel fascio improprio.

Inversamente, date due rette a e b coi loro versi positivi, e dato un numero reale r, è pienamente determinata nel fascio ab una retta m tale che sia $(abm) = r$; infatti (ragionando ad es. nel caso del fascio proprio) dalla definizione segue facilmente

$$\text{tg}\, bm = \frac{\text{sen}\, ab}{r - \cos ab},$$

la quale individua m (n.° 29).

In base alle considerazioni fatte potremo assumere come *coordinata rapporto semplice* della retta m variabile in un fascio proprio od improprio, il valore del rapporto (abm) che la m determina con due rette fisse *fondamentali* del fascio; la corrispon-

---

[1] Si potrebbe anche, senza fissare i versi positivi sopra a e b, convenire che alle rette m contenute in uno dei due angoli completi $\widehat{ab}$ spettino rapporti semplici (abm) positivi, e alle altre rapporti semplici negativi.

denza biunivoca che viene a stabilirsi tra la posizione di m e la sua coordinata, è, come si vede facilmente, ordinata e continua, quando si faccia astrazione dalla particolare retta b del fascio.

Osservazioni. — I. Posto che le due rette fondamentali a e b siano perpendicolari, precisamente in guisa che risulti $ba = +\frac{\pi}{2}$, si trova

$$(abm) = \frac{\operatorname{sen} am}{\cos am} = \operatorname{tg} am;$$

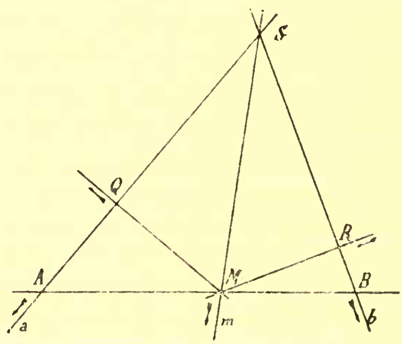
ed il sistema delle coordinate rapporti semplici coincide col sistema delle coordinate tangenti (n.° 29).

II. Le considerazioni fatte pel fascio di rette si trasportano subito al fascio di piani; così ad es. il rapporto semplice $(\alpha\beta\mu)$ di tre piani di un fascio si definirà mediante l'uguaglianza

$$(\alpha\beta\mu) = \frac{\operatorname{sen} \alpha\mu}{\operatorname{sen} \beta\mu}, \text{ oppure } = \frac{\operatorname{dist} \alpha\mu}{\operatorname{dist} \beta\mu}.$$

secondo che il fascio è proprio od improprio.

34. Relazione fra i rapporti semplici di tre elementi nella punteggiata e nel fascio di rette. — Se tre punti A, B, M di una punteggiata propria t si proiettano da un centro S proprio od improprio, si ottengono tre rette a, b, m di un fascio; quale relazione passa fra i rapporti semplici (ABM) ed (abm)?



Fissati ad arbitrio i versi positivi sulle rette a, b, m e t, si conducano dal punto M le perpendicolari MQ, MR su a e b coi versi convenuti; si avrà per definizione

$$(abm) = \frac{MQ}{MR}.$$

Ma dai triangoli rettangoli MQA, MRB si ricava $MQ = MA \operatorname{sen} ta$, $MR = MB \operatorname{sen} tb$, e quindi

$$\alpha) \qquad (abm) = \frac{MA}{MB}\,\frac{\operatorname{sen} ta}{\operatorname{sen} tb} = (ABM)\,\frac{\operatorname{sen} at}{\operatorname{sen} bt}.$$

Ora la frazione $\frac{\operatorname{sen} at}{\operatorname{sen} bt}$ si riduce ad 1 se S è improprio, sicchè in tal caso si ha

$$(abm) = (ABM).$$

Se invece S è punto proprio, allora dal triangolo SAB si ricava $\frac{\operatorname{sen} at}{\operatorname{sen} bt} = \frac{SB}{SA}$, e sostituendo

$$(abm) = (ABM)\,\frac{SB}{SA},$$

ossia

$$(ABM) = \frac{SA}{SB}\,(abm).$$

Riassumendo:

Se tre punti A, B, M *di una retta vengono proiettati da un centro* S *mediante tre rette* a, b, m, *si ha*

(1) $$(ABM) = \frac{SA}{SB}\,(abm), \qquad \textit{se } S \textit{ è proprio,}$$

oppure

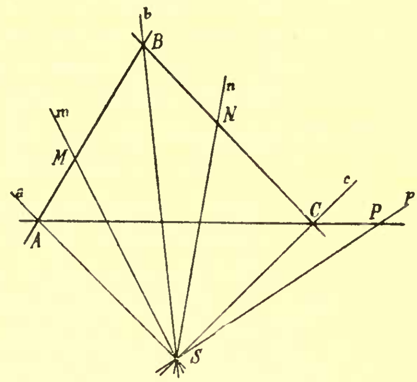
(1′) $$(ABM) = (abm), \qquad \textit{se } S \textit{ è improprio.}$$

Si è tacitamente supposto che i punti A, B, M fossero propri. Ora la ipotesi relativa ad A e B è richiesta dalla definizione di rapporto semplice. Ma se M è improprio, il primo membro della (1) od (1′) conserva un significato e vale $+1$; è dunque il caso di chiedere se quelle uguaglianze continuino a sussistere. Che così sia risulta da una considerazione immediata che può esser lasciata al lettore.

Esercizio. — Date due rette a, b di un fascio proprio S, costruire una retta m tale che il rapporto (abm) sia uguale al rapporto di due dati segmenti ed abbia un segno convenuto. (In virtù della (1), nella ipotesi di M improprio, basta costruire su b ed a due segmenti SB, SA uguali ai segmenti dati).

35. Espressioni aventi carattere proiettivo composte mediante rapporti semplici. — La formola (1) ci mostra che quando si passa da tre punti di una punteggiata a tre rette di un fascio mediante una proiezione, il rapporto semplice dei tre primi elementi differisce in generale dal rapporto semplice dei tre ultimi. È facile però costruire, mediante rapporti semplici, qualche espressione che conservi inalterato il suo valore quando la figura a cui si riferisce venga trasformata mediante proiezione o sezione; una siffatta espressione avrà dunque carattere proiettivo (n.° 12).

Consideriamo ad es. tre punti propri A, B, C situati comunque (allineati oppure no); sulle rette AB, BC, CA fissiamo ordinatamente i punti propri o impropri M, N, P. Proiettiamo poi la figura da un punto S proprio o improprio, che può stare sul piano ABC o no, ma che in ogni caso supporremo non appartenga a nessuna delle tre rette nominate; e indichiamo con $a, \ldots m, \ldots$ le rette proiettanti i punti $A, \ldots M, \ldots$, sulle quali rette supporremo fissati ad arbitrio i versi positivi. Noi possiamo formare allora sei rapporti semplici; tre mediante terne di punti allineati (ABM), (BCN), (CAP): e tre mediante terne di rette concorrenti (abm), (bcn), (cap). Se confrontiamo ordinatamente questi rapporti, tenendo presente la (1) del n°. 34, troviamo (ad es. per S proprio)



$$(ABM) = \frac{SA}{SB}\,(abm),$$

$$(BCN) = \frac{SB}{SC}\,(bcn),$$

$$(CAP) = \frac{SC}{SA}\,(cap).$$

E di qua, moltiplicando membro a membro,

$$(2) \qquad (ABM)(BCN)(CAP) = (abm)(bcn)(cap).$$

Lo stesso procedimento di dimostrazione si può evidentemente applicare quando i punti da cui si parte sono in numero di n $(\geqq 2)$ $A, B, C, \ldots K$ e sulle n rette $AB, BC, \ldots KA$ sono segnati ordinatamente i punti $M, N, \ldots R$; se con $a, \ldots, m, \ldots$ si indicano le $2n$ rette proiettanti i punti $A, \ldots, M, \ldots$ da un punto S arbitrario, si trova allora

$$(2') \qquad (ABM)(BCN)\ldots(KAR) = (abm)(bcn)\ldots(kar);$$

donde il teorema:

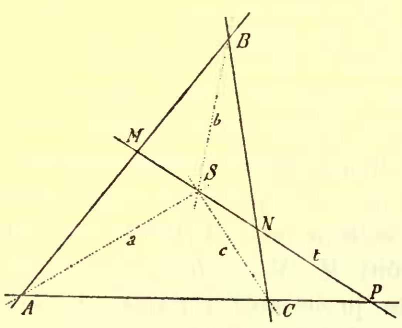
Se, dati comunque nello spazio n $(\geqq 2)$ *punti propri* A, B, C, ... K, *sulle* n *rette* AB, BC, ... KA *che essi determinano si segnano ordinatamente i punti* M, N, ... R, *il prodotto dei rapporti semplici* (ABM), (BCN), ... (KAR) *uguaglia il prodotto degli analoghi rapporti semplici formati colle rette proiet-*

tanti i punti stessi da un punto S *qualunque dello spazio* (¹). Si intende che S non dovrà trovarsi sulla retta AB nè sulle analoghe.

Segue subito dal teorema che se, rimanendo fissi il punto S e le rette $a, b, \ldots k, m, n, \ldots r$ uscenti da esso, il poligono semplice $AB \ldots K$ si deforma in modo che i vertici $A, B, \ldots K$ descrivano rispettivamente le rette $a, b, \ldots k$, ed i punti $M, N, \ldots R$, situati ordinatamente sui lati del poligono, descrivano le rette $m, n, \ldots r$, il primo membro della $(2')$ non può mutare, perchè non muta il secondo membro. In particolare: *Se la figura costituita da un n.gono semplice* ABC … K *e da* n *punti* M, N,… R *situati ordinatamente sui lati di questo, vien proiettata da un punto arbitrario dello spazio sopra un piano arbitrario, il prodotto* (ABM) (BCN)… (KAR) *calcolato sulla data figura è uguale all'analogo prodotto calcolato sulla figura proiezione; in breve, quel prodotto è un carattere proiettivo della data figura* (Poncelet).

36. Teorema di Menelao. — Quando i punti $M, N, \ldots R$ sui lati dell' n.gono semplice $ABC \ldots K$ occupano posizioni legate da particolari relazioni proiettive, il prodotto (ABM) $(BCN) \ldots (KAR)$ assume particolari valori.

Supponiamo ad esempio che si tratti di un triangolo ABC, i cui lati AB, BC, CA vengano segati in M, N, P da una stessa trasversale t non passante per nessun vertice. Per calcolare in tal caso il prodotto (ABM) (BCN) (CAP), assumiamo il punto S in una posizione qualsiasi sopra t (escluse le intersezioni di t coi lati del triangolo); e da S proiettiamo A, B, C mediante a, b, c ed M, N, P mediante rette che concideranno con t. La formola (2) diviene allora



$$(ABM)(BCN)(CAP) = (abt)(bct)(cat)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} at}{\operatorname{sen} bt} \cdot \frac{\operatorname{sen} bt}{\operatorname{sen} ct} \cdot \frac{\operatorname{sen} ct}{\operatorname{sen} at} = 1.$$

(¹) Con opportune convenzioni che qui non ci fermiamo a fare, si potrebbe estendere il teorema anche al caso in cui qualche vertice del poligono è improprio.

Il procedimento si estende subito al caso di un n.gono piano; e ci dà il seguente teorema:

Se i lati AB, BC, ..., KA *di un n.gono piano semplice vengono segati da una trasversale, che non passi per nessun vertice, nei punti* M, N, ... R, *il prodotto dei rapporti semplici* (ABM), (BCN), ... (KAR) *è uguale a* + 1.

È notevole il fatto che per $n = 3$ il teorema può invertirsi; si perviene così al

Teorema di Menelao (I secolo d. C.): *Condizione necessaria e sufficiente perchè tre punti* M, N, P *situati sui lati* AB, BC, CA *di un triangolo sieno allineati, è che il prodotto dei rapporti semplici* (ABM), (BCN), (CAP) *sia uguale a* + 1.

Che la condizione sia necessaria risulta dalla dimostrazione data sopra. Che sia sufficiente si vede osservando che, detto P' il punto in cui la retta MN sega il terzo lato CA, si ha in virtù della prima parte del teorema

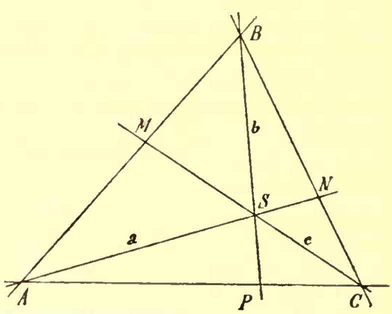
$$(ABM)(BCN)(CAP') = 1.$$

Ma per ipotesi è pure

$$(ABM)(BCN)(CAP) = 1,$$

dunque
$$(CAP') = (CAP),$$
la quale ci dice che P' concide con P.

37. Teorema di Ceva. — Analogo al teorema di Menelao è il Teorema di Ceva (1678): *Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti* M, N, P, *appartenenti ai lati* AB, BC, CA *di un triangolo, congiunti coi vertici opposti diano tre rette passanti per uno stesso punto, è che il prodotto dei rapporti semplici* (ABM), (BCN), (CAP) *valga* — 1.



La condizione è necessaria; infatti, detto S il punto intersezione di CM, AN, BP, la formola (2) del n° 35 dà

$$(ABM)(BCN)(CAP) = (abc)(bca)(cab)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} ac}{\operatorname{sen} bc} \cdot \frac{\operatorname{sen} ba}{\operatorname{sen} ca} \cdot \frac{\operatorname{sen} cb}{\operatorname{sen} ab} = -1.$$

La condizione è sufficente; si dimostra per una via analoga a quella seguita per la seconda parte del Teorema di Menelao.

Esercizi. I. — 1) Dimostrare i teoremi di Menelao e di Ceva col metodo della proiezione centrale, proiettando le figure in guisa che alla traversale t, o al punto S corrispondano elementi impropri.

2) Dimostrare mediante il teorema di Ceva che in un triangolo le tre mediane passano per uno stesso punto; le tre bisettrici interne passano per uno stesso punto; due bisettrici esterne e la bisettrice interna relativa al terzo vertice passano per uno stesso punto; le tre altezze passano per uno stesso punto.

3) Dimostrare mediante il teorema di Menelao che in un triangolo i punti di incontro dei lati colle tre bisettrici esterne relative ai vertici opposti sono allineati; così pure sono allineati i punti di incontro dei lati con due bisettrici interne e colla bisettrice esterna relativa al terzo vertice.

4) Di tre punti A', B', C' presi sui lati di un triangolo ABC si costruiscano i simmetrici A'', B'', C'' rispetto ai punti medi dei lati stessi; si dimostri che se A', B', C' appartengono ad una retta, anche A'', B'', C'' appartengono ad una retta (*coniugata isotomica* della prima); e se le rette AA', BB', CC' passano per un punto, anche le rette AA'', BB'', CC'' passano per un punto (*coniugato isotomico* del primo).

5) Teorema di Simson: i piedi delle perpendicolari calate sui lati di un triangolo da un punto qualunque del cerchio circoscritto sono allineati.

6) Dimostrare mediante il teorema di Menelao l'esercizio 6) del n.° 16, e dedurne il teorema dei triangoli omologici.

7) Se delle nove intersezioni di due trilateri abc, lmn, giacenti in uno stesso piano e non aventi elementi comuni, tre al, bm, cn stanno sopra una retta p, ed altre tre am, bn, cl stanno sopra una retta q, anche le tre rimanenti intersezioni an, bl, cm staranno sopra una retta r. Quelle nove intersezioni si trovano dunque distribuite sui lati di tre trilateri abc, lmn, pqr, per modo che ciascun lato contiene tre intersezioni e per ciascuna intersezione passano tre lati. Due qualisivogliano dei tre trilateri sono omologici in tre modi diversi (per es. abc può considerarsi come omologico a lmn, oppure mnl, oppure nlm), e gli assi di omologia costituiscono il rimanente trilatero.

8) Il teorema precedente può anche enunciarsi così: se in un esagono piano semplice i vertici di posto dispari stanno sopra una retta ed i vertici di posto pari sopra una seconda retta, i tre punti d'incontro delle coppie di lati opposti stanno sopra una terza retta; (teorema di Pappo, cf. n° 16, es. 17)).

9) Teorema di Carnot (1803): « Il prodotto dei rapporti semplici determinati sui lati di un poligono semplice dalle intersezioni con un cerchio è uguale a $+1$ »; precisamente, se $ABC \ldots K$ è il poligono ed MM', NN', ... RR' sono le coppie di intersezioni dei successivi lati AB, $BC \ldots KA$ con un cerchio, si ha

$$(ABM)(ABM')(BCN)(BCN') \ldots (KAR') = +1.$$

10) Nel caso particolare in cui il poligono si riduce ad un triangolo, si può dedurre dal teorema precedente il teorema di PASCAL (pel cerchio): « se un esagono semplice è iscritto in un cerchio i punti di incontro delle tre coppie di lati opposti appartengono ad una retta » (cfr. n° 16, es. 16)).

11) Come si enuncia il teorema di CARNOT nel caso che i lati del poligono siano tangenti al cerchio? Se in particolare si tratta di un triangolo, si deduce la proprietà seguente: « se un triangolo è circoscritto ad un cerchio, le congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati opposti passano per uno stesso punto ». E di qua segue che « se un triangolo è iscritto in un cerchio, i punti di incontro dei lati colle tangenti nei vertici opposti sono allineati ».

II. — 12) Se i lati $a, b, \ldots, k$ di un n.latero semplice e le rette $m, n, \ldots, r$, uscenti rispettivamente dai vertici $ab, bc, \ldots, ka$ segano una trasversale nei punti $A, B, \ldots, K, M, \ldots$, sussiste la relazione

$$(abm)(bcn)\ldots(kar) = (ABM)(BCN)\ldots(KAR).$$

Questa (conseguenza della formola a) del n° 34) può riguardarsi come duale nel piano della relazione (2') del n° 35. Essa conduce subito al duale del teorema di MENELAO: « se le rette $m, n, \ldots, r$ concorrono in un punto, si ha: $(abm)(bcn)\ldots(kar) = +1$ », e al duale del teorema di CEVA. Le ultime due proposizioni, nel caso del triangolo, possono anche dedursi dalla seguente.

13) Se sui lati a, b, c di un triangolo ABC si trovano tre punti A', B', C', e si chiamano a', b', c' le rette che congiungono questi punti coi vertici opposti, si ha: $(ABC')(BCA')(CAB') = -(bac')(cba')(acb')$.

14) Di tre rette a', b', c' uscenti dai vertici del trilatero abc si costruiscano le simmetriche a'', b'', c'' rispetto alle bisettrici interne; si dimostri che se a', b', c' passano per un punto, anche a'', b'', c'' passano per un punto (*coniugato isogonale* del primo); e se i punti aa', bb', cc' appartengono ad una retta, anche i punti aa'', bb'', cc'' appartengono ad una retta (*coniugata isogonale* della prima).

15) Se $ABC\ldots K$ ed $a'b'c'\ldots k'$ sono un n. gono e un n. latero semplice di uno stesso piano, si ha

$$(ABa')(BCb')\ldots(KAk') = (b'a'B)(c'b'C)\ldots(a'k'A),$$

dove (ABa') indica il rapporto semplice formato dai punti A, B colla intersezione $AB \cdot a'$, e gli altri simboli hanno significato analogo o duale. (Si conducano infatti le normali da A e B sopra a', ecc.).

16) Se $ABC\ldots K$, $A'B'C'\ldots K'$ sono due n. goni semplici di un piano, i cui lati $AB, BC, \ldots, A'B', \ldots$ si indichino con $a, b, \ldots, a', \ldots$, e si pone $AB \cdot A'B' \equiv M$, $BC \cdot B'C' \equiv N, \ldots$, e dualmente $ab \cdot a'b' \equiv m, \ldots$, vale la relazione

$$(ABM)(A'B'M)(BCN)(B'C'N)\ldots = (bam)(b'a'm)(cbn)(c'b'n)\ldots$$

Questa, di cui si vedrà in seguito una importante applicazione, è notevole per il fatto che i due membri si trasformano in certo modo l' uno nell' altro per dualità.

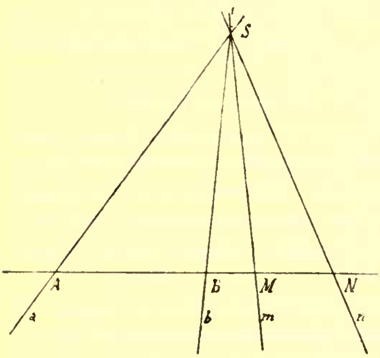
III. — 17) Se tre punti ABC di una punteggiata t sono proiettati da una retta r, sghemba rispetto a t, mediante i piani α, β, γ, si ha la relazione

$$(ABC) = \frac{\operatorname{dist} Ar}{\operatorname{dist} Br} \cdot (\alpha\beta\gamma),$$

dove $\operatorname{dist} Ar$ è la distanza del punto A dalla retta r presa con segno conveniente.

18) Estendere il teorema di MENELAO a un n.gono semplice sghembo segato da un piano; il nuovo teorema è invertibile per $n = 4$.

38. Doppio rapporto di quattro elementi. — Ritorniamo alla formola (2′) del n° 35; essa, come fu già osservato, vale anche quando la figura a cui si riferisce sia determinata da *due* soli punti propri A e B presi insieme con due punti arbitrari M, N della loro congiungente. Noi vogliamo ora esaminare questa ipotesi che è la più semplice, ma è pure la più interessante. La formola (2′) ci dice che, se proiettiamo i quattro punti allineati A, B, M, N da un centro S qualsiasi mediante le quattro rette distinte a, b, m, n, allora si ha



$$(ABM)(BAN) = (abm)(ban), \qquad \text{ossia}$$

$$(3) \qquad \frac{(ABM)}{(ABN)} = \frac{(abm)}{(abn)}.$$

Le espressioni che compariscono in questa formola hanno ricevuto per la loro importanza un nome speciale. *Dati sopra una forma di prima specie quattro elementi, si chiama doppio rapporto* (MÖBIUS, 1827), *o rapporto anarmonico* (CHASLES, 1837), *o birapporto degli elementi stessi il quoziente ottenuto dividendo il rapporto semplice dei primi tre per il rapporto semplice del primo, secondo e quarto.*

Il doppio rapporto si indica scrivendo ordinatamente i simboli dei quattro elementi tra parentesi; sarà dunque:

$$\text{sulla punteggiata} \quad (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

$$\text{nel fascio di rette} \quad (abcd) = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{\operatorname{sen} ac}{\operatorname{sen} bc} : \frac{\operatorname{sen} ad}{\operatorname{sen} bd},$$

nel fascio di piani $(\alpha\beta\gamma\delta) = \dfrac{(\alpha\beta\gamma)}{(\alpha\beta\delta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\gamma}{\operatorname{sen}\beta\gamma} : \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\delta}{\operatorname{sen}\beta\delta}$,

(coll'avvertenza che nelle ultime due relazioni al posto di *sen* va scritto *dist* quando si tratti di fascio improprio).

Con queste notazioni la (3) può scriversi

$$(ABMN) = (abmn),$$

e dà luogo all'importante teorema:

Il doppio rapporto di quattro rette di un fascio è uguale al doppio rapporto dei quattro punti in cui le rette sono segate da una trasversale qualsiasi, che non passi pel centro.

Di qua, tenendo fisse le quattro rette e variando la trasversale, oppure tenendo fissi i quattro punti e variando il centro di proiezione, si ottengono i due corollari seguenti, di cui il primo era noto a Pappo (IV° secolo dopo C.):

Quattro rette di un fascio sono segate da una trasversale qualsiasi in quattro punti, il cui doppio rapporto rimane costante al variare della trasversale.

Quattro punti di una retta sono proiettati da un centro qualsiasi mediante quattro rette, il cui doppio rapporto rimane costante al variare del centro di proiezione.

Mettiamo ora in relazione quattro piani α, β, γ, δ di un fascio coi quattro elementi in cui vengono segati da un piano o da una retta. Supposto anzitutto il piano secante π normale ai quattro piani, e dette a, b, c, d le rette sezioni, appartenenti ad un fascio, si ha per definizione

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Segando ora le quattro rette e quindi i quattro piani con una trasversale t giacente in π, e detti A, B, C, D i punti sezioni, sarà

$$(abcd) = (ABCD),$$

e quindi

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (ABCD).$$

Finalmente se conduciamo per la trasversale t un piano arbitrario π', il quale seghi i piani α, β, γ, δ in quattro rette di un fascio a', b', c', d', passanti ordinatamente per A, B, C, D, si avrà

$$(ABCD) = (a'b'c'd'),$$

donde

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (a'b'c'd').$$

Se si bada che π' è un piano generico dello spazio, si perviene al teorema:

Il doppio rapporto di quattro piani di un fascio è uguale al doppio rapporto delle quattro rette in cui i piani stessi sono segati da un piano arbitrario, non passante per l'asse del fascio; ed è pure uguale al doppio rapporto dei quattro punti in cui i piani stessi vengono segati da una trasversale qualsiasi, sghemba rispetto all'asse. La seconda parte del teorema si riduce alla prima, purchè si conduca per la trasversale un piano arbitrario.

Le varie proposizioni a cui siamo così pervenuti si sogliono riassumere in forma concisa dicendo che *il doppio rapporto di quattro elementi di una forma di prima specie non si altera quando la forma si sottoponga ad una o più operazioni di proiezione o sezione;* od anche: *il doppio rapporto di quattro elementi di una forma di prima specie è un carattere proiettivo degli elementi stessi.* Sarebbe facile dimostrare che partendo da tre soli elementi non è possibile formare una espressione avente carattere proiettivo. Il doppio rapporto di quattro elementi è la più semplice espressione che goda siffatta proprietà; in ciò sta l'importanza del doppio rapporto nello sviluppo della Geometria proiettiva. Un' importanza analoga hanno nella Geometria elementare la distanza di due punti e l'angolo di due rette, quando si studia l'uguaglianza delle figure, o l'angolo stesso e il rapporto di due segmenti nella teoria della similitudine.

Sebbene si trovi traccia del doppio rapporto in Pappo, Desargues, ..., la teoria di questa espressione si formò nella prima metà del secolo XIX. Möbius (1827), Steiner (1832), Chasles (1837) misero in luce l'importanza del doppio rapporto, e fondarono su di esso un nuovo ramo di geometria.

39. Segno del doppio rapporto. — Il carattere proiettivo del doppio rapporto di quattro elementi fa prevedere che il valore di esso non dipenderà nè dal verso positivo fissato sulla forma a cui gli elementi appartengono, nè dal verso positivo degli elementi stessi (se son rette), nè dall' unità di misura. Tutto ciò si giustifica subito ricorrendo alla definizione.

Il segno, positivo o negativo, del doppio rapporto deve indicare una particolarità proiettiva dei quattro elementi. Ed infatti se il doppio rapporto $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$ è ad es. positivo, (ABC) ed (ABD) hanno lo stesso segno, e quindi (n.[i] 31, 33) C e D appartengono ad uno stesso tratto di forma AB; dunque le coppie AB e CD non si separano. Quando invece si separano, il doppio rapporto è negativo.

40. Doppio rapporto di quattro elementi di cui qualcuno sia improprio. — Il doppio rapporto, in virtù del suo carattere proiettivo, deve potersi definire per elementi propri od impropri, indifferentemente. Ora, se si tratta ad es. di quattro punti A, B, C, D di una retta propria, è chiaro che la definizione da noi data di doppio rapporto comprende anche il caso che uno dei due ultimi punti C o D sia improprio; giacchè si ha (n.° 31)

$$(ABCD_\infty) = \frac{(ABC)}{(ABD_\infty)} = (ABC),$$

e similmente

$$(ABC_\infty D) = \frac{(ABC_\infty)}{(ABD)} = (BAD).$$

Ma se A, oppure B, è improprio, la definizione stessa cade in difetto. Per definire anche in queste ipotesi il doppio rapporto, osserveremo che se A, B, C, D sono quattro punti propri, sussiste l'identità

$$(ABCD) = (CDAB),$$

che si verifica subito sostituendo ai simboli le loro espressioni. Se invece A o B è improprio, il simbolo che sta a primo membro perde il suo significato, mentre il simbolo a secondo membro conserva un valore ben determinato. Attribuiremo perciò al primo simbolo il valore rappresentato dal secondo, e porremo convenzionalmente [1]

$$(A_\infty BCD) = (CDA_\infty B) = (DCB),$$
$$(AB_\infty CD) = (CDAB_\infty) = (CDA).$$

Supponiamo ora che due di quattro punti allineati siano impropri; allora è impropria la retta che li sostiene, insieme agli altri due punti. In tal caso, dette a, b, c, d le rette proiet-

---

[1] Alle stesse convenzioni si giungerebbe assumendo ad es. come valore di $(A_\infty BCD)$ il limite a cui tende il valore di $(ABCD)$, quando B, C, D rimangono fissi, ed A scorre sulla retta allontanandosi all'infinito.

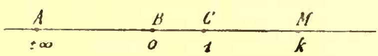
tanti i quattro punti A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ da un centro proprio arbitrario, porremo per convenzione

$$(A_\infty\, B_\infty\, C_\infty\, D_\infty) = (abcd),$$

visto che il secondo doppio rapporto non dipende dal centro di proiezione.

Con simili convenzioni si estende il significato del doppio rapporto di quattro rette o piani di un fascio anche al caso che uno o più elementi siano impropri. È poi facile verificare che accettando siffatte estensioni il teorema del n.° 38, che fissa il carattere proiettivo del doppio rapporto, vale senza eccezioni.

41. Sistema delle coordinate proiettive sulle forme di prima specie. — Sopra una forma di prima specie qualsiasi, propria od impropria, si fissino tre elementi distinti, propri od impropri, A, B, C, e si consideri un quarto elemento mobile M il quale descriva la forma. Ad ogni posizione di M corrisponde un valore determinato k del doppio rapporto



$$k = (ABCM) = \frac{(ABC)}{(ABM)};$$

e ciò senza eccezione se si conviene che quando M cade in A o B, rispettivamente, ed è quindi $(ABM) = 0, \pm\infty$, sia $k = \pm\infty, 0$; per M coincidente con C è naturalmente $k = 1$. Se M appartiene al tratto di forma AB in cui cade C, k è positivo, se M cade nell'altro tratto AB, k è negativo; se M parte da A e descrive tutta la forma nel verso ABC fino a ritornare alla posizione iniziale, k parte col valore $-\infty$ e va gradatamente crescendo in senso algebrico fino ad acquistare il valore $+\infty$.

Viceversa, quando siano dati i tre elementi A, B, C ed un valore reale k, è individuato sulla forma *un* elemento M tale che sia

$$(ABCM) = k,$$

giacchè risulta noto il rapporto semplice

$$(ABM) = \frac{(ABC)}{k}.$$

Tra la posizione di M sulla forma di prima specie ed il valore di k sussiste adunque una corrispondenza biunivoca, ordinata e, come facilmente si riconosce, continua, quando si faccia astrazione dall'elemento A della forma.

Si potrà quindi assumere k come coordinata dell'elemento M; e si parlerà di *coordinata doppio rapporto*, o *coordinata proiettiva* rispetto agli *elementi fondamentali* A, B, C, i quali (tenuto conto delle loro coordinate $\pm\infty$, 0, 1) si sogliono chiamare rispettivamente *elemento infinito*, *zero*, *unità*.

Osservazione. — Il nome di *proiettive* attribuito a quelle coordinate dipende da ciò, che se con una o più operazioni di proiezione o sezione si passa dalla forma primitiva, a cui appartengono gli elementi A, B, C, M..., ad una nuova forma di prima specie a cui appartengono gli elementi corrispondenti A', B', C', M'..., la coordinata proiettiva dell'elemento variabile M, rispetto agli elementi fondamentali A, B, C sulla prima forma, è sempre eguale alla coordinata proiettiva dell'elemento variabile M', rispetto agli elementi fondamentali A', B', C' della seconda forma. In un certo senso si potrebbe dire che la coordinata proiettiva di un elemento sopra una forma di prima specie non si altera se la forma si assoggetta ad operazioni di proiezione e sezione. Perciò il sistema delle coordinate proiettive si presta più di ogni altro a studiare le proprietà proiettive delle forme di prima specie.

42. Casi particolari del sistema di coordinate proiettive. — L'ultimo sistema di coordinate contiene come casi particolari i principali sistemi di coordinate nominati sin qua.

Così se dei tre punti fondamentali A, B, C sopra una punteggiata propria, il primo A è improprio, la coordinata proiettiva del punto variabile M diviene

$$k = (A_\infty BCM) = (MCB) = \frac{BM}{BC},$$

ed è l'*ascissa* del punto M rispetto alla origine B e all'unità di lunghezza BC. Se invece si suppone improprio il punto fondamentale C, si ha

$$k = (ABC_\infty M) = (BAM),$$

che è la *coordinata rapporto semplice* di M rispetto ai punti fondamentali B ed A.

Similmente nel fascio di rette (o di piani), se delle tre rette (o piani) fondamentali a, b, c, la terza c biseca uno degli angoli (o diedri) $\widehat{ab}$, la coordinata proiettiva $(abcm)$ si riduce alla coordinata rapporto semplice (bam).

Osservazione. — Giova notare che in base a quanto ora si disse, il sistema delle coordinate proiettive sopra una punteggiata potrebbe anche definirsi nel seguente modo. Sopra una retta propria ausiliare u si fissi un sistema di ascisse, e sia x l'ascissa di un punto X variabile sulla retta. Si proietti poi da un centro arbitrario la punteggiata u sopra una retta arbitraria u', ed al punto X' proiezione di X si associ quel numero x che si era definito come ascissa di X. Si potrà riguardare x come coordinata di X'; precisamente x è *coordinata proiettiva* di X' rispetto a tre punti fondamentali, che sono proiezioni dei tre punti di u aventi le ascisse $\pm\infty$, 0, 1. Viceversa, mediante proiezione si può sempre passare da un sistema di coordinate proiettive sopra una retta u', ad un sistema di ascisse sopra una retta u.

43. Doppio rapporto di quattro punti espresso mediante le ascisse dei punti stessi. — Quando si conoscono le ascisse a, b, c, x di quattro punti A, B, C, D di una retta propria riferiti ad una certa origine O, si può facilmente calcolare il doppio rapporto $k = (ABCD)$ dei punti stessi. Segue infatti dalla definizione

$$k = \frac{a - c}{b - c} : \frac{a - x}{b - x}. \tag{1}$$

L'espressione che sta a secondo membro si dice spesso *doppio rapporto dei quattro numeri* a, b, c, x, e si indica scrivendo (a, b, c, x); *il doppio rapporto di quattro punti di una retta è dunque espresso dal doppio rapporto delle loro ascisse.* Ciò vale anche quando uno dei quattro punti sia improprio, e la corrispondente ascissa sia $\pm\infty$, purchè allora come doppio rapporto dei quattro numeri si assuma il limite a cui tende il secondo membro della (1) mentre quell'ascissa va tendendo a $\pm\infty$; così ad es. è

$$(a, b, c, \pm\infty) = \frac{a - c}{b - c}, \quad (0, \pm\infty, h, k) = \frac{h}{k}, \text{ ecc.}$$

La relazione (1), quando si considerino a, b, c come costanti ed x, k come variabili, stabilisce il legame che passa tra la coordinata proiettiva k (rispetto ai punti fondamentali A, B, C) e l'ascissa x (rispetto ad una certa origine) di uno stesso punto D variabile sulla retta. Per metter più in luce questo legame scriviamo la (1) così

$$k = \frac{-(a - c)\,x + (a - c)\,b}{-(b - c)\,x + (b - c)\,a},$$

ossia

$$k = \frac{mx + n}{px + q}, \tag{2}$$

dove si è posto per brevità

$m = -(a-c),\ n = (a-c)\,b, p = -(b-c),\ q = (b-c)\,a;$

le quantità m, n, p, q sono costanti indipendenti dalla posizione del punto variabile D. La (2) prende il nome di *trasformazione lineare* fra le variabili x e k. Importa notare che il *determinante della trasformazione*

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = mq - np$$

è diverso da zero. Infatti, tenuto conto delle posizioni fatte, si riconosce che esso è uguale al prodotto delle differenze $a - b$, $b - c$, $c - a$, le quali sono diverse da zero essendo distinti i punti A, B, C.

Risolvendo la (2) rispetto ad x, si troverebbe una relazione di tipo analogo

$$(2') \qquad x = \frac{m'k + n'}{p'k + q'}, \qquad (m'q' - n'p' \neq 0)$$

per esprimere l'ascissa in funzione della coordinata proiettiva.

Valendoci della (2) o (2'), noi possiamo ora calcolare il doppio rapporto di quattro punti di una retta di cui siano note le coordinate proiettive. Ci appoggeremo perciò sul lemma seguente.

44. Proprietà del doppio rapporto di quattro numeri. — *Se due variabili* x, y *sono legate da una trasformazione lineare a determinate non nullo*

$$(\alpha) \qquad y = \frac{mx + n}{px + q}, \qquad (mq - np \neq 0),$$

allora ad ogni valore di x *corrisponde un determinato valore di* y *e viceversa, ed inoltre il doppio rapporto di quattro valori arbitrari attribuiti ad* x *è uguale al doppio rapporto dei corrispondenti valori di* y.

È chiaro intanto che dato x, sarà determinato y, a meno che quel valore di x non renda insieme

$$mx + n = 0, \quad px + q = 0,$$

caso impossibile perchè il determinante dei coefficienti e termini noti è diverso da zero. Similmente ragionando sulla equazione che si ottiene risolvendo la (α) rispetto ad x, si dimostra che ad ogni valore di y corrisponde un determinato valore di x.

Per dimostrare la seconda parte del lemma attribuiamo ad x quattro valori arbitrari x_1, x_2, x_3, x_4, e siano

$$y_i = \frac{mx_i + n}{px_i + q}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

i valori corrispondenti di y. Si ha per definizione

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4}.$$

Ora è

$$y_1 - y_3 = \frac{mx_1 + n}{px_1 + q} - \frac{mx_3 + n}{px_3 + q},$$

ossia

$$y_1 - y_3 = \frac{(mq - np)(x_1 - x_3)}{(px_1 + q)(px_3 + q)}.$$

Mutando a primo e secondo membro l'indice 1 in 2, abbiamo similmente

$$y_2 - y_3 = \frac{(mq - np)(x_2 - x_3)}{(px_2 + q)(px_3 + q)},$$

e dividendo membro a membro le due eguaglianze, (tenuto conto della $mq - np \neq 0$)

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{px_2 + q}{px_1 + q}.$$

Mutando in questa l'indice 3 in 4, si ha

$$\frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} = \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} \cdot \frac{px_2 + q}{px_1 + q},$$

e dividendo le due ultime uguaglianze membro a membro,

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4},$$

ossia in simboli

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4);$$

come dovevasi dimostrare.

45. Doppio rapporto di quattro elementi di una forma di 1.ª specie espresso mediante le coordinate proiettive degli elementi stessi. — Possiamo limitarci al caso che la forma sia una punteggiata, poichè a questo può ridursi ogni altro mediante una sezione (ciò che non altera nè le coordinate proiettive degli elementi, nè il loro doppio rapporto).

Siano dunque M_1, M_2, M_3, M_4 quattro punti di una retta aventi (in un certo sistema di riferimento A, B, C) le coordinate proiettive k_1, k_2, k_3, k_4. Scelto un punto della retta come origine di un sistema di ascisse, siano x_1, x_2, x_3, x_4 le ascisse dei quattro punti; tra le k e le x passeranno allora (n.° 43) relazioni del tipo

$$k_i = \frac{mx_i + n}{px_i + q}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

dove m, n, p, q sono quattro costanti tali che $mq - np \neq 0$. Ora, in virtù del lemma precedente, sarà

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Ma il secondo membro esprime (n.° 43) il doppio rapporto $(M_1 M_2 M_3 M_4)$; dunque in fine

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}.$$

Arriviamo così al risultato:

Fissato sopra una forma di prima specie un qualsiasi sistema di coordinate proiettive (o casi particolari), *il doppio rapporto di quattro elementi della forma è sempre espresso dal doppio rapporto delle loro coordinate.*

Osservazione. — Il doppio rapporto ora considerato può riguardarsi come la coordinata proiettiva h_4 dell'elemento variabile M_4 rispetto agli elementi fondamentali M_1, M_2, M_3. Il legame che passa fra h_4 e k_4 è (cfr. n.° 43) del tipo

$$h_4 = \frac{\alpha k_4 + \beta}{\gamma k_4 + \delta},$$

dove α, β, γ, δ sono quattro quantità che non dipendono dalla posizione di M_4, e danno luogo a un determinante $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ora nell'ultima relazione compariscono le coordinate proiettive h_4 e k_4 di uno stesso elemento M_4 riferito a due diversi sistemi, l'uno di elementi fondamentali M_1, M_2, M_3, l'altro di elementi fondamentali A, B, C. Vediamo dunque che le coordinate di uno stesso elemento variabile sopra una forma di prima specie, il quale venga riferito a due diversi sistemi di coordinate proiettive, sono legate da una trasformazione lineare a determinante non nullo.

46. Relazioni tra i vari doppi rapporti che si possono formare con quattro elementi. — Il doppio rapporto di quattro elementi di una forma di prima specie dipende dall'ordine in cui gli elementi si considerano. Ora le permutazioni di quattro elementi sono 24, ma i corrispondenti doppi rapporti non sono tutti distinti. Infatti:

I. *Il doppio rapporto di quattro elementi non si altera se si* *scambiano tra loro due qualunque di questi, purchè nel tempo stesso si scambino anche gli altri due.* Sicchè ad es. si ha

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Queste uguaglianze si verificano subito ricordando le definizioni (nella ipotesi ad es. che si tratti di punti):

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}, \quad (BADC) = \frac{BD \cdot AC}{BC \cdot AD}, \text{ecc.}$$

In base a questo lemma, dato un doppio rapporto formato coi quattro elementi A, B, C, D in un ordine qualsiasi, noi possiamo sempre, senza alterarne il valore, ordinare le lettere in guisa che A venga in primo posto. E possiamo quindi limitarci a considerare, tra i 24 doppi rapporti sopra nominati, i sei seguenti

$$(ABCD), (ACDB), (ADBC), (ABDC), (ADCB), (ACBD).$$

I valori di cinque tra essi possono esprimersi in funzione del sesto; e ciò in virtù dei due lemmi seguenti.

II. *Due doppi rapporti i quali differiscano per lo scambio dei due ultimi (o dei due primi) elementi danno per prodotto l'unità.* Infatti

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}, \quad (ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)},$$

e moltiplicando

$$(ABCD)(ABDC) = 1.$$

III. *Due doppi rapporti che differiscano per lo scambio dei due elementi medi (o dei due estremi) danno per somma l'unità.* Infatti, indicando con a, b, c, d le coordinate proiettive di A, B, C, D rispetto ad elementi fondamentali arbitrari, si ha

$$(ABCD) + (ACBD) - 1$$

$$= \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)} + \frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)} - 1$$

$$= \frac{(a-b)(c-d) + (a-c)(d-b) + (a-d)(b-c)}{(c-b)(a-d)} = 0,$$

come si verifica eseguendo i calcoli indicati nel numeratore.

Indicando ora con k il valore di uno dei sei doppi rapporti sopra nominati, ad es. di $(ABCD)$, si trovano per quelli i valori:

$$(ABCD) = k, \qquad (ABDC) = \frac{1}{k},$$

$$(ACBD) = 1 - k, \quad (ACDB) = \frac{1}{1-k},$$

$$(ADBC) = \frac{k-1}{k}, \quad (ADCB) = \frac{k}{k-1}.$$

Esercizi. — 1) Dati tre elementi di una forma di prima specie, costruire in questa l'elemento che forma con quelli un doppio rapporto assegnato; (mediante una operazione di proiezione o sezione si può ridursi al caso che uno dei quattro elementi sia un punto improprio, e quindi il doppio rapporto diventi un rapporto semplice).

2) Se $A, B, C \dots$ sono elementi di una forma di prima specie, si ha

$$(ABCD)(ABDE) = (ABCE)$$

$$(ABCD)(ABDE) \dots (ABHK) = (ABCK).$$

3) Se i lati di un triangolo ABC vengono segati da due trasversali nelle terne di punti $A'B'C'$, $A''B''C''$, si ha

$$(BCA'A'')(CAB'B'')(ABC'C'') = 1.$$

Questo teorema, che può dedursi dal teorema di Menelao, contiene d'altronde quest'ultimo come caso particolare. Analoga estensione può ricevere il teorema di Ceva.

4) Dalla relazione $(abcd) + (acbd) = 1$ che lega due doppi rapporti formati con quattro rette di un fascio, dedurre l'identità

$$\text{sen } ab \text{ sen } cd + \text{sen } ac \text{ sen } db + \text{sen } ad \text{ sen } bc = 0,$$

analoga all'identità di Eulero per la punteggiata (n.° 26, es. 1)). Da quell'identità si possono ricavare (ad es. supponendo $\widehat{cd} = \frac{\pi}{2}, \dots$) le note formole trigonometriche che danno sen $(\alpha \pm \beta)$, cos $(\alpha \pm \beta)$.

5) Conducendo pel centro del fascio $abcd$ un cerchio il quale seghi quelle rette in A, B, C, D, la identità precedente si traduce nella relazione

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

tra le sei corde (prese con segni convenienti) che congiungono i quattro punti due a due. Essa esprime il teorema di Tolomeo sul quadrangolo iscritto in un cerchio.

6) Dato un triangolo ABC ed un punto D che non stia su nessun lato, le rette a', b', c' proiettanti i vertici da D, formano con una trasversale qualsiasi d condotta per D un doppio rapporto $(a'b'c'd)$ uguale a quello $(A'B'C'D)$ formato dalle intersezioni della trasversale coi lati del triangolo e dal punto D.

7) Dedurre dall'es. 6) la risoluzione del seguente problema e del duale: date tre rette a, b, c non concorrenti ed un punto D che non appartenga a nessuna di quelle, condurre per D una trasversale che seghi le rette in

tre punti A', B', C' formanti con D un doppio rapporto $(A'B'C'D)$ di valore assegnato. Esaminare il caso particolare che sia improprio D od una delle tre rette date.

8) Dedurre dall'es. 6) la dimostrazione del teorema: « il doppio rapporto dei quattro punti in cui le facce di un tetraedro vengono segate da una retta, è uguale al doppio rapporto dei quattro piani proiettanti dalla retta i vertici opposti del tetraedro ».

9) Dimostrare il risultato del n°. 45 senza eseguir calcoli, fondandosi sulla osservazione (n.° 42) che il sistema delle ascisse può ottenersi come proiezione da un sistema di coordinate proiettive.

47. Gruppi armonici. — I sei doppi rapporti nominati al n.° 46, sebbene in generale distinti tra loro, possono coincidere in parte per valori particolari di k. Così risulta ad es.

$$(ABCD) = (ABDC),$$

quando sia

$$k = \frac{1}{k}, \text{ ossia } k^2 = 1\,,\ k = \pm 1.$$

Esaminiamo staccatamente i due casi.

Se è

$$k = (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = 1,$$

allora o A e B sono distinti, ma C coincide con D (n.° 31), oppure A e B coincidono tra loro. *Se il doppio rapporto di quattro elementi vale* 1, *o il primo elemento coincide col secondo, o il terzo col quarto, e viceversa.*

Se invece

$$k = (ABCD) = -1,$$

i quattro elementi sono generalmente distinti, e formano un gruppo che per le sue notevoli proprietà ricevette un nome speciale.

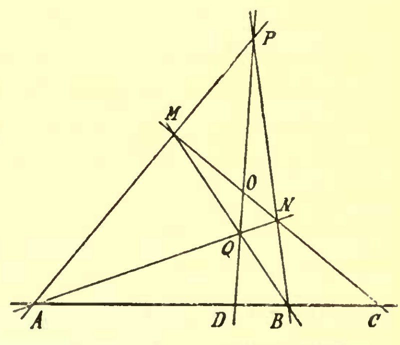
Si dice che quattro elementi A, B, C, D di una forma di prima specie formano un gruppo armonico, o sono armonici, quando il loro doppio rapporto $(ABCD)$ vale -1. In questa definizione non è indifferente l'ordine degli elementi. Segue tuttavia dal n.° 46 che se $ABCD$ è un gruppo armonico, sono pure armonici i gruppi $ABDC$, $BACD$, $BADC$, $CDAB$,..., insomma $ABCD$ ed i sette gruppi che da esso si ottengono con uno o più scambi dei due primi o dei due ultimi elementi, o della coppia dei due primi colla coppia dei due ultimi. Perciò i due primi elementi A e B, che godono uffici scambievoli, si dicono *coniugati armonici* rispetto a C, D, e viceversa C, D sono coniugati armonici rispetto ad A, B. E si dice pure che le due coppie AB e CD *si separano armonicamente,* perchè il segno negativo del doppio rapporto prova la separazione delle coppie stesse (n.° 39).

È poi chiaro che un gruppo armonico di elementi di una forma di prima specie dà per proiezione e sezione nuovi gruppi armonici.

Ritornando ora alla osservazione con cui comincia questo n.°, possiamo affermare, colla nomenclatura introdotta, che *se il doppio rapporto di quattro elementi distinti non si altera quando si scambiano fra loro i due ultimi (o i due primi) elementi, gli elementi stessi formano un gruppo armonico.*

48. Costruzione di un gruppo armonico di punti mediante il quadrangolo completo — Dati sopra una qualsiasi forma di prima specie tre elementi distinti A, B, C, è individuato (n.° 41) un quarto elemento D, tale che $ABCD$ risulti un gruppo armonico, $(ABCD) = -1$. L' elemento D è distinto da A, B, C, e si dice *quarto armonico dopo i tre elementi* A, B, C. Fra le varie costruzioni del quarto armonico, nella ipotesi che gli elementi siano punti di una retta, è notevolissima quella a cui conduce la considerazione seguente.

Supposto per il momento che il problema sia risolto, supposto adunque che $ABCD$ sia un gruppo armonico sulla retta u, proiettiamo i quattro punti da un centro qualsiasi P sopra una retta condotta arbitrariamente per C. Dette M, N, C, O le proiezioni di A, B, C, D, sarà armonico il gruppo $MNCO$ e quindi $NMCO$. Tiriamo ora le due rette NA, MB, e sia Q la loro intersezione. Proiettando il gruppo $NMCO$ da Q sopra u, ed indicando con D' la proiezione di O, risulta che è armonico il gruppo $ABCD'$, mentre per ipotesi è tale $ABCD$. Segue che il punto D' coincide con D, ossia che il punto O è proiettato in D sia dal centro Q, sia



dal centro P. Dunque il punto D è la intersezione di u colla PQ; donde la costruzione seguente:

« Volendo il quarto punto armonico D dopo i tre punti « A, B, C, si conduca per C una retta arbitraria sulla quale si « prendano ad arbitrio due punti M, N, si congiungano questi « con A e B nei due modi possibili, e si determinino le inter- « sezioni, non ancora considerate, P e Q delle dette congiun- « genti; la retta PQ passa per il punto richiesto D ».

In forma più breve (se si osserva che $MNPQ$ è un quadrangolo completo di cui A, B, O sono i punti diagonali, n.° 8): « per risolvere il problema si costruisca un qualsiasi quadran- « golo completo di cui due lati opposti passino per A, due « lati opposti per B ed un quinto lato per C; il sesto lato « passerà per il quarto armonico richiesto D ». La costruzione si eseguisce conducendo solo linee rette.

La stessa operazione potrebbe anche servire a verificare, coll' uso della sola riga, se un gruppo di quattro punti dati sopra una retta sia armonico.

Enunciamo sotto forma di teorema la proprietà fondamentale del quadrangolo completo che serve alla costruzione:

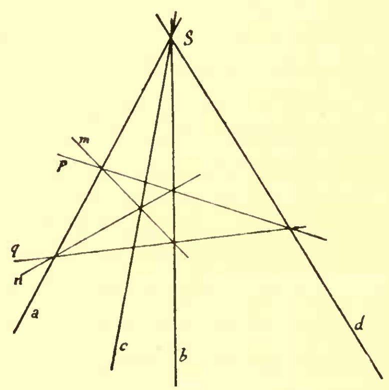
In un quadrangolo completo due punti diagonali separano armonicamente le intersezioni della loro congiungente coi lati del quadrangolo passanti per il terzo punto diagonale.

D' altronde compiendo la figura col condurre le due ulteriori rette diagonali AO, BO del quadrangolo e determinando di queste le intersezioni coi lati del quadrangolo, si ottengono altri gruppi armonici, come ad es. quello formato da M, P, A e dal punto $MP \cdot BO$ (gruppo armonico perchè proiezione di $CDAB$ da O). Si suol dire perciò che nella figura composta di un quadrangolo completo e del triangolo diagonale, su ciascuna delle nove rette (lati del quadrangolo e del triangolo) stanno quattro punti che, presi in ordine conveniente, formano un gruppo armonico.

Osservazione. — La costruzione suesposta ci insegna che se A, B, C sono tre punti di una retta, e si costruisce un qualsiasi quadrangolo completo di cui due lati opposti passino per A, due lati opposti per B ed un quinto lato per C, il sesto lato del quadrangolo segherà la retta in un punto D che non varia col variare del quadrangolo adoperato. Ora lo stesso fatto si poteva dedurre come conseguenza del teorema dei triangoli omologici e precisamente dell'es. 7) del n.° 16. Si sarebbe fin d'allora potuto dare una definizione di *gruppo armonico* di punti, dicendo (con STAUDT) armonici quattro punti allineati $ABCD$, tali che esista un quadrangolo completo di cui due lati opposti passino per A, due lati opposti per B un quinto lato per C e il sesto per D. E partendo da questa definizione si sarebbero ritrovate le proprietà dei gruppi armonici senza introdurre il concetto di doppio rapporto e le nozioni metriche a cui siamo ricorsi per stabilirlo. Una siffatta via permise appunto allo STAUDT di definire la proiettività in base a nozioni puramente grafiche (cfr. n.° 60).

49. Costruzione di un gruppo armonico di rette mediante il quadrilatero completo — Il teorema ed il problema del precedente n.° possono trasformarsi per dualità piana; basta a tal fine scambiare negli enunciati, come pure nelle dimostrazioni, le parole *punto* e *retta*. Si arriva così alla proprietà fondamentale del quadrilatero completo:

In un quadrilatero completo due rette diagonali separano armonicamente le rette che congiungono la loro intersezione coi due vertici del quadrilatero appartenenti alla terza retta diagonale. Nella figura qui accanto il quadrilatero completo è $mnpq$; le due rette diagonali $a \equiv mp \cdot nq$, $b \equiv mq \cdot np$ sono divise armonicamente dalle due rette c e d che proiettano da $S \equiv ab$ i vertici mn e pq.



Di qua si deduce la costruzione seguente che si eseguisce colla sola riga:

« Date in un fascio S tre « rette a, b, c, per costruire la « quarta retta d armonica dopo quelle, si formi un quadrila« tero completo di cui due vertici opposti appartengano ad a, « due vertici opposti a b, e un quinto vertice a c; il sesto ver« tice congiunto con S darà la retta d richiesta ». Del quadrilatero $mnpq$ si potranno ad es. prendere ad arbitrio i lati m, n uscenti da un punto arbitrario di c; fatte queste scelte, il quadrilatero e la costruzione risultano pienamente determinate.

50. Relazioni fra le mutue distanze di quattro punti armonici. — Siano A, B, C, D quattro elementi armonici di una forma di prima specie, i quali, riferiti ad un sistema di coordinate proiettive (o casi particolari), abbiano le coordinate a, b, c, d. Sarà per definizione

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = -1,$$

od anche

$$\frac{a-c}{b-c} = -\frac{a-d}{b-d},$$

dalla quale risulta subito che la coordinata di uno dei quattro elementi, ad es. d, si esprime razionalmente mediante le coordinate a, b, c dei rimanenti tre. Mediante facili trasformazioni la precedente relazione si traduce nell' altra più simmetrica

$$(1) \qquad ab + cd - \frac{1}{2}(a+b)(c+d) = 0,$$

la quale adunque può riguardarsi come la condizione affinchè i quattro elementi formino un gruppo armonico.

Dalla (1) si traggono alcune utili proprietà nella ipotesi, in cui ora ci poniamo, che gli elementi in questione siano punti di una retta propria, dei quali a, b, c, d siano le ascisse rispetto ad una certa origine.

I. Si supponga in primo luogo che la origine si trovi nel punto A. Allora $a = 0$, e la (1) diventa

$$cd = \frac{1}{2} b(c+d),$$

donde si trae

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \quad \text{ossia} \quad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

In un gruppo armonico di punti la distanza di un punto dal suo coniugato è media armonica tra le distanze del punto stesso dagli altri due punti del gruppo; e viceversa [1].

II. In secondo luogo si ponga la origine nel punto O medio fra A e B; allora è $b = -a$, e la (1) diviene

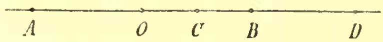
$$a^2 = cd, \quad \text{ossia} \quad OA^2 = OB^2 = OC \cdot OD.$$

---

[1] Si dice che tre numeri sono in *progressione armonica* (ed il secondo è *medio armonico* fra gli altri due), quando i loro inversi sono in progressione aritmetica.

In un gruppo armonico di punti, la distanza del punto medio fra due coniugati da uno di questi è media geometrica tra le distanze del punto medio stesso dagli altri due punti coniugati del gruppo; e viceversa.

Poichè OA^2 è positivo, OC ed OD devono aver lo stesso segno; dunque in un gruppo armonico di punti, due punti coniugati stanno dalla stessa banda del punto medio fra gli altri due.



Se, A e B rimanendo fissi, il punto C si muove ad es. da O verso B descrivendo il segmento finito OB, il coniugato armonico D descriverà il prolungamento di OB dalla parte di B, venendo dall' infinito verso B.

Se C finisce per coincidere con B, dovrà pure D cadere in B; si suol dire perciò che se in un gruppo armonico di punti (o di elementi di una qualsiasi forma di prima specie) due punti (o elementi) coincidono, un terzo punto (od elemento) coincide con quelli, ed il quarto può cadere dovunque sulla forma. Un siffatto gruppo armonico si suol chiamare *degenere*.

Se invece il punto C cade in O, il coniugato D andrà all' infinito, come risulta pure dal fatto che

$$(ABOD_x) = \frac{(ABO)}{(ABD_x)} = \frac{-1}{1} = -1;$$

dunque:

III. *Il coniugato armonico del punto medio di un segmento, rispetto agli estremi di questo, è il punto all' infinito della retta; e viceversa, il coniugato armonico del punto all' infinito di una retta, rispetto a due punti di essa, è il punto medio tra quelli.*

IV. Dati sopra una punteggiata propria quattro punti armonici A, B, C, D (tra cui A e B almeno siano propri), giova esprimere le ascisse c, d dei due ultimi in funzione delle ascisse a, b dei due primi e del rapporto semplice

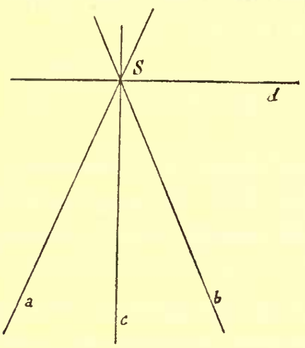
$$r = (ABC) = -(ABD).$$

Si ha subito, (n.° 32),

$$c = \frac{a - rb}{1 - r}, \quad d = \frac{a + rb}{1 + r}.$$

51. Gruppi armonici di rette aventi particolarità metriche. — Relazioni e proposizioni analoghe alle precedenti si ritrovano nel fascio di rette; ci limiteremo a due osservazioni.

I. *I lati di un angolo sono separati armonicamente dalle due bisettrici.* Infatti detti a, b i lati, c e d le bisettrici, si ha (fissando convenientemente i versi positivi sui lati)



$$(abc) = -1, \quad (abd) = 1,$$

e quindi

$$(abcd) = -1.$$

II. *Se di quattro rette armoniche di un fascio due coniugate sono perpendicolari, esse bisecano gli angoli delle altre due.* Infatti se a, b, c, d sono le quattro rette, e c, d sono perpendicolari tra loro, la retta b' che con a forma due angoli bisecati da c e d, dà una quaterna armonica $ab'cd$; ma per ipotesi anche $abcd$ è armonica, quindi b' coincide con b.

* **52. Sistema armonico.** — Riprendiamo una punteggiata propria u, sopra cui sia fissato un sistema di ascisse mediante l'origine 0 (*punto zero*), e il *punto* 1, a distanza 1 da 0; indichiamo con *punto* $\pm\infty$ il punto all'infinito di u. Se costruiamo il coniugato armonico del puuto 0 rispetto ai punti 1 e $\pm\infty$, otterremo (n.° 50, III) il punto (di ascissa) 2; similmente costruendo il coniugato armonico del punto 1 rispetto ai punti 2 e $\pm\infty$, giungeremo al punto 3, e così via. Inoltre il coniugato armonico del punto 1 rispetto ai punti 0 e $\pm\infty$ sarà il punto -1; ed in simil guisa potremo ottenere i punti -2, ecc. Con questa prima serie di costruzioni di quarti armonici noi possiamo segnare adunque ogni punto di ascissa intera n positiva o negativa.

È facile però arrivare mediante nuovi gruppi armonici anche ai punti di ascissa frazionaria. A tal fine si osservi che il coniugato armonico (di ascissa) x del punto n rispetto ai punti $+1$ e -1, è tale che risulti (n.° 50, II) $nx = 1^2$, ossia

$x = \frac{1}{n}$. Ed operando ora sul punto $\frac{1}{n}$ e sui punti 0, $\pm\infty$, come sopra si è operato sui punti 1, 0, $\pm\infty$, si perviene ad ogni punto avente un ascissa del tipo $\frac{m}{n}$, dove m è un numero intero, positivo o negativo.

Dunque partendo da due punti di ascisse 0 e 1 sopra una retta propria, e servendosi inoltre del punto all' infinito della retta, si può, mediante un numero finito di costruzioni di quarti armonici, pervenire ad ogni punto della retta avente ascissa razionale; nè si possono ottenere altri punti, giacchè (n.° 50) il quarto armonico dopo tre punti di ascisse a, b, c ha un'ascissa d che dipende razionalmente da a, b, c, ed è quindi razionale, se tali sono a, b, c. È utile notare che le costruzioni, di cui sopra si parla, possono eseguirsi coll' uso della sola riga, purchè sia segnata nel piano *una* parallela alla retta u (n.i 48, 16).

Giova per il seguito tradurre questo risultato metrico in forma proiettiva. Basta a tal fine proiettare la retta u da un centro qualsiasi sopra una nuova retta u'. Sappiamo allora (n.° 42, Oss.) che un punto di u avente l'ascissa x, si proietta in un punto di u' avente la *coordinata proiettiva* x, rispetto a tre punti fondamentali di u', proiezioni dei punti $\pm\infty$, 0, 1 di u. Ricordando poi che un gruppo armonico dà per proiezione un gruppo armonico, siamo portati a concludere sulla retta u':

Sopra una retta si fissino tre punti arbitrari come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive; partendo da questi punti, ed eseguendo successive costruzioni di quarti armonici, si può ottenere, con un numero finito di operazioni, un qualsiasi punto della retta avente la coordinata proiettiva razionale; e nessun altro punto della retta può esser costruito a quel modo. Le costruzioni qui nominate possono eseguirsi colla sola riga.

53. Coppia che divide armonicamente due coppie assegnate. — Date sopra una forma di prima specie due coppie di elementi A, B ed E, F, cerchiamo se tra le infinite coppie che dividono armonicamente A, B, ve ne sia qualcuna X, Y che divida pure armonicamente E, F.

Trattiamo anzitutto il problema analiticamente. Allo scopo di semplificare i calcoli, scegliamo i tre elementi A, B, E come elementi fondamentali $\pm\infty$, 0, 1 di un sistema di coordinate proiettive. Il quarto elemento dato F avrà rispetto a quelli una coordinata nota $k = (ABEF)$; mentre i due elementi incogniti X, Y avranno coordinate incognite x, y. Le condizioni a cui devono soddisfare X, Y,

$$(ABXY) = -1, \quad (EFXY) = -1$$

si traducono nelle due equazioni

$$(\pm\infty, 0, x, y) = -1, \quad (1, k, x, y) = -1,$$

le quali, scritte per disteso, danno (cfr. n.[i] 43, 50)

$$(1) \qquad x = -y$$

$$(2) \qquad k + xy - \frac{1}{2}(k+1)(x+y) = 0;$$

però alla (2), tenendo conto della (1), si può sostituire la equazione

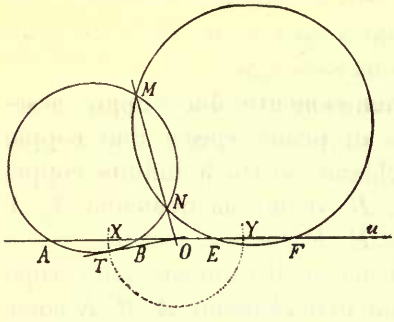
$$(2') \qquad x^2 = k,$$

donde si trae

$$x = \pm\sqrt{k}, \quad y = \mp\sqrt{k}.$$

È indifferente prendere nelle due espressioni, ad un tempo, i segni superiori, o i segni inferiori, visto che X, Y godono uffici scambievoli nel problema trattato.

Concludiamo che se $k = (ABEF)$ è positivo, ossia (n.° 39) se le due coppie AB, EF non si separano, esiste una coppia di elementi $+\sqrt{k}$, $-\sqrt{k}$, che dividono armonicamente le due coppie date; se è $k < 0$, e quindi le due coppie AB, EF si separano, il problema non ammette soluzioni; se finalmente è $k = 0$, o $k = \pm\infty$, e quindi le due coppie AB, EF hanno un elemento comune, questo elemento, contato due volte, dà con AB e con EF due gruppi armonici degeneri. Limitandoci ai primi due casi, diremo:



Date sopra una forma di prima specie due coppie di elementi, esiste o non esiste una (unica) coppia che divide armonicamente quelle, secondo che le due coppie date non si separano o si separano.

Risolveremo ora graficamente il problema, trattando il caso che A, B, E, F siano punti di una punteggiata propria u. Supposto per il momento di conoscere i punti cercati X, Y, notiamo che il punto O medio tra quelli, soddisfa alle condizioni (n.° 50, II)

$$OX^2 = OY^2 = OA \cdot OB = OE \cdot OF.$$

Ora per costruire l'unico punto O che rende uguali i due ultimi prodotti, fissato un punto arbitrario M fuori di u, si conducano i cerchi MAB, MEF, i quali si segheranno ancora in un punto N. La retta MN incontrerà u in un punto O [1] tale che

$$OM \cdot ON = OA \cdot OB = OE \cdot OF.$$

Se il punto O è esterno ad uno (e quindi anche all'altro) dei due cerchi nominati, condotta da O la tangente OT al detto cerchio, sarà

$$OT^2 = OA \cdot OB = OE \cdot OF = OX^2 = OY^2;$$

si conclude che il cerchio di centro O e raggio OT sega u nei due punti X, Y richiesti. D'altronde è facile vedere che se le coppie AB ed EF non si separano, i due punti M, N cadono da una stessa banda di u, sicchè O è esterno ai due cerchi ed il problema ammette soluzione; mentre se AB ed EF si separano, M, N stanno da bande opposte di u, O è interno ai due cerchi ed il problema non ammette soluzione.

Esercizi — 1) Per costruire il quarto punto armonico D dopo tre punti dati A, B, C, si conduca per C una retta arbitraria, e su questa si prendano a partire da C, da bande opposte, due seguenti uguali CA', CB'; si costruisca poi il punto $S \equiv AA' \cdot BB'$; come riuscirà la retta SD? Si può dare una costruzione analoga di un gruppo armonico in un fascio di rette?

2) Un'altra costruzione di un gruppo armonico di punti è fondata sul teorema: le rette congiungenti un punto di un cerchio cogli estremi di un diametro, dividono armonicamente ogni corda perpendicolare a quel diametro.

3) Lo stesso problema si risolve ricorrendo al teorema: se due cerchi si segano ortogonalmente (cioè in modo che le tangenti in ciascuna intersezione siano perpendicolari), i diametri dell'uno sono divisi armonicamente dall'altro.

4) Ricorrendo alla costruzione mediante il quadrangolo completo, risolvere colla sola riga i problemi seguenti:

a) dato un segmento col suo punto medio, condurre per un punto la parallela alla retta contenente il segmento;

---

[1] La retta MN riesce parallela ad u nel solo caso che le coppie AB, EF abbiano uno stesso punto medio; allora quest' ultimo punto, insieme al punto all' infinito della retta u, fornisce la coppia richiesta XY.

b) date due rette parallele, costruire il segmento doppio, triplo... di un segmento dato sopra una di quelle; o dividere il segmento in due, tre... parti uguali;

c) dato un parallelogramma, dimezzare un segmento assegnato comunque (n.° 16).

5) Il luogo dei punti coniugati armonici di un punto P rispetto alle intersezioni delle trasversali uscenti da P con due rette a, b, è la polare (n.° 16, es. 1)) p di P rispetto alle rette a, b. Proposizione duale nel piano.

6) Se delle intersezioni dei lati di un triangolo con una trasversale si costruiscono i coniugati armonici rispetto alle coppie di vertici appartenenti a quei lati, i nuovi punti congiunti coi vertici opposti danno tre rette passanti per uno stesso punto. Proposizione duale.

7) Un quadrangolo completo è individuato quando ne sia dato il triangolo diagonale EFG ed un vertice A; come si costruiscono gli altri tre vertici B, C, D? Dimostrare che se, rimanendo fisso il triangolo diagonale, il vertice A descrive una retta a, gli altri tre vertici descrivono tre rette b, c, d; la configurazione delle quattro rette a, b, c, d è tale, che il trilatero formato con tre qualisivogliano di esse è omologico al triangolo diagonale EFG coll'asse di omologia nella quarta retta. Questione duale pel quadrilatero.

8) Dato un tetraedro $ABCD$ ed un punto A', costruire un altro tetraedro $A'B'C'D'$ tale che le coppie di spigoli opposti dell'un tetraedro si appoggino alle coppie di spigoli opposti dell'altro.

9) Segare tre piani α, β, γ di un fascio proprio mediante un piano, in modo che delle rette sezioni la terza bisechi l'angolo delle prime due; (si costruisca il piano δ quarto armonico dopo α, β, γ).

10) Se a, b, c, d sono quattro rette di un fascio proprio ed m è una bisettrice dell'angolo ab, valgono le seguenti relazioni, analoghe a quelle valide pel gruppo armonico di punti, n.° 50:

$$\frac{2}{\operatorname{tg} ab} = \frac{1}{\operatorname{tg} ac} + \frac{1}{\operatorname{tg} ad}, \qquad \operatorname{tg}^2 mb = \operatorname{tg} mc \cdot \operatorname{tg} md.$$

11) Dati sopra una retta due segmenti AB, EF, determinare il luogo di un punto S dal quale i due segmenti siano visti sotto angoli uguali o supplementari; (n.° 53).

54. Gruppo di elementi rappresentato da una equazione con una incognita. Elementi immaginari sopra una forma di prima specie. — La trattazione analitica del problema n.° 53 ci conduce ad alcune considerazioni generali, che giova esporre qui per procedere più spediti in seguito.

Noi abbiamo visto che, dati sopra una forma di prima specie, ad es. sopra una punteggiata, due coppie di punti AB, EF, la determinazione di una terza coppia XY che divida armonicamente quelle due, dipende da una equazione di secondo grado (2'), le cui radici sono le coordinate di X e Y; quella equazione, possiamo dir brevemente, *rappresenta la coppia* XY. Fummo però costretti a distinguer tre casi secondo la natura delle radici della detta equazione; infatti se le radici erano reali e distinte, si trattava effettivamente di *due* punti distinti X, Y; se le radici coincidevano, si aveva da fare con un solo punto $X \equiv Y$, o, se si vuole, con due *punti coincidenti*; ma se le radici erano immaginarie, si doveva concludere che il problema proposto non ammetteva soluzioni. Ora quest' ultima affermazione, che in molti casi risponde in modo esauriente alla questione geometrica proposta, può in altri casi sembrare insufficiente. Per citare un esempio, si suppongano date sulla punteggiata tre coppie di punti AB, EF, GH, in guisa che l'equazione rappresentante la coppia che divide armonicamente AB ed EF, coincida colla equazione della coppia che divide armonicamente AB e GH. Vorrà dire che fra le tre coppie AB, EF, GH passerà una certa relazione; come potremo esprimerla geometricamente? Se si dicesse che le tre coppie AB, EF, GH sono divise armonicamente da una stessa coppia, si contemplerebbe la ipotesi che le radici della equazione nominata fossero reali, ma si lascerebbe da parte la ipotesi delle radici immaginarie.

Per evitare siffatte eccezioni, per poter seguire fedelmente col linguaggio geometrico i procedimenti analitici, ottenendo nella geometria la stessa generalità che appartiene all'algebra, si è trovato conveniente di introdurre, accanto agli elementi geometrici *reali* di cui sinora si è discorso, altri elementi fittizi che diremo *immaginari*, ai quali per ora attribuiremo solo un significato analitico, riservandoci di indicarne in seguito una rappresentazione geometrica. A tal fine, fissato sopra una punteggiata (o una qualsiasi altra forma di prima specie) un sistema di coordinate, ad ogni valore reale o complesso x converremo di far corrispondere un punto (od elemento) della forma; questo punto (od elemento) sarà *reale*, e potrà costruirsi geometricamente nel solito modo, se x è reale; sarà invece *immaginario*, e non avrà per ora rappresentazione geometrica effettiva, se x è complesso. Da questi ultimi elementi faremo astrazione, almeno per ora, nelle costruzioni grafiche.

Ai punti (o elementi) immaginari di una punteggiata (o forma di prima specie) estenderemo le formole di geometria analitica trovate sinora. Così, se sulla punteggiata è fissato un sistema di ascisse, ed x, y, z, t . . . sono le ascisse reali, o complesse, di più punti X, Y, Z, T . . . , porremo sempre

$$XY = y - x, \quad (XYZ) = \frac{x - z}{y - z},$$

$$(XYZT) = \frac{x - z}{y - z} : \frac{x - t}{y - t};$$

per punto medio del segmento XY intenderemo il punto di ascissa $\frac{x+y}{2}$; definiremo il gruppo armonico nel solito modo, ecc. Potrà darsi talvolta che partendo da enti immaginari, si arrivi in tal guisa ad enti reali. Ad es., se x, y sono due numeri complessi coniugati $x = a + bi$, $y = a - bi$ ($i = \sqrt{-1}$), nel qual caso i punti X, Y si dicono *immaginari coniugati*, sarà reale il punto medio tra questi, avendo l' ascissa reale $\frac{x+y}{2} = a$; e si riconosce esser pure reale il coniugato armonico di un punto reale qualsiasi rispetto a due punti immaginari coniugati.

Introdotte siffatte convenzioni relative agli elementi immaginari, e generalizzando una precedente osservazione, potremo dire: *fissato sopra una forma di prima specie un qualsiasi sistema di coordinate, ad ogni equazione con una sola incognita, corrisponde sulla forma il gruppo composto di quegli elementi che colle loro coordinate soddisfanno la equazione proposta; se questa dunque è algebrica di grado* n, *il gruppo conterrà* n *elementi (fra reali, immaginari, distinti e coincidenti).*

Inversamente, volendo rappresentare n elementi della forma, che in una certa questione si comportino in modo simmetrico, conviene spesso assegnare, anzichè le coordinate degli elementi, la equazione di grado n, che ha come radici quelle coordinate. In tal senso vanno intese le proposizioni seguenti, di cui le prime due seguono dalla formola (1) del n.° 50, mentre la terza è la traduzione in linguaggio geometrico di un notissimo risultato algebrico:

a) la condizione affinchè la coppia rappresentata dall' equazione

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

sia divisa armonicamente dagli elementi di coordinate y_1, y_2, è espressa dalla relazione

$$ay_1y_2 + b(y_1 + y_2) + c = 0;$$

b) la condizione perchè le due coppie

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad a'x^2 + 2b'x + c' = 0$$

si separino armonicamente, è data da

$$ac' + a'c - 2bb' = 0,$$

il cui primo membro è detto talvolta *armonizzante* delle due equazioni;

c) la condizione affinchè le due coppie precedenti abbiano un elemento comune, è data dall'annullarsi del *risultante* delle due equazioni, che può scriversi sotto una delle due forme seguenti, identiche tra loro:

$$4(ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ac' - a'c)^2,$$
$$4(b^2 - ac)(b'^2 - a'c') - (ac' + a'c - 2bb')^2.$$

* 55. **Coordinate omogenee.** — Prima di chiudere questo capitolo dedicato ai fondamenti della geometria analitica sulle forme di prima specie, voglio accennare alle coordinate omogenee, sebbene non mi proponga di farne uso sistematico nel seguito.

Abbiamo visto che fissato sopra una forma di prima specie un sistema di coordinate proiettive (o casi particolari), vi è un elemento eccezionale della forma, a cui non corrisponde propriamente una coordinata (finita), quell'elemento che si indica convenzionalmente con $\pm\infty$. Una siffatta eccezione non si può togliere, quando si cerca di rappresentare ciascun elemento mediante *un sol* numero; si riesce invece allo scopo associando all'elemento *due* numeri di cui interessa solo il rapporto, numeri che, per tale ragione, si dicono *coordinate omogenee.* In termini precisi: sopra una forma di prima specie, sulla quale si suppone già fissato un sistema di coordinate proiettive (o casi particolari), chiameremo *coordinate omogenee due numeri* ξ, η *non entrambi nulli, ai quali venga associato quell' elemento della forma che ha la coordinata proiettiva* $x = \frac{\xi}{\eta}$, *quando* $\eta \neq 0$; *oppure l'elemento* $\pm\infty$, *quando* $\eta = 0$. Segue di qua che mentre, date le coordinate ξ, η, è individuato l'elemento corrispondente, dato invece l'elemento, non son determinate in un sol modo le coordinate ξ, η, ma è solo determinato il loro rapporto, sicchè ad una coppia di numeri ξ, η si può sostituire una coppia qualsiasi di numeri proporzionali, senza alterare l'elemento rappresentato. Alla coppia (0, 0) non corrisponde nessun elemento.

Per portare un esempio supporremo che la forma in questione sia una punteggiata propria, sulla quale sia già fissato un sistema di ascisse; allora l'origine avrà le coordinate omogenee 0, 1; il punto all'infinito le coordinate 1, 0; il punto di ascissa 1, avrà le coordinate 1, 1, ecc.; ricordando che quelle coppie di numeri possono alterarsi per uno stesso fattore, senza mutare il punto rappresentato.

In coordinate omogenee ξ, η, un gruppo di n elementi di una forma di prima specie è rappresentato da una equazione algebrica ed *omogenea* di grado n, del tipo

$$\sum_{0}^{n}{}_i\, a_i \xi^{n-i} \eta^i = 0.$$

Esercizi — 1) Calcolare il doppio rapporto dei due punti rappresentati dall'equazione $ax^2 + 2bx + c = 0$, coi punti di coordinate y, y'.

2) Calcolare il doppio rapporto k dei quattro punti rappresentati, i due primi dall'una, i due ultimi dall'altra delle equazioni

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \qquad a'x^2 + 2b'x + c' = 0.$$

Si troverà

$$\frac{1+k}{1-k} = \frac{ac' + a'c - 2bb'}{\pm 2\sqrt{b^2 - ac}\sqrt{b'^2 - a'c'}},$$

donde, indicando con H il numeratore del secondo membro e con Δ, Δ' i binomi sotto ai radicali, si trae

$$k = \frac{(H \mp 2\sqrt{\Delta\Delta'})^2}{H^2 - 4\Delta\Delta'}.$$

Queste formole forniscono subito l'armonizzante e il risultante delle due coppie; e ci dicono che queste, supposte costituite da punti reali, non si separano o si separano, secondo che $H^2 - 4\Delta\Delta'$ è positivo o negativo.

3) Determinare l'equazione della coppia dei punti che separano armonicamente le due coppie date dalle precedenti equazioni; e dimostrare che essa si compone di punti reali o immaginari, secondo che le coppie date non si separano o si separano (cfr. n.° 53).

4) Si esaminino tutti i casi in cui coincidono due dei sei doppi rapporti, generalmente distinti, formati con quattro elementi (n.° 46). Oltre ai casi già noti, o che a questi si riconducono, si troveranno i valori $k = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (radici dell'equazione $k^3 = -1$), relativi a gruppi di elementi $ABCD$ detti *equianarmonici* (Cremona), dei quali un elemento almeno è immaginario. Posto che $(ABCD)$ abbia uno dei due valori di k, lo stesso valore hanno $(ACDB)$, $(ADBC)$, mentre il valore coniugato appartiene ad $(ABDC)$, $(ADCB)$, $(ACBD)$.

Capitolo II.

Proiettività tra due forme di prima specie.

56. Concetto generale di corrispondenza. — È fondamentale nelle matematiche moderne il concetto di *corrispondenza*, del quale già incidentalmente abbiamo fatto uso più volte. Vogliamo ora dedicarvi qualche parola, per limitarci poi a studiare una famiglia particolare di corrispondenze.

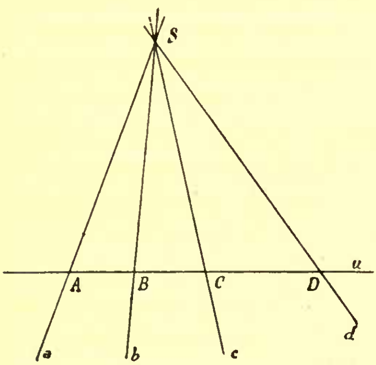
Siano assegnate due classi $(a, b, c, \ldots)$, $(a', b', c', \ldots)$ di elementi qualisivogliano (numeri, punti, oggetti . . .), in numero finito o infinito; e sia nota inoltre una legge, in virtù della quale ad un qualsiasi elemento, ad es. a, della prima classe venga associato, in modo perfettamente determinato, un elemento (o più elementi) $a', \ldots$ della seconda classe. Diremo allora che quella legge fissa una *corrispondenza*, con cui si passa dalla prima classe alla seconda; l'elemento a della prima classe ha per corrispondente (o corrispondenti) l'elemento (o gli elementi) $a', \ldots$ della seconda classe. Se ad un elemento a comunque scelto nella prima classe, corrisponde *un solo* elemento a' della seconda, la corrispondenza si dice *univoca*; e si dice *biunivoca* quando inoltre, scelto comunque un elemento a' della seconda classe, esiste nella prima uno ed un solo elemento a, di cui a' sia il corrispondente. Quando si assegna una corrispondenza biunivoca fra due classi, si vengono in realtà a fissare due corrispondenze, *inverse* l'una dell'altra, delle quali una conduce da un elemento qualsiasi a della prima classe all'elemento corrispondente a' della seconda, mentre l'altra riconduce da $a' \ldots$ ad $a, \ldots$, e distrugge, per dir così, l'effetto della prima.

Facciamo ora qualche ipotesi sulla natura degli elementi componenti le due classi. Se questi elementi sono numeri, e precisamente $a, b, c \ldots$ si riguardano come valori assunti da una variabile x, mentre $a', b' c' \ldots$ sono valori assunti da una variabile y, una corrispondenza univoca fra la prima classe e la seconda definisce y come *funzione* di x. Se la prima classe si compone di elementi geometrici, ad es. degli elementi di una forma di prima specie, e la seconda classe si compone di numeri reali, una corrispondenza biunivoca fra le due classi (quando sia inoltre continua) stabilisce un *sistema di coordinate* sulla forma (n.° 23). Finalmente se le due classi si compongono di elementi geometrici, e sono, ad es., due forme di prima specie, si avrà una corrispondenza geometrica fra le due forme.

Porteremo ora esempi di certe particolari corrispondenze biunivoche fra due forme di prima specie, delle quali poi dovremo occuparci.

57. Esempi di corrispondenze proiettive fra due forme di prima specie.

a) Se si proietta una punteggiata $A, B, C, D \dots$ di sostegno u da un centro S fuori di u, si ottiene un fascio di rette (*prospettivo* alla punteggiata) $a, b, c, d \dots$, il quale è in corrispondenza biunivoca colla punteggiata. In generale, se si passa da una forma di prima specie ad una seconda forma di prima specie con una o più operazioni di proiezione e sezione, si viene a stabilire fra le due forme una corrispondenza biunivoca, per la quale si corrispondono due elementi di queste, che si ottengano l'uno dall'altro mediante quelle operazioni. Una proprietà notevole di una siffatta corrispondenza (proprietà che, come vedremo, basta a definirla) è che il doppio rapporto di quattro elementi arbitrari dell'una forma è uguale al doppio rapporto dei quattro elementi corrispondenti dell'altra (n.° 38).



b) Se sopra due punteggiate proprie di sostegni u, u' si fissano due sistemi di ascisse di origini A, A' rispettivamente, e ad ogni punto B di u si fa corrispondere quel punto B' di u', tale che $AB = A'B'$, si viene a stabilire una corrispondenza biunivoca fra le due punteggiate. Essa ha la proprietà evidente che la distanza di due punti arbitrari B, C di u è uguale alla distanza dei punti corrispondenti B', C' di u'; quindi il doppio rapporto di quattro punti di u è uguale al doppio rapporto dei quattro punti corrispondenti di u'. Questa corrispondenza fra due punteggiate si chiama *uguaglianza*; e può anche riguardarsi come la corrispondenza che lega due posizioni assunte da una stessa punteggiata mobile nello spazio, ammesso che i punti conservino inalterate le loro distanze [1].

c) In generale, fissati sopra due forme qualisivogliano di prima specie due sistemi di coordinate proiettive, aventi come elementi fondamentali l'uno A, B, C, l'altro A', B', C', la relazione $(ABCD) = (A'B'C'D')$ fissa ancora una corrispondenza biunivoca fra le posizioni degli elementi mobili D, D', che descrivono le due forme. Sono ad es., elementi corrispondenti A ed A', B e B', C e C'. Anche la nuova corrispondenza lascia inalterato il doppio rapporto di quattro elementi qualisivogliano dell'una forma. Infatti se D, E, F, G sono quattro elementi arbitrari della prima forma aventi (rispetto ad A, B, C) le coordinate proiettive x_1, x_2, x_3, x_4, anche gli elementi corrispondenti D', E', F', G' della seconda forma avranno, per ipotesi, le stesse coordinate proiettive (rispetto ad A', B' C'), e sarà

$$(DEFG) = (D'E'F'G'),$$

perchè ambedue i doppi rapporti hanno il valore (x_1, x_2, x_3, x_4) (n.° 45).

Gli esempi suesposti rendono ormai chiara la definizione che segue.

58. Definizione della proiettività fra due forme di prima specie. — *Si dice che due forme di prima specie sono in corrispondenza proiettiva* (o *riferite proiettivamente*, o *proiettive*), *quando ad ogni elemento di ciascuna di esse corrisponde un solo elemento dell'altra, colla condizione che il doppio rapporto di quattro elementi comunque scelti nell'una forma sia uguale al doppio rapporto degli elementi corrispondenti nell'altra forma.* L'ultima condizione determina quali corrispondenze biunivoche debbano riguardarsi come proiettive.

Per indicare che due forme di prima specie sono riferite proiettivamente, e che agli elementi A, B, C, D, E,... della prima

---

[1] Similmente si diranno *uguali* due fasci di rette, o di piani, che si possano riguardare come due posizioni assunte da uno stesso fascio mobile (supposti rigidamente collegati tra loro gli elementi del fascio).

corrispondono ordinatamente gli elementi $A', B', C', D', E' \ldots$ della seconda, scriveremo

(1) $$ABCDE \ldots \barwedge A'B'C'D'E' \ldots$$

La (1) (nella quale si può anche supporre che a sinistra, e quindi a destra, sia scritto un numero finito $n \geqq 4$ di elementi corrispondenti delle due forme) riassume le uguaglianze che si ottengono, scegliendo in tutti i modi quattro elementi della prima forma, e paragonandone il doppio rapporto a quello degli elementi corrispondenti della seconda forma. Sappiamo però (n.° 57, c)) che le dette uguaglianze non sono tutte indipendenti, ma sono conseguenze di quelle che si ricavano dalla

(2) $$(ABCX) = (A'B'C'X'),$$

col sostituire al posto di X e X', una volta D, D', una seconda volta E, E', ecc.

Qui si osservi che se l'elemento X descrive la prima forma partendo da A e muovendosi nel verso ABC, il primo membro, e quindi il secondo membro, della (2) varia crescendo da $-\infty$ a $+\infty$ (n.° 41), donde segue che l'elemento X' parte da A' e descrive la seconda forma nel verso $A'B'C'$. *La proiettività è adunque una corrispondenza ordinata*, per la quale ad elementi che si susseguono in un verso, ad es. ABC, sull'una forma corrispondono elementi che si susseguono in un verso, ad es. $A'B'C'$, sull'altra forma.

Il concetto di corrispondenza proiettiva (sotto il nome di *collineare*) è dovuto a Möbius (1827); di essa si occuparono successivamente Steiner (1832), che adottò la denominazione da noi accolta, Chasles (1831), che disse *omografica* la corrispondenza, Staudt (1847) . . .

59. Gli esempi di corrispondenze proiettive portati nel n° 57 danno luogo ai seguenti teoremi:

a) *Due forme di prima specie che si ottengano l'una dall'altra mediante una o più operazioni di proiezione e sezione, sono riferite proiettivamente;* e vedremo tra poco che sussiste pure il teorema inverso.

b) *L'uguaglianza tra due forme di prima specie è una particolare proiettività;* in altre parole: se una forma di prima specie si assoggetta ad un movimento (che non alteri entro ad essa la mutua posizione degli elementi), tra la posizione iniziale e la posizione finale della forma passa una proiettività, per cui si corrispondono due elementi, che siano antica e nuova posizione di uno stesso elemento variabile.

*** 60. Teorema di Staudt** (1). — Ritorniamo un momento sulla definizione di proiettività. Abbiamo già osservato che essa contiene condizioni in numero superfluo, giacchè le uguaglianze dei doppi rapporti di cui fa cenno, non sono tutte indipendenti fra loro.

Dello stesso fatto ci possiamo persuadere anche per un'altra via. Vedremo infatti che, dovendo decidere se due forme di prima specie, in corrispondenza biunivoca, sono proiettive, basta considerare nell'una forma solo quei doppi rapporti che hanno un valor numerico prefisso, ad es., -1, e paragonarli coi corrispondenti doppi rapporti dell'altra forma; giacchè, quando si sia riscontrato che anche questi hanno lo stesso valore, si potrà conchiudere che *ogni* doppio rapporto dell'una forma è uguale al corrispondente doppio rapporto dell'altra. Il valore -1 del doppio rapporto ha poi uno speciale intèresse, perchè il gruppo relativo di elementi risulta armonico, e può quindi esser definito e costruito in base a sole considerazioni grafiche (n.° 48). Ciò basta a spiegare quale importanza abbia nello sviluppo della Geometria proiettiva fondata sopra pure considerazioni grafiche (secondo Staudt), il teorema seguente:

Una corrispondenza biunivoca fra due forme di prima specie, per la quale ad ogni gruppo armonico dell'una forma corrisponda un gruppo armonico dell'altra, è una proiettività (2).

Assumiamo tre elementi arbitrari A, B, C della prima forma, e gli elementi corrispondenti A', B', C' della seconda forma,

---

(1) Nello studio della proiettività tra forme di prima specie noi non faremo uso di questo teorema, il quale è qui esposto, non solo per la sua importanza teorica, ma sopratutto perchè ci servirà in seguito a trattare le proiettività tra forme di seconda e terza specie. Perciò in una prima lettura lo studioso può, senza danno, lasciar da parte questo paragrafo, per acquistarne conoscenza prima di passare al Cap. VI.

(2) Se per *proiettività* si intende una corrispondenza fra due forme di 1ª specie ottenuta mediante un numero finito di proiezioni e sezioni (definizione questa che risulterà equivalente alla nostra), l'enunciato del teorema concorda con quello di Staudt. Una dimostrazione (diversa da questa), secondo le tracce di Staudt, si trova nella Geometria proiettiva di Enriques, Cap. V.

come elementi fondamentali di due sistemi di coordinate proiettive. Dette x, x' le coordinate di due elementi corrispondenti X, X' delle due forme, la corrispondenza biunivoca fra X ed X' si traduce in una corrispondenza biunivoca fra le variabili x ed x'; tutto si riduce a provare che, in virtù delle ipotesi del teorema, l' ultima corrispondenza è la uguaglianza $x = x'$.

1) Dimostreremo in primo luogo che « a valori crescenti « (in senso algebrico) di x corrispondono valori crescenti di x' », o, come si suol dire, che x' è funzione crescente di x. Premettiamo a tal fine la osservazione che due coppie di elementi separantisi o non separantisi dell'una forma, hanno per corrispondenti sull' altra forma due coppie che, rispettivamente, si separano o non si separano. Infatti, detti A, B, C, D quattro elementi arbitrari della prima forma, e posto, ad es., che le due coppie AB, CD non si separino, esisteranno (n.° 53) due elementi reali U, V dividenti armonicamente le coppie AB, CD. Ma allora gli elementi corrispondenti U', V' dovranno (per la ipotesi del teorema) divider armonicamente le coppie $A'B'$, $C'D'$, le quali per conseguenza non si separeranno. Segue che il doppio rapporto di quattro elementi arbitrari dell' una forma ha lo stesso segno del doppio rapporto degli elementi corrispondenti dell' altra (n.° 39). E segue ancora che, detto E un quinto elemento arbitrario della prima forma, a cui corrisponda l'elemento E' sulla seconda, le due differenze

$$(ABCD) - (ABCE), \quad (A'B'C'D') - (A'B'C'E')$$

hanno lo stesso segno. Si ha infatti (n.° 46, III):

$$(ABCD) - (ABCE) = (ABCD)\left\{ 1 - \frac{(ABCE)}{(ABCD)} \right\}$$

$$= (ABCD)\left\{ 1 - (ABDE) \right\} = (ABCD)\,(ADBE);$$

similmente

$$(A'B'C'D') - (A'B'C'E') = (A'B'C'D')\,(A'D'B'E'),$$

e i due prodotti di doppi rapporti hanno certo lo stesso segno per la osservazione precedente. Ora, dette x_0, x_1 le coordinate proiettive di D, E, e x_0', x_1' le coordinate proiettive di D', E', quelle due differenze valgono $x_0 - x_1$ e $x'_0 - x_1'$; dunque se, ad es., $x_0 < x_1$, sarà pure $x_0' < x_1'$, il che giustifica la nostra affermazione.

2) Dimostriamo in secondo luogo che « se la variabile x assume un valore razionale qualsiasi, la variabile x' assumerà in corrispondenza lo stesso valore $x' = x$ ». Ciò risulta intanto dalle ipotesi fatte se $x = 0, 1$, perchè l'elemento X avente quella coordinata cade in B, C rispettivamente; ma allora X' cade in B', C', sicchè $x' = 0, 1$. Se poi è ad es. $x = 2$, l'elemento X sarà il coniugato armonico di $B(x = 0)$ rispetto ad $A(x = \pm \infty)$ e $C(x = 1)$, e quindi X' sarà il coniugato armonico di $B'(x' = 0)$ rispetto ad $A'(x' = \pm \infty)$ e $C'(x' = 1)$, ed avrà la coordinata $x' = 2 = x$. In generale, se x è razionale, X può costruirsi partendo da A, B, C, ed eseguendo un numero finito di costruzioni di quarti armonici (n.° 52). Ma allora eseguendo sulla seconda forma le stesse operazioni nello stesso ordine, a partire da A', B', C', si perverrà all'elemento X'; e poichè le coordinate x di X ed x' di X' dipendono esclusivamente dalle costruzioni impiegate per ottenere gli elementi stessi, risulta l'uguaglianza $x' = x$.

3) Ormai per concludere che quella uguaglianza vale in ogni caso, resta solo da dimostrare che, anche quando la variabile x assume un valore irrazionale, la variabile x' assume lo stesso valore. Sia x_1 un valore *irrazionale* della variabile x, e siano x_0, x_2 due valori *razionali* della variabile stessa, dei quali il primo sia inferiore e il secondo superiore ad x_1: dunque $x_0 < x_1 < x_2$. Indichiamo con x_0', x_1', x_2' i valori corrispondenti della variabile x'. Segue anzitutto dalla 1) che sarà $x_0' < x_1' < x_2'$; e dalla 2) che $x_0' = x_0$, $x_2' = x_2$; sicchè in fine dalle ipotesi $x_0 < x_1 < x_2$, seguono le conseguenze $x_0 < x_1' < x_2$. Ma allora i due numeri x_1, x_1' sono tali, che ogni numero razionale inferiore o superiore al primo è rispettivamente inferiore o superiore al secondo, e tanto basta per concludere che $x_1' = x_1$. Con ciò il teorema è dimostrato.

61. Prodotto di proiettività. — Ritorniamo ora alla definizione di proiettività tra forme di 1ª specie (n.° 58), e cerchiamo di dedurne anzitutto quelle proprietà della corrispondenza che non dipendono dalla mutua posizione delle due forme. Risulta subito che *se due forme di* 1ª *specie sono* *riferite proiettivamente ad una stessa forma, esse sono riferite proiettivamente tra loro;* in simboli, dalle due relazioni

$$A\,B\,C\,D\,\ldots \;\overline{\wedge}\; A'\,B'\,C'\,D'\ldots,$$

$$A'B'C'D'\ldots \;\overline{\wedge}\; A''B''C''D''\ldots,$$

segue

$$ABCD\ldots \;\overline{\wedge}\; A''B''C''D''\ldots$$

Infatti tra queste due ultime forme viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca, quando si riguardino come corrispondenti due elementi (come A ed A'', ...) i quali abbiano uno stesso elemento (A', ...) come corrispondente nella forma intermedia. E la detta corrispondenza è una proiettività giacchè, se A, B, C, D sono quattro elementi arbitrari della prima forma, si ha per ipotesi

$$(ABCD) = (A'B'C'D'), \quad (A'B'C'D') = (A''B''C''D''),$$

donde si trae

$$(ABCD) = (A''B''C''D'').$$

Sono corollari immediati del teorema e degli esempi sopra riportati:

Due forme riferite proiettivamente, rimangono nella detta relazione anche se i loro sostegni vengono comunque spostati nello spazio.

Se due forme sono riferite proiettivamente, saranno riferite proiettivamente anche due forme che da quelle ordinatamente si deducano mediante operazioni di proiezione e sezione.

Osservazione. — Il teorema di questo paragrafo può anche enunciarsi in altro modo. Dette F, F' F'' le tre forme di prima specie sopra considerate, ricordiamo anzitutto che la proiettività fra F ed F' è la riunione di due corrispondenze od operazioni, inverse una dell'altra (n.° 56), dette pure proiettività: una prima, che indicheremo con $\boldsymbol{P}$, la quale permette di passare della forma F alla forma F' (e dagli elementi A, B... agli elementi A', B'...); una seconda operazione, che si suole indicare con $\boldsymbol{P}^{-1}$, la quale fa ritornare da F' ad F (e da A', B', ..., ad A, B, ...). Similmente indichiamo con $\boldsymbol{P}'$ la operazione con cui si passa dalla forma F' alla forma F'' (e precisamente da A', B' ... ad A'', B'' ...). Eseguendo una di seguito all'altra le due operazioni $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}'$ (prima $\boldsymbol{P}$ e poi $\boldsymbol{P}'$), si ottiene una operazione composta che conduce da F ad F'', e precisamente dagli elementi A, B..., agli elementi A'', B''... Questa nuova operazione si suole indicare con $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}'$, e si chiama *prodotto* delle due operazioni, o corrispondenze, $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}'$ applicate nell'ordine scritto. Il prodotto di due corrispondenze univoche è evidentemente una corrispondenza univoca. Il ragionamento precedente prova di più, che *il prodotto di due proiettività è ancora una proiettività.* Questo teorema, equivalente al primitivo, può d'altronde estendersi, insieme alla definizione di prodotto, al caso di più proiettività.

Come esempio, si osservi che il prodotto di una proiettività $\boldsymbol{P}$ per la sua inversa $\boldsymbol{P}^{-1}$ è una proiettività, che fa corrispondere ad ogni elemento della forma primitiva l'elemento stesso. Questa proiettività si chiama *identità*, e talvolta si indica con 1; sicchè si scrive $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} = 1$.

62. Teorema fondamentale. — *Fissati tre elementi arbitrari sopra una forma di prima specie, e tre elementi pure arbitrari sopra una seconda forma della stessa specie, esiste una ed una sola corrispondenza proiettiva fra le due forme, per la quale ai primi tre elementi nominati corrispondono ordinatamente gli ultimi tre.*

Infatti, detti A, B, C i tre elementi delle prima forma ed A', B' C' i tre elementi della seconda, se ad ogni elemento X della prima forma facciamo corrispondere quell' elemento X' della seconda per cui

$$(ABCX) = (A'B'C'X'),$$

noi veniamo a stabilire una proiettività $\boldsymbol{P}$ tra le due forme, la quale muta A, B, C in A', B', C' (n.° 57, c)). D'altra parte, se una proiettività soddisfa alle condizioni dell'enunciato, essa deve mutare l' elemento X nell' elemento X', e quindi non può differire dalla $\boldsymbol{P}$. La proiettività $\boldsymbol{P}$ si suole indicare talvolta con

$$\boldsymbol{P} \equiv \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}.$$

63. Equazione della proiettività. — Quando su ciascuna di due forme riferite proiettivamente, è fissato un sistema di coordinate proiettive (o casi particolari), la relazione geometrica che passa fra due elementi corrispondenti X, X', si traduce in una relazione analitica fra le coordinate x, x' degli elementi stessi. Per procurarcela supponiamo determinata la proiettività col dare tre elementi A, B, C della prima forma, aventi le coordinate a, b, c, ai quali debbano corrispondere, sulla seconda forma, gli elementi A', B', C' di coordinate a', b', c'. La relazione geometrica che definisce la proiettività

$$(ABCX) = (A'B'C'X'),$$

si traduce nella relazione algebrica

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} = \frac{a'-c'}{b'-c'} : \frac{a'-x'}{b'-x'},$$

ossia

$$\frac{a-x}{b-x} : \frac{a'-x'}{b'-x'} = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a'-c'}{b'-c'}.$$

Posto ora

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a'-c'}{b'-c'} = \frac{(a-c)(b'-c')}{(b-c)(a'-c')} = k,$$

quantità finita e diversa da zero, poichè tali sono le quattro differenze che vi compariscono, avremo

$$\frac{(a-x)(b'-x')}{(b-x)(a'-x')} = k.$$

Questa, liberando da frazioni e sviluppando, acquista la forma

$$(1) \qquad \alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0,$$

dove si è posto per brevità

$$\alpha = 1 - k, \quad \beta = a'k - b', \quad \gamma = bk - a, \quad \delta = ab' - ba'k.$$

I quattro coefficienti α, β, γ, δ sono costanti (indipendenti dalla posizione degli elementi variabili X ed X'), tali che la espressione

$$\alpha\delta - \beta\gamma = k(a-b)(a'-b')$$

risulta diversa da zero.

La relazione (1) *rappresenta la proiettività* considerata, è *la equazione della proiettività*; con ciò intendiamo dire che due elementi corrispondentisi in questa proiettività hanno coordinate soddisfacenti alla (1), e viceversa.

Esaminiamo ora se inversamente ogni relazione del tipo (1), nella quale α, β, γ, δ sono quattro costanti tali che $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, sia atta a rappresentare, nel senso ora stabilito, una proiettività tra due forme di prima specie, di cui l'una sia descritta da un elemento X di coordinata proiettiva x, e l'altra da un elemento X' di coordinata proiettiva x'. Notiamo perciò che la (1), risolta rispetto ad x', si presenta sotto la forma

$$(1') \qquad x' = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma},$$

e deve riguardarsi adunque (n.° 43) come una trasformazione lineare fra le variabili x, x', avente il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ (per ipotesi). Ora sappiamo già (n.° 44) che una siffatta trasformazione determina tra le variabili x, x' una corrispondenza biunivoca tale, che il doppio rapporto di quattro valori arbitrari di x uguaglia il doppio rapporto dei corrispondenti valori di x'. Risulta di qua che effettivamente x, x' sono coordinate di elementi corrispondentisi in una proiettività.

Una equazione (1), in cui ciascuna delle due variabili x, x', presa isolatamente, entra a primo grado, dicesi *bilineare;* ed ogni equazione bilineare fra x ed x' può porsi sotto la forma (1) (avvertendo che qualcuno dei coefficienti potrebbe esser nullo) Diremo adunque:

Una proiettività fra due forme di prima specie è rappresentata da una equazione bilineare

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

fra le coordinate proiettive x, x' *di elementi corrispondenti; e viceversa, ogni equazione siffatta rappresenta una proiettività.*

La detta equazione, o la equivalente (1'), si sarebbe potuta assumere come definizione della proiettività tra forme di prima specie. Le proprietà algebriche di quella equazione, o della trasformazione lineare, danno, come vedremo, le proprietà geometriche della proiettività. Qui notiamo che, valendosi della equazione (1) di una proiettività, si possono definire e considerare anche coppie di elementi *immaginari* corrispondenti nella proiettività, dei quali le coordinate soddisferanno la (1). Sussiste ancora il teorema che il doppio rapporto di quattro elementi, anche immaginari, dell' una forma uguaglia il corrispondente doppio rapporto dell' altra forma, perchè la dimostrazione data nel n.° 44 vale per numeri reali o complessi.

* **Osservazione I.** — Se introduciamo sulle due forme coordinate omogenee, ξ, η per la prima, ξ', η' per la seconda, ponendo $x = \frac{\xi}{\eta}$, $x' = \frac{\xi'}{\eta'}$ (n.° 55), la (1) ci dà

$$\frac{\xi'}{\eta'} = -\frac{\beta\xi + \delta\eta}{\alpha\xi + \gamma\eta},$$

la quale, posto $-\beta = a_{11}$, $-\delta = a_{12}$, $\alpha = a_{21}$, $\gamma = a_{22}$, può riscriversi

$$\xi' : \eta' = (a_{11}\xi + a_{12}\eta) : (a_{21}\xi + a_{22}\eta),$$

od anche, introducendo un coefficiente di proporzionalità non nullo ϱ,

$$(1'') \qquad \begin{cases} \varrho\xi' = a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ \varrho\eta' = a_{21}\xi + a_{22}\eta, \end{cases}$$

dove

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Le (1'') definiscono, come si suol dire, una *sostituzione lineare ed omogenea* fra le coppie di variabili (ξ, η) e (ξ', η').

* **Osservazione II.** — Ritornando alla (1), si può chiedere quale ne sia il significato geometrico quando $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Posto che non siano tutti nulli i coefficienti della (1), e che sia ad es. $\alpha \neq 0$, si moltiplichino per α i due membri della (1); tenuto conto della $\alpha\delta = \beta\gamma$, potremo scrivere la nuova equazione sotto la forma

$$(\alpha x + \gamma)(\alpha x' + \beta) = 0.$$

Questa ci dice che alla (1) si può soddisfare, o prendendo $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$ e lasciando arbitrario x', o prendendo $x' = -\frac{\beta}{\alpha}$ e lasciando arbitrario x. Dunque, nella ipotesi presente, la (1) stabilisce una corrispondenza fra le due forme, tale che all'elemento $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$ della prima corrisponde *ogni* elemento della seconda forma, mentre ad ogni altro elemento della prima forma corrisponde sempre *lo stesso elemento* di coordinate $x' = -\frac{\beta}{\alpha}$ della seconda; e in condizioni analoghe si trova la seconda forma rispetto alla prima. Una siffatta corrispondenza, che non è più biunivoca senza eccezioni, dicesi *proiettività degenere*. Geometricamente essa si ottiene ad es. proiettando i punti di una punteggiata u sopra una retta u', da un centro di proiezione scelto sopra u (o sopra u').

64. Proprietà e particolarità metriche di una proiettività.

I. *Fra punteggiate*. — Le due forme siano *punteggiate* proprie u, u', ed x, x' siano *ascisse* di punti corrispondenti X, X', rispetto a due punti O e P' scelti come origini. Una proiettività tra le punteggiate sarà rappresentata da una equazione

(1) $$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0,$$

od anche

(1') $$x' = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \quad x = -\frac{\gamma x' + \delta}{\alpha x' + \beta}$$

colla condizione

(2) $$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Alla origine $O(x = 0)$ della punteggiata u corrisponde, sulla u', il punto O' di ascissa $x' = -\frac{\delta}{\gamma}$; e similmente a $P'(x' = 0)$ di u' corrisponde, sopra u, il punto P di ascissa $x = -\frac{\delta}{\beta}$. Se $\delta = 0$, le origini delle due punteggiate sono punti corrispondenti, e viceversa.

Se un punto sopra u va allontanandosi all'infinito, e quindi x tende a $\pm\infty$, il corrispondente valore di x' tende al limite

$$\lim_{x=\infty}\left(-\frac{\beta x+\delta}{\alpha x+\gamma}\right)=\lim_{x=\infty}\left(-\frac{\beta+\frac{\delta}{x}}{\alpha+\frac{\gamma}{x}}\right)=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Diremo perciò che al punto all'infinito I_∞ della prima punteggiata, corrisponde sulla seconda il *punto limite* (o *punto di fuga*) I', che ha l'ascissa $-\frac{\beta}{\alpha}$. Similmente si vede che al punto all'infinito J'_∞ della u' corrisponde, sopra u, il *punto limite* J avente l'ascissa $-\frac{\gamma}{\alpha}$.

a) Si supponga anzitutto $\alpha \neq 0$; allora i due punti limite J ed I' sono propri. Se con essi coincidono le origini delle due punteggiate u ed u', si avrà $-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}=0$, ossia $\beta=\gamma=0$, e la equazione (1) si ridurrà al tipo

$$\alpha x x'+\delta=0, \qquad \text{ossia} \qquad x x'=-\frac{\delta}{\alpha}=\text{costante}.$$

L'ultima equazione può scriversi

$$JX \cdot I'X' = \text{costante},$$

e ci dice: *In una proiettività tra due punteggiate è costante il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti qualisivogliano dai rispettivi punti limite;* quel prodotto costante chiamasi *potenza* della proiettività. Viceversa, due punti X, X', i quali si muovano sopra due rette, in guisa che rimanga costante, $=p$, il prodotto delle distanze dei punti stessi da due punti J, I' fissati sulle rette, descrivono punteggiate proiettive di cui J ed I' sono i punti limite, e p è la potenza.

b) Si supponga in secondo luogo $\alpha=0$, e quindi, per la (2), $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Allora I' ed J hanno per ascisse $\pm\infty$, e nella proiettività (1), la cui equazione diviene

$$\beta x+\gamma x'+\delta=0,$$

si corrispondono i punti all'infinito delle due punteggiate. Se inoltre si suppone (come è lecito senza introdurre restrizioni) che la origine della seconda punteggiata cada nel punto O' corrispondente alla origine O della prima, la equazione precedente mancherà pure del termine noto e si ridurrà alla forma

$$\beta x + \gamma x' = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{x}{x'} = -\frac{\gamma}{\beta} = \text{costante},$$

od anche

$$\frac{OX}{O'X'} = \text{costante}.$$

Di qua segue subito che *ogni* segmento della prima punteggiata sta in un rapporto costante (*rapporto di similitudine*) col corrispondente segmento della seconda; ciò si esprime dicendo che le due punteggiate sono *simili*, che la proiettività è una *similitudine*. Dunque: *Due punteggiate riferite proiettivamente, in guisa che si corrispondano i punti all'infinito dei loro sostegni, sono simili, e viceversa.* Le punteggiate risultano poi *uguali* se il rapporto di similitudine vale ± 1.

La equazione bilineare della *similitudine* fra due punteggiate, riferite a sistemi di ascisse, manca del termine col prodotto xx' (1).

II. *Tra fasci di rette.* — Due fasci propri di rette $abc, \ldots$, $a'b'c' \ldots$, in corrispondenza biunivoca, diconsi *uguali*, se ogni angolo dell'un fascio è uguale al corrispondente angolo dell'altro, vale a dire se, scelti convenientemente i versi nei due fasci, valgono, anche nel segno, le relazioni $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$, $\widehat{ac} = \widehat{a'c'}, \ldots$ Assumiamo due rette arbitrarie o, p' dei due fasci come origini di due sistemi di coordinate tangenti, $x = \operatorname{tg} oa$, $x' = \operatorname{tg} p'a'$. Detta o' la retta del secondo fascio che corrisponde alla o del primo, e posto $\widehat{o'p'} = \omega$, avremo, per due rette corrispondenti qualisivogliano a, a',

$$\widehat{p'a'} = \widehat{o'a'} - \widehat{o'p'} = \widehat{oa} - \omega,$$

---

(1) I teoremi *a*) e *b*) si dimostrano anche senza ricorrere alla equazione della proiettività. Posto infatti che questa sia $ABC \ldots \barwedge A'B'C' \ldots$, si ha:

nel caso *a*), $(ABJI_\infty) = (A'B'J'_\infty I')$, ossia $\dfrac{AJ}{BJ} = \dfrac{B'I'}{A'I'}$, donde

$$JA \cdot I'A' = JB \cdot I'B' = \ldots = \textit{potenza};$$

e nel caso *b*), $(ABCI_\infty) = (A'B'C'I'_\infty)$, ossia $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A'C'}{B'C'}$, donde

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = \textit{rapporto di similitudine}.$$

e quindi, prendendo le tangenti del primo e ultimo membro,

$$x' = \frac{x - \operatorname{tg}\omega}{1 + x\operatorname{tg}\omega},$$

ossia

$$xx' \operatorname{tg}\omega - (x - x') + \operatorname{tg}\omega = 0.$$

Lasciando da parte il caso $\omega = 0$, in cui le rette origini o, p' dei due fasci si corrispondono, l'equazione può scriversi

$$(3) \qquad xx' + \beta(x - x') + 1 = 0,$$

dove $\beta = -\operatorname{cotg}\omega$ è una costante. La (3) rappresenta, nei detti sistemi di riferimento, l'uguaglianza tra i due fasci.

Due fasci uguali segano sulle rette all'infinito dei rispettivi piani due punteggiate proiettive che diconsi *uguali*, perchè vengono proiettate da due punti arbitrari dello spazio, mediante fasci eguali.

65. Equazione della proiettività determinata da tre coppie di elementi corrispondenti. — Riprendiamo due forme di prima specie qualisivogliano, sulle quali siano fissati due sistemi di coordinate proiettive (o casi particolari), e ricordiamo che data una equazione del tipo

$$(1) \qquad \alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

è pienamente determinata una proiettività fra le due forme. Ora la equazione (1) dipende esclusivamente dai valori delle quattro costanti α, β, γ, δ, o meglio (poichè tutta la (1) può moltiplicarsi per uno stesso fattore non nullo) dai rapporti di tre di quelle alla quarta. Volendo adunque fissare una proiettività tra le due forme, possiamo esigere che siano soddisfatte *tre* condizioni, traducentisi in *tre* equazioni fra i *tre* rapporti nominati. Se, ad es., a tre elementi assegnati di coordinate a, b, c dell'una forma, debbono corrispondere tre elementi, pure assegnati, di coordinate a', b', c' della seconda, le equazioni in discorso si presenteranno sotto la forma seguente:

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha aa' + \beta a + \gamma a' + \delta = 0, \\ \alpha bb' + \beta b + \gamma b' + \delta = 0, \\ \alpha cc' + \beta c + \gamma c' + \delta = 0. \end{cases}$$

Queste sono lineari ed omogenee rispetto alle incognite α, β, γ, δ (o non omogenee rispetto ai rapporti $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$); esse, generalmente, determinano le α, β, γ, δ, a meno di un fattore arbitrario non nullo; sostituendo i valori trovati al posto dei coefficienti della (1), si ha la equazione cercata della nostra proiettività. Il procedimento qui indicato si effettua nel modo più breve se, insieme alle (2), si considera anche la (1), la quale è pure una equazione lineare ed omogenea rispetto alle sole incognite α, β, γ, δ, quando si riguardino x ed x' come coordinate di due elementi corrispondenti. La condizione di coesistenza delle quattro equazioni (1) e (2), per valori non tutti nulli di α, β, γ, δ, è espressa dalla relazione

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ aa' & a & a' & 1 \\ bb' & b & b' & 1 \\ cc' & c & c' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora questa è una equazione bilineare nelle variabili x ed x', la quale in virtù del ragionamento fatto, rappresenta la proiettività richiesta (od anche la condizione di uguaglianza dei due doppi rapporti (x, a, b, c), (x', a', b', c')).

Esercizi. — 1) Scrivere la equazione di una proiettività fra due punteggiate, sapendo che i punti limite di queste hanno rispettivamente le ascisse $+1$ e -1, e che si corrispondono i punti di ascisse 2 e 3 della prima e seconda punteggiata.

2) Costruire le proiettività rappresentate dalle equazioni $x' = x + a$, $x' = bx$, $x' = \frac{1}{x}$, nella ipotesi che x ed x' siano ascisse di punti variabili sopra due punteggiate, ed a, b abbiano valori numerici noti. Dove si trovano i punti limite?

3) Calcolare la potenza della proiettività fra punteggiate, $\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$, essendo x, x' ascisse di punti corrispondenti.

4) Scrivere la equazione della proiettività prodotto delle due proiettività $x' = \frac{mx + n}{px + q}$, $x'' = \frac{m'x' + n'}{p'x' + q'}$.

5) Dimostrare che ogni proiettività può riguardarsi come prodotto di più proiettività appartenenti ai tipi particolari indicati nell'es. 2).

66. Posizioni particolari di forme proiettive. — Vogliamo ora occuparci di questioni inerenti a particolari posizioni che possono avere due forme proiettive.

Supponiamo date, ad es., due punteggiate proiettive u ed u' situate in uno stesso piano, e sia $\boldsymbol{P}$ la proiettività con cui si passa da u ad u', e $\boldsymbol{P}^{-1}$ la proiettività inversa con cui si passa da u' ad u. Il punto uu' comune ai due sostegni va considerato una prima volta come elemento di u ed indicato, ad es., con A, una seconda volta come elemento di u', nel qual caso sarà opportuno indicarlo con una lettera diversa, ad es. B'. Al punto A di u corrisponde, per la $\boldsymbol{P}$, un punto A' di u', che generalmente sarà distinto da A; e similmente al punto B' di u' corrisponde, per la $\boldsymbol{P}^{-1}$, un punto B di u, generalmente distinto da B'. Se però in un caso particolare A coincide con A' (e quindi B' con B), allora A si dirà punto *unito*. E sempre, in una proiettività fra due forme dello stesso nome, dicesi *unito* un elemento che appartenga alle due forme e, considerato nell'una, abbia per corrispondente sè stesso nell'altra.

Considerazioni analoghe si faranno se *ogni* elemento dell'una forma appartiene all'altra, nella quale ipotesi le due forme si dicono *sovrapposte*. Tali sono adunque due punteggiate giacenti sulla stessa retta; due fasci di rette concentrici in uno stesso piano; due fasci di piani aventi lo stesso asse.

Così, se u, u' sono due punteggiate sovrapposte, ogni punto $A \equiv B'$ della retta sostegno comune va considerato due volte, e al detto punto corrispondono, in virtù della proiettività $\boldsymbol{P}$ o $\boldsymbol{P}^{-1}$ rispettivamente, i due punti A' di u', o B di u; i due nuovi punti sono distinti dal punto di partenza, a meno che questo non sia punto unito, e generalmente sono distinti fra loro, perchè la proiettività $\boldsymbol{P}$ differisce generalmente dalla inversa $\boldsymbol{P}^{-1}$ [1].

Una particolarissima proiettività tra forme sovrapposte si ottiene facendo corrispondere ad ogni elemento del sostegno comune l'elemento stesso; è la *identità* (n.° 61, Oss.), che ha come unito ogni elemento. Poichè la *identità* è individuata quando

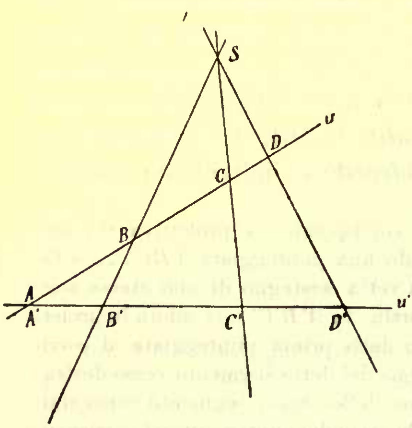
[1] Un esempio semplicissimo di corrispondenza proiettiva tra due forme sovrapposte si ottiene considerando una punteggiata $ABC \ldots$, e facendone poi scorrere gli elementi sulla retta sostegno di uno stesso segmento, ad es. verso destra, finchè si portino in $A'B'C' \ldots$; allora la proiettività $\boldsymbol{P}$ con cui si passa da un punto della prima punteggiata al corrispondente punto della seconda (traslazione del detto segmento verso destra) è ben diversa da quella $\boldsymbol{P}^{-1}$ (traslazione dello stesso segmento verso sinistra), con cui si ritorna da un punto della seconda punteggiata al corrispondente punto della prima; ad un unico punto $A \equiv B'$ del sostegno comune corrispondono dunque due punti *distinti* A' e B, rispettivamente nella seconda e prima punteggiata.

a tre elementi del sostegno comune, considerati nell' una forma, si facciano corrispondere gli elementi stessi, considerati nell'altra forma (n.° 62), segue che *una proiettività tra due forme sovrapposte, la quale abbia tre elementi uniti, ha ogni altro elemento unito ed è la identità.*

67. Posizione prospettiva di forme proiettive. — Due forme proiettive possono assumere altre posizioni notevoli dette *posizioni prospettive.* Per quanto riguarda due forme di nome diverso, noi già dicemmo (n.[i] 10,57) che esse diconsi *prospettive* (e son certo proiettive), quando una di esse è proiezione o sezione dell'altra, di guisa che elementi corrispondenti sempre si appartengono.

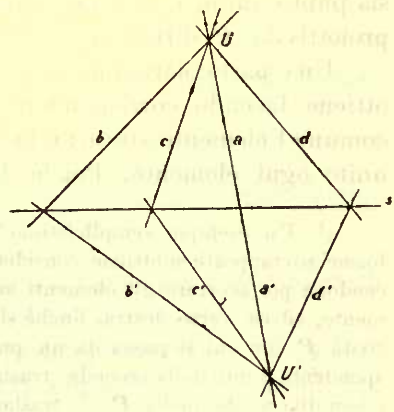
Si dice inoltre che due forme dello stesso nome giacenti in uno stesso piano, (e riferite proiettivamente) sono *prospettive* nei seguenti casi, che si corrispondono per dualità piana:

quando due punteggiate sono ottenute segando uno stesso fascio di rette con due trasversali, in guisa che le rette congiungenti punti corrispondenti delle due punteggiate passano tutte per uno stesso punto (*centro di prospettiva*).



Due punteggiate prospettive hanno *unito* il punto comune ai loro sostegni.

quando due fasci di rette sono ottenuti proiettando una stessa punteggiata da due centri diversi, in guisa che i punti di incontro di rette corrispondenti dei due fasci stanno tutti sopra una stessa retta (*asse di prospettiva*).



Due fasci prospettivi hanno *unita* la retta congiungente i loro centri.

È importante notare che quest'ultima osservazione si inverte. Infatti:

Se due punteggiate riferite proiettivamente, non sovrapposte, hanno un punto unito, esse sono prospettive.

Se due fasci di rette (di un piano) riferiti proiettivamente, non sovrapposti, hanno una retta unita, essi sono prospettivi.

Dimostriamo, ad es., la proposizione di sinistra. Posto che la proiettività fra le punteggiate u ed u' sia

$$ABCD\ldots \,\overline{\wedge}\, A'B'C'D'\ldots, \tag{1}$$

e che $A \equiv A'$ sia il punto unito, consideriamo la intersezione S delle rette BB' e CC'. Proiettando da S i punti di u sopra u', otteniamo una proiettività che muta i punti A, B, C di u nei punti A', B', C' di u', e che coincide quindi colla proiettività (1) (n.° 62). Segue che i punti $D, \ldots$ di u hanno per proiezioni, da S, i punti $D', \ldots$ di u', cioè che le rette $DD', \ldots$ passano tutte per lo stesso punto S (*centro di prospettiva*).

Osservazione. — Dalla definizione segue che la relazione prospettiva fra due forme dipende dalla mutua posizione delle forme stesse. Due forme *prospettive*, o meglio *due forme proiettive in posizione prospettiva*, rimangono proiettive, ma perdono generalmente la posizione prospettiva, quando i loro sostegni vengano spostati l'uno rispetto all'altro. Inversamente due punteggiate o due fasci di rette proiettivi, ma non prospettivi, possono esser sempre portati in tale posizione da divenir prospettivi: giacchè basta collocare le due forme in uno stesso piano, ed in guisa che un elemento prefisso dell'una venga a coincidere coll'elemento corrispondente dell'altra, senza che le forme si sovrappongano.

Segue ancora che due forme prospettive ad una terza non sono generalmente prospettive tra loro, ma soltanto proiettive; si può dire che il prodotto di due o più prospettività non è in generale una prospettività, ma solo una proiettività.

68. Costruzione di proiettività tra forme di prima specie. — Le proposizioni del n°. precedente ci mettono in grado di risolvere graficamente, nel modo più semplice, il seguente

Problema. — *Determinata una proiettività tra due forme di prima specie, coll'assegnare di tre elementi dell'una i tre elementi corrispondenti dell'altra forma, di ogni quarto elemento della prima forma costruire il corrispondente elemento della seconda.*

Ci limiteremo alla ipotesi che le due forme stiano in uno stesso piano, e siano ambedue punteggiate u, u' colle terne

A, B, C e A', B', C' di punti corrispondenti, o fasci di rette U, U' colle terne a, b, c e a', b', c' di rette corrispondenti; i due casi si corrispondono per dualità piana. Ogni altro caso si riduce a questi, sostituendo ad una, o ad ambedue le forme date, una nuova forma proiezione o sezione di quella.

a) *Le due forme non siano sovrapposte.*

Se A coincide con A', le due punteggiate risultano prospettive (n.° 67), e tutto si riduce a costruire il centro di prospettiva $S \equiv BB' \cdot CC'$, dal quale il punto arbitrario D di u vien proiettato nel punto corrispondente richiesto D' di u'.

In caso opposto, si proiettino le punteggiate u, u' da due punti ausiliari S, S' distinti, che non appartengano rispettivamente ad u, u'. Le due terne di punti ABC, $A'B'C'$ forniranno due terne di rette abc, $a'b'c'$ dei due fasci S, S'; e il problema sarà ridotto a costruire la proiettività $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a'b'c' \end{pmatrix}$ tra i due fasci.

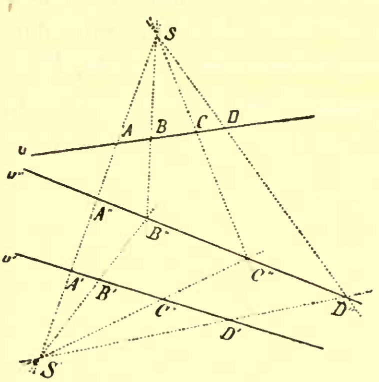
Ora questi risultano prospettivi se hanno una retta unita (n.° 67), vale a dire se i centri S, S' sono scelti sopra una stessa delle tre rette AA', BB', CC'. Posto, ad es., che appartengano alla prima retta (e con ciò si suppone che nè A, nè A' coincidano col punto uu'), si determinino i punti $bb' \equiv B''$, $cc' \equiv C''$. Sarà allora $u'' \equiv B''C''$ l'asse di prospettiva dei due fasci S,

Se a coincide con a', i due fasci risultano prospettivi, (n.° 67), e tutto si riduce a costruire l'asse di prospettiva $u \equiv bb' \cdot cc'$, sul quale si segano la retta arbitraria d di U e la retta corrispondente richiesta d' di U'.

In caso opposto, si seghino i fasci U, U' con due rette ausiliari s, s' distinte, che non appartengano rispettivamente ad U, U'. Le due terne di rette abc, $a'b'c'$ forniranno due terne di punti ABC, $A'B'C'$ delle due punteggiate s, s', e il problema sarà ridotto a costruire la proiettività $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ tra le due punteggiate.

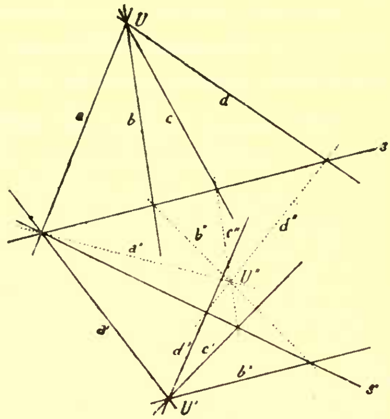
Ora queste risultano prospettive se hanno un punto unito (n.° 67), vale a dire se le rette u, u' sono condotte per uno stesso dei tre punti aa', bb', cc'. Posto, ad es., che siano condotte per il primo punto (e con ciò si suppone che nè a, nè a' coincidano colla retta UU'), si determinino le rette $BB' \equiv b''$, $CC' \equiv c''$. Sarà allora $U'' \equiv b''c''$ il centro di pro-

S'. Servendoci di questo, noi possiamo, data una retta d arbitraria nel primo fascio, costruire la corrispondente retta



d' nel secondo fascio, e quindi, dato un punto $D \equiv du$ della punteggiata u, costruire il corrispondente punto $D' \equiv d'u'$ della punteggiata u'.

spettiva delle due punteggiate s, s'. Servendoci di questo, noi possiamo, dato un punto D arbitrario nella prima punteggiata,



giata, costruire il corrispondente punto D' nella seconda punteggiata, e quindi, data una retta $d \equiv DU$ del fascio U, costruire la corrispondente retta $d' \equiv D'U'$ del fascio U'.

Nella costruzione si adoperano vari elementi arbitrari (ad es., a sinistra, i punti S, S', costretti solo a stare sopra una delle tre rette AA', BB', CC'); ma comunque si disponga di questi, partendo da un elemento dato della prima forma, si giungerà sempre allo stesso elemento della seconda forma.

b) *Le due forme siano sovrapposte.*

Scelti ad arbitrio due punti distinti S, S', fuori del sostegno comune alle punteggiate date u, u', si proiettino da S i tre punti A, B, C di u e da S' i tre punti A', B', C' di u', ottenendo rispettivamente le terne di rette abc e $a'b'c'$. Determi-

Scelte ad arbitrio due rette distinte s, s', non passanti pel centro comune ai due fasci dati U, U', si seghino con s le tre rette a, b, c di U, e con s' le tre rette a', b', c' di U', ottenendo rispettivamente le terne di punti ABC ed $A'B'C'$. Determinata

nata così la proiettività $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a'b'c' \end{pmatrix}$ tra i due fasci S, S', si costruisca di una retta arbitraria d di S la corrispondente retta d' di S'. Saranno allora $D \equiv du$ e $D' \equiv d'u'$ due punti corrispondenti delle punteggiate u, u'.

così la proiettività $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ fra le due punteggiate s, s', si costruisca di un punto arbitrario D di s il corrispondente punto D' di s'. Saranno allora $d \equiv DU$ e $d' \equiv D'U'$ due rette corrispondenti dei fasci U, U'.

69. Nuova definizione della proiettività — Le costruzioni del n.° precedente mostrano che, date due forme di 1ª. specie in corrispondenza proiettiva, si può sempre passare dall'una all'altra (e precisamente da ogni elemento dell'una al corrispondente elemento dell'altra) con un numero finito di operazioni di proiezione o sezione. Per esempio, nel caso che i sostegni u, u' di due punteggiate riferite proiettivamente giacciano in un piano senza coincidere, per passare dalla punteggiata $ABCD\ldots$ su u, alla punteggiata $A'B'C'D'\ldots$ su u', basta (si veda la figura del n.° 68, a sinistra) proiettare la prima punteggiata da S, segare il fascio così ottenuto con u'', proiettare la nuova punteggiata da S', e segare il nuovo fascio con u'.

Siccome d'altra parte si sa (n.° 59) che due forme di 1ª specie, una delle quali possa dedursi dall'altra mediante una o più operazioni di proiezione o sezione, sono in corrispondenza proiettiva, così si conclude che la definizione di proiettività da noi data (n.° 58) può sostituirsi colla seguente, adottata da vari autori:

Due forme di prima specie diconsi riferite proiettivamente, quando si può passare dall'una all'altra (e precisamente da ogni elemento dell'una al corrispondente elemento dell'altra) *con un numero finito di proiezioni e sezioni* (1).

70. Asse e centro di proiettività. — La costruzione della proiettività fra due forme non sovrapposte (n.° 68) si semplifica, quando si scelgano convenientemente gli elementi ausi-

---

(1) O in altre parole: chiamasi *proiettività* il prodotto di un numero finito di corrispondenze prospettive.

liari (S ed S', oppure s ed s') di cui si dispone, e ciò in base ai teoremi seguenti:

Date in un piano due punteggiate proiettive, non sovrapposte,

$$ABCD \ldots \barwedge A'B'C'D' \ldots,$$

i punti

$$AB' \cdot A'B,\ AC' \cdot A'C, \ldots, \quad BC' \cdot B'C, \ldots$$

stanno tutti sopra una stessa retta, la quale sega il sostegno di ciascuna punteggiata in un punto, che ha per corrispondente sull' altra punteggiata la intersezione dei due sostegni. Quella retta dicesi *asse di proiettività delle due punteggiate.*

Dati in un piano due fasci di rette proiettivi, non sovrapposti,

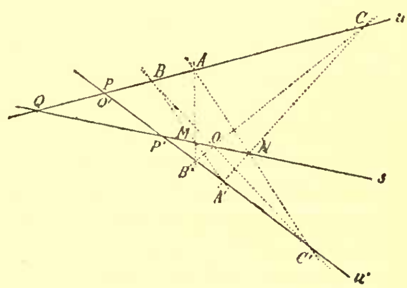
$$abcd \ldots \barwedge a'b'c' \ldots,$$

le rette

$$ab' \cdot a'b,\ ac' \cdot a'c, \ldots, \quad bc' \cdot b'c, \ldots$$

passano tutte per uno stesso punto, il quale, congiunto col centro di ciascun fascio, dà una retta, che ha per corrispondente nell' altro fascio la congiungente i due centri. Quel punto dicesi *centro di proiettività dei due fasci.*

Dimostriamo, ad es., il teorema di sinistra. Dette u, u' le due punteggiate proiettive, si proiettino queste da due punti corrispondenti, presi ordinatamente sopra u' ed u, ad es. da A' ed A (posto che nè A nè A' cadano in uu'). Otterremo i due fasci



$$A'(ABCD\ldots) \barwedge A(A'B'C'D'\ldots),$$

i quali riescono prospettivi perchè hanno la retta unita AA'. Segue che le intersezioni di rette corrispondenti

$$A'B \cdot AB' \equiv M, \quad A'C \cdot AC' \equiv N, \quad A'D \cdot AD', \ldots$$

cadono sopra una stessa retta s, nota la quale, si può subito costruire sopra una delle punteggiate il corrispondente di un punto qualsiasi dell' altra. Così si vede che il punto uu', considerato sopra u, e detto P, ha per corrispondente sopra u' il punto P' intersezione con s; e similmente il punto uu', considerato sopra u', e detto Q', ha per corrispondente sopra u il punto Q intersezione con s. Ora le considerazioni qui fatte si possono ripetere, assumendo come centri di proiezione delle punteggiate u, u' due nuovi punti corrispondenti, ad es. B' e B. Risulta allora che i punti

$$B'A \cdot BA' \equiv M, \quad B'C \cdot BC' \equiv O, \quad B'D \cdot BD', \ldots$$

si trovano sopra una stessa retta, la quale deve (come s) segare u' ed u nei punti P' e Q, corrispondenti al punto $uu' \equiv P \equiv Q'$. Ma la nuova retta, avendo in comune con s tre punti M, P' e Q (dei quali due almeno sono distinti), coincide con s. E di qua risulta il teorema che si voleva dimostrare.

In base al teorema, per costruire la proiettività $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ fra due punteggiate u, u' non sovrapposte, conviene anzitutto determinare l'asse di proiettività, giacchè, noto questo, e dato un punto D arbitrario di u, il punto corrispondente D' di u' si potrà ottenere con tante costruzioni diverse, quante sono le coppie di punti corrispondenti già noti della proiettività.

Osservazione I. — Se le punteggiate u ed u' sono prospettive rispetto ad un centro S, si ottiene il corollario di sinistra:

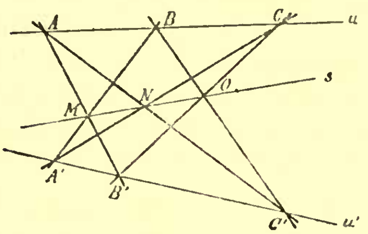
Date in un piano due rette u, u′, *ed un punto* S *che non appartenga a nessuna di quelle, se per* S *si conducono più trasversali, le quali seghino le rette* u, u′ *nelle coppie di punti* AA′, BB′, CC′, . . . , *allora i punti* AB′ · A′B, AC′ · A′C, BC′ · B′C... *stanno sopra una stessa retta, che passa pel punto* uu′, e dicesi *polare di* S *rispetto alla coppia di rette* uu′ (cfr. n. 16, es. 1)). La polare di S può pure definirsi come il luogo dei punti coniugati armonici di S rispetto alle coppie di punti segate sopra u, u' dalle trasversali per S (cfr. n.° 53, es. 5)).

Dati in un piano due punti U, U′, *ed una retta* s *che non appartenga a nessuno di quelli, se su* s *si prendono più punti, i quali, congiunti con* U, U′, *diano le coppie di rette* aa′, bb′, cc′, . . . , *allora le rette* ab′ · a′b, ac′ · a′c, bc′ · b′c, . . . *passano per uno stesso punto, che sta sulla retta* UU′, e dicesi *polo di* s *rispetto alla coppia di punti* UU′ (cfr. n.° 16, es. 4)). Il polo di s può pure definirsi come punto comune alle rette coniugate armoniche di s rispetto alle coppie di rette proiettanti U, U′ dai punti di s.

Osservazione II. — Il teorema generale di sinistra, nel caso che siano date due terne di punti ABC, $A'B'C'$ sopra due rette u, u' (terne che possono sempre ritenersi corrispondenti in una proiettività), ci dice che i tre punti $AB' \cdot A'B \equiv M$, $AC' \cdot A'C \equiv N$, $BC' \cdot B'C \equiv O$ sono allineati. Ora per enunciare questa osservazione, senza nominare la proiettività, conviene notare che i punti $AB'CA'BC'$ possono riguardarsi come i successivi vertici di un esagono semplice, i cui vertici di posto dispari stanno sopra una retta u, ed i vertici di posto pari sopra una seconda retta

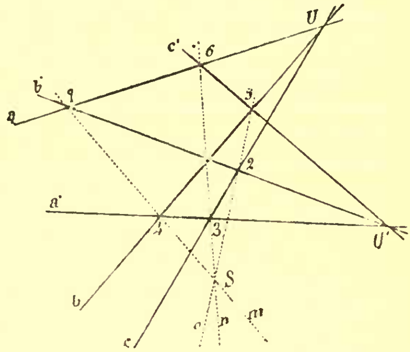
u'. I punti M, O, N si presentano allora come intersezioni relative alle coppie di lati opposti (1° e 4°, 2° e 5°, 3° e 6°) dell' esagono. Da ciò segue il teorema di sinistra (dovuto a Pappo; cfr. n.° 16, es. 17), e n.° 37, es. 8)):

Se un esagono semplice ha i vertici di posto dispari sopra una retta, e



i vertici di posto pari sopra una seconda retta, le tre intersezioni delle coppie di lati opposti appartengono ad una terza retta.

Se un seilatero semplice ha i lati di posto dispari passanti per un punto,



ed i lati di posto pari passanti per un secondo punto, le tre congiungenti le coppie di vertici opposti passano per un terzo punto.

Esercizi. I. — 1) Dato un fascio di rette ed una punteggiata proiettiva a quello, segare il fascio con una trasversale in guisa da ottenere una punteggiata simile od anche uguale alla data.

2) Sopra tre rette formanti fascio si abbiano tre punteggiate, due delle quali siano prospettive alla terza; si dimostri che anche la prima e la seconda sono prospettive, ed i tre centri di prospettiva sono allineati. Se ne deduca una nuova dimostrazione del teorema dei triangoli omologici giacenti in un piano. Questione duale nel piano.

3) Se di due punteggiate prospettive una ruota intorno al punto unito (proprio), le punteggiate rimangono prospettive, ed il centro di prospettiva descrive un cerchio (o sfera se il sostegno mobile descrive una stella anzichè un fascio) avente per centro il punto limite della punteggiata fissa, e per raggio la distanza fra il punto limite della punteggiata mobile ed il punto unito.

4) L' asse di proiettività di due punteggiate proiettive è parallelo alla retta congiungente i punti limite.

5) Se A, B, C sono i punti in cui una retta d è segata da tre rette a, b, c, le rette perpendicolari condotte da A a b e c, da B a c ed a, da C ad a e b determinano (prese in ordine conveniente) un esagono semplice i cui vertici di posto dispari sono A, B, C, mentre i vertici di posto pari stanno sopra una seconda retta. Da questa osservazione si deduca il teorema di Steiner: « i punti di concorso delle altezze dei quattro trilateri « formati coi lati di un quadrilatero, presi tre a tre, stanno per diritto ».

6) Date due punteggiate proiettive su rette distinte u, u' di un piano, e data inoltre nel piano una retta s, che non passi per uu', determinare due centri di proiezione S, S' tali, che i fasci proiettanti quelle punteggiate riescano prospettivi coll'asse di prospettiva s. Il problema ammette infinite soluzioni, e precisamente esistono due rette, luoghi rispettivamente dei punti S, S', sulle quali i punti S, S' si corrispondono proiettivamente. Caso particolare che s sia l'asse di proiettività delle u, u'; caso che sia la retta all'infinito. Questione duale nel piano.

II. — 7) Se $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, sono due punteggiate simili, giacenti sopra due rette distinte u, u' di un piano, secantisi in un punto proprio O, sussistono le seguenti proprietà: *a*) il luogo del vertice opposto ad O nei parallelogrammi costruiti sulle coppie di lati OA, OA', oppure OB, $OB'\ldots$, è una retta; *b*) il luogo del punto medio dei segmenti AA', BB',... congiungenti punti omologhi, è una seconda retta, parallela alla precedente; *c*) se per O si conducono i segmenti OA_0, $OB_0\ldots$ paralleli ed eguali (anche nel verso) ai segmenti AA', BB',..., i punti A_0, B_0,... stanno tutti sopra una terza retta; *d*) i cerchi circoscritti ai triangoli OAA', OBB',.., hanno in comune (oltre O) un secondo punto S; *e*) i triangoli SAA', $SBB'\ldots$ sono simili tra loro; *f*) la punteggiata $A'B'C'\ldots$ può esser portata in posizione prospettiva rispetto alla punteggiata $ABC\ldots$, purchè il piano di quella si faccia ruotare intorno ad S di un angolo conveniente, mentre la retta u rimane fissa.

8) Se le punteggiate $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, sono uguali, sussistono le proprietà precedenti, ed inoltre il punto S si trova sulle perpendicolari ai segmenti AA', BB',... nei loro punti medi, per modo che la rotazione sopra nominata porta l'una punteggiata a coincidere coll'altra.

9) Date due punteggiate simili $ABC,\ldots$, $A'B'C'\ldots$, situate su due rette di un piano, trovare due punti omologhi X, X' la cui distanza XX' sia uguale in valore assoluto ad un dato segmento; quante soluzioni può avere il problema? come si costruiscono due punti omologhi delle due punteggiate, la distanza dei quali sia minima?

III. — 10) Le rette congiungenti punti corrispondenti di due punteggiate proiettive a sostegni sghembi formano un tal sistema, che ogni retta secante tre di quelle, sega tutte le altre; (si proiettino infatti le due punteggiate da una delle dette secanti; n.° 66). Teorema duale nello spazio.

11) Le infinite rette che incontrano tre rette date, sghembe a due a due, determinano punteggiate proiettive su queste; quelle adunque formano un sistema Σ' tale, che ogni retta secante tre rette di Σ', sega tutte le altre. Le rette secanti ora nominate formano alla lor volta un nuovo sistema Σ (a cui appartengono anche le rette date), il quale gode le stesse proprietà di Σ'. Due rette di uno stesso sistema sono sghembe tra loro, due rette di sistemi diversi si segano; ciascun sistema (e subordinatamente anche l'altro) è determinato da tre delle sue rette. Due sistemi come Σ e Σ' sono, ad es., quelli appartenenti ad un iperboloide rotondo ad una falda, di cui parla l'es. 15) del n.° 16).

71. Elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte. — Abbiamo già visto (n.° 66) che se due forme riferite proiettivamente sono sovrapposte, esse ammettono al più due elementi uniti, a meno che ogni altro elemento non sia unito. Ora, valendoci del metodo analitico, determineremo i detti elementi uniti.

Riferiamo perciò le due forme ad uno *stesso* sistema di coordinate proiettive; dette x, x' le coordinate di due elementi corrispondenti, la proiettività fra le due forme sarà rappresentata dalla equazione

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0. \tag{1}$$

Se indichiamo con y la coordinata di un elemento unito ($x = x' = y$), dovrà essere

$$\alpha y^2 + (\beta + \gamma) y + \delta = 0, \tag{2}$$

e quindi

$$y = \frac{-(\beta + \gamma) \pm \sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta}}{2\alpha}.$$

Possiamo dunque concludere (adottando il linguaggio del n.° 54):

Una proiettività (non identica) *fra due forme sovrapposte ha due elementi uniti, che possono essere reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginari coniugati;* nel primo caso $[(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0]$ la proiettività dicesi *iperbolica*, nel secondo $[(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta = 0]$ *parabolica*, e nel terzo $[(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0]$ *ellittica*.

72. Esempi. Uguaglianza diretta sulla punteggiata o nel fascio. — A due esempi notevoli, sotto l'aspetto metrico, di proiettività parabolica od ellittica si giunge mediante le considerazioni seguenti (1).

a) Le due forme siano punteggiate sovrapposte, riferite ad un sistema di ascisse. Se l'equazione della proiettività si riduce al tipo

$$\beta x + \gamma x' + \delta = 0 \tag{1'}$$

le due punteggiate sono simili (n.° 64, *b*)), ed hanno come unito il punto all'infinito U_∞. Allora l'equazione (2), da cui dipendono i punti uniti, si abbassa a primo grado

$$(\beta + \gamma) y + \delta = 0, \tag{2'}$$

---

(1) Di proiettività iperboliche si possono costruire esempi, assegnando ad arbitrio gli elementi uniti (distinti fra loro) ed inoltre due elementi corrispondenti distinti.

e fornisce l'ascissa

$$y = -\frac{\delta}{\beta + \gamma}$$

dell' altro punto unito V, reale, generalmente proprio, detto *centro di similitudine*. La similitudine fra punteggiate sovrapposte è dunque, in generale, una proiettività iperbolica.

Ma se $\beta + \gamma = 0$, $\delta \neq 0$, anche V è improprio, e la proiettività è parabolica. L'equazione (1') ora diviene

$$(1'') \quad \beta(x - x') + \delta = 0, \quad \text{ossia } x - x' = -\frac{\delta}{\beta} = \text{cost.},$$

e dice che è costante la distanza $AA' = BB' = CC' = \ldots$, fra ogni punto della prima punteggiata e il punto corrispondente della seconda; le due punteggiate sono uguali, anzi *direttamente uguali*, perchè segmenti corrispondenti sono uguali anche in segno. Dunque:

Una proiettività parabolica fra due punteggiate proprie sovrapposte, la quale abbia l'unico punto unito all'infinito, è una uguaglianza diretta; e viceversa.

Se poi nella (1'') si avesse inoltre $\delta = 0$, la proiettività sarebbe l'identità (1).

b) Anche tra due fasci di rette propri sovrapposti $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$ si stabilisce una *uguaglianza diretta* coll' esigere che sia $\widehat{aa'} = \widehat{bb'} = \widehat{cc'} = \ldots = \omega$ (costante); ma la particolare proiettività che così si ottiene, non ha evidentemente alcuna retta unita, è *ellittica*. Ciò risulta pure dall' osservare che (riferiti i due fasci ad un unico sistema di coordinate tangenti) la detta corrispondenza ha l'equazione (n.° 64, II)

$$xx' + \beta(x - x') + 1 = 0,$$

dove $\beta = \operatorname{cotg} \omega$; e questa, per $x = x'$, fornisce radici immaginarie.

L'uguaglianza diretta segata dai due fasci *sulla retta all' infinito* del loro piano, è pure una proiettività ellittica.

73. Due teoremi sopra gli elementi uniti di una proiettività generale.

a) Una proposizione di natura proiettiva si ottiene nel seguente modo. Siano U, V gli elementi uniti, reali o immaginari,

(1) Si noti che la equazione di *ogni* proiettività parabolica può porsi sotto la forma $x' = x +$ cost., pur di assumere come elemento fondamentale $\pm\infty$ del sistema di coordinate proiettive, l'unico elemento unito.

della proiettività $ABC\ldots \;\overline{\wedge}\; A'B'C'\ldots$ tra forme soravrapposte, e siano y_1, y_2 le coordinate di quelli, ed a, $b\ldots$, a', $b'\ldots$ le coordinate di A, B, $\ldots$, A', $B'\ldots$ Poichè la proiettività muta il gruppo $UVAB$ della prima forma nel gruppo $UVA'B'$ della seconda, i doppi rapporti dei due gruppi saranno uguali:

$$\frac{y_1 - a}{y_2 - a} : \frac{y_1 - b}{y_2 - b} = \frac{y_1 - a'}{y_2 - a'} : \frac{y_1 - b'}{y_2 - b'};$$

di qua si trae

$$\frac{y_1 - a}{y_2 - a} : \frac{y_1 - a'}{y_2 - a'} = \frac{y_1 - b}{y_2 - b} : \frac{y_1 - b'}{y_2 - b'},$$

ossia

$$(UVAA') = (UVBB').$$

Segue il teorema: *In una proiettività fra due forme sovrapposte è costante il doppio rapporto formato dai due elementi uniti con due elementi corrispondenti qualsivogliano.*

Quel doppio rapporto costante dicesi *caratteristica* o *invariante assoluto* della proiettività; esso non si altera se alle due forme di cui si parla, si sostituiscono due nuove forme, proiettive e sovrapposte tra loro, ottenute da quelle mediante una proiezione o sezione. La caratteristica di ogni proiettività parabolica vale $+1$.

Dati i due elementi uniti U, V reali e distinti, o immaginari coniugati, di una proiettività tra forme sovrapposte, e dato il valore $k \neq 1$ della caratteristica, la proiettività è pienamente determinata, giacchè per ogni elemento A della prima forma è individuato l'elemento corrispondente A' della seconda, mediante la condizione $(UVAA') = k$.

Se U, V sono reali e distinti, assumendoli come elementi fondamentali $\pm\infty$ e 0 di un sistema di coordinate proiettive, l'equazione della proiettività assume la forma semplice $x' = kx$ (1).

---

(1) Se invece U e V sono immaginari coniugati, si potranno prendere come elementi fondamentali $\pm\infty$, 0 due elementi reali armonici rispetto a quelli (n.° 54); allora la equazione della proiettività assume la forma $\alpha x x' + \beta(x - x') + \delta = 0$, dove $\frac{\delta}{\alpha}$ è un numero positivo, che con una scelta conveniente del punto fondamentale unità può supporsi uguale ad 1.

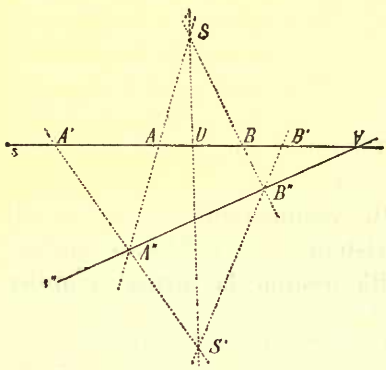
b) Procuriamoci ora una proprietà metrica degli elementi uniti, nella ipotesi che le due forme proiettive sovrapposte siano *punteggiate*, giacenti sopra una stessa retta propria. Riferite quelle punteggiate ad un unico sistema di *ascisse*, osserviamo che il punto medio fra i punti uniti, di *ascisse* y_1, y_2, ha l'ascissa $\frac{y_1 + y_2}{2} = - \frac{\beta + \gamma}{2\alpha}$ per la (2) del n.° 71. Ma questo valore è anche la semisomma delle ascisse $\left(- \frac{\gamma}{\alpha}, - \frac{\beta}{\alpha} \right)$ dei due punti limite delle dette punteggiate (n.° 64, I). Dunque: *In una proiettività fra punteggiate proprie sovrapposte il punto medio tra i punti uniti, è pure punto medio tra i punti limite* (ed è sempre reale). Tutto ciò vale nella ipotesi $\alpha \neq 0$; nella ipotesi opposta uno dei punti uniti è improprio (n.° 72, *a*)), ed il teorema perde ogni interesse.

74. Costruzione di un elemento unito quando l'altro è noto. — Proponiamoci ora di costruire gli elementi uniti di una proiettività tra due forme sovrapposte. E cominciamo dal caso che, dei due elementi, uno sia noto, e si richieda l'altro; il problema si risolve allora conducendo solo linee rette.

Si tratti ad es. di due punteggiate

$$UAB \ldots \barwedge UA'B' \ldots$$

giacenti sopra lo stesso sostegno s, ed aventi il punto unito U.



Condotta per U una retta qualsiasi, si prendano su di essa due punti arbitrari S, S'. Proiettando le due punteggiate ordinatamente da S ed S', otterremo i due fasci di rette

$$S(UAB \ldots) \barwedge S'(UA'B' \ldots),$$

i quali riescono anzi prospettivi perchè la retta SS' è unita (n.° 67). Segue che i punti A'', B'', ..., intersezioni di rette corrispondenti dei fasci S ed S', sono allineati sopra l'asse di prospettiva s''. Il punto V, intersezione di s coll'asse s'', è il punto unito che si cerca.

Si osservi che, se s'' passa per U, la proiettività fra le due punteggiate è parabolica, e viceversa. Di qua risulta che una proiettività parabolica tra due forme sovrapposte è pienamente determinata, e può costruirsi colla riga, quando di essa si conosca l'unico elemento unito e due elementi corrispondenti.

* 75. **Digressione sopra certe costruzioni che possono eseguirsi colla riga.** — L'ultima osservazione, applicata al caso che l'unico punto unito di una proiettività parabolica sia all'infinito U_∞ (n.° 72, a)), ci insegna che una uguaglianza diretta fra due punteggiate sovrapposte può costruirsi, coll'aiuto della sola riga, purchè siano dati due punti corrispondenti A, A', e sia tracciata una retta parallela al sostegno s delle punteggiate (n.° 16, I). È adunque possibile costruire su s, con quel mezzo, un segmento $A'B'$ uguale ad un segmento AB dato pure su s; è possibile, in conseguenza, costruire un segmento che sia somma o differenza di due segmenti dati su s; in generale, un segmento il cui valore sia $\pm a \pm b \pm c \pm \ldots$, se a, b, $c\ldots$ sono i valori di più segmenti dati su s.

Si osservi d'altra parte che se A, B, C ed A', B' sono punti fissati comunque su s, si può costruire colla sola riga, valendosi della nominata parallela ad s, il punto C' tale che sia

$$AB : BC = A'B' : B'C',$$

giacchè C' è il corrispondente di C nella proiettività $\begin{pmatrix} A\,B\,U_\infty \\ A'B'U_\infty \end{pmatrix}$. Dunque: dati tre segmenti di valori a, b, c sopra s, si può costruire su s un segmento (quarto proporzionale) avente il valore $\frac{bc}{a}$. E se uno (a, o c) dei segmenti dati si assume come unità di lunghezza, il segmento costruito avrà un valore uguale al prodotto od al quoziente dei valori dei due segmenti rimanenti.

Concludendo: *dati sopra una retta* s *più segmenti*, *uno dei quali si assuma come unità di misura*, *mentre gli altri abbiano le lunghezze* a, b, c, . . . , *è possibile costruire colla sola riga sulla retta* s, *valendosi di una parallela a questa*, *ogni segmento*, *il cui valore si ottenga eseguendo operazioni razionali*, *in numero finito*, *sui numeri* 1, a, b, c, . . .

Od anche, nella ipotesi che i detti segmenti abbiano tutti un estremo comune, il quale si assuma come origine di un sistema di ascisse:

Dati sopra una retta due o più punti, *due dei quali si assumano*, *rispettivamente*, *come origine e punto unità di un sistema* *di ascisse, mentre gli altri abbiano le ascisse* a, b, c . . . , *e data una parallela alla retta, è possibile costruire colla sola riga sulla retta primitiva ogni punto, la cui ascissa possa ottenersi mediante operazioni razionali eseguite sui numeri* 1, a, b, c . . .

Questo risultato, di natura metrica, può subito tradursi in forma proiettiva. Si consideri il piano π contenente s, sopra il quale si eseguiscono le costruzioni nominate, e si proiettino π ed s, da un centro qualsiasi, sopra un piano π' ed una retta s' di questo. Le figure costruttive, composte di rette, esistenti in π, daranno come proiezioni, figure composte ancora di rette in π'; ma i punti di s che hanno per *ascisse* 0, 1, $\pm\infty$, a, b, c . . ., si muteranno in punti di s' aventi le *coordinate proiettive* 0, 1, $\pm\infty$, a, b, c . . . (essendo fondamentali i primi tre punti; n.° 42, Oss.). Ed il risultato precedente si tradurrà senz'altro in questo, di cui un caso particolare fu già considerato (n.° 52):

Dati sopra una retta tre o più punti, dei quali tre si assumano come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive, e gli altri abbiano le coordinate a, b, c, . . . , *è possibile costruire colla sola riga su quella retta ogni altro punto, la cui coordinata possa ottenersi mediante operazioni razionali eseguite sui numeri* 1, a, b, c, . . .

La parallela alla retta che occorreva conoscere quando $\pm\infty$ era la coordinata (ascissa) di un punto improprio, non interviene più ora che $\pm\infty$ è la coordinata proiettiva di un punto generalmente proprio.

76. Una proprietà del cerchio. — Ritorniamo al problema di costruire gli elementi uniti di una proiettività fra due forme sovrapposte. Lo risolveremo seguendo una via indicata da Steiner (1832), la quale si appoggia sopra una nota proprietà del cerchio.

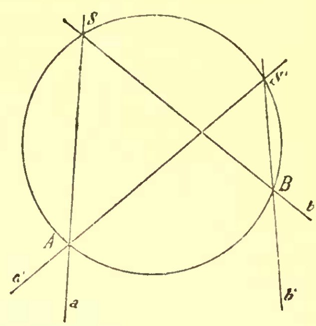
Se A e B sono due punti di una circonferenza, i quali vengano proiettati da due nuovi punti S, S' della circonferenza mediante le coppie di rette a, b ed a', b', rispettivamente, si ha

$$\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} \pmod{\pi}.$$

Applicando la stessa proprietà a quanti si vogliano punti

A, B, C... della circonferenza, costituenti, come diremo, una *punteggiata* sopra questa, risulta che:

I fasci proiettanti una punteggiata tracciata sopra una circonferenza da due punti di questa, sono direttamente uguali, e quindi proiettivi. Va inteso che se un punto della punteggiata coincide col centro di proiezione, per retta proiettante si deve assumere la tangente alla circonferenza in quel punto.



In particolare, proiettando quattro punti A, B, C, D di una circonferenza da un punto S di questa, si ottengono quattro rette, il cui doppio rapporto non varia mentre S descrive la circonferenza; lo chiameremo *doppio rapporto* $(ABCD)$ dei quattro punti nominati. Ed ora si può estendere la definizione di proiettività fra forme di prima specie, anche al caso che si metta in relazione una forma di prima specie con una punteggiata giacente sopra una circonferenza; e si può parlare di proiettività tra due punteggiate tracciate sopra due circonferenze distinte o coincidenti; si intenderà sempre: una corrispondenza biunivoca che lascia invariato il valore del doppio rapporto. In particolare: *una punteggiata sopra una circonferenza è proiettiva al fascio di rette che la proietta da un punto arbitrario della circonferenza: e due punteggiate giacenti sopra due circonferenze (distinte o coincidenti) sono proiettive, se i fasci di rette che proiettano quelle punteggiate da due punti arbitrari delle rispettive circonferenze, sono proiettivi tra loro.*

77. Costruzione degli elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte. — Premesse queste nozioni, supponiamo date due forme di prima specie proiettive e sovrapposte. Possiamo sempre ritenere, senza introdurre restrizioni, che le due forme nominate siano fasci propri di rette, giacchè se si trattasse ad es. di punteggiate, basterebbe proiettar queste da un unico centro di proiezione, e risolvere il problema che ci interessa per i fasci così ottenuti.

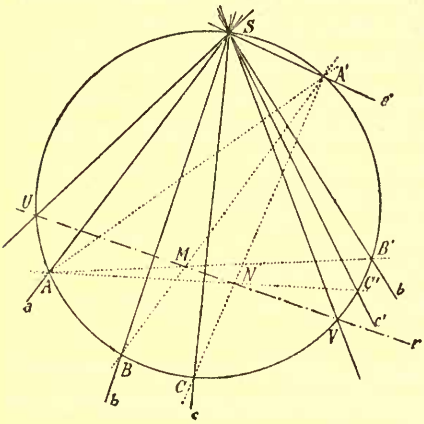
Siano adunque

$$(1) \qquad abc\ldots \;\overline{\wedge}\; a'b'c'\ldots$$

due fasci di rette aventi lo stesso centro (proprio) S. Condotta ad arbitrio una circonferenza che passi per S, sopra questa i due fasci segheranno due punteggiate proiettive

(2) $$ABC\ldots \;\overline{\wedge}\; A'B'C'\ldots$$

Proiettiamo ora la prima e la seconda punteggiata da due punti corrispondenti della seconda e prima, rispettivamente, come sono, ad es., A' ed A; otterremo due fasci proiettivi



$$A'(ABC\ldots) \;\overline{\wedge}\; A(A'B'C'\ldots),$$

anzi prospettivi, perchè hanno la retta unita AA' (n°67). Ne viene che i punti d'incontro di rette corrispondenti

$$A'B \cdot AB' \equiv M,$$
$$A'C \cdot AC' \equiv N, \ldots$$

apparterranno ad una stessa retta r. Ed ogni punto di r, proiettato da A' ed A rispettivamente, darà sulla circonferenza due punti D, D' corrispondenti nella proiettività (2), tali adunque che le rette $d \equiv SD$, $d' \equiv SD'$ si corrispondano nella proiettività primitiva (1). Risulta di qua che le intersezioni U, V di r colla circonferenza (ove esistano) sono i punti uniti della proiettività (2), e quindi le rette u, v, proiettanti quei punti da S, sono le rette unite richieste della proiettività (1). Questa è iperbolica, parabolica od ellittica, secondo che la retta r è secante, tangente od esterna alla circonferenza.

78. Asse di proiettività di due punteggiate sulla circonferenza; teorema di Pascal per il cerchio. — Per eseguire la costruzione precedente, possiamo scegliere come centri di proiezione, in luogo di A' ed A, altri due punti corrispondenti B' e B; ripetendo il ragionamento, troveremo che i punti

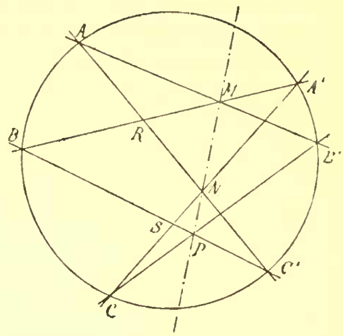
$$B'A \cdot BA' \equiv M, \quad B'C \cdot BC' \equiv P, \ldots$$

stanno sopra una stessa retta, che indicheremo con r'. Dimostriamo che r' coincide con r.

Se nella proiettività fra le due punteggiate sulla circonferenza esistono i punti uniti, le rette r ed r', dovendo passare per essi e per il punto M, coincideranno. Ma se i punti uniti non esistono, la dimostrazione precedente non sussiste più; ne daremo quindi un'altra, che valga in tutti i casi.

Com'è chiaro, tutto si riduce a provare che i tre punti M, N, P sono allineati. A tal fine proiettiamo il gruppo $BA'B'C'$ dai centri A e C; otterremo i due fasci proiettivi

$$A(BA'B'C') \barwedge C(BA'B'C').$$



Segando questi ordinatamente colle trasversali BA' e BC', avremo le punteggiate proiettive

$$BA'MR \barwedge BSPC'$$

(dove R, S sono rispettivamente i punti $AC' \cdot BA'$, $CA' \cdot BC'$). Queste sono anzi prospettive, avendo l'elemento B unito (n.° 67); quindi le rette $A'S$, MP, RC' concorrono in uno stesso punto; in altre parole, sulla retta MP cade il punto N intersezione di $A'S \equiv A'C$ e $RC' \equiv AC'$; c. d. d.

Possiamo così enunciare il teorema:

Se $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ sono due punteggiate proiettive giacenti sopra una circonferenza, i punti

$$AB' \cdot A'B, \quad AC' \cdot A'C, \ldots \quad BC' \cdot B'C, \ldots$$

stanno sopra una stessa retta (asse di proiettività delle due punteggiate), la quale sega la circonferenza nei punti uniti, se esistono, della proiettività.

In particolare, limitandoci a due terne di punti ABC, $A'B'C'$ assegnate ad arbitrio sulla circonferenza, osserveremo che i tre punti allineati

$$M \equiv AB' \cdot A'B, \quad P \equiv BC' \cdot B'C, \quad N \equiv AC' \cdot A'C$$

possono riguardarsi come intersezioni delle coppie dei lati opposti (1° e 4°, 2° e 5°, 3° e 6°) dell'esagono semplice $AB'CA'BC'$ iscritto nella circonferenza; siamo così condotti al teorema seguente:

In un esagono semplice iscritto in una circonferenza, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno in linea retta.

La proposizione è caso particolare di un celebre teorema sulle coniche dovuto a PASCAL (cfr. n.° 16, es. 16), e n.° 37, es. 10)); del quale teorema un altro caso particolare è la proposizione del n.° 70, Oss. II.

Esercizi I. — 1) Data l'equazione di una proiettività tra forme sovrapposte, calcolarne la caratteristica; condizione perchè la caratteristica valga — 1.

2) Se due proiettività P e Q hanno gli stessi elementi uniti, la proiettività prodotto $P \cdot Q$ ha pure quegli elementi uniti, ed ha come caratteristica il prodotto delle caratteristiche di P e Q. Si concluda che nella ipotesi fatta è $P \cdot Q = Q \cdot P$; P e Q diconsi *permutabili.*

3) In una proiettività $ABC \ldots \barwedge A'B'C' \ldots$ tra due forme sovrapposte, se un elemento descrive la prima forma nel verso ABC, l'elemento corrispondente descrive la seconda forma nel verso $A'B'C'$ (n.° 58); se i due versi coincidono la proiettività dicesi *concorde*, se sono opposti dicesi *discorde.* Data la proiettività mediante l'equazione $\alpha x x' + \ldots = 0$, si dimostri che si presenta l'uno o l'altro caso, secondo che il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ è positivo o negativo (n.^{i} 63; 27, es. 6)). E si concluda che una proiettività discorde (ossia una proiettività avente la potenza negativa) è sempre iperbolica.

4) Che una proiettività discorde sia iperbolica, si dimostra facilmente mediante considerazioni intuitive (che potrebbero rendersi rigorose), considerando due elementi corrispondenti mobili che descrivano le due forme, ed esaminando ove essi si incontrano. Considerazioni analoghe provano che una proiettività concorde è pure iperbolica, quando esista nell' una forma un tratto $M \ldots N$, il quale contenga interamente il tratto $M' \ldots N'$ che gli corrisponde sull' altra forma.

5) Quando di due punteggiate proiettive sovrapposte siano noti i punti limite J, I' e due punti corrispondenti A, A', per costruire i punti uniti si conducano due segmenti $JM = JA$, $I'M' = I'A'$ perpendicolari al sostegno comune, e diretti in uno stesso verso o in verso opposto, secondo che JA ed $I'A'$ hanno segno opposto od uguale. La circonferenza descritta su MM' come diametro passa per i punti uniti richiesti. Si deduca di qua nuovamente che una proiettività avente la potenza negativa è certo iperbolica.

6) Dati due fasci propri proiettivi di un piano, costruire le rette dell' uno che sono parallele alle rette corrispondenti dell' altro.

II — 7) Se A, B, C, D sono quattro punti armonici di una circonferenza, le tangenti al cerchio in A e B si segano sulla retta CD, e le tangenti in C e D si segano su AB; se una di queste due condizioni è soddisfatta, è soddisfatta anche l'altra, ed i quattro punti sono armonici.

8) Dati tre punti A, B, C, costruire la proiettività $\binom{ABC}{BCA}$; quale ne è la caratteristica? Supposti i punti sopra una circonferenza, dalla costruzione dell' asse di proiettività si deduca che « un triangolo iscritto in un cerchio

è omologico al triangolo formato dalle tangenti nei vertici del primo ». (cfr. n.° 37, es. 11)).

9) Nella costruzione di STEINER applicata a due fasci proiettivi sovrapposti, quali particolarità presenta l'asse di proiettività quando i due fasci sono direttamente od inversamente uguali?

10) Le infinite tangenti ad un cerchio segano sopra due tangenti fisse punteggiate proiettive. Di qua si può ricavare la definizione di doppio rapporto di quattro tangenti ad un cerchio, la nozione di proiettività fra una serie di tangenti ad un cerchio ed una forma di prima specie, o fra due serie di tangenti, ed una costruzione dei punti uniti di due punteggiate proiettive sovrapposte, valendosi di un cerchio tangente al comune sostegno; tutto ciò, procedendo in modo duale a quello seguito nei n.[i] 76-78. Si giungerà per questa via al teorema di BRIANCHON sul cerchio: « se un seilatero è circoscritto ad una circonferenza, le congiungenti le coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto » (cfr. n.° 16, es. 16)).

11) Data una *riga a due orli* paralleli, disponendo lo strumento in modo che gli orli passino rispettivamente per due punti O ed A, la cui distanza superi la larghezza della riga, si riesce a condurre per A la tangente al cerchio che ha O per centro e quella larghezza come raggio. Approfittando di questa osservazione e dell'es. 10), si costruiscano i punti uniti di due punteggiate proiettive sovrapposte, valendosi della sola riga a due orli.

III. — 12) Dati quattro numeri complessi $z_h = x_h + iy_h$, $(h = 1,2,3,4)$, possiamo riguardarli sia come ascisse di quattro punti immaginari di una punteggiata, sia come indici di quattro punti reali 1, 2, 3, 4 di un piano nella nota rappresentazione di GAUSS dei numeri complessi. Indicando nell'ultima ipotesi con $\overline{12}, \ldots$ le mutue distanze dei quattro punti, si dimostri che il doppio rapporto $k = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ è un numero (generalmente) complesso, che ha per modulo l'espressione $\frac{\overline{13}}{\overline{23}} : \frac{\overline{14}}{\overline{24}}$, e per argomento la differenza degli angoli sotto cui il segmento 21 è visto dai punti 3 e 4; od anche l'angolo secondo cui si segano i due cerchi 123, 124 (precisamente l'angolo delle due tangenti a quelli nel punto 2, prese nei versi 231, 241 rispettivamente).

13) Segue: la condizione necessaria e sufficiente affinchè il doppio rapporto k sia un numero reale, è che i quattro punti 1, 2, 3, 4 appartengano ad uno stesso cerchio (od eventualmente ad una retta, dovendo in questa teoria riguardarsi le rette come casi particolari di cerchi); e se la condizione è soddisfatta, k è precisamente il doppio rapporto dei quattro punti considerati sulla circonferenza (n.° 76); come giaceranno dunque i quattro punti se $k = -1$ (es. 7))? Se k è un immaginario puro, i due cerchi 123, 124 si segano ortogonalmente; si consideri in particolare il caso $k = i$.

14) Rappresentando come sopra i numeri complessi z, z' sui punti reali di due piani π, π', una equazione bilineare $\alpha zz' + \beta z + \gamma z' + \delta = 0$, dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri reali o complessi, definisce una corrispondenza biunivoca

fra i punti dei due piani (riguardando convenzionalmente, in ciascuno, il punto all'infinito come un *unico* punto, immagine del valore infinito di z o z'). Questa corrispondenza ha la proprietà notevole, dipendente dal carattere invariante del doppio rapporto, di mutare i punti di un cerchio (o in particolare di una retta) di π nei punti di un cerchio (o eventualmente di una retta) di π'; essa dunque trasforma cerchi in cerchi, è una *affinità circolare*, secondo la denominazione di Möbius. L'angolo di due cerchi arbitrari dell'un piano è uguale all'angolo dei cerchi corrispondenti dell'altro, e l'uguaglianza vale anche nel segno, se come versi positivi delle rotazioni si considerano quelli in cui crescono gli argomenti dei numeri complessi rappresentati sui due piani.

15) Se la equazione bilineare manca del termine col prodotto zz', l'affinità circolare muta ogni retta dell'un piano in una retta dell'altro, ed ogni figura in una figura simile; dicesi perciò *similitudine*.

16) Nella ipotesi che i due piani π, π' siano sovrapposti insieme agli assi dei numeri reali e degli immaginari puri, si interpretino, mediante la rappresentazione sopra nominata, le equazioni: $z' = z + a$ (*traslazione*, che muta ogni figura in una figura uguale, traslata rispetto alla prima), $z' = bz$ (*omotetia* rispetto al punto immagine dello *zero*, caso particolare di similitudine), $z' = \frac{1}{z}$ (che muta in un cerchio ogni retta non passante per l'origine).

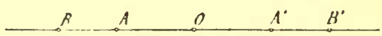
Capitolo III.

Involuzione sopra una forma di prima specie.

79. **Definizione.** — Fu già notato che nell'esaminare una corrispondenza proiettiva, non identica, fra due forme sovrapposte, occorre distinguere la proiettività diretta $\boldsymbol{P}$, con cui si passa dalla prima forma alla seconda, e la proiettività inversa $\boldsymbol{P}^{-1}$, che riconduce dalla seconda forma alla prima. Le due corrispondenze, od operazioni, $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}^{-1}$ sono generalmente distinte (come prova l'esempio della traslazione di un segmento costante portato nella nota al n.° 66). Volendo verificare sopra un caso dato se così avvenga, si procederà nel seguente modo. Si parta da un elemento A, non unito, del comune sostegno, e ad esso si applichi la proiettività $\boldsymbol{P}$; si otterrà un elemento A', distinto da A. Ora applichiamo nuovamente ad A' la proiettività $\boldsymbol{P}$; giungeremo ad un elemento A''. Se A'' è distinto da A, si conclude che la proiettività $\boldsymbol{P}$ (conducente da A' ad A'') è distinta dalla proiettività $\boldsymbol{P}^{-1}$ (conducente da A' ad A).

Supponiamo, al contrario, che A'' coincida con A, e che lo stesso fatto si presenti *comunque* si scelga l'elemento A sulla forma. Dovremo concludere allora che la nostra proiettività $\boldsymbol{P}$ coincide colla propria inversa $\boldsymbol{P}^{-1}$, cioè $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}$ (o, ciò che fa lo stesso, dovremo concludere che la proiettività $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}$, la quale muta A in $A'' \equiv A$, è la identità, $\boldsymbol{P}^2 = 1$).

A dimostrar l'esistenza di proiettività $\boldsymbol{P}$ coincidenti colle proprie inverse $\boldsymbol{P}^{-1}$, valga l'esempio seguente. Sopra una retta propria si fissi un punto proprio O, e come operazione $\boldsymbol{P}$ si assuma la *simmetria rispetto ad* O, la quale muta i punti $A, B, \ldots$ della retta nei propri simmetrici $A', B', \ldots$ rispetto ad O; qui si tratta di una vera proiettività, anzi di una uguaglianza inversa, giacchè si ha $AB = - A'B'$, ecc. Ora ai punti $A', B', \ldots$ si applichi di nuovo la simmetria $\boldsymbol{P}$ rispetto ad O. Detti $A'', B'', \ldots$ i punti a cui si giunge, sarà evidentemente $A'' \equiv A$, $B'' \equiv B \ldots$; si conchiude che $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}$, ossia che la proiettività $\boldsymbol{P}^2$ è l'identità.



L'esempio addotto ci autorizza a dare la seguente definizione:

Si chiama proiettività involutoria, o brevemente involuzione, una proiettività, non identica, tra due forme di prima specie sovrapposte, la quale coincida colla propria inversa; ossia una proiettività tale, che ogni elemento abbia, come corrispondente, uno stesso elemento, sia che quell' elemento venga considerato nell' una forma, sia nell' altra. Di due elementi A, A' corrispondentisi in una involuzione, è inutile dire se A od A' si riguarda come appartenente alla prima o alla seconda forma; i due elementi si corrispondono *in doppio modo*, sono *coniugati nella involuzione.* Ed è pure inutile nominare le *due* forme sovrapposte, quando si tratta di una involuzione; si parlerà di involuzione sopra *una* punteggiata, in *un* fascio di rette o di piani. La involuzione determina una distribuzione degli elementi della forma in coppie (di elementi *coniugati*), di guisa che ogni elemento della forma appartiene ad una e ad una sola coppia, e i due elementi di una coppia si comportano nello stesso modo l'uno rispetto all'altro. Queste coppie si sogliono dire brevemente *coppie della involuzione*, mentre sarebbe preferibile chiamarle *coppie di elementi coniugati in una proiettività involutoria.*

Se AA', BB', CC', ... sono più coppie di una involuzione, si ha per definizione

$$AA'BB'CC' \ldots \barwedge A'AB'BC'C \ldots,$$

e viceversa. Posto ora che da questi elementi, situati in una forma di prima specie, si ottengano mediante operazioni di proiezione e sezione nuovi elementi a, a', b, b', c, c' .. di una nuova forma di prima specie, si avrà ancora (n.° 61)

$$aa'bb'cc' \ldots \barwedge a'ab'bc'c \ldots .$$

Segue di qua: *se ad una involuzione si applicano operazioni di proiezione o sezione, si ottiene una nuova involuzione.*

Il concetto di involuzione risale a Desargues (1639), il quale stabilì le relazioni fra tre coppie di una involuzione. La trattazione moderna qui adottata, risulta dalle ricerche di Chasles (1837), Seydewitz (1844) e Staudt (1847).

80. Proprietà fondamentale della involuzione. — Per riconoscere se una proiettività sia involutoria occorre, secondo la definizione, verificare se *ogni* coppia di elementi corrispondenti si componga di elementi corrispondentisi in doppio modo. In realtà, si può limitare la verifica ad una sola coppia, in virtù del teorema seguente:

Se in una proiettività fra due forme di prima specie sovrapposte esiste una coppia di elementi distinti che si corrispondano in doppio modo, allora due elementi corrispondenti qualisivogliano si corrispondono in doppio modo, e la proiettività è involutoria.

Siano A, A' due elementi distinti che si corrispondano in doppio modo nella proiettività $\boldsymbol{P}$, di guisa che la $\boldsymbol{P}$ muti A ed A' in A' ed A, rispettivamente. Sia B un altro elemento arbitrario che la proiettività $\boldsymbol{P}$ muti in B', e sia X l'elemento che la $\boldsymbol{P}$ fa corrispondere a B'; tutto si riduce a dimostrare che X coincide con B. Infatti si ha, in causa della proiettività $\boldsymbol{P}$,

$$(AA'BB') = (A'AB'X),$$

ossia (n.° 46, I)

$$(AA'BB') = (AA'XB'),$$

la quale fa vedere (n.° 41) che B coincide con X, c. d. d.

81. Equazione dell'involuzione. — Allo stesso risultato si può giungere per via analitica; si ha così il vantaggio di vedere quale particolarità presenti l'equazione bilineare di una proiettività, quando questa è involutoria. Siano date due forme proiettive e sovrapposte riferite ad uno stesso sistema di coordinate proiettive (o casi particolari), e sia

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

la equazione della proiettività che le collega. Se nella nominata proiettività due elementi distinti, di coordinate y e y', si corrispondono in doppio modo, sussisteranno le relazioni

$$\alpha y y' + \beta y + \gamma y' + \delta = 0,$$
$$\alpha y' y + \beta y' + \gamma y + \delta = 0.$$

Sottraendo la prima dalla seconda, si ha

$$(\beta - \gamma)(y - y') = 0,$$

e poichè $y \neq y'$, dovrà essere $\beta = \gamma$. Perciò, nella ipotesi fatta, l'equazione della proiettività si riduce alla seguente

$$(1) \qquad \alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0.$$

Ora quest'ultima, essendo simmetrica rispetto ad x ed x', determina una proiettività, in cui due elementi omologhi, qualisivogliano si corrispondono in doppio modo, cioè una involuzione. La (1) è appunto l'equazione della involuzione.

82. Involuzione determinata da due coppie. — *Una involuzione è determinata da due coppie di elementi coniugati.*

Siano infatti AA', BB' due coppie date. Esiste (n.° 62) un'unica proiettività che agli elementi $AA'B$ fa corrispondere $A'AB'$, e questa, per il teorema precedente, è involutoria, ed ha come elementi coniugati A e A', B e B'.

Nella dimostrazione comparisce la ipotesi che A ed A' siano distinti, mentre B e B' possono anche coincidere. Quella ipotesi è però superflua, come risulterà dalle considerazioni che seguono.

Proponiamoci ora di scrivere la equazione della involuzione determinata da due coppie di elementi dati. Osserviamo a tal fine che una involuzione

$$(1) \qquad \alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0$$

è pienamente conosciuta, allorchè siano assegnati i valori dei tre coefficienti α, β, δ; anzi basta dare i rapporti di due dei coefficienti al terzo (cfr. n.° 65). Ciò posto, siano y, y' e z, z'

le coordinate note di due coppie di elementi determinanti la nostra involuzione (1) (ciascuna coppia essendo costituita da elementi distinti o coincidenti). Dovranno allora sussistere le relazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha yy' + \beta(y + y') + \delta = 0, \\ \alpha zz' + \beta(z + z') + \delta = 0. \end{cases}$$

Le equazioni (2), lineari ed omogenee rispetto alle incognite α, β, δ, permettono di calcolar queste, a meno di un fattore arbitrario non nullo; sostituendo nella (1) i valori trovati, il problema sarà risolto.

Del resto, si ottiene subito la equazione richiesta della nostra involuzione se, insieme alle (2), consideriamo anche la (1), la quale dev'essere soddisfatta ogniqualvolta x, x' sono coordinate di due elementi coniugati nella involuzione; avremo così un sistema di tre equazioni lineari, omogenee e coesistenti per valori non tutti nulli delle tre incognite α, β, δ. Dovrà quindi esser nullo il determinante formato coi coefficienti:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} xx' & x + x' & 1 \\ yy' & y + y' & 1 \\ zz' & z + z' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La equazione (3), bilineare rispetto alle variabili x, x', rappresenta appunto la nostra involuzione.

83. Condizione perchè tre coppie di elementi appartengano ad una stessa involuzione. — La relazione (3) può anche riguardarsi come la condizione, affinchè tre coppie di elementi x, x'; y, y'; z, z' di una forma di prima specie appartengano ad una stessa involuzione. Ora questa condizione può mettersi sotto un'altra forma utile a conoscersi.

Supponiamo che le tre coppie siano definite dalle equazioni di secondo grado

$$(4) \qquad \begin{cases} at^2 + bt + c = 0, \\ a't^2 + b't + c' = 0, \\ a''t^2 + b''t + c'' = 0, \end{cases}$$

aventi per radici rispettivamente x, x'; y, y'; z, z' (n.° 54). Possiamo nel determinante (3) sostituire ai prodotti ed alle somme delle dette radici le loro espressioni, in funzione dei coefficienti delle (4). Con ciò, fatte alcune semplici riduzioni, la (3) diviene

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

che è adunque la condizione necessaria e sufficiente, affinchè le tre coppie (4) appartengano ad una stessa involuzione.

Conviene talvolta di trasformare ancora la relazione (5). Essa (tenuto conto che i minori formati cogli elementi delle due prime orizzontali non sono tutti nulli, perchè le due prime coppie (4) si suppongono distinte) ci dà la condizione necessaria e sufficiente, affinchè esistano due numeri λ e μ, tali che si abbia

$$\lambda a + \mu a' = a'', \quad \lambda b + \mu b' = b'', \quad \lambda c + \mu c' = c''.$$

Sostituendo ad a'', b'', c'' i loro valori nell'ultima delle (4), questa prende la forma

$$(\lambda a + \mu a')t^2 + (\lambda b + \mu b')t + (\lambda c + \mu c') = 0,$$

ossia

$$(6) \qquad \lambda(at^2 + bt + c) + \mu(a't^2 + b't + c') = 0.$$

Ora, date due o più equazioni, se queste si sommano membro a membro, dopo averle moltiplicate ordinatamente per certe costanti arbitrarie λ, μ . . , dette *parametri*, si ottiene una nuova equazione, che si suol dire *combinazione lineare* delle primitive. Potremo dunque enunciare il nostro risultato così: *date le equazioni di due coppie di una involuzione, la equazione di ogni terza coppia della involuzione può ottenersi come una combinazione lineare delle prime due equazioni, adoperando due convenienti parametri λ e μ.*

Al variare di questi, o meglio del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ (poichè tutta l'equazione (6) può dividersi per μ, supposto non nullo), la coppia rappresentata dalla (6) varia, e può portarsi a coincidere con ogni coppia della involuzione determinata dalle prime due coppie (4). Queste, in particolare, corrispondono, l'una ai parametri $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$, l'altra ai parametri $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$.

84. Teorema di Desargues sul quadrangolo completo. — Proponiamoci ora di costruire l'involuzione determinata da due date coppie AA', BB' di elementi coniugati.

Una prima soluzione si avrebbe applicando la costruzione della proiettività $\begin{pmatrix} AA'B \\ A'AB' \end{pmatrix}$ tra due forme di prima specie sovrapposte (n.° 68, *b*)).

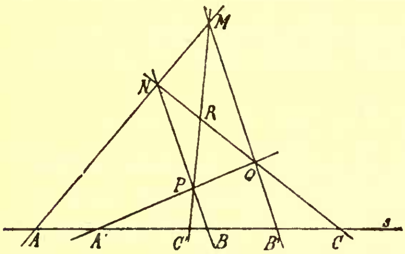
Un' altra costruzione è basata sopra un teorema di Desargues (1639), che si enuncia:

Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo sono segate da una trasversale, non passante per nessun vertice, in tre coppie di punti appartenenti ad una stessa involuzione.

Le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono proiettate da un punto, non situato sopra nessun lato, mediante tre coppie di rette appartenenti ad una stessa involuzione.

Dimostreremo ad es. il teorema di sinistra.

Sia $MNPQ$ il quadrangolo completo; la trasversale s seghi le coppie di lati opposti nelle coppie di punti AA', BB', CC'. Si tratta di dimostrare che queste appartengono ad una stessa involuzione sulla s.



Posto $R \equiv NQ \cdot MP$, proiettiamo il gruppo di punti M, P, R, C' della retta MR, sulla trasversale s, dai punti N e Q. Otterremo le due quaterne di punti proiettive e sovrapposte

$$ABCC' \;\overline{\wedge}\; B'A'CC',$$

da cui (n.° 46, I)

$$ABCC' \;\overline{\wedge}\; A'B'C'C.$$

Quest' ultima proiettività è involutoria (n.° 80), poichè C e C' si corrispondono in doppio modo [1]; d' altra parte ai punti A, B corrispondono rispettivamente A', B'; quindi AA', BB', CC' sono coppie di una stessa involuzione, c. d. d.

Il teorema di Desargues suggerisce subito il modo di costruire sulla punteggiata (o nel fascio di rette, se si adopera

[1] Qui si suppone che C e C' siano distinti; se però coincidessero, e la retta s passasse per R, allora una delle due coppie AA' e BB', ad es. la prima, dovrebbe comporsi di punti distinti; e la dimostrazione si farebbe proiettando dai punti M ed N, su s, i quattro P, Q, A' e $MN \cdot PQ$.

il teorema duale) la involuzione determinata da due coppie AA', BB' di elementi coniugati. Del punto C, ad esempio, si domandi il coniugato C'. Per A, A' e C si conducano tre rette ad arbitrio, l'ultima delle quali incontri le prime due nei punti distinti N e Q. Si unisca B con N, e B' con Q; le due nuove rette segano rispettivamente le due uscenti da A', A nei due punti P ed M, sulla cui congiungente trovasi il punto C' richiesto. Questa costruzione si eseguisce colla sola riga (¹).

85. Elementi doppi. — La involuzione, essendo una particolare proiettività tra forme sovrapposte, possiede due elementi uniti (n.° 71), o *doppi*, come si sogliono chiamare, in ciascuno dei quali due elementi coniugati vengono a coincidere. La involuzione è *iperbolica*, *parabolica* od *ellittica*, secondo che i due elementi doppi sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati.

Se

$$\alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0 \tag{1}$$

è la equazione della involuzione, ed y è la coordinata di un elemento doppio, si avrà

$$\alpha y^2 + 2\beta y + \delta = 0, \tag{2}$$

donde

$$y = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\delta}}{\alpha}.$$

L'involuzione è dunque iperbolica, parabolica od ellittica, secondo che $\beta^2 - \alpha\delta$ è positivo, nullo o negativo. Nel secondo caso però, osservando che il binomio $\beta^2 - \alpha\delta$ coincide col binomio $\beta\gamma - \alpha\delta$ relativo ad una proiettività generale (perchè ora $\beta = \gamma$), si conclude (n.° 63, Oss. II) che la involuzione parabolica è degenere. Ciò si verifica pure direttamente, per-

---

(¹) Dal fatto che, dati i cinque punti A, A', B, B' e C, si deve arrivare ad uno stesso punto C', comunque si disponga degli elementi arbitrari della costruzione, segue: *se due quadrangoli completi sono così riferiti che cinque lati dell'uno incontrino gli omologhi lati dell'altro in cinque punti di una retta, anche gli omologhi sesti lati si segheranno in un punto di quella retta;* proposizione questa che si sarebbe potuta dedurre anche dal teorema dei triangoli omologici (v. n.° 16, es. 7)).

chè, se $\beta^2 - \alpha\delta = 0$, e si suppone ad es. $\alpha \neq 0$, la (1) può scriversi

$$(\alpha x + \beta)(\alpha x' + \beta) = 0,$$

e fa vedere che ogni coppia della involuzione parabolica si compone dell'elemento fisso $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ e di un elemento x' variabile da coppia a coppia. Nell'elemento fisso cade l'unico elemento unito. Di questa involuzione degenere non ci occuperemo nel seguito, e parlando di involuzione, intenderemo d'ordinario che si tratti di involuzione iperbolica od ellittica.

86. Proprietà fondamentale degli elementi doppi di una involuzione. — Siano U, V gli elementi doppi di una involuzione, iperbolica od ellittica, ed AA' una coppia di elementi coniugati distinti.

Sarà per ipotesi

$$(UVAA') = (UVA'A);$$

si conclude (n.° 47) che i quattro elementi U, V, A, A' formano un gruppo armonico. Dunque:

I due elementi doppi di una involuzione dividono armonicamente ogni coppia della involuzione; od anche (n.° 73, *a*)): *la caratteristica di una proiettività involutoria vale* — 1 [1].

Dati gli elementi doppi U, V di una involuzione, questa è pienamente determinata; e la costruzione dell'elemento A' coniugato con un elemento noto A, si riduce alla costruzione del quarto armonico dopo tre elementi dati. Alla stessa operazione si riduce la costruzione di un elemento doppio di una involuzione, di cui si conosca l'altro elemento doppio ed una coppia AA'.

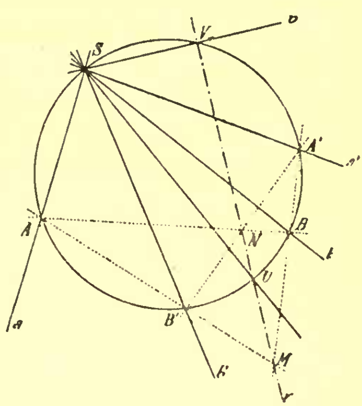
87. Costruzione degli elementi doppi di una involuzione. — Determinata una involuzione mediante due coppie AA', BB', costruirne gli elementi doppi significa costruire due elementi U, V, che dividano armonicamente AA' e BB'. Ora noi sappiamo risolvere graficamente questo problema (n.° 53), quando

---

[1] Allo stesso risultato si sarebbe giunti osservando che la (1) esprime, nel tempo stesso, la condizione perchè i due elementi x, x' siano coniugati nella nostra involuzione, e la condizione perchè dividano armonicamente la coppia (2) (n.° 54, *a*)).

la involuzione appartiene ad una punteggiata, caso a cui ogni altro può ricondursi. Dalla discussione fatta allora, segue che: *Una involuzione è iperbolica od ellittica, secondo che due sue coppie non si separano o si separano.*

Un'altra costruzione, la quale si applica direttamente ad una involuzione appartenente ad un fascio proprio di rette, è suggerita dal metodo di STEINER, che abbiamo adoperato nella ipotesi di una proiettività generale (n.° 77).



Due fasci col centro comune S, tra i quali passi una proiettività involutoria

(1) $\qquad aa'bb' \ldots \barwedge a'ab'b \ldots,$

segano sopra una circonferenza passante per S, due punteggiate proiettive, che diremo *in involuzione*,

(2) $$AA'BB' \ldots \barwedge A'AB'B \ldots.$$

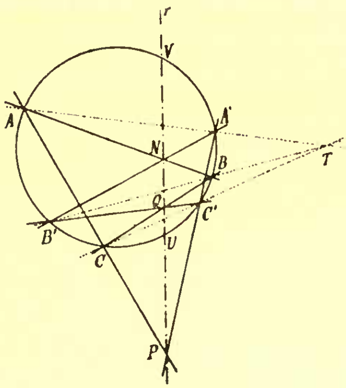
Posto quindi

$$M \equiv AB' \cdot A'B, \qquad N \equiv AB \cdot A'B',$$

l'asse di proiettività r (n.° 78) sarà la congiungente i punti M ed N, e si dirà in questo caso *asse d'involuzione*. La MN sega la circonferenza nei punti doppi U, V dell'involuzione (2), i quali proiettati da S danno le rette doppie u, v richieste dell'involuzione (1). Secondochè l'asse d'involuzione è secante, esterno (o tangente) rispetto al cerchio, la nominata involuzione è iperbolica, ellittica (o parabolica).

Osservazione. — Se consideriamo sulla circonferenza una terza coppia dell'involuzione CC', le rette AC e $A'C'$, BC e $B'C'$, s'incontreranno (come AB e $A'B'$) sull'asse d'involuzione. Perciò (n.° 14) i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono omologici, coll'asse di omologia r, e le rette AA', BB', CC' (e le analoghe congiungenti punti omologhi) concorrono in uno stesso punto T, che dicesi *polo dell'involuzione* tracciata sulla circonferenza.

Dato comunque il polo, la involuzione sulla circonferenza è determinata. Per costruire di un punto C il coniugato, basterà congiungere T con C, e determinare l' ulteriore intersezione C' della retta col cerchio. In particolare, le tangenti che escono dal polo T, supposto esterno, hanno come punti di contatto i punti doppi U, V della involuzione. Concludendo:



Le coppie di punti di una involuzione giacente sopra una circonferenza stanno su rette uscenti da uno stesso punto (polo), il quale è esterno, interno (o sulla circonferenza), secondo che la involuzione è iperbolica, ellittica (o parabolica).

88. Particolarità metriche di una involuzione.

a) Sopra una retta propria, sulla quale sia fissato un sistema di ascisse, consideriamo una involuzione

(1) $$\alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0.$$

Il punto all' infinito $x = \pm \infty$ della retta ha, come coniugato, il punto di ascissa $x' = -\frac{\beta}{\alpha}$ (n.° 64), il quale dicesi *centro* dell' involuzione, ed è proprio se $\alpha \neq 0$. In questa ipotesi, supposto inoltre che la origine delle ascisse cada precisamente nel detto centro, sarà $\beta = 0$, e la (1) assumerà la forma

$$\alpha x x' + \delta = 0, \quad \text{ossia} \quad x x' = -\frac{\delta}{\alpha} = \text{costante}.$$

Dunque: *in una involuzione sulla punteggiata è costante il prodotto delle distanze del centro da due punti coniugati qualisivogliano;* quella costante dicesi *potenza* dell' involuzione, ciò d'accordo colla definizione di potenza di una proiettività data nel n.°64, giacchè ora i due punti limite, ivi considerati, coincidono nel centro.

Una involuzione sulla punteggiata è pienamente definita, quando se ne conosca il centro (proprio) O e la potenza p, ed è costituita dalle coppie di punti A, A', tali che

$$OA \cdot OA' = p.$$

Se U è punto doppio della involuzione, sarà $\overline{OU}^2 = p$; quindi la involuzione è iperbolica (parabolica), od ellittica, secondo che la potenza è positiva (nulla), o negativa.

b) Se invece nella equazione (1) è $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, il centro è improprio, cioè il punto all' infinito della retta sostegno è doppio; l'altro punto doppio (proprio) U sarà allora punto medio di ogni coppia di punti coniugati (n.[i] 86; 50, III). Ciò risulta anche osservando che nell' ultima ipotesi la (1) diviene

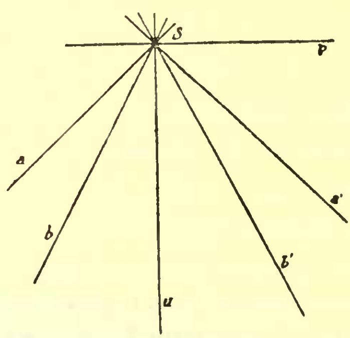
$$\beta(x + x') + \delta = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{x + x'}{2} = -\frac{\delta}{2\beta} = \text{cost.}$$

Questa involuzione iperbolica sulla punteggiata, in cui due punti coniugati, come A ed A', o B e B', ... sono sempre simmetrici rispetto ad un punto fisso U, fu già portata come esempio di involuzione (n.° 79), e detta *simmetria* sulla retta. Le due punteggiate proiettive sovrapposte

$$AA'BB'\ldots \;\overline{\wedge}\; A'AB'B\ldots,$$

che danno luogo alla simmetria, sono uguali, anzi *inversamente uguali*, giacchè segmenti corrispondenti sono uguali, ma di segno opposto. E viceversa: due punteggiate inversamente uguali e sovrapposte danno luogo ad una involuzione simmetrica.

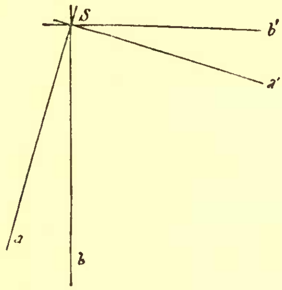
c) Passando dalla punteggiata al fascio proprio di rette, osserviamo che, se ad ogni retta a di un fascio S facciamo corrispondere la retta a' simmetrica di a, rispetto ad una retta fissa u per S (in guisa adunque che sia $\widehat{a'u} = -\widehat{au}$), otterremo nel fascio una *involuzione simmetrica*, le cui rette doppie (reali) sono la u e la perpendicolare ad u condotta per S. Viceversa, ogni involuzione (iperbolica) nel fascio avente le rette doppie perpendicolari fra loro, è una simmetria (n.[i] 86, 51). Due fasci sovrapposti corrispondentisi in una involuzione simmetrica, sono inversamente uguali; e due fasci sovrapposti inversamente uguali danno sempre origine ad una simmetria.



Segando una simmetria nel fascio colla retta all' infinito si ottiene su questa una *simmetria* o *uguaglianza inversa*, cioè una involuzione iperbolica i cui punti doppi individuano direzioni ortogonali.

89. Involuzione circolare. — È ora il caso di domandarci se due fasci sovrapposti *direttamente* uguali possano trovarsi in involuzione, mentre il fatto analogo non si presenta mai per le punteggiate, dove l'uguaglianza diretta è una proiettività parabolica non involutoria.

Tra due fasci sovrapposti, aventi il centro proprio S, passi una uguaglianza diretta, per la quale ad una retta arbitraria a corrisponda quella retta a', che forma con a l'angolo costante $\widehat{aa'} = \omega$. Volendo ora di a', considerata nel primo fascio, la retta corrispondente a'', dovremo fare $\widehat{a'a''} = \omega$, e quindi $\widehat{aa''} = 2\omega$. Affinchè la proiettività sia involutoria, occorre e basta che a'' coincida con a, (senza che a' coincida con a); ciò si ottiene se $2\omega = \pi$, ossia $\omega = \frac{\pi}{2}$.



Alla stessa conclusione si arriva per via analitica, ricordando (n.° 64, II) che l'uguaglianza diretta fra due fasci è rappresentata, in coordinate tangenti, dall' equazione

$$(1) \qquad xx' + \beta(x - x') + 1 = 0,$$

dove $\beta = \text{cotg}\ \omega$. La (1) rappresenta una involuzione (n.° 81) nella sola ipotesi $\beta = \text{cotg}\ \omega = 0$, la quale porta $\omega \equiv \frac{\pi}{2}$ (mod. π). Allora la (1) diviene

$$(2) \qquad xx' + 1 = 0,$$

ed esprime appunto (cfr. n.° 29) la condizione di perpendicolarità di rette corrispondenti.

In ogni fascio proprio esiste dunque una involuzione, in cui ciascuna retta ha per coniugata la retta perpendicolare; essa prende il nome di *involuzione di angoli retti* o *circolare*. Si può affermare che una involuzione nel fascio è circolare, se in essa si conoscono due coppie, ciascuna composta di rette perpendicolari.

La involuzione circolare (2) è evidentemente ellittica; le sue rette doppie, definite dall' equazione

$$(3) \qquad x^2 + 1 = 0,$$

hanno le coordinate $x = \pm i$, $(i = \sqrt{-1})$, e diconsi *direzioni assolute,* o *rette isotrope*, uscenti dal centro S del fascio, cui appartiene la involuzione.

Segando la involuzione circolare del fascio S colla retta all' infinito del piano, otteniamo su questa una involuzione ellittica, detta *circolare*, la quale è proiettata da *ogni* punto proprio, mediante una involuzione circolare di rette. Due punti coniugati nella involuzione circolare sulla retta all' infinito individuano direzioni perpendicolari tra loro, e viceversa; quei punti dividono armonicamente i punti doppi, immaginari, della involuzione stessa, i quali son detti *punti ciclici* del piano, e individuano le direzioni assolute ([1]).

Ritorniamo per un momento alla uguaglianza diretta (1) fra due fasci sovrapposti, della quale la involuzione circolare è caso particolare; osserveremo subito che le rette unite di quella sono sempre determinate dalla (3), qualunque sia β, e concluderemo che *una uguaglianza diretta fra due fasci sovrapposti ha come rette unite le direzioni assolute uscenti dal centro dei fasci.* Viceversa: *una proiettività fra due fasci sovrapposti avente come rette unite le direzioni assolute*, *è una uguaglianza diretta;* ciò risulta osservando che la equazione di una proiettività si riduce al tipo (1), quando si esiga che gli elementi uniti abbiano le coordinate $\pm i$. Finalmente segando i due fasci colla retta all' infinito (cfr. n.° 64, II), si trova: *una proiettività sulla retta all'infinito avente come uniti i punti ciclici è una uguaglianza diretta*, *e viceversa* ([2]).

Osservazione. — Dal seguito del nostro corso apparirà quale importanza abbia la considerazione dei punti ciclici. Limitiamoci per ora ad affer-

---

([1]) La importante nozione dei punti ciclici è dovuta a Poncelet (1822), il quale vi giunse partendo da considerazioni d'altra natura.

([2]) Invece una proiettività fra fasci sovrapposti, che scambi fra loro le direzioni assolute, è una involuzione (n.° 80) le cui rette doppie sono perpendicolari, quindi una simmetria o uguaglianza inversa. E l'analogo risultato si può enunciare sulla retta all' infinito.

mare che i punti stessi, insieme alla retta all'infinito cui appartengono, permettono di stabilire il nesso fra le proprietà proiettive e le proprietà metriche delle figure piane. Precisamente: *ogni proprietà metrica di una figura piana può enunciarsi come una relazione proiettiva della figura colla retta all'infinito e coi punti ciclici del piano; e viceversa* (CAYLEY, 1859; KLEIN, 1871-72). Giustifichiamo con qualche esempio questa affermazione.

a) Due rette di un piano sono perpendicolari, se (i loro punti all'infinito) dividono armonicamente i punti ciclici.

b) Un parallelogramma (cioè un quadrilatero semplice, in cui le intersezioni delle coppie di lati opposti stanno sulla retta all'infinito) è un rettangolo, se due lati consecutivi dividono armonicamente i punti ciclici; è una losanga, se le due diagonali dividono armonicamente i punti ciclici; è un quadrato, se le due condizioni si verificano insieme [1].

c) La proposizione sopra enunciata relativa alla uguaglianza fra due fasci sovrapposti, si estende subito a due fasci comunque situati. Precisamente: *una proiettività fra due fasci propri di rette, la quale muti le direzioni assolute dell'un fascio nelle direzioni assolute dell'altro, è una uguaglianza;* e viceversa [2]. Ciò dipende dal fatto che la equazione bilineare della proiettività si riduce al tipo (1), quando si esiga che ai valori $x = \pm i$ corrispondano rispettivamente i valori $x' = \pm i$; e che la (1) rappresenta una uguaglianza fra due fasci anche non sovrapposti (n.° 64, II). Segando i due fasci colle rette all'infinito dei rispettivi piani, si ha: *La uguaglianza fra due punteggiate improprie è una proiettività, che muta i punti ciclici dell'una nei punti ciclici dell'altra punteggiata.*

d) Limitando il teorema sopra i fasci uguali al caso che si considerino due rette a, b dell'un fascio e le corrispondenti a', b' dell'altro, risulta: *la condizione perchè due angoli* $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ *siano uguali, è che il doppio rapporto formato dai lati del primo angolo colle direzioni assolute uscenti dal vertice di esso, sia uguale al doppio rapporto analogo relativo al secondo angolo.* Segue di qua che il doppio rapporto formato da due rette colle direzioni assolute uscenti dalla loro intersezione, dipende esclusivamente dall'angolo di quelle rette e non dalla loro posizione. L'osservazione può confermarsi direttamente così.

Consideriamo nel fascio proprio S due rette a, b, definite mediante le tangenti degli angoli α, β che esse fanno con una retta origine. Sappiamo che, nello stesso sistema di cooordinate tangenti, le direzioni assolute uscenti da S hanno le coordinate i, $-i$. Quindi il doppio rapporto richiesto k

---

[1] Dalla definizione di losanga sotto la forma data, è facile ricavare il modo di verificare, o definire, l'uguaglianza di due segmenti di un piano mediante relazioni proiettive della figura colla involuzione circolare. Ciò può esser lasciato al lettore, il quale comincerà ad esaminare il caso che i due segmenti abbiano un estremo comune.

[2] Senza introdurre elementi immaginari, il teorema può enunciarsi così: *una proiettività fra due fasci propri, la quale muti ogni angolo retto dell'un fascio in un angolo retto dell'altro, è una uguaglianza.*

delle due direzioni assolute e delle rette a, b sarà espresso dal doppio rapporto dei quattro numeri

$$k = (i, -i, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta) = \frac{i - \operatorname{tg}\alpha}{-i - \operatorname{tg}\alpha} : \frac{i - \operatorname{tg}\beta}{-i - \operatorname{tg}\beta}.$$

Moltiplicando i due termini della prima frazione per $i \cos\alpha$, e i due termini della seconda per $i \cos\beta$, quella espressione si trasforma in

$$k = \frac{\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha}{\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)} : \frac{\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta}{\cos(-\beta) + i \operatorname{sen}(-\beta)},$$

e, per la nota regola di divisione dei numeri complessi scritti sotto forma trigonometrica,

$$k = \cos 2(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen} 2(\alpha - \beta),$$

ossia

$$k = \cos(-2\varphi) + i \operatorname{sen}(-2\varphi),$$

ponendo

$$\varphi = \beta - \alpha = \widehat{ab}.$$

Dunque: *il doppio rapporto formato dai lati di un angolo colle direzioni assolute uscenti dal vertice è un numero complesso, che ha per modulo l'unità e per argomento il doppio dell'angolo;* (il segno dell'argomento non ha importanza, dipendendo dall'ordine in cui si considerano le due direzioni assolute).

L'ultima formula può ancora trasformarsi, ricorrendo alla teoria delle potenze ad esponente complesso [1]; quella formula infatti equivale alla seguente

$$k = e^{-2i\varphi},$$

indicando con e la base dei logaritmi naturali. Prendendo i logaritmi dei due membri, abbiamo

$$-2i\varphi = \log k$$

e finalmente

$$\varphi = -\frac{1}{2i} \log k = \frac{i}{2} \log k.$$

L'angolo di due rette è uguale al fattore costante $\frac{i}{2}$ *moltiplicato per il logaritmo naturale del doppio rapporto formato dalle due rette colle direzioni assolute uscenti dal vertice dell'angolo.* Questo importante teorema, dovuto a LAGUERRE (1853), riconduce la nozione metrica di angolo alla nozione proiettiva di doppio rapporto [2].

---

(1) V. ad es. CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica* (Napoli, 1902), pag. 457, 460.

(2) A chi obiettasse qui che il doppio rapporto di quattro rette fu da noi definito ricorrendo al concetto di angolo, si potrebbe rispondere che lo STAUDT è riuscito a definire il doppio rapporto di quattro elementi di una forma di prima specie in base a nozioni puramente grafiche, senza parlare di misura di segmenti, angoli, ecc. Ma noi non possiamo riprodurre qui il metodo seguito dallo STAUDT, e rinviamo chi volesse conoscerlo ai *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg 1856-1860), in particolare 2.° fascicolo.

Esercizi. I — 1) Costruire sulla punteggiata (x ed x' essendo ascisse) le involuzioni rappresentate dalle equazioni bilineari $xx' = 4$, $x + x' = 2$, o dalle combinazioni lineari
$\lambda(x - 1)^2 + \mu(x + 1)^2 = 0$, $\lambda x^2 + \mu(x + 1) = 0$, $\lambda x^2 + \mu = 0$; determinarne analiticamente il centro e i punti doppi.

2) Scrivere sotto la forma bilineare, o sotto forma di combinazione lineare, la equazione della involuzione che ha il centro nel punto (di ascissa) 1, e come coniugati i punti $+2$, -2; oppure, che ha quel centro e il punto doppio $+3$; oppure, che ha i punti doppi -1 e $+4$.

II — 3) Se AA', BB', CC' sono tre coppie di punti di una stessa involuzione, si ha

$$(BCA')(CAB')(ABC') = 1.$$

4) Se AA' e BB' sono coppie di elementi corrispondenti in una proiettività tra forme sovrapposte, i cui elementi uniti siano U e V, allora UV, AB', $A'B$ sono tre coppie di una stessa involuzione, e viceversa. Il teorema vale anche se U e V coincidono. Come si enuncia il teorema se A' e B coincidono?

5) Il luogo di un punto dal quale due punteggiate proiettive, non sovrapposte, di un piano, vengono proiettate mediante due fasci di rette in involuzione, è l'asse di proiettività delle due punteggiate. Teorema duale.

6) I cerchi passanti per due punti segano sopra una trasversale coppie di una involuzione, il cui centro si trova sulla congiungente i due punti. Dove cadono i punti doppi della involuzione? Valersi del teorema enunciato per costruire sulla punteggiata una involuzione, di cui si conoscano due coppie (cfr. n.° 53).

7) Data una involuzione ellittica sopra una punteggiata, esistono sempre, in un piano per questa, due punti, da ciascuno dei quali la involuzione è proiettata mediante una involuzione circolare.

8) Data una involuzione iperbolica sopra una punteggiata, qual'è il luogo di un punto da cui la involuzione viene proiettata mediante una involuzione simmetrica di rette?

III — 9) Le rette polari di un punto (cfr. n.° 53, es. 5)), rispetto alle tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo, passano per uno stesso punto (n.° 84).

10) I poli di una retta, rispetto alle tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo, stanno sopra una retta; come si enuncia questo teorema se la retta è all'infinito?

11) Il teorema di Desargues sul quadrangolo completo (n.° 84) può enunciarsi così: le proiezioni dei vertici di un triangolo, da un punto qualunque del suo piano, sopra una trasversale non passante per nessuno dei vertici, sono coniugate, in una involuzione, alle intersezioni dei lati rispettivamente opposti del triangolo colla stessa trasversale. Sotto questa forma il teorema può facilmente invertirsi: « se delle intersezioni dei lati di un triangolo con una trasversale si costruiscono i coniugati in una qualsiasi involuzione su quella, questi, congiunti coi vertici rispettivamente

opposti del triangolo, danno tre rette concorrenti in un punto». Questioni duali.

12) I teoremi inversi di quelli di DESARGUES conducono a numerosi corollari, quando si particolarizzi l'involuzione; così segue subito: le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto; o ciò che fa lo stesso: se due coppie di lati opposti di un quadrangolo completo si compongono di rette perpendicolari, anche la terza coppia di lati opposti si comporrà di rette perpendicolari.

13) Se in un quadrangolo completo le bisettrici dell'angolo determinato da due lati opposti sono parallele alle bisettrici dell'angolo di altri due lati opposti, anche la terza coppia di lati opposti dà luogo a bisettrici aventi le stesse direzioni, e il quadrangolo è iscrittibile in un cerchio; e viceversa.

14) Se si congiungono i vertici di un triangolo con un punto del piano, e pel punto si conducono le perpendicolari alle congiungenti, queste vanno ad incontrare i lati rispettivamente opposti del triangolo in tre punti allineati.

15) Se dai vertici di un triangolo partono tre raggi luminosi concorrenti in un punto di una retta del piano, i raggi riflessi da questa (prolungati se occorre) incontreranno i lati opposti del triangolo in tre punti allineati.

16) Dall'ultimo teorema si può dedurre una dimostrazione del teorema di SIMSON (cfr. n.° 37, es. 5)), anzi del teorema più generale: « se da un punto del cerchio circoscritto ad un triangolo si conducono tre rette inclinate ai lati di questo sotto lo stesso angolo (in valore e segno), esse determinano sui lati tre punti allineati ».

17) Se due quadrangoli completi, situati in un piano, sono così riferiti, che cinque lati dell'uno siano perpendicolari ai cinque lati omologhi dell'altro, anche i sesti lati dei due quadrangoli risulteranno perpendicolari tra loro.

18) Se due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono così situati, che le perpendicolari calate dai vertici A, B, C del primo sui lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ del secondo passino per uno stesso punto, anche le perpendicolari calate dai vertici A', B', C' del secondo sui lati BC, CA, AB del primo passeranno per uno stesso punto.

IV — 19) Una involuzione circolare, o simmetrica, in un fascio proprio di rette sega sopra una circonferenza, condotta per il centro, una involuzione che può chiamarsi collo stesso nome. Dove sta il polo? dove l'asse?

20) Le tangenti ad un cerchio nelle coppie di punti di una involuzione si segano sull'asse (n.° 87). Viceversa: « se dai punti di una retta si conducono le tangenti ad un cerchio, le coppie di punti di contatto appartengono ad una involuzione di cui la retta è l'asse ».

21) Se A, B, C sono tre elementi di una forma di prima specie (ad es. punti di una circonferenza), ed A', B', C' sono i coniugati armonici di quelli rispetto alle coppie BC, CA, AB, ordinatamente, le coppie AA',

BB', CC' appartengono ad una stessa involuzione, ed i gruppi $AA'B'C'$, $BB'C'A'$, $CC'A'B'$ sono armonici (cfr n.° 78, es. 7), 8)).

22) Date due involuzioni sopra una circonferenza mediante i relativi poli, si costruisca la proiettività prodotto di quelle (n.° 61), e si dimostri che ha per asse la congiungente i due poli (n.° 78).

23) Una proiettività tra forme sovrapposte può, in infiniti modi, scindersi nel prodotto di due involuzioni; (si supponga che la proiettività sia segnata sopra una circonferenza).

V — 24) Dati due angoli retti, a lati non paralleli, ed un parallelogramma, costruire colla sola riga la retta uscente da un punto dato e perpendicolare ad una data retta (es. 12) e n.° 16, II).

25) In particolare: dato un quadrato, condurre colla sola riga da un punto dato la perpendicolare ad una retta assegnata. (Steiner). (Si supponga anzitutto che la retta passi per il centro del quadrato, e che il punto cada nel centro stesso; per la intersezione della retta con un lato si conduca la perpendicolare a questo lato fino ad incontrare il lato opposto, poi la parallela ad una diagonale del quadrato...).

28) Dato un quadrato, bisecare colla sola riga un angolo retto (il cui vertice, può supporsi cada nel centro del quadrato).

27) Dato un quadrato ed un angolo $\widehat{ab}$, costruire colla sola riga un angolo $\widehat{a'b'} = \widehat{ab}$, di cui sia assegnato un lato a' ed il vertice. (Supposto che i due angoli abbiano lo stesso vertice, tutto si riduce a costruire la involuzione simmetrica di cui $a'b$ è una coppia; ora le rette perpendicolari ad a' e b costituiscono una seconda coppia della detta involuzione...).

28) Dato un quadrato, verificare colla sola riga se due dati segmenti AB, EF siano uguali; (si costruisca un parallelogramma $ABCD$ di cui il lato BC sia uguale e parallelo ad EF, e si considerino le diagonali...).

29) Dato un quadrato, e determinato un cerchio coll'assegnarne il centro O ed un punto A, oppure tre punti A, B, C, costruire, colla sola riga, l'ulteriore intersezione del cerchio con una retta arbitraria condotta per A; variando la retta si ottengono, senza compasso, quanti punti si desiderano del detto cerchio.

90. Problemi di secondo grado. — Nelle scorse lezioni ci è accaduto più volte di risolvere problemi di geometria piana, sia col metodo analitico, sia mediante effettive costruzioni. Alcuni di quei problemi, trattati analiticamente, ci hanno condotto ad equazioni lineari (problemi di *primo grado*); e noi siamo riusciti a risolverli graficamente facendo uso di linee rette, cioè colla sola riga (a parte speciali avvertenze, quando si presentavano particolarità metriche). Tali sono ad es., i problemi: costruire l'elemento quarto armonico dopo tre elementi dati (n.^{i} 48, 49); costruire l'elemento corrispondente ad un elemento dato in una proiettività definita mediante tre coppie di elementi (n.° 68), od in una involuzione definita mediante due coppie di elementi coniugati (n.° 84).

Altri problemi invece, trattati analiticamente, ci hanno condotto ad equazioni quadratiche (problemi di *secondo grado*); mentre per la loro risoluzione grafica si è dovuto far uso di circonferenze (cioè del compasso), oltre che di rette. Ricorderemo, tra questi, la determinazione di una coppia che divida armonicamente due coppie di punti assegnati sopra una retta (n.° 53), e la costruzione degli elementi uniti di una proiettività tra due forme di prima specie sovrapposte (n.° 77).

Riservandoci di trattare ampiamente nel seguito la questione dei problemi geometrici, in relazione coi mezzi impiegati a risolverli, vogliamo esaminare qui alcuni problemi di secondo grado, che si connettono strettamente cogli argomenti discussi nelle ultime lezioni.

Osserviamo intanto che un problema di secondo grado, per definizione, avrà due soluzioni, le quali però potranno essere reali e distinte, o reali e coincidenti (quindi *una* soluzione dal punto di vista grafico), o immaginarie (nessuna soluzione grafica). E non è escluso che, per una posizione particolare dei dati, il problema possa avere infinite soluzioni (e la corrispondente equazione ridursi ad una identità); questo caso si presenta certamente quando, di un problema di secondo grado, si conoscano più di due soluzioni.

91. Coppia comune a due involuzioni sovrapposte. — Proponiamoci il seguente problema:

Date due involuzioni sopra uno stesso sostegno, determinare una coppia ad esse comune.

Fissato sul comune sostegno un unico sistema di coordinate proiettive (o casi particolari), le due involuzioni saranno rappresentate da equazioni del tipo

$$\alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0,$$
$$\alpha' x x' + \beta'(x + x') + \delta' = 0,$$

dove α, β, ..., α' ... sono quantità note; si tratta di risolvere le due equazioni rispetto alle incognite x, x'. Riguardiamo perciò come incognite ausiliari il prodotto xx' e la somma $x + x'$; ricaveremo

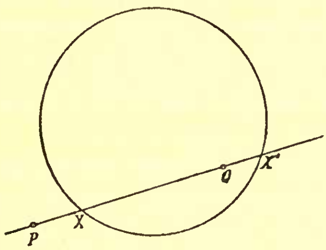
$$xx' = \frac{\beta\delta' - \beta'\delta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad x + x' = \frac{\delta\alpha' - \delta'\alpha}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

e potremo quindi costruire la equazione di secondo grado

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)t^2 + (\alpha\delta' - \alpha'\delta)t + (\beta\delta' - \beta'\delta) = 0,$$

le cui radici sono le coordinate richieste x, x'. Un esame accurato del discriminante dell'ultima equazione, il quale coincide col risultante delle due equazioni che determinano gli elementi doppi delle date involuzioni (n.° 54, c)), ci condurrebbe, per quanto riguarda la realtà delle radici, alla conclusione che otterremo più semplicemente per via geometrica.

A tal fine supponiamo che le due involuzioni appartengano ad uno stesso fascio proprio di rette, caso al quale ci possiamo sempre ridurre mediante una proiezione o sezione. Condotta una circonferenza per il centro del fascio, otterremo sopra di essa due involuzioni, di cui siano P e Q i poli (n.° 87, Oss.); la coppia XX' comune a queste sarà data dalle intersezioni della retta PQ colla circonferenza. Secondo che PQ è secante, tangente o esterna al cerchio, la coppia XX' si compone di punti reali e distinti, reali e coincidenti o immaginari.



Dunque: *due involuzioni, appartenenti ad una stessa forma di prima specie, hanno in comune una coppia di elementi coniugati, che possono essere reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari; il primo caso si presenta certo se delle due involuzioni una almeno è ellittica*, perchè allora il corrispondente polo è interno al cerchio, e quindi la retta PQ è secante.

92. Rette coniugate e perpendicolari di una involuzione nel fascio. — Un corollario importante di questo teorema si riferisce al caso che le due involuzioni appartengano ad un fascio proprio di rette, ed una di esse sia la involuzione circolare (che è ellittica). Si ha allora:

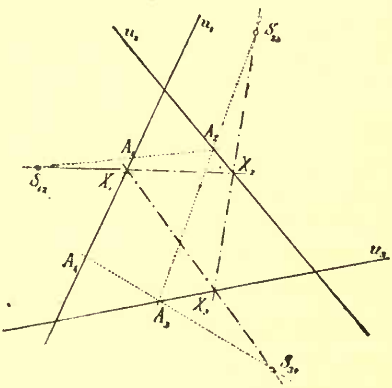
Una involuzione nel fascio proprio di rette contiene sempre una coppia di rette reali, coniugate nella involuzione, e perpendicolari. Se di siffatte coppie ve ne fossero altre, la involuzione sarebbe circolare, come fu già osservato (n.° 89).

93. Metodo di falsa posizione. — La risoluzione di ogni problema di secondo grado può farsi dipendere (V. Appendice) dalla determinazione degli elementi uniti di una proiettività fra forme sovrapposte. Ora per costruire una siffatta proiettività, connessa col problema dato, conviene talvolta ricorrere ad un metodo, detto di *falsa posizione*, che noi esporremo sopra un esempio.

Sia proposto il problema:

Date in un piano n *rette ed* n *punti, costruire un n.gono semplice, i cui vertici appartengano ordinatamente alle rette date, ed i cui lati passino ordinatamente per i punti dati.* Trattiamo ad es. il caso $n = 3$, collo stesso procedimento che si impiegherebbe per $n > 3$ qualsiasi.

Siano u_1, u_2, u_3 le tre rette date ed S_{12}, S_{23}, S_{31} i tre punti dati; si voglia un triangolo $X_1 X_2 X_3$, i cui vertici appartengano alle rette u_1, u_2, u_3, ed i cui lati $X_1 X_2$, $X_2 X_3$, $X_3 X_1$ passino rispettivamente per i punti S_{12}, S_{23}, S_{31}. A tal fine si scelga ad arbitrio un punto A_1 sopra u_1, e si proceda come se A_1 fosse il primo vertice del triangolo richiesto, che si volesse completare. Proiettiamo A_1 da S_{12} sopra u_2 nel punto A_2, poi A_2 da S_{23} sopra u_3 nel punto A_3, e finalmente A_3 da S_{31} sopra u_1 nel punto A_4. Se A_1 fosse stato scelto nel modo desiderato, A_4 dovrebbe coincidere con A_1. Ciò in generale non accade; tuttavia il tentativo fatto non riesce inutile. Si osservi infatti che, se A_1 descrive una punteggiata (u_1) sopra la retta u_1, il punto A_2, legato ad A_1 nel modo esposto, descrive sopra u_2 una punteggiata (u_2) prospettiva, e quindi proiettiva alla punteggiata (u_1). Paragonando in simil modo le punteggiate (u_2), (u_3), (u_4) descritte da A_2, A_3, A_4 sopra u_2, u_3, u_1, si conclude infine che fra le punteggiate sovrapposte (u_1), (u_4) passa una proiettività. Questa è determinata, quando di tre punti arbitrari A_1, B_1, C_1 di (u_1), si costruiscano, nel modo indicato, i punti corrispondenti A_4, B_4, C_4 di (u_4). Ora un punto unito $X_1 \equiv X_4$ di



quella proiettività dà, come è chiaro, un primo vertice di un triangolo soddisfacente al problema. Secondo che la proiettività è iperbolica, parabolica, od ellittica, esisteranno due, uno o nessun triangolo siffatto [1].

Esercizi. I — 1) In ogni involuzione ellittica esiste una coppia di elementi reali che divide armonicamente un' altra coppia assegnata della involuzione.

2) Data una proiettività tra due fasci propri di rette, determinare (analiticamente e graficamente) una coppia di rette perpendicolari dell' un fascio, a cui corrisponda una coppia di rette pure perpendicolari dell' altro fascio; esiste in ciascun fascio una sola coppia di rette reali soddisfacenti al problema, a meno che i due fasci non siano uguali (cfr. n.° 89, Oss.). (Nella risoluzione grafica conviene supporre collocati i due fasci in posizione prospettiva).

3) L'esercizio precedente permette di risolvere i problemi seguenti: « dato un fascio di rette ed un fascio proiettivo di piani, segare quest'ultimo con un piano, in modo da ottenere un fascio di rette uguale al fascio dato (n.° 12, es. 7)) », e in particolare « segare un prisma triangolare con un piano, in guisa da ottenere un triangolo simile ad un triangolo dato »; « dati due fasci propri proiettivi di rette, collocarli in tal posizione da formare una involuzione (n.° 80) ».

II — 4) Date due punteggiate proiettive non sovrapposte, per un punto assegnato nel loro piano condurre una trasversale che le seghi in punti corrispondenti; problema duale.

5) *Problemi di* Apollonio: fissati su due rette distinte due punti A, B', condurre per un punto dato nel loro piano una trasversale secante le due rette in punti X, X' tali che sia $AX + B'X' = k$, oppure $AX \cdot B'X' = k$ (*sectio spatii*), oppure $\dfrac{AX}{B'X'} = k$ (*sectio rationis*); k è una costante assegnata, misura di un segmento o di un' area nei primi due casi.

6) Per un punto del piano condurre una retta che formi con due rette date un triangolo di area data.

7) Date due rette, per un punto assegnato nel loro piano condurre due trasversali che intercettino su quelle due segmenti di date lunghezze.

8) Data in un piano una retta e due punti fuori di essa, costruire sulla retta un segmento che venga visto dai due punti sotto angoli assegnati.

9) In un triangolo ABC iscrivere un parallelogramma di area assegnata, avente due lati sopra AB, AC ed un vertice sopra BC. Iscrivere nel triangolo un rettangolo d' area assegnata, un cui lato cada su AB ed i due vertici del lato opposto su CA, CB.

10) In una proiettività fra punteggiate sovrapposte determinare (analiticamente e graficamente) due punti corrispondenti che abbiano una data

---

[1] Per alcuni casi particolari interessanti di questo problema si veda l'esercizio 16) che segue.

distanza. Qual'è il minimo valor assoluto della distanza di punti corrispondenti in una proiettività ellittica?

11) Dati due fasci di rette proiettivi, non sovrapposti, segarli con una trasversale in guisa da ottenere due punteggiate simili (n.° 78, es. 6)), od anche due punteggiate inversamente (n.° 88, es. 5)), o direttamente uguali.

12) Date due punteggiate proiettive u, u' su rette distinte, proiettare la u sul sostegno della u' da un punto tale, che la nuova punteggiata risulti direttamente od inversamente uguale alla u'.

13) Date due coppie di elementi AA', BB' sopra una forma di prima specie, costruire una proiettività parabolica in cui A e B abbiano per corrispondenti A' e B' (n.° 88, es. 4)). Come applicazione: dati due angoli collo stesso vertice, condurre per un dato punto una tal trasversale, che le corde sopra essa segate dagli angoli risultino direttamente uguali.

14) Dati tre segmenti sopra una retta, costruire un punto dal quale i segmenti siano visti sotto angoli uguali (n.° 53, es. 11)).

15) Data una proiettività ellittica sopra una retta, esistono in ogni piano per la retta due punti, da ciascuno dei quali quella proiettività vien proiettata mediante una eguaglianza diretta.

III — 16) Il problema di costruire un triangolo, i cui vertici cadano su tre rette u_1, u_2, u_3, e i cui lati passino per tre punti S_{12}, S_{23}, S_{31}, ha i seguenti casi particolari notevoli: quando le tre rette concorrono in un punto, poichè allora una soluzione è degenere, e l'altra può costruirsi linearmente; quando i tre punti sono allineati, perchè si presenta un fatto analogo; quando ambedue le condizioni sono verificate insieme, perchè allora si hanno due soluzioni degeneri, e in generale nessuna vera soluzione, a meno che, per una posizione particolare dei dati, non esista una vera soluzione, nel qual caso esistono infinite soluzioni costituite da triangoli a due a due omologici rispetto al centro $u_1 u_2 u_3$ e all'asse $S_{12} S_{23} S_{31}$; finalmente, quando le tre rette u e i tre punti S costituiscono due triangoli tali, che i lati del secondo passino per i vertici del primo (precisamente $S_{31} S_{12}$ per il punto $u_2 u_3$, ecc.), perchè allora il problema ammette infinite soluzioni, come afferma l'enunciato: « se di due triangoli il primo è iscritto nel secondo, esistono infiniti triangoli iscritti nel primo e circoscritti al secondo ».

17) In generale, date n rette, volendo determinare n punti tali, che esistano infiniti n.goni semplici, i cui vertici cadano sopra le n rette ed i cui lati passino per gli n punti, si possono di questi assumere $n - 2$ ad arbitrio, ed ancora uno $(n - 1)$.esimo ad arbitrio sopra una retta determinata dai dati; con ciò l'n.esimo punto è completamente determinato; (n.° 70, es. 6)).

18) Siano date n rette $u_1, u_2, \dots u_n$; da un punto incognito X_1 di u_1 parte un raggio luminoso x_1 in direzione assegnata, il quale si riflette sopra u_2; il raggio riflesso (o il suo prolungamento) si riflette sopra u_3, e così via finchè il raggio x_n, riflesso sopra u_n, (o il suo prolungamento) incontra di nuovo u_1; determinare X_1 in guisa che l'incontro avvenga precisamente in X_1. È possibile determinare la direzione di x_1, in modo che risulti

$\widehat{x_1 u_1} \equiv - \widehat{x_n u_1}$ (mod. π), sicchè x_n, riflettendosi sopra u_1, venga a fornire di nuovo $x_1 \ldots$, ed il poligono venga percorso infinite volte dal raggio luminoso? (In quest' ultima ricerca occorre distinguere il caso di n pari da n dispari).

19) Iscrivere in un cerchio un n.gono semplice, i cui lati passino ordinatamente per n punti assegnati. Osservando che il problema si riduce a determinare i punti uniti della proiettività prodotto di n involuzioni note, esaminare quando esistano infinite soluzioni (e la proiettività risulti l' identità). Perchè ciò avvenga, si possono prendere ad arbitrio $n - 2$ degli n punti, purchè i rimanenti due vengano scelti, convenientemente, sopra una retta che rimane allora determinata; (n.° 88, es. 22), 23)). Esaminare, in particolare, i casi $n = 3, 4$, ed il caso di n pari quando gli n punti dati si trovano sopra una retta.

* **94. Cenno sulla rappresentazione geometrica degli elementi immaginari sopra una forma di prima specie.** — Prima di abbandonare lo studio delle forme di prima specie, vogliamo accennare alla via proposta dallo Staudt per introdurre nella geometria sintetica gli elementi immaginari, dei quali noi abbiamo discorso sinora in un senso puramente analitico (n.° 54).

La forma di prima specie sia, per fissar le idee, una punteggiata propria, sulla quale sia stabilito un sistema di ascisse. Ad una equazione di secondo grado, a coefficienti reali,

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

corrisponde, se la equazione ha radici reali, una coppia di punti distinti, o coincidenti, che noi possiamo segnare sulla retta, punti le cui ascisse sono le radici della (1). Se invece la (1) ha radici immaginarie (coniugate), non possiamo più rappresentare graficamente nel modo ora esposto queste radici, o i punti immaginari coniugati corrispondenti. Cerchiamo in tal caso se esista sulla forma un ente reale siffatto, che, data la (1), quell' ente rimanga individuato, e viceversa. Se queste condizioni saranno soddisfatte, potremo assumere l' ente stesso come immagine geometrica dell' equazione (1), o della coppia di punti immaginari che ad essa corrisponde.

Ora, data una qualsiasi equazione quadratica (1), a coefficienti reali, rimane individuata sulla punteggiata una involuzione, i cui punti doppi sono determinati dalla (1); questa involuzione ha, come si vede subito (n.° 85), l' equazione

$$axx' + \frac{b}{2}(x + x') + c = 0, \tag{2}$$

ed è iperbolica, parabolica, o ellittica, secondo che la (1) ha radici reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie. Nell'ultimo caso *possiamo assumere la involuzione ellittica* (2) *come immagine geometrica* (o come definizione, secondo lo Staudt) *della coppia di punti immaginari determinati dalla* (1). La involuzione ellittica è un ente reale, costituito da infinite coppie di punti reali; bastano due coppie AA', BB' per individuarla, e quindi per rappresentare la coppia di punti immaginari corrispondente ad una data equazione di secondo grado.

In modo analogo si procederà per rappresentare (o definire) una coppia di elementi immaginari coniugati (in senso algebrico) appartenenti ad un fascio di rette o di piani. Sempre la detta coppia di elementi si rappresenterà mediante quella involuzione ellittica nel fascio, che ha come doppi gli elementi nominati. In particolare, le direzioni assolute uscenti da un punto proprio S, saranno rappresentate dalla involuzione circolare nel fascio S; ed i punti ciclici del piano, dalla involuzione circolare sulla retta all'infinito.

Sugli enti immaginari così introdotti si possono definire le operazioni geometriche fondamentali. Così, per esempio, data sopra una retta (reale) una coppia di punti immaginari coniugati U, V, rappresentata mediante la involuzione ellittica AA', BB', la coppia di rette immaginarie SU, SV proiettanti quei punti da un punto reale S, si rappresenterà mediante la involuzione nel fascio S determinata dalle coppie di rette SA, SA' ed SB, SB'.

Osservazione. — In molte questioni due elementi immaginari coniugati si presentano sempre insieme, e si comportano nello stesso modo, cosicchè è sufficiente rappresentare la coppia che essi formano, ricorrendo alla involuzione ellittica, come ora si disse. In altre questioni però occorre definire separatamente ciascuno dei due elementi immaginari coniugati. A tal fine lo Staudt ha proposto di considerare, insieme alla involuzione ellittica, uno dei due versi appartenenti alla forma su cui si opera, e di aggregare quel verso ad uno dei due elementi immaginari, e il verso opposto all'altro elemento. In tal guisa, ricordando che due coppie AA', BB' di una involuzione ellittica si separano, e quindi che gli elementi $ABA'B'$ si succedono in un verso, e gli elementi $AB'A'B$ nel verso opposto, potremo con $ABA'B'$ rappresentare uno degli elementi doppi della nostra involuzione, e con $AB'A'B$ l'altro.

*** 95. Involuzione unita di una proiettività.** — In base alle considerazioni precedenti, quando si debba risolvere, sopra una forma di prima specie, un problema di secondo grado, il quale presenti soluzioni immaginarie, si potrà chiedere di rappresentar queste graficamente mediante una involuzione ellittica.

Ad esempio, il problema degli elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte, potrà ora formularsi così: *date due forme proiettive sovrapposte, costruire gli elementi uniti quando sono reali; o, in caso opposto, costruire la involuzione ellittica che ha quegli elementi come doppi.*

Ecco come si procede. Data una proiettività qualsiasi $\boldsymbol{P}$, con cui si passi da una forma di prima specie ad una seconda forma sovrapposta, e detta $\boldsymbol{P}^{-1}$ la proiettività inversa, si cerchino i corrispondenti A_1 ed A_{-1} di uno stesso elemento A del sostegno comune nelle proiettività $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}^{-1}$; poi di A si costruisca il coniugato armonico A_0 rispetto ad A_1 ed A_{-1}. Ad ogni posizione di A corrisponde una posizione di A_0; ora si dimostra che *la corrispondenza così stabilita fra le forme descritte da* A *ed* A_0, *è la involuzione avente come elementi doppi gli elementi uniti della proiettività data* $\boldsymbol{P}$; questa involuzione serve quindi a definire i detti elementi, quando $\boldsymbol{P}$ è ellittica, e chiamasi *involuzione unita* della proiettività $\boldsymbol{P}$. Per giustificare la nostra affermazione, supponiamo che le due forme proiettive sovrapposte siano punteggiate (ipotesi che, per la natura della questione, non introduce restrizioni); riferite le punteggiate ad un unico sistema di ascisse, la proiettività data sarà rappresentata da un'equazione bilineare

$$(1) \qquad \alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0,$$

o dalle relazioni equivalenti

$$(1') \qquad x' = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \qquad x = -\frac{\gamma x' + \delta}{\alpha x' + \beta},$$

le quali rappresentano rispettivamente la operazione $\boldsymbol{P}$ e la $\boldsymbol{P}^{-1}$. Detta y la ascissa del punto A, le ascisse y_1 e y_{-1} di A_1 ed A_{-1} saranno dunque

$$(2) \qquad y_1 = -\frac{\beta y + \delta}{\alpha y + \gamma}, \qquad y_{-1} = -\frac{\gamma y + \delta}{\alpha y + \beta}.$$

Per procurarci ora l'ascissa y_0 di A_0, ricordiamo che i punti A, A_0, A_1, A_{-1} formano un gruppo armonico, e quindi si ha (n.° 50, I)

$$\frac{2}{AA_0} = \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{AA_{-1}},$$

ossia

$$\frac{2}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_1} + \frac{1}{y - y_{-1}}.$$

Tenuto conto delle (2), questa diviene

$$\frac{2}{y - y_0} = \frac{2\alpha y + (\beta + \gamma)}{\alpha y^2 + (\beta + \gamma) y + \delta},$$

ossia, mandando via i denominatori e dividendo per 2,

$$(3) \qquad \alpha y y_0 + \frac{1}{2}(\beta + \gamma)(y + y_0) + \delta = 0.$$

Ora la (3) rappresenta una involuzione, in cui sono coniugati i punti A ed A_0; i suoi punti doppi son dati dall'equazione

$$\alpha y^2 + (\beta + \gamma) y + \delta = 0,$$

che dà pure i punti uniti della proiettività (1); dunque la (3) è la involuzione unita della proiettività (1), come volevasi dimostrare.

In particolare, se la proiettività assegnata è una uguaglianza diretta fra due fasci sovrapposti di centro proprio S, il procedimento geometrico che conduce alla determinazione della involuzione unita, porta a costruire di una retta a per S la coniugata armonica a_0, rispetto a due rette a_1, a_{-1} uscenti pure da S, e formanti con a angoli uguali ed opposti; risulta a_0 perpendicolare ad a, e si conclude che la involuzione unita di una uguaglianza diretta fra due fasci sovrapposti è circolare, ossia che la detta uguaglianza ha come rette unite le direzioni assolute uscenti dal centro del fascio; come si era visto precedentemente (n.° 89, Oss.). Qual'è la involuzione unita di una uguaglianza diretta fra due punteggiate sovrapposte?

Esercizi. — 1) Date due involuzioni, entrambe iperboliche od ellittiche, sopra due rette distinte, determinare nel loro piano un punto, dal quale le coppie dell'una involuzione vengano proiettate nelle coppie dell'altra. (Il problema ammette due soluzioni reali X, Y, che si ottengono subito se le involuzioni sono iperboliche, mentre, quando siano ellittiche, conviene costruire in ciascuna due coppie separantisi armonicamente (n.° 93, es. 1)), e formanti due gruppi prospettivi). Problema duale.

2) Nel caso di involuzioni ellittiche il problema precedente può enunciarsi: date due coppie di punti immaginari coniugati $M M_0$, $N N_0$ sopra due rette distinte, determinare le quattro rette congiungenti i punti dell'una coppia coi punti dell'altra; queste rette sono immaginarie, ma MN, $M_0 N_0$ sono immaginarie coniugate, secantisi in un punto reale X, e pos-

sono definirsi mediante una involuzione ellittica nel fascio X; similmente MN_0, M_0N si segano in un punto reale Y, ecc. Caso particolare: NN_0 siano i punti ciclici del piano. Casi particolari del problema duale: una o tutte due le coppie si compongano di direzioni assolute uscenti da punti reali.

3) Date due involuzioni sopra uno stesso sostegno, determinare quella terza involuzione, i cui elementi doppi costituiscono la coppia comune alle due involuzioni date; (della involuzione richiesta, che è unita per una certa proiettività, si possono costruire linearmente quante coppie si vogliono).

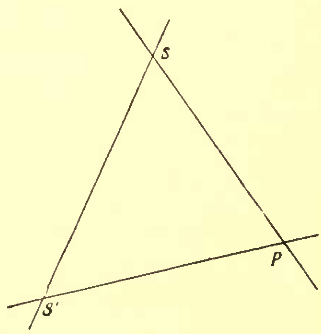
4) Segnate in un piano due rette perpendicolari Ox, Oy, i due numeri complessi coniugati $a + bi$, $a - bi$ si possono rappresentare in due modi diversi: sia, con Gauss, mediante due punti reali P e Q del piano, sia, seguendo Staudt, mediante quella involuzione ellittica sulla retta Ox, i cui punti doppi U, V hanno per ascisse quei numeri. Si dimostri ora che P e Q sono precisamente i due punti, dai quali la involuzione ellittica su Ox è proiettata mediante una involuzione circolare (n.° 89, es. 7)); od anche, i due rimanenti vertici del quadrilatero completo, di cui una coppia di vertici opposti sta in U, V, e l'altra nei punti ciclici del piano.

PARTE SECONDA.

Geometria analitica del piano.

96. Un sistema di coordinate per il piano punteggiato. — Vogliamo ora occuparci delle forme di seconda specie, e in particolare del *piano punteggiato*. Proponiamoci anzitutto di stabilire un sistema di coordinate atto a rappresentare i punti di un piano.

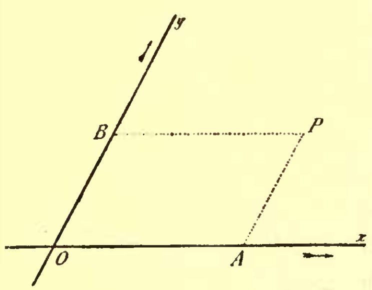
Le considerazioni fatte sulle forme di prima specie ci suggeriscono subito una via. Fissiamo nel piano due punti S, S', centri di fasci di rette, in ciascuno dei quali stabiliremo un sistema di coordinate (ad es. proiettive). Allora, dato un punto P del piano, rimangono individuate le rette SP, $S'P$ ed i numeri x, y che sono coordinate di quelle, entro ai fasci S, S', rispettivamente. Viceversa, conoscendo i due numeri x, y, avremo in corrispondenza due rette nei fasci S, S' ed il punto P ove si incontrano. I due numeri x, y possono dirsi *coordinate* di P. E tra la coppia di numeri (x, y) ed il punto P passa una corrispondenza biunivoca. Fanno solo eccezione: da un lato i punti S, S', per ciascuno dei quali una delle due coordinate è indeterminata; dall'altro lato quella coppia x', y' di coordinate che definiscono la retta SS', tanto nel fascio S, quanto nel fascio S', giacchè il punto P rimane allora indeterminato sulla retta SS'. In breve, il sistema di coordinate ora nominato si presta a rappresentare tutto il piano punteggiato, fatta eccezione per i punti di una retta SS'.



Scegliendo i punti S, S' all'infinito, e fissando nei relativi fasci impropri le coordinate x, y nel modo che ora esporremo, si perviene al sistema di *coordinate cartesiane*, che, per ragioni storiche, e sopratutto per i servigi che presta nelle matematiche pure ed applicate, ha la massima importanza.

Sebbene nelle opere dei geometri greci si trovino procedimenti, che si traducono facilmente coi metodi della geometria analitica, tuttavia non poteva sorgere questa scienza, finchè il calcolo letterale non fosse giunto ad un certo grado di sviluppo. L'idea di studiare le proprietà del piano mediante coordinate venne, quasi contemporaneamente, a FERMAT e DESCARTES. Quest'ultimo, che espose con maggior ampiezza e con numerose applicazioni i nuovi concetti nella sua *Géométrie* (1627), viene comunemente riguardato come fondatore della Geometria Analitica.

97. Coordinate cartesiane. — Assumiamo nel piano due rette, *assi coordinati*, secantisi in un punto proprio O, *origine*; chiamiamo *asse* x una di quelle, *asse* y l'altra. Fissiamo ad arbitrio i versi positivi sugli assi, e scegliamo l'unità di lunghezza per misurare i segmenti sopra di essi; (ordinariamente serve la stessa unità per entrambi gli assi). Per ogni punto P del piano passa una retta parallela all'asse y, ed una retta parallela all'asse x; quelle rette incontrano rispettivamente gli assi x, y nei punti A e B. Dato P, sono determinati questi punti, e quindi i valori $OA = a$, $OB = b$, presi coi segni convenienti.



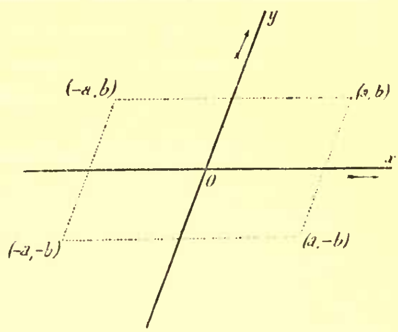
Viceversa, dati due numeri reali a, b coi relativi segni, sono determinati i punti A, B, e quindi il punto P, quarto vertice del parallelogramma costruito su OA, OB.

I numeri a, b si chiamano le *coordinate cartesiane* del punto P; in particolare, a dicesi la *prima coordinata*, o l'*ascissa*, o la x del punto P, e b la *seconda coordinata*, o la *ordinata*, o la y; e si scrive brevemente $P\ (a,\ b)$.

Risulta dalla definizione che *i punti dell'asse* x *hanno nulla la ordinata* (y $=$ 0); ed *i punti dell'asse* y *hanno nulla la ascissa*, (x $=$ 0); *per la origine* O *sono nulle le due coordinate*. Avremo dunque

$$A\ (a,\ 0),\quad B\ (0,\ b),\quad O\ (0,\ 0).$$

Quanto ai segni delle coordinate, è da notarsi che i due assi x, y dividono il piano in quattro regioni angolari, a ciascuna delle quali spettano particolari segni. Così, ogni punto appartenente all'angolo limitato dalle semirette positive x, y, ha positiva la x e la y; mentre se sta nell'angolo opposto al vertice, saranno negative le due coordinate; un punto dell'angolo formato dalla semiretta positiva x colla semiretta negativa y, ha positiva la x e negativa la y, ecc. Ad es. i quattro punti (a, b), $(-a, b)$, $(-a, -b)$, $(a, -b)$ sono vertici di un parallelogramma avente i lati paralleli agli assi coordinati e il centro nell'origine. Due punti come (a, b), $(-a, -b)$ sono simmetrici rispetto all'origine.



98. Osservazione relativa ai punti impropri. — Nel sistema cartesiano ogni punto vien riguardato come intersezione di due rette, una parallela all'asse x, l'altra all'asse y, rette che appartengono dunque a due fasci impropri, in ciascuno dei quali è fissato un sistema di coordinate. La retta all'infinito, comune ai due fasci, ha in entrambi la coordinata $\pm\infty$. Ne viene (n.° 96) che la corrispondenza fra punto e coppia di coordinate cartesiane è biunivoca (e, come è facile vedere, continua ([1])), finchè si considerano punti propri del piano, mentre presenta eccezione per i punti impropri. Come coordinate di un punto improprio, si possono assumere i simboli $(\pm\infty, \pm\infty)$; fatta eccezione pel punto all'infinito dell'asse x che ha $x = \pm\infty$, y indeterminata, e pel punto all'infinito dell'asse y che ha x indeterminata, $y = \pm\infty$. Però al simbolo $(\pm\infty, \pm\infty)$ non corrisponde un sol punto, bensì tutti i punti impropri del piano. In breve: *il sistema cartesiano non si presta a rappresentare i punti all'infinito del piano.* Segue di qua che, mentre il sistema cartesiano serve ottimamente nello studio delle proprietà metriche delle figure appartenenti ad un campo limitato del piano (proprietà nelle quali la retta all'infinito si comporta diversa-

---

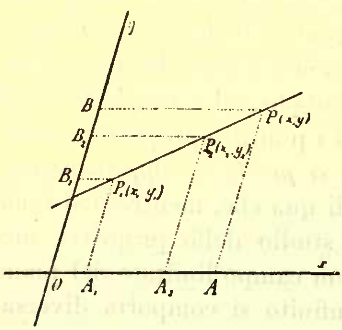
([1]) La corrispondenza fra un punto del piano e le sue coordinate x, y si dice *continua*, se si può rinchiudere il punto in un'area così piccola, che le differenze $x' - x$, $y' - y$ fra le coordinate di un punto qualsiasi dell'area e le coordinate del punto primitivo siano, in valore assoluto, inferiori ad una quantità data ad arbitrio.

mente dalle altre rette), il sistema stesso presenta qualche difetto quando si voglia adoperare nello studio delle proprietà proiettive, in cui non si fa differenza fra elementi propri od impropri. Vedremo in seguito come tale difetto si possa evitare introducendo una terza coordinata.

Capitolo I.

Relazioni di posizione fra punti e rette.

99. Punto che divide un segmento in un dato rapporto. — Tratteremo ora, col mezzo delle coordinate cartesiane, i principali problemi di geometria piana; e cominceremo a studiare le relazioni fondamentali di posizione fra punti e rette, insieme ad alcune proprietà metriche che più si avvicinano alle grafiche [1]. In questo primo gruppo di questioni, le formole a cui giungeremo, non contengono l'angolo formato dagli assi coordinati, il quale sarà dunque fissato ad arbitrio; e le unità di lunghezza relative ai due assi (le quali servono a misurare rispettivamente le ascisse e le ordinate) potranno anche supporsi diverse tra loro, sebbene d'ordinario si prendano uguali.



Proponiamoci anzitutto il problema:

Dati due punti mediante le loro coordinate, determinare le coordinate di un punto allineato con quelli, e formante con essi un rapporto semplice assegnato.

Siano $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ i punti dati, $P(x, y)$ il punto della retta P_1P_2, formante coi punti dati il rapporto semplice noto

$$(P_1P_2P) = \frac{P_1P}{P_2P} = r.$$

---

(1) Sono precisamente quelle proprietà metriche che si riattaccano alla nozione di retta all'infinito, ma non a quella di punti ciclici, come ad es. il parallelismo, il rapporto semplice di tre punti allineati, ecc.

Proiettiamo i punti P_1, P_2, P su ciascuno degli assi dal punto all'infinito dell'altro asse. Otterremo le due terne di punti $A_1 A_2 A$ sopra x e $B_1 B_2 B$ sopra y; e sarà

$$r = (P_1 P_2 P) = (A_1 A_2 A) = (B_1 B_2 B).$$

Ora le ascisse di A_1 e A_2 sono rispettivamente x_1, x_2; quindi l'ascissa di A, o, ciò che fa lo stesso, di P, sarà (n.° 32) $x = \frac{x_1 - r x_2}{1 - r}$. Similmente si calcola l'ordinata di P, e si conclude che le coordinate richieste di P sono

$$(1) \qquad x = \frac{x_1 - r x_2}{1 - r}, \quad y = \frac{y_1 - r y_2}{1 - r}.$$

Ponendo $- r = \frac{n}{m}$, quelle coordinate possono anche scriversi sotto la forma

$$(1') \qquad x = \frac{m x_1 + n x_2}{m + n}, \quad y = \frac{m y_1 + n y_2}{m + n}.$$

In particolare: il punto medio del segmento $P_1 P_2$ ha le coordinate

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

il coniugato armonico di P rispetto a $P_1 P_2$ è determinato da

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}.$$

100. Condizione di allineamento di tre punti. — Se nelle (1) varia r, variano in corrispondenze x, y, ed il punto $P(x, y)$ descrive la retta $P_1 P_2$; viceversa, per ogni posizione di P su quella retta si può trovare un valore di $r = (P_1 P_2 P)$, tale che le (1) diano le coordinate di P.

Dunque la condizione perchè tre punti dati $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ siano allineati, è che le (1) coesistano per uno stesso valore di r, ossia che i due valori di r ricavati dalle (1) siano uguali fra loro:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2},$$

od anche

$$(2) \qquad \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}.$$

La (2) può pure scriversi sotto la forma

$$(2') \qquad (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0,$$

la quale (come si verifica direttamente) dà la condizione di allineamento, anche quando uno dei denominatori delle (2) è nullo; o sotto la forma

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

o sotto l'altra più usata

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La condizione perchè tre punti siano allineati, è espressa dall' annullarsi del determinante formato colle coordinate dei punti stessi e colle unità.

101. Equazione di una retta. — Se si suppongono fissi i punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e variabile il punto $P(x, y)$, la relazione (2), o (2′), o (3), diviene una equazione nelle variabili x, y, equazione che è soddisfatta ogniqualvolta x, y sono coordinate di un punto della retta P_1P_2, e solo allora. Perciò si suol dire che la equazione (2), o (2′), o (3), nelle variabili x, y, *rappresenta analiticamente la retta congiungente i due punti* (x_1, y_1), (x_2, y_2), è *la equazione della retta* stessa; mentre la retta rappresenta graficamente quella equazione.

La nostra equazione è lineare rispetto alle variabili x, y, e (sviluppata ed ordinata) ha la forma

$$(4) \qquad ax + by + c = 0,$$

dove a, b, c sono tre costanti indipendenti dalla posizione del punto $P(x, y)$. Ora si può chiedere se *ogni* equazione del tipo (4) rappresenti effettivamente una retta, vale a dire se gli infiniti punti le cui coordinate verificano la (4), siano tutti allineati. Basterà esaminare se tre, comunque scelti, tra i detti punti appartengano ad una retta. Siano dunque (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) tre punti tali che risulti

$$ax_1 + bx_1 + c = 0, \quad ax_2 + bx_2 + c = 0,$$
$$ax_3 + by_3 + c = 0.$$

Queste equazioni, lineari ed omogenee rispetto ad a, b, c, coesistono per valori non tutti nulli delle quantità stesse; sarà quindi verificata la condizione

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale esprime che i tre punti sono allineati. Concludendo: *Se un punto si muove descrivendo una retta, le sue coordinate verificano una equazione lineare a due variabili; e viceversa.*

102. Posizioni particolari di una retta rispetto agli assi. — La posizione della retta

(1) $$ax + by + c = 0$$

dipende dai valori dei tre coefficenti a, b, c, o meglio dai rapporti di due di essi al terzo. Alcuni di quei coefficienti possono anche esser nulli; non tutti però, e nemmeno i due primi insieme.

a) Se $b = c = 0$, $a \neq 0$, l'equazione diviene

$$ax = 0 \quad \text{ossia} \quad x = 0,$$

e *rappresenta l'asse* y, i cui punti hanno nulla l'ascissa. Similmente si conclude che l'equazione

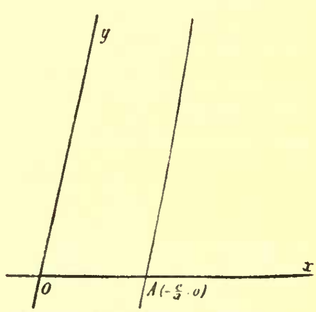
$$y = 0$$

rappresenta l'asse x.

b) Se $b = 0$, ma $a \neq 0$, $c \neq 0$, la (1) diviene

$$ax + c = 0, \quad \text{ossia} \quad x = -\frac{c}{a},$$

e rappresenta il luogo dei punti che hanno per ascissa $-\frac{c}{a}$, cioè una retta parallela all' asse delle y, uscente da quel punto A dell' asse x, che ha l'ascissa $-\frac{c}{a}$.



Similmente vediamo che

$$by + c = 0$$

è l'equazione di una retta parallela all' asse x.

Dunque: *se nell'equazione di una retta manca una delle coordinate, la retta è parallela al corrispondente asse.*

c) Se si suppone nulla soltanto c, l'equazione (1) assume la forma

$$ax + by = 0,$$

e la retta corrispondente passa per l'origine, poichè i valori $x = 0$, $y = 0$ soddisfanno l'equazione proposta.

Quindi: *se nell' equazione di una retta manca il termine noto, la retta passa per l' origine.*

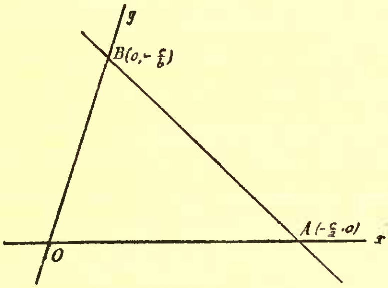
L'equazione della nostra retta può pure scriversi sotto le forme equivalenti

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \quad y = mx,$$

(dove α e β sono proporzionali a $-b$, a, ed è $m = -\frac{a}{b}$).

Per tracciare effettivamente la retta in questione basterà conoscerne un altro punto, che otterremo dando ad x un valore numerico arbitrario, non nullo, e calcolando il corrispondente valore di y.

d) Se infine nella equazione (1) tutti i coefficienti sono diversi da zero, la retta sega gli assi coordinati x, y in due punti A e B propri e distinti. Per avere la intersezione A coll' asse x ($y = 0$), si ponga $y = 0$ nella (1); si troverà



$$x = OA = -\frac{c}{a}.$$

Similmente, per $x = 0$, si ha

$$y = OB = -\frac{c}{b}.$$

Indicando i due segmenti OA, OB con

$$p = -\frac{c}{a}, \quad q = -\frac{c}{b}$$

l'equazione (1), dopo averne divisi i due membri per $-c$, può scriversi sotto la forma

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

la quale rappresenta *una retta che stacca sugli assi, a partire dalla origine, i segmenti p e q.*

103. Retta passante per un punto dato. — Disponendo dei coefficenti che entrano nell' equazione di una retta

(1) $$ax + by + c = 0,$$

o meglio dei rapporti di due di essi al terzo, si può ottenere che la retta soddisfi a due condizioni assegnate, traducentisi in due relazioni fra i detti rapporti. In tal guisa si ritroverebbe, ad es. sotto la forma (3) del n.° 100, l'equazione della retta congiungente due punti.

Se si esige che la retta (1) passi per un sol punto $P(x_1, y_1)$, dei due rapporti sopra nominati uno resterà ancora indeterminato. Ed infatti la condizione imposta si traduce nella relazione

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$

la quale, sottratta membro a membro dalla (1), dà

$$(2) \qquad a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0,$$

equazione che, al variare del rapporto $\frac{a}{b}$, *rappresenta ogni retta passante per il punto* (x_1, y_1).

In particolare, se $b = 0$ ed $a \neq 0$, si ha $x - x_1 = 0$, equazione della parallela all' asse y condotta per il punto P; ecc.

104. Intersezione di due rette. — Passiamo ora a considerare due o più rette di un piano, insieme alle equazioni che le rappresentano. Ogni relazione grafica fra quelle rette si traduce in una particolarità del sistema di equazioni lineari, e inversamente le proprietà dei sistemi di equazioni lineari a due incognite si rispecchiano nelle proprietà grafiche dei sistemi di rette di un piano.

Così, se son date due rette r, r' mediante le loro equazioni

$$r) \qquad ax + by + c = 0,$$
$$r') \qquad a'x + b'y + c' = 0,$$

il problema di determinare il punto di incontro rr', si traduce nel problema di trovare due valori x, y, coordinate del punto stesso, soddisfacenti al sistema dato.

Le coordinate richieste sono dunque

$$rr') \qquad x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

Se $ab' - a'b \neq 0$, le due rette si segano in un punto proprio.

105. Condizione di parallelismo. — Se invece $ab' - a'b = 0$, senza che siano nulli entrambi i numeratori delle rr'), non esistono valori finiti di x, y soddisfacenti le equazioni $r)$, $r')$; le due rette non hanno alcun punto proprio comune, sono parallele. La condizione di parallelismo, $ab' - a'b = 0$, può anche porsi (quando a' e b' siano diversi da zero) sotto la forma

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

e si enuncia: *condizione perchè due rette, di date equazioni, siano parallele, è che i coefficienti delle variabili in una delle equazioni siano proporzionali ai corrispondenti coefficienti dell'altra.*

Se si avesse inoltre

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

(o meglio, per contemplare anche il caso di denominatori nulli, se si verificassero le relazioni che si ottengono da queste liberando da frazioni), le coordinate del punto rr') si presenterebbero sotto forma indeterminata; ma allora le due equazioni r) ed r') sarebbero equivalenti, e le due rette r, r' coinciderebbero.

Ritornando alla condizione di parallelismo, notiamo che se nella equazione di una retta r rimangono fissi i coefficienti delle variabili e muta il termine noto, la retta si muove parallelamente a sè stessa. Segue che la parallela alla r condotta per l'origine avrà l'equazione

$$ax + by = 0,$$

e la parallela alla retta stessa, pel punto (x_1, y_1), sarà data da

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

106. Fascio di rette. — Consideriamo ora tre rette

r) $\qquad ax + by + c = 0,$

r') $\qquad a'x + b'y + c' = 0,$

r'') $\qquad a''x + b''y + c'' = 0,$

e cerchiamo la condizione affinchè appartengano ad uno stesso fascio.

Osserviamo perciò che se le tre rette passano per uno stesso punto proprio, le coordinate x, y di questo devono soddisfare insieme le tre equazioni, e quindi deve essere

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0;$$

e la medesima relazione si verifica se le rette sono parallele tra loro, perchè allora sono nulli i minori formati cogli elementi delle prime due verticali del determinante. Viceversa, se la (1) è soddisfatta, o le equazioni r), r'), r'') coesistono per un sistema di valori x, y, ed allora le rette appartengono ad un fascio proprio; o nel determinante (1) sono nulli i minori nominati, e le tre rette appartengono ad un fascio improprio. In ogni caso: *La condizione perchè tre rette appartengano ad un fascio, è che si annulli il determinante formato coi coefficienti e termini noti delle equazioni delle rette stesse.*

Supposte distinte le rette r, r', la (1) esprime pure la condizione perchè esistano due quantità λ e μ, tali che sia (cfr. n.° 83)

$$(2)\qquad a'' = a\lambda + a'\mu, \quad b'' = b\lambda + b'\mu, \quad c'' = c\lambda + c'\mu.$$

Ma allora la equazione r'') può trascriversi così

$$(a\lambda + a'\mu)x + (b\lambda + b'\mu)y + (c\lambda + c'\mu) = 0,$$

ossia

$$(3)\qquad \lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0.$$

Dunque: *la equazione di ogni retta formante fascio con due rette assegnate, può scriversi come una combinazione lineare delle equazioni di queste* (1).

Al variare dei *parametri* λ e μ, o meglio del parametro rapporto $h = \frac{\mu}{\lambda}$, la retta (3), o

$$(3')\qquad ax + by + c + h(a'x + b'y + c') = 0,$$

varia descrivendo il fascio nominato; precisamente, ai valori $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ ($h = 0$) corrisponde la retta r, ed ai valori $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ ($h = \pm\infty$) corrisponde la r'. Il parametro h può assumersi come coordinata della retta (3′) entro

(1) Che la (3) rappresenti una retta del fascio rr', può anche dimostrarsi direttamente, osservando anzitutto che la (3) è lineare e quindi rappresenta una retta, in secondo luogo che questa retta passa per il punto rr', perchè le coordinate di esso annullano i trinomi $ax + \dots$, $a'x + \dots$, e quindi il primo membro della (3).

al fascio; vedremo subito che si tratta effettivamente di una coordinata proiettiva [1].

107. Doppio rapporto di quattro rette di un fascio. — Proponiamoci perciò di calcolare il doppio rapporto $(rr'r''r''')$ delle quattro rette

$$\begin{array}{ll} r) & ax + by + c = 0, \\ r') & a'x + b'y + c' = 0, \\ r'') & ax + by + c + h(a'x + b'y + c') = 0, \\ r''') & ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0, \end{array}$$

appartenenti ad un fascio. Quel doppio rapporto è uguale al doppio rapporto delle intersezioni delle rette stesse con una trasversale qualsiasi. Se assumiamo come trasversale l'asse x, (e similmente si potrebbe adoperare l'asse y, od una parallela agli assi, se il centro del fascio giacesse sull'asse x o nell'origine), troviamo come ascisse delle quattro intersezioni

$$-\frac{c}{a}, \quad -\frac{c'}{a'}, \quad -\frac{c+hc'}{a+ha'}, \quad -\frac{c+kc'}{a+ka'}.$$

Ora applicando la nota formola (n.° 43) risulta che il doppio rapporto dei quattro punti è $\frac{h}{k}$, e si conclude che

$$(rr'r''r''') = \frac{h}{k}.$$

Se ad es. $h = -k$, le quattro rette formano un gruppo armonico. Se $k = 1$, ed h qualsiasi, si ha

$$(rr'r''r''') = (r'rr'''r'') = h,$$

la quale ci dice: *il parametro* h, *che entra nella equazione di una retta*

$$ax + by + c + h(a'x + b'y + c') = 0$$

variabile in un fascio, è la coordinata proiettiva della retta stessa rispetto alle tre rette fondamentali seguenti

$$a'x + b'y + c' = 0, \quad ax + by + c = 0,$$
$$(ax + by + c) + (a'x + b'y + c') = 0,$$

che corrispondono ai valori $h = \pm\infty$, 0, 1.

---

[1] Se del fascio si conosce il centro (x_1, y_1), conviene scrivere la equazione della retta generica di esso sotto la forma indicata nel n.° 103, che è d'altronde una combinazione lineare delle due equazioni

$$x - x_1 = 0, \quad y - y_1 = 0,$$

rappresentanti le parallele agli assi uscenti dal centro.

Di qua si deduce subito la espressione del doppio rapporto di quattro rette generiche del fascio (n.° 45), la condizione di proiettività fra due fasci (n.° 63), ecc.

108. Nuova forma della condizione perchè tre rette formino fascio. — Volendo verificare se tre rette formano fascio, è utile in certi casi ricorrere alla proposizione seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre rette formino fascio, è che esistano tre numeri, non tutti nulli, tali che, moltiplicando ordinatamente per essi le equazioni delle tre rette e sommando membro a membro, si ottenga una identità.

Siano

$$\begin{array}{ll} r) & ax + by + c = 0, \\ r') & a'x + b'y + c' = 0, \\ r'') & a''x + b''y + c'' = 0, \end{array}$$

le tre rette date, e si supponga anzitutto che, indicando con λ, μ, ν certi tre numeri non tutti nulli, si abbia identicamente (cioè per valori arbitrari di x, y)

(1) $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')+\nu(a''x+b''y+c'')=0,$

ossia

$$(\lambda a+\mu a'+\nu a'')x+(\lambda b+\mu b'+\nu b'')y+(\lambda c+\mu c'+\nu c'')=0.$$

Perchè questa identità si verifichi, devono esser nulli i coefficienti di x, y, e il termine noto:

$$\begin{aligned} \lambda a + \mu a' + \nu a'' &= 0, \\ \lambda b + \mu b' + \nu b'' &= 0, \\ \lambda c + \mu c' + \nu c'' &= 0. \end{aligned}$$

Ma la coesistenza di queste tre equazioni, per valori non tutti nulli di λ, μ, ν, porta l' annullarsi del determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

quindi (n.° 106) le tre rette r, r', r'' formano fascio. Viceversa, se le tre rette formano fascio ed è quindi nullo il determinante ora scritto, le ultime tre equazioni possono risolversi mediante valori non tutti nulli di λ, μ, ν, e sussiste l'identità (1).

Quando invece nella (1), al posto di λ, μ, ν, si pongano valori *arbitrari*, essa non sussiste più identicamente, ma ci dà una equazione lineare in x, y, rappresentante una retta, la quale, come è facile vedere, appartiene essa pure al fascio che contiene le tre rette date.

109. Rete di rette. — Supponiamo, al contrario, che le tre rette r, r', r'' sopra considerate non formino fascio. Allora, comunque vengano scelti i parametri, non tutti nulli, λ, μ, ν, la (1) non è più verificata identicamente, ma rappresenta una certa retta del piano. E vale la proposizione seguente:

Date le equazioni di tre rette non formanti fascio, mediante una conveniente combinazione lineare di quelle, si può rappresentare una quarta retta assegnata ad arbitrio nel piano.

Nella nuova ipotesi infatti, poichè il determinante sopra scritto è diverso da zero, esisteranno tre numeri λ, μ, ν tali che risulti

$$\lambda a + \mu a' + \nu a'' = a''',$$
$$\lambda b + \mu b' + \nu b'' = b''',$$
$$\lambda c + \mu c' + \nu c'' = c''',$$

dove a''', b''', c''' sono tre quantità date ad arbitrio, non tutte nulle; perciò l'equazione

(1) $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')+\nu(a''x+b''y+c'')=0$

coinciderà coll' altra

$$a'''x + b'''y + c''' = 0,$$

che definisce una retta arbitraria del piano.

Al variare dei tre parametri λ, μ ν, o meglio dei due rapporti $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, la (1) rappresenta la totalità, o (come si suol dire) la *rete* delle rette del piano, il *piano rigato*.

110. Notazione abbreviata. — Le formule che ci siamo procurati finora, permettono di trattare analiticamente le questioni riguardanti la mutua posizione di punti e rette di un piano (ad es. il teorema dei triangoli omologici, il teorema dell'esagono iscritto fra due rette, ecc.). Ora quando nella figura considerata compariscono più rette, ciascuna delle quali vien rappresentata da una equazione lineare, conviene spesso mettere in evidenza i legami che passano fra le equazioni stesse, piuttosto che i coefficienti di queste. E allora si preferisce indicare abbreviatamente i primi membri di alcune tra quelle equazioni mediante singole lettere, le quali adunque designano polinomi contenenti le variabili x, y, e non quantità. Con questa *notazione abbreviata* si raggiunge una maggior concisione nella scrittura, in grazia alla quale, dal solo aspetto delle formole, è facile dedurre le proprietà di posizione degli elementi della figura studiata.

Così, se indichiamo con l, m, n... polinomi lineari in x, y, e quindi con $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$... le equazioni di più rette, potremo enunciare sotto la seguente forma gli ultimi risultati:

a) L'equazione $\lambda l + \mu m = 0$ rappresenta una retta generica del fascio determinato da $l = 0$, $m = 0$; e $\frac{\mu}{\lambda}$ è la coordinata proiettiva di quella retta, rispetto alle rette fondamentali $m = 0$, $l = 0$, $l + m = 0$.

b) Condizione perchè tre rette $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ formino fascio, è che esistano tre numeri λ, μ, ν non tutti nulli, e tali che il polinomio $\lambda l + \mu m + \nu n$ sia identicamente nullo.

c) Se le tre rette $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ non formano fascio, la equazione $\lambda l + \mu m + \nu n = 0$ è atta a rappresentare una qualsiasi retta del piano, purchè i parametri λ, μ, ν siano convenientemente scelti.

d) Per applicare i risultati qui riassunti alla dimostrazione di un teorema di geometria proiettiva, consideriamo un triangolo LMN, i cui lati (rispettivamente opposti a quei vertici) abbiano le equazioni

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

e siano segati da una trasversale arbitraria

$$r) \qquad \lambda l + \mu m + \nu n = 0$$

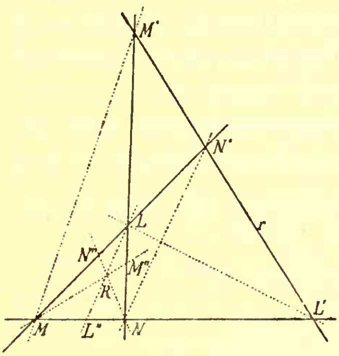
in tre punti L', M', N'. La retta LL' congiungente il vertice $m = 0$, $n = 0$ coll' intersezione del lato opposto $l = 0$ e di r, ha una equazione che deve esser combinazione lineare, sia della equazione r) e di $l = 0$, sia delle equazioni $m = 0$, $n = 0$; ora a queste condizioni soddisfa la equazione $\mu m + \nu n = 0$, che si ottiene sottraendo dalla r) la $l = 0$ moltiplicata per λ. In simil modo si conclude che alle rette $l' \equiv LL'$, $m' \equiv MM'$, $n' \equiv NN'$ spettano le equazioni seguenti

$$l') \quad \mu m + \nu n = 0; \quad m') \quad \nu n + \lambda l = 0; \quad n') \quad \lambda l + \mu m = 0.$$

Le rette $l'' \equiv LL''$, $m'' \equiv MM''$, $n'' \equiv NN''$, coniugate armoniche di queste rispetto alle coppie di lati del triangolo uscenti da L, M, N rispettivamente, sono (n.° 107)

$$l'')\quad \mu m - \nu n = 0;\quad m'')\quad \nu n - \lambda l = 0;\quad n'')\quad \lambda l - \mu m = 0.$$

E queste concorrono in un punto R, perchè sommandone membro a membro le equazioni, si ottiene una identità. Dunque: *se delle tre intersezioni di una retta coi lati di un triangolo si costruiscono i coniugati armonici rispetto alle coppie di vertici esistenti sui lati stessi, i nuovi punti congiunti coi vertici opposti danno tre rette concorrenti in un punto.*



E viceversa (o dualmente): *se delle tre rette congiungenti i vertici di un triangolo con un punto si costruiscono le coniugate armoniche rispetto alle coppie di lati passanti per i vertici stessi, le nuove rette segano i lati opposti in tre punti allineati.* Infatti le tre rette primitive si possono sempre rappresentare mediante le tre equazioni $l'')$, $m'')$, $n'')$; le loro coniugate armoniche saranno allora le $l')$, $m')$, $n')$; e per i punti di incontro di queste colle rette $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$, rispettivamente, passa la retta $r)$.

Il punto R e la retta r, collegati dalla precedente relazione, si chiamano *armonici* rispetto al triangolo LMN.

Esercizi I — 1) Segnare i punti di coordinate (1, 1), (2, — 2), (— 3, — 4), (— 1, $\sqrt{2}$), (2 + $\sqrt{3}$, 1 — $\sqrt{5}$); dividere il segmento che congiunge due di questi punti in 2, 3... parti eguali, e calcolare le coordinate dei punti di divisione.

2) Costruire le rette di equazioni $x - 2 = 0$, $y + \sqrt{2} = 0$, $x + y = 0$, $2x + 3y = 0$, $x + 2y + 3 = 0$.

3) I punti (1, 2), (2, — 2), (— 3, — 4) determinano un triangolo; scrivere le equazioni dei lati, delle parallele ai lati condotte per i vertici opposti, delle congiungenti i punti medi dei lati, delle mediane; verificare che le ultime tre rette concorrono in un punto, e calcolarne le coordinate.

4) Le rette $x + y - 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$ determinano un triangolo; calcolare le coordinate dei vertici; scrivere le equazioni delle parallele ai lati condotte per i vertici opposti, e delle mediane; determinare la intersezione di queste.

5) Risolvere i problemi indicati negli esercizi 3), 4) nella ipotesi che i vertici del triangolo abbiano le coordinate (x_i, y_i), oppure i lati abbiano le equazioni $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$; dimostrare in particolare, nella prima ipotesi, che il punto di concorso delle mediane ha le coordinate $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

II — 6) Dati in un piano n punti $A_i(x_i, y_i)$ e dati in corrispondenza n numeri p_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, il baricentro dei punti A_i presi coi pesi p_i si definisce nello stesso modo tenuto per le punteggiate (n.° 32, es. 4)). Si dimostri che le coordinate del detto baricentro sono $\frac{\Sigma_i p_i x_i}{\Sigma_i p_i}$, $\frac{\Sigma_i p_i y_i}{\Sigma_i p_i}$ (sicchè in particolare, il punto di concorso delle mediane di un triangolo è il baricentro dei vertici presi con pesi uguali); e si concluda che il detto baricentro non dipende dall'ordine in cui i punti A_i si adoperano nella costruzione. Se però $\Sigma_i p_i = 0$, senza che siano nulli entrambi i numeratori, le rette che congiungono ciascun punto A_i col baricentro dei rimanenti, risultano tutte parallele, e si dice che il baricentro degli n punti è all'infinito in quella direzione. Se finalmente sono nulli anche i due numeratori, ciascun punto A_i coincide col baricentro dei rimanenti, ed il baricentro dei punti dati è indeterminato.

7) Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ed una retta $ax + by + c = 0$, che seghi la congiungente di quei punti in Q, calcolare il rapporto semplice $(P_1 P_2 Q)$. Dedurre una dimostrazione del teorema di Menelao per un triangolo o per un n.gono piano (n.° 36).

8) Dati i punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$, calcolare il rapporto semplice $(P_1 P_2 Q)$ essendo $Q \equiv P_1 P_2 \cdot P_3 P_4$. Dedurre una dimostrazione del teorema di Ceva (n.° 37).

9) Scrivere l'equazione di quella retta che passa pel punto d'incontro di $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, e soddisfa ad una delle condizioni seguenti: a) passa per l'origine; b) è parallela ad uno degli assi; c) passa per un punto di date coordinate; d) è parallela ad una retta di data equazione; e) passa pel punto di concorso delle rette $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$.

10) Le congiungenti i vertici di un triangolo coi punti medi dei segmenti intercettati sopra una trasversale dai relativi angoli, segano i lati opposti del triangolo in tre punti allineati; (si possono assumere due lati del triangolo come assi coordinati). Di qual teorema proiettivo, dimostrato nel testo, può questo riguardarsi come caso particolare metrico?

11) Dimostrare analiticamente il teorema di Pappo sull'esagono iscritto tra due rette (n.° 70, Oss. II) (od anche, più generalmente, il teorema sull'asse di proiettività di due punteggiate proiettive), assumendo queste come assi coordinati.

12) I punti medi delle diagonali di un quadrilatero completo stanno sopra una medesima retta (cfr. n.° 89, es. 10)); (due lati del quadrilatero possono assumersi come assi coordinati; oppure si possono ritener date le coordinate dei sei vertici, tenendo conto delle relazioni che devono legarle).

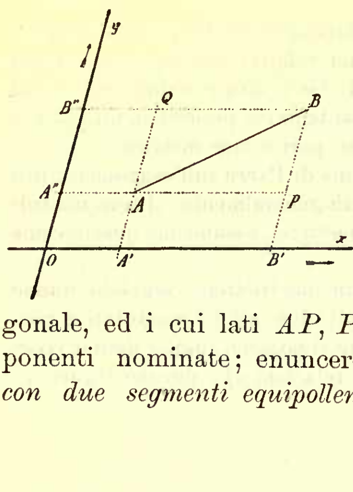
Capitolo II.

Distanze, angoli, aree.

111. Proiezioni parallele di segmenti. — Tratteremo ora un secondo gruppo di questioni sui punti e le rette di un piano, questioni relative ai concetti metrici di distanza, angolo, area... Per procedere in modo uniforme nel detto studio, premettiamo qualche nozione sulle proiezioni parallele dei segmenti.

Date nel piano due rette non parallele x, y, sulla prima delle quali sia fissato il verso positivo, possiamo immaginar proiettati i punti del piano sopra x *parallelamente ad* y, o *secondo la direzione* y, cioè dal punto all' infinito di y. I punti di un segmento AB avranno per proiezioni i punti di un segmento $A'B'$ di x, il quale (tenuto conto del segno) si dirà *proiezione di* AB *sopra* x *secondo la direzione* y. È chiaro che se AB si sposta parallelamente a sè stesso, mantenendo invariata la propria grandezza e il proprio verso, la proiezione $A'B'$ scorre sopra x senza alterarsi nè in grandezza, nè in verso; dunque: segmenti uguali, paralleli ed ugualmente diretti, o (come diremo brevemente riassumendo le tre condizioni con un solo aggettivo) *segmenti equipollenti hanno proiezioni uguali sopra una stessa retta, secondo una stessa direzione.*

a) Se fissiamo il verso positivo anche sopra y, potremo costruire inoltre la proiezione $A''B''$ di AB sopra y, secondo la direzione x. I due segmenti $A'B'$, $A''B''$, considerati in grandezza, direzione e verso, si chiamano le *componenti di* AB (segmento *risultante*) *secondo le direzioni* x, y. Le rette proiettanti adoperate nella costruzione limitano un parallelogramma $APBQ$, di cui il segmento AB è una diagonale, ed i cui lati AP, PB sono equipollenti alle due componenti nominate; enunceremo questa osservazione dicendo: *con due segmenti equipollenti alle componenti di un segmento*



si può costruire una spezzata bilatera, di cui il segmento dato congiunge gli estremi. Se il segmento AB si sposta parallelamente a sè stesso, senza alterarsi in grandezza, le due componenti di esso non mutano nè grandezza, nè direzione, nè verso; dunque le componenti di un segmento definiscono il segmento in grandezza, direzione e verso, non in posizione.

Se si assumono le rette x, y come assi coordinati e si chiamano (x, y) ed (x', y') le coordinate cartesiane di A e B, le componenti di AB sono date, in valore e segno, da

$$x' - x, \quad y' - y.$$

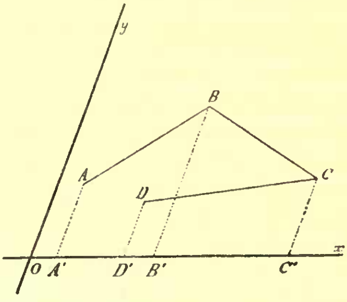
In particolare, le componenti del segmento che va dall'origine ad un punto, sono le coordinate cartesiane del punto stesso.

b) Consideriamo ora più segmenti, che siano i successivi lati di una spezzata, ad es. $ABCD$; proiettiamo i vertici di questa sopra x, secondo la direzione y, ed indichiamone le proiezioni con A', B', C' D'. Chiameremo *proiezione della spezzata* (su x secondo la direzione y) la somma delle proiezioni dei lati, prese coi segni che ad esse spettano, vale a dire (n.° 25)

$$A'B' + B'C' + C'D' = A'D'.$$

Ma $A'D'$ è la proiezione di AD; dunque:

La proiezione di una spezzata è uguale alla proiezione del segmento che ne congiunge gli estremi, (essendo le proiezioni eseguite sopra una stessa retta, secondo una stessa direzione).

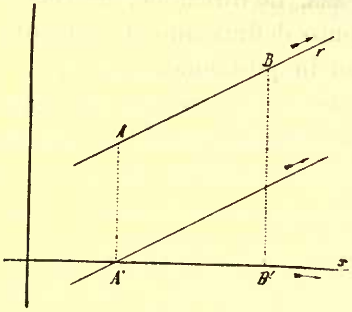


In particolare: *la proiezione di un segmento è uguale alla somma delle proiezioni delle sue componenti*, *prese secondo due direzioni qualisivogliano.*

La proiezione del perimetro di un poligono è nullo (sopra una retta qualsiasi secondo una qualsiasi direzione).

Se due spezzate hanno gli stessi estremi, le loro proiezioni sopra una stessa retta, secondo una stessa direzione, sono uguali.

c) Se si eseguiscono proiezioni *ortogonali*, vale a dire se la retta x su cui si proietta, è perpendicolare alla direzione y secondo cui si proietta, passa una relazione semplice fra la lunghezza di un segmento e la sua proiezione. Sia infatti AB un segmento di una retta r, e sia $A'B'$, la sua proiezione ortogonale su x. Possiamo, senza alterare la proiezione, immaginar trasportato parallelamente AB colla retta r, finchè A viene a coincidere con A'. Allora AB ed $A'B'$ sono, rispettivamente, ipotenusa e cateto di un triangolo rettangolo di cui $\widehat{xr}$ è l'angolo adiacente al cateto; dunque



$$A'B' = AB \cos xr.$$

Questa relazione vale anche nei segni, quando si siano fissati comunque i versi positivi sopra le rette x ed r. Ciò si verifica, supponendo anzitutto fissati i versi da A verso B e da A' verso B', giacchè allora i tre termini della precedente uguaglianza sono positivi, e notando poi che una inversione del senso positivo sopra una delle due rette muta il segno a due di quei termini, e lascia inalterato il terzo. In parole: *la proiezione ortogonale di un segmento sopra una retta è data (in valore e segno) dal prodotto del segmento obiettivo per il coseno dell'angolo formato dalle rette contenenti il segmento e la proiezione.*

Osservazione. — Nell'ultimo paragrafo, parlando di un segmento, abbiamo fatto attenzione alla sua grandezza, alla direzione della retta che lo sostiene, al verso in cui il segmento si intende descritto, ma non ci siamo occupati della posizione che il segmento occupa nel piano (o nello spazio). Ora in alcune applicazioni della matematica (alla meccanica, alla fisica...), nelle quali un siffatto ente geometrico spesso interviene, si è convenuto di attribuirgli un nome speciale; si è chiamato *vettore* un segmento considerato in grandezza, verso e direzione. Se AB è un vettore che va descritto da A verso B, il punto A si chiama *origine* (o *punto d'applicazione*) e B *termine*; un vettore noto è fissato anche in posizione, quando ne sia data la origine. Due vettori che differiscano solo per l'origine (vale a dire due segmenti equipollenti) diconsi *uguali*. Ai vettori si applicano le nozioni di *proiezioni*, *componenti*..., di cui parlammo a proposito dei segmenti.

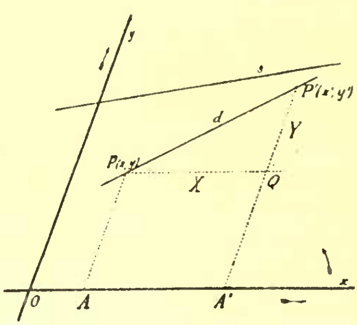
Dati due o più vettori, se a partire da un punto A arbitrario si costruisce un vettore AB uguale al primo vettore assegnato, poi un vettore BC uguale al secondo assegnato, e così si continua, si arriva alla fine a tracciare una spezzata $ABC\ldots HK$, che ha tanti lati quanti sono i vettori dati; il vettore AK che ne congiunge gli estremi si chiama *somma* o *risultante* dei vettori dati (*componenti*); ad es., nel piano, un vettore qualsiasi è la somma delle sue due componenti, prese secondo due direzioni arbitrarie. La somma o composizione dei vettori gode, come facilmente si dimostra, la proprietà associativa e commutativa.

Colla nuova locuzione, un teorema precedente può enunciarsi dicendo, che la somma delle proiezioni di più vettori uguaglia la proiezione della somma dei vettori stessi (sopra una data retta, secondo una data direzione).

112. Distanza di due punti. — Riprendiamo ora gli assi cartesiani x, y, sopra i quali supporremo (quando non si dica il contrario) fissati i versi positivi, in guisa che la semiretta positiva x venga a coincidere colla semiretta positiva y, mediante la rotazione in verso positivo di un angolo $\widehat{xy}$ inferiore a due retti. Spesso, per semplificare le formule, aggiungeremo inoltre la ipotesi che l'angolo $\widehat{xy}$ sia retto, che il sistema cartesiano sia *ortogonale*; a questa ipotesi conviene attenersi sempre nelle applicazioni metriche, quando si sia liberi nella scelta degli assi coordinati. Supporremo inoltre, da ora in poi, che si adoperi la stessa unità di misura per valutare i segmenti appartenenti ai due assi, o ad ogni altra retta del piano.

Ciò premesso, consideriamo due punti $P(x, y)$, $P'(x', y')$ giacenti sopra una retta r, su cui sia fissato arbitrariamente il verso positivo, ed indichiamo con d la misura (in valore e segno) del segmento PP'. Siano inoltre

$$X = x' - x, \qquad Y = y' - y$$



le componenti secondo le direzioni x, y del detto segmento, le quali possono riguardarsi come lati, paralleli ad x, y, di una spezzata PQP' conducente da P in P'. Proiettiamo ortogonalmente il segmento PP' e la spezzata sopra una retta arbitraria s (su cui si supporrà fissato il verso positivo); avremo (n.° 111, b, c))

$$(\alpha) \qquad d \cos rs = X \cos xs + Y \cos ys;$$

e facendo coincidere la s ordinatamente colle rette r, x, y, otterremo ancora

$$(\beta) \qquad d = X\cos xr + Y\cos yr,$$

$$(\gamma) \qquad d\cos rx = X + Y\cos yx,$$

$$(\delta) \qquad d\cos ry = X\cos xy + Y.$$

Occupiamoci pel momento delle ultime tre, fra le quali possiamo eliminare, sia $\cos xr$, $\cos yr$, sia le lunghezze d, X, Y. Per raggiungere il primo scopo, moltiplichiamo i due membri della (β) per d, ed al posto di $d\cos xr$ e $d\cos yr$ scriviamo i loro valori dati dalle (γ) e (δ); avremo

$$d^2 = X^2 + Y^2 + 2XY\cos xy,$$

ossia, ricordando le espressioni di X, Y,

$$(1) \quad d^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos xy.$$

La formola (1) permette di calcolare la distanza di due punti P, P', dati mediante le loro coordinate.

In assi ortogonali la (1) diviene (d'accordo col teorema di Pitagora)

$$(1') \qquad d^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2;$$

il quadrato della distanza di due punti è espresso, in coordinate ortogonali, dalla somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate omonime dei due punti. In particolare, la distanza del punto P dall'origine è data da $OP = \sqrt{x^2+y^2}$.

113. Relazioni angolari. — Eliminiamo ora d, X, Y fra le equazioni (β), (γ), (δ), le quali sono lineari ed omogenee rispetto a quelle quantità, certo non tutte nulle; dovrà essere dunque

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr \\ \cos rx & 1 & \cos yx \\ \cos ry & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\operatorname{sen}^2 xy = \cos^2 rx + \cos^2 ry - 2\cos rx\cos ry\cos xy.$$

La (2) stabilisce un legame fra i coseni degli angoli che una retta r forma cogli assi coordinati, o (come diremo brevemente) fra i *coseni di direzione* della retta. Nel caso di assi ortogonali quella relazione si riduce alla notissima

$$\cos^2 rx + \cos^2 ry = 1, \quad \text{ossia} \quad \cos^2 rx + \operatorname{sen}^2 rx = 1.$$

Per calcolare ora il coseno dell'angolo formato da due rette, in funzione dei coseni di direzione di queste, operiamo sulle relazioni (α), (γ), (δ), come abbiamo operato or ora sulle (β), (γ), (δ). Otterremo

$$\begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys \\ \cos rx & 1 & \cos yx \\ \cos ry & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale può anche scriversi così

$$\cos rs \operatorname{sen}^2 xy + \begin{vmatrix} 0 & \cos xs & \cos ys \\ \cos rx & 1 & \cos yx \\ \cos ry & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o finalmente

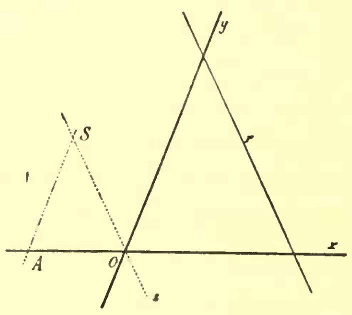
$$(3)\quad \cos rs = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 xy} \begin{vmatrix} 0 & \cos xs & \cos ys \\ \cos rx & 1 & \cos yx \\ \cos ry & \cos xy & 1 \end{vmatrix}.$$

Se gli assi sono ortogonali,

$$(3')\qquad \cos rs = \cos xr \cos xs + \cos yr \cos ys,$$

la quale dice che, in assi ortogonali, il coseno dell'angolo di due rette è dato dalla somma dei prodotti dei coseni di direzione dell'una retta per i corrispondenti coseni dell'altra [1].

114. Rapporto direttivo di una retta. — Per applicare la formola precedente a questioni di geometria analitica, occorre anzitutto saper dedurre dall'equazione di una retta gli angoli che questa forma cogli assi coordinati.



Consideriamo a tal fine una retta r

$$(1)\qquad ax + by + c = 0,$$

ed indichiamo con s la parallela ad essa condotta per l'origine, la quale ha l'equazione

$$ax + by = 0, \quad \text{ossia} \quad -\frac{a}{b} = \frac{y}{x}$$

[1] La (3'), poichè $\cos yr = \operatorname{sen} xr$, $\cos ys = \operatorname{sen} xs$, non differisce dalla formola che dà l'espressione di $\cos(xr - xs)$. Si osservi che il metodo qui seguito permette di ritrovare in modo uniforme, e tenendo conto dei segni, tutte le formule della trigonometria piana. Rimandiamo, per gli sviluppi, alla *Trigonometria* del BALTZER, ed alla *Geometria Analitica* del D'OVIDIO, Cap. III.

(se $b \neq 0$). Preso su s un punto S ad arbitrio, di cui siano OA l'ascissa ed AS l'ordinata, potremo scrivere $-\frac{a}{b} = \frac{AS}{OA}$, dalla quale, osservando il triangolo OAS, si deduce

$$(2) \qquad -\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} xs}{\operatorname{sen} sy} = \frac{\operatorname{sen} xr}{\operatorname{sen} ry}.$$

L'espressione $-\frac{a}{b}$, che è il coefficiente di x nella equazione della retta r risolta rispetto ad y,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

si suol chiamare *rapporto* (o *coefficiente*) *direttivo* della retta r, perchè dipende soltanto dalla direzione, non dalla posizione, di questa. Il rapporto direttivo è adunque il rapporto dei seni degli angoli $\widehat{xr}$ ed $\widehat{ry}$, che la retta forma cogli assi. Esso assume una espressione notevole in assi ortogonali, giacchè allora

$$(2') \qquad -\frac{a}{b} = \operatorname{tg} xr;$$

in assi ortogonali, il rapporto direttivo di una retta è uguale alla tangente dell'angolo che l'asse x *forma colla retta* [1].

Ritornando ad assi obliqui, notiamo che la formola (2), ossia

$$\frac{\operatorname{sen} xr}{a} = \frac{\operatorname{sen} yr}{b},$$

ci fornisce quantità proporzionali ai seni degli angoli $\widehat{xr}$, $\widehat{yr}$ che la retta r forma cogli assi. Volendo i valori di quei seni, fissiamo arbitrariamente il verso positivo sulla retta r, e conduciamo dall'origine la normale n ad r, assumendo sulla n il verso positivo in guisa che sia $\widehat{nr} = +\frac{\pi}{2}$. Risulta allora

$$\operatorname{sen} xr = \cos xn, \quad \operatorname{sen} yr = \cos yn,$$

e la proporzione precedente conduce alle due uguaglianze

$$(3) \qquad \cos xn = a\varrho, \quad \cos yn = b\varrho,$$

dove ϱ indica un fattore di proporzionalità che si tratta di

---

[1] Segue che una retta formante l'angolo φ coll'asse x ha, in assi ortogonali, una equazione del tipo

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + \text{cost.},$$

e, se la retta passa per il punto (x', y'),

$$y - y' = (x - x') \operatorname{tg} \varphi.$$

determinare. Ricordiamo a tal fine la relazione che passa tra i coseni di direzione di una retta (n.° 113, (2)),

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xn & \cos yn \\ \cos nx & 1 & \cos yx \\ \cos ny & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

tenendo conto delle (3) e sviluppando, questa ci dà

$$\operatorname{sen}^2 xy - \varrho^2(a^2 + b^2 - 2ab\cos xy) = 0,$$

donde

$$(4) \qquad \varrho = \frac{\operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos xy}}.$$

E finalmente, ritornando alle (3), troviamo

$$(5) \quad \begin{cases} \cos xn = \operatorname{sen} xr = \dfrac{a \operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos xy}}, \\[2ex] \cos yn = \operatorname{sen} yr = \dfrac{b \operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos xy}}, \end{cases}$$

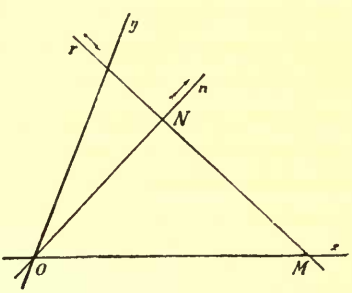
le quali risolvono il problema proposto.

In assi ortogonali le formole si semplificano:

$$(4') \qquad \varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$(5') \quad \cos xn = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos yn = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Quanto al segno da attribuirsi al radicale nella espressione di ϱ e nelle formole ove comparisce, si noti che esso è indeterminato finchè sulla retta r non sia fissato il verso positivo; quando questo sia fissato, si ricorrerà caso per caso alla figura, o ad altre considerazioni, per togliere l'ambiguità.



115. Equazione normale di una retta. — Moltiplicando i due membri dell'equazione

$$(1) \qquad ax + by + c = 0,$$

della retta r per il fattore non nullo ϱ, ora calcolato, e tenuto conto delle (3), quella equazione assume la forma

$$x\cos xn + y\cos yn + c' = 0,$$

dove $c' = c\varrho$ è una costante di cui vedremo subito il significato geometrico. Consideriamo a tal fine la intersezione della retta r con uno degli assi, a cui la retta non sia parallela; ad es. l'intersezione M coll'asse x. Sostituendo nell'ultima equazione, al posto di x, y, le coordinate $(OM, 0)$ del punto M, abbiamo

$$OM \cos xn + c' = 0,$$

ossia (visto il triangolo rettangolo OMN), $c' = - ON$. Indicando con p il valore del segmento ON preso col segno che gli spetta, potremo porre la equazione della retta r sotto la forma

$$(6) \qquad x \cos xn + y \cos yn - p = 0.$$

Concludiamo che *la equazione di una retta qualsiasi può scriversi assumendo come coefficienti delle variabili* x, y *i coseni di direzione della normale alla retta, e come termine noto la distanza, cambiata di segno, dell'origine dalla retta.* Questa particolare equazione, in cui le costanti hanno i significati geometrici ora esposti, fu detta (da HESSE) *forma normale dell'equazione di una retta*, o, brevemente, *equazione normale della retta.*

In assi ortogonali, posto $\widehat{xn} = \alpha$, e quindi $\widehat{yn} = \alpha - \frac{\pi}{2}$, l'equazione normale assume la forma

$$(6') \qquad x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0.$$

Va notato che l'equazione normale di una retta rappresenta la retta *orientata*, cioè presa con un determinato verso; giacchè ove si inverta sopra r, e quindi sopra n, il verso positivo, mutano segno nella (6), o (6'), i coefficienti delle variabili e il termine noto.

D' ordinario una retta vien data analiticamente mediante una equazione *generale*, lineare, del tipo (1), i cui coefficienti non hanno, in generale, alcun significato geometrico; (lo hanno bensì i loro mutui rapporti). Dalle cose dette risulta che la equazione normale della retta stessa, si ottiene moltiplicando i due membri della (1) per il fattore ϱ; quindi, tenuto conto della (4), quella equazione normale può scriversi sotto la forma

$$(7) \qquad \frac{(ax + by + c) \operatorname{sen} xy}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos xy}} = 0;$$

s'intende dire che, se nella (7) si staccano i termini con x, y

ed il termine noto, i relativi coefficienti hanno precisamente i significati geometrici messi in luce nella equazione normale (6).

In assi ortogonali, l'equazione normale

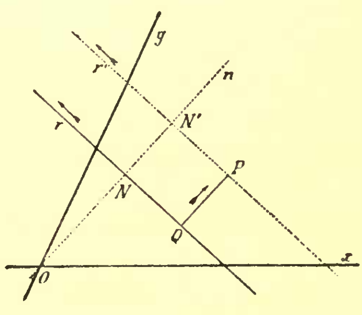
$$(7') \qquad \frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

si ottiene dall'equazione generale della retta, dividendone il primo membro per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti delle variabili.

Quanto al segno del radicale, sussiste l'osservazione fatta sopra.

116. Distanza di un punto da una retta. — Il vantaggio di adoperare in talune questioni l'equazione normale di una retta risulta dal problema seguente.

Sia data una retta r ed un punto $P(x', y')$, comunque situato; si voglia calcolare la distanza $\delta = PQ$ del punto della retta. Supponiamo che su questa sia fissato il verso positivo; conduciamo da O la normale n ad r, e su n e sulle parallele ad n, fissiamo il verso positivo secondo la convenzione fatta prima $(\widehat{nr} = + \frac{\pi}{2})$. La distanza δ assumerà così un certo segno, dipendente dalla banda, rispetto ad r, in cui si trova il punto P; precisamente, date le nostre convenzioni, avranno distanza positiva da r i punti giacenti a *sinistra* di un osservatore che percorra la retta nel senso positivo, e distanza negativa gli altri punti. Ciò premesso, si conduca per P la retta r' parallela ad r, e



sia N' il punto in cui quella sega n. Si avrà allora, anche tenendo conto dei segni,

$$QP = NN' = ON' - ON = p' - p,$$

dove si è posto $ON = p$, $ON' = p'$.

Ora se la retta r è data mediante la sua equazione normale

$$(6) \qquad x \cos xn + y \cos yn - p = 0,$$

p è noto. Quanto a p', osserviamo che l'equazione normale di r' sarà

$$x \cos xn + y \cos yn - p' = 0,$$

e poichè la retta stessa passa per P, dovrà questa equazione esser soddisfatta dalle coordinate (x', y') di P, donde si trae

$$p' = x' \cos xn + y' \cos yn.$$

Sostituendo nell' espressione di QP e cambiando segno, si ha infine

$$(8) \qquad \delta = PQ = -(x' \cos xn + y' \cos yn - p).$$

Il risultato si enuncia in forma molto semplice:

La distanza di un punto di date coordinate, da una retta di data equazione normale, è il valore opposto a quello che assume il primo membro della equazione stessa, quando al posto delle variabili si sostituiscano le coordinate del punto.

Risulta dunque che, se nel primo membro della equazione normale di una retta si sostituiscono alle variabili le coordinate di un punto qualsiasi, quel primo membro assume un valore che ha una immediata interpretazione geometrica, giacchè esprime (a parte il segno) la distanza del punto dalla retta.

L'ultima osservazione non sussiste più, se la equazione della retta è data in forma generale

$$(1) \qquad ax + by + c = 0.$$

Allora per risolvere il problema di cui ci occupiamo, converrà ridurre a forma normale la (1). Ricordando la (7) e l'ultimo enunciato, troviamo la formola

$$(9) \qquad \delta = \frac{(ax' + by' + c) \operatorname{sen} xy}{\mp \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos xy}}.$$

In assi ortogonali, la distanza del punto (x', y') *dalla retta* (1) *è espressa da*

$$(9') \qquad \delta = \frac{ax' + by' + c}{\mp \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Il segno del radicale è, come dicemmo, indeterminato, finchè sulla retta non sia fissato il verso positivo. Spesso si conviene di riguardar come positiva la distanza dell'origine O $(0, 0)$ da una retta qualsiasi che non passi per O, vale a dire il valore

$$p = \frac{c \operatorname{sen} xy}{\mp \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos xy}};$$

questa convenzione costringe ad assumere un *determinato* segno per il denominatore (il segno di c, poichè sen $xy > 0$). La convenzione però non si estende alle rette uscenti dall' origine.

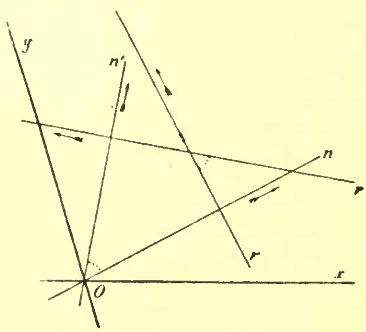
Osservazione. — In ogni caso, risulta dalla (9), o (9'), che il valore assunto dal primo membro della (1), quando al posto delle variabili si pongano le coordinate di un punto qualsiasi P, è proporzionale alla distanza di P dalla retta. E quel valore ha lo stesso segno per i punti P che stanno da una determinata banda della retta, ed il segno opposto per i punti che stanno dalla banda opposta; precisamente, se $c \neq 0$, quel valore ha il segno di c, quando P sta dalla banda dell'origine rispetto alla retta.

117. Angolo di due rette. — Date due rette r, r', sopra cui siano fissati i versi positivi, e condotte a queste le normali n, n' dall' origine, orientate in guisa che $\widehat{nr} = \widehat{n'r'} = +\frac{\pi}{2}$, risulta $\widehat{rr'} = \widehat{nn'}$.

Ora si ha (n.° 113, (3))

$$\cos rr' = \cos nn' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 xy} \begin{vmatrix} 0 & \cos xn & \cos yn \\ \cos xn' & 1 & \cos xy \\ \cos yn' & \cos xy & 1 \end{vmatrix},$$

la quale determina l' angolo $\widehat{rr'}$, quando le due rette r, r' siano date mediante le loro equazioni normali.



Se invece queste sono date mediante le equazioni generali

$r)\quad ax + by + c = 0,$

$r')\quad a'x + b'y + c' = 0,$

ricorderemo (n.° 114, (3), (4)) che

$$\cos xn = a\varrho,\ \cos yn = b\varrho,\quad \varrho = \frac{\operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos xy}},$$

$$\cos xn' = a'\varrho',\ \cos yn' = b'\varrho',\quad \varrho' = \frac{\operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos xy}}.$$

Sostituendo ai quattro coseni le loro espressioni nel determinante e sviluppando, abbiamo

$$\cos rr' = \frac{-\varrho\varrho'}{\operatorname{sen}^2 xy}\left[\cos xy\,(ab' + a'b) - aa' - bb'\right],$$

e tenendo conto dei valori di ϱ, ϱ', senza preoccuparci dei doppi segni,

$$(8)\quad \cos rr' = \frac{aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos xy}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos xy}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos xy}}.$$

In assi ortogonali, il coseno dell'angolo di due rette

$$ax + by + c = 0,\quad ax + b'y + c' = 0$$

è espresso dalla formola

$$(8')\qquad \cos rr' = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Per avere il seno dell'angolo $\widehat{rr'}$, basta ricordare che $\operatorname{sen}^2 rr' = 1 - \cos^2 rr'$; fatti i calcoli, nella ipotesi di assi ortogonali, si trova

$$(9')\qquad \operatorname{sen} rr' = \frac{ab' - a'b}{\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2}},$$

mentre, in assi obliqui, figurerebbe ancora, come fattore del numeratore, $\operatorname{sen} xy$, e i radicali del denominatore andrebbero completati come nella (8).

Dividendo la (9′) per la (8′) si ottiene, in assi ortogonali,

$$(10')\qquad \operatorname{tg} rr' = \frac{ab' - a'b}{aa' + bb'}.$$

Se le due rette r, r' fossero date mediante equazioni del tipo

$$y = mx + C,\qquad y = m'x + C',$$

la (10′) diverrebbe

$$(10'')\qquad \operatorname{tg} rr' = \frac{m' - m}{1 + mm'};$$

alla quale si giunge anche direttamente ricordando (n.° 114, (2′)) che

$$\operatorname{tg} xr = m,\quad \operatorname{tg} xr' = m',\quad \widehat{rr'} = \widehat{xr'} - \widehat{xr}.$$

Questa osservazione anzi ci dice che la (10″), o (10′), è esatta anche nel segno, e quindi che nelle due formole (8′) e (9′) i denominatori devono esser presi collo stesso segno, comunque questo venga scelto.

118. Condizione di perpendicolarità di due rette. — La condizione affinchè le due rette r, r' siano perpendicolari fra loro, è espressa dall'annullarsi di $\cos rr'$, e quindi del numeratore della (8) o (8'). Dunque:

In assi ortogonali, la condizione perchè le due rette

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0$$

siano perpendicolari fra loro è

$$aa' + bb' = 0.$$

Quest'ultima ci fornisce il rapporto dei coefficienti a' e b' di ogni retta r', che sia perpendicolare, ad una retta r assegnata; se ad es. prendiamo $a' = \frac{1}{a}$ (il che è lecito finchè $a \neq 0$), dovremo poi assumere $b' = -\frac{1}{b}$. Quindi:

In assi ortogonali, la equazione della retta condotta per il punto (x', y') *normalmente alla retta data* $ax + by + c = 0$, *è*

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b}.$$

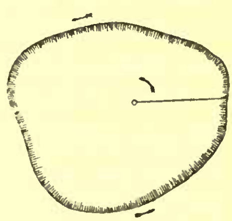
Se le due rette r, r' sono date mediante le equazioni $y = mx + C$, $y = m'x + C'$, la condizione di perpendicolarità è

$$mm' = -1;$$

e l'equazione della retta perpendicolare alla prima, condotta dal punto (x', y'), è

$$y - y' = -\frac{1}{m}(x - x').$$

119. Segno di un'area piana. — Dobbiamo ancora procurarci la formola che esprime l'area di un triangolo (o poligono). Accenneremo anzitutto ad una convenzione che si suol fare riguardo ai segni delle aree di figure piane, convenzione di cui si riscontra l'utilità in varie questioni di matematiche pure ed applicate.



Consideriamo nel piano un' area limitata da una linea chiusa, poligonale o curva (*contorno* o *circuito*), che supporremo non intrecciata. Un punto mobile può descrivere il contorno in due versi opposti. Quando il punto si muove in uno dei due versi, che diremo *positivo*, il raggio congiungente quel punto mobile ad un punto fisso, interno all'area (e sufficientemente vicino alla posizione del punto mobile), ruota intorno al punto fisso in verso positivo; mentre se il punto mobile percorre il contorno in verso *negativo*, quel raggio ruota in verso negativo. Possiamo ancora notare che, date le nostre convenzioni, un osservatore il quale percorra il contorno in verso positivo, restando al disopra del piano dell'area, lascia l'area alla sua sinistra. Ora noi riguarderemo come *positiva* o *negativa* un' area, secondo che il contorno di essa si immagina descritto in verso positivo o negativo; al valore aritmetico dell'area (relativo ad una determinata unità di misura) premetteremo, secondo i casi, il segno $+$ o il segno $-$.

In particolare, se P_1, P_2, P_3 sono i vertici di un triangolo, col simbolo $P_1P_2P_3$ indicheremo il valore dell'area del triangolo preso col segno $+$ o $-$, secondo che un osservatore, il quale descriva il perimetro passando successivamente per i vertici P_1, P_2, P_3, lascia l'area a sinistra od a destra. Stabilendo le analoghe convenzioni per le altre permutazioni dei tre vertici, risultano le uguaglianze

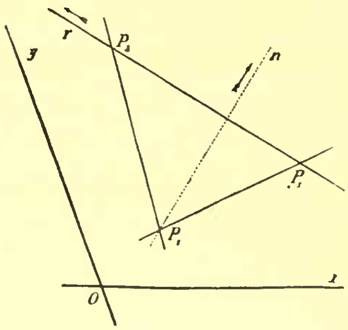
$$P_1P_2P_3 = P_2P_3P_1 = P_3P_1P_2$$
$$= - P_1P_3P_2 = - P_2P_1P_3 = - P_3P_1P_2.$$

Condotta da uno dei vertici, ad es. da P_1, la perpendicolare P_1Q sul lato opposto P_2P_3, è ora il caso di chiederci quali convenzioni si debbano rispettare, perchè la nota formola esprimente l'area:

$$P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} P_1Q \cdot P_2P_3, \tag{1}$$

valga anche nei segni. A tal fine cominciamo ad assumere, come verso positivo sul lato, quello che va da P_2 a P_3, di guisa che P_2P_3 avrà un valore positivo; e come verso positivo sopra l'altezza P_1Q, quello che si porta a coincidere col verso positivo del lato corrispondente mediante la rotazione dell'angolo $+\frac{\pi}{2}$. Allora per un osservatore che percorra il lato P_2P_3 nel verso positivo, il vertice P_1 e l'area restano da una stessa banda; quindi l'altezza P_1Q, e l'area hanno lo stesso segno (positivo o negativo, secondo che quella banda è la sinistra o la destra), sicchè, nella nostra ipotesi, la (1) sussiste anche nel segno. Ma ciò si verifica pure quando sul lato P_2P_3, e quindi sull'altezza

P_1Q, si inverta il verso positivo, giacchè allora mutano segno i due fattori a secondo membro della (1), mentre il primo membro conserva il suo segno. Concludiamo che l'area di un triangolo è espressa, anche nel segno, dalla formola (1), purchè, comunque sia fissato il verso positivo sopra il lato, si assuma come positivo sull'altezza corrispondente quel verso, che si porta a coincidere col primo verso mediante la rotazione di $+\frac{\pi}{2}$.



120. Espressione dell'area di un triangolo in funzione delle coordinate dei vertici. — Siano $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ i tre vertici del triangolo. Partiamo dalla formola

$$(1) \qquad P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} P_1Q \cdot P_2P_3,$$

la quale sussiste pure nel segno, quando sulle rette P_1Q, che chiameremo n, e P_2P_3, che chiameremo r, siano fissati i versi positivi in guisa che sia $\widehat{nr} = +\frac{\pi}{2}$. Per calcolare P_1Q scriviamo l'equazione della retta r sotto forma normale. Ora l'equazione generale di r è (n.° 100)

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0.$$

Per ridurla a forma normale (n.° 115) si deve moltiplicare il primo membro per $\operatorname{sen} xy$ e dividerlo per

$$\pm \sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2(y_2 - y_3)(x_2 - x_3)\cos xy}.$$

Ma questo radicale esprime la distanza P_2P_3; dunque l'equazione normale di r è

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{sen} xy}{\pm P_2P_3} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

e la distanza di P_1 da r vale (n.° 116)

$$(4) \qquad P_1 Q = \frac{\text{sen}\, xy}{\mp P_2 P_3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo questa espressione nella (1), e trascurando pel momento il segno, risulta che l'area del nostro triangolo è data, almeno in valore assoluto, dalla formola

$$(5) \qquad P_1 P_2 P_3 = \frac{\text{sen}\, xy}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Volendo tener conto del segno, occorre esaminare il denominatore della (3) [1]. Osserviamo perciò che il coefficiente della x nella equazione normale (3) è attualmente $\frac{(y_2 - y_3)\,\text{sen}\, xy}{\mp P_2 P_3}$, e deve riuscire uguale, anche nel segno, a $\cos xn = \text{sen}\, xr$, sicchè deve aversi $\frac{(y_2 - y_3)\,\text{sen}\, xy}{\pm P_2 P_3} = \text{sen}\, xr$. D'altronde esaminando il triangolo che ha per lati il segmento $P_2 P_3$ e le sue due componenti ($x_3 - x_2$ parallela ad x, ed $y_3 - y_2$ parallela ad y; cfr. la figura del n.° 112), si vede che sussiste in valore e segno la relazione

$$\frac{P_2 P_3}{\text{sen}\, xy} = \frac{y_3 - y_2}{\text{sen}\, xr}.$$

Confrontando colla precedente, risulta che in quella va preso il segno inferiore; e altrettanto deve farsi nelle (3) e (4); sicchè alla fine si conclude che la (5) sussiste anche nel segno.

In assi ortogonali, l'area del triangolo avente i vertici $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ *è espressa, in valore e segno, da*

$$(5') \qquad P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

---

[1] Può bastare anche la seguente considerazione. Supposti fissi P_2, P_3, si faccia variare $P_1(x_1, y_1)$. Allora nella (5) il primo membro conserva il suo segno, finchè P_1 si trova da una stessa banda della retta $P_2 P_3$, e cambia segno quando P_1 passa dalla banda opposta; e lo stesso avviene del secondo membro, perchè il segno del determinante (2) dipende dalla banda in cui si trova il punto (x, y) rispetto alla retta $P_2 P_3$ (n° 116, Oss.). Ripetendo osservazioni analoghe per i punti P_2 e P_3, segue che, comunque siano scelti i punti P_1, P_2, P_3, i segni dei due membri della (5) o sono sempre concordi, o sono sempre opposti. D'altronde prendendo come vertici del triangolo i punti $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(0, 1)$ è facile vedere che primo e secondo membro della (5) sono positivi. Dunque la (5) vale anche nei segni.

Osservazione. — La condizione di allineamento dei tre punti P_1, P_2, P_3 è data dall'annullarsi dell'area del triangolo, e quindi dall'annullarsi del determinante sopra scritto, come per altra via si era dimostrato (n.° 100).

121. Punti e rette immaginarie di un piano. — Nel seguito del nostro corso, dovendo considerare relazioni di grado superiore al primo fra le coordinate di un punto, ci accadrà spesso di trovare per quelle coordinate valori immaginari; e saremo allora condotti ad adoperare la locuzione di *punto immaginario*, che noi introduciamo qui nello stesso modo tenuto per le forme di prima specie (n.° 54).

Notiamo a tal fine che, fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane x, y, la Geometria analitica permette di sostituire alle relazioni geometriche fra i punti del piano, le relazioni analitiche fra le coppie di numeri $(x, y,)$, relazioni che in generale varranno per numeri reali o complessi. Volendo interpretare, in tutta la loro estensione, i risultati analitici col linguaggio geometrico, noi converremo di chiamare *punto* (x, y) ogni coppia di numeri x, y, reali o complessi. Osserveremo però che, se x ed y sono ambedue reali, il punto nominato (punto *reale*) ha una effettiva rappresentazione geometrica nel modo noto; se invece x ed y (od uno dei due numeri) sono complessi, nella quale ipotesi il punto si dice *immaginario*, la rappresentazione geometrica manca, almeno finchè non si introduca qualche ulteriore convenzione.

Converremo di estendere ai punti immaginari le formole dimostrate nel caso di punti reali (condizione di allineamento, equazioni di rette, distanze ...). E talvolta accadrà che, pur operando sopra punti immaginari, queste formole ci conducano ad enti reali. Ciò succede ad es. quando si operi simmetricamente sopra due punti *immaginari coniugati*, tali cioè che le coordinate dell'uno siano, rispettivamente, complesse coniugate alle coordinate dell'altro; come sarebbero i due punti

$$P'(x' = a + bi, \quad y' = \alpha + \beta i),$$
$$P''(x'' = a - bi, \quad y'' = \alpha - \beta i),$$

(a, b, α, β reali, $i = \sqrt{-1}$). Così si scorge subito che è reale il punto medio tra P', P'', il quale ha le coordinate

$$\frac{x' + x''}{2} = a, \quad \frac{y' + y''}{2} = \alpha.$$

È reale la retta congiungente due punti immaginari coniugati; giacchè ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a+bi & \alpha+\beta i & 1 \\ a-bi & \alpha-\beta i & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale (se all'ultima orizzontale si aggiunge la seconda, si divide la nuova orizzontale per 2, la si toglie dalla precedente, e finalmente si sopprime il fattore i) può scriversi sotto la forma

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b & \beta & 0 \\ a & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dove l'unità immaginaria non entra più.

Quindi: *Ogni punto immaginario sta sopra una (ed una sola) retta reale,* la retta che lo congiunge col suo coniugato ([1]).

Una equazione lineare in coordinate cortesiane x, y rappresenta una retta; se nei coefficienti entra l'unità immaginaria, in guisa che essa non possa esser eliminata, diremo che si tratta di una *retta immaginaria.* Ed alle rette immaginarie estenderemo le formule di geometria analitica valide per rette reali. Due rette immaginarie si dicono *coniugate*, se i coefficienti omologhi delle equazioni di quelle sono numeri complessi coniugati. Il lettore dimostrerà facilmente che *è reale il punto d'incontro di due rette immaginarie coniugate*, o in altre parole: *sopra ogni retta immaginaria sta un* (*unico*) *punto reale*, intersezione della retta colla sua coniugata.

Osservazione. — Per fare una applicazione dei nuovi concetti, cerchiamo le equazioni delle direzioni assolute uscenti da

---

([1]) Sopra questo teorema si può fondare (con Staudt) una rappresentazione geometrica dei punti immaginari (cfr. n.° 94); infatti un punto immaginario P' si potrà rappresentare graficamente tracciando la retta (reale) che lo congiunge al punto coniugato P'', determinando su questa la involuzione ellittica che ha per punti doppi P' e P'', e finalmente associando a ciascuno dei due punti P' e P'' l'uno o l'altro dei due versi, in cui la retta $P'P''$ può esser descritta. — Considerazioni analoghe valgono per la rappresentazione delle rette immaginarie.

un punto (n.° 89), riferendoci per semplicità ad un sistema cartesiano *ortogonale*.

Ricordiamo che due rette, uscenti dall'origine,

$$x + \lambda y = 0, \quad x + \lambda' y = 0$$

sono perpendicolari, quindi coniugate nella involuzione circolare, quando (n.° 118)

$$\lambda\lambda' + 1 = 0.$$

Segue che la prima retta risulta doppia in quella involuzione, e determina una direzione assoluta, quando sia

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \text{ossia} \quad \lambda = \pm i.$$

Concludiamo che

$$x + iy = 0, \quad x + iy = 0$$

sono le direzioni assolute uscenti dall' origine, mentre $(x - x') \pm i(y - y') = 0$ sono le direzioni assolute uscenti dal punto (x', y').

Esercizi [1]. I — 1) Nei triangoli definiti negli es. 3), 4) del n.° 110 calcolare le lunghezze dei lati, i coseni degli angoli, le aree, le lunghezze delle altezze; scrivere le equazioni di queste e determinare le coordinate del loro punto d'incontro.

2) In generale, per il triangolo definito dai tre punti (x_i, y_i) o dalle tre rette $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, scrivere le equazioni delle altezze, dimostrare che passano per uno stesso punto (*ortocentro*), e determinare le coordinate di questo.

3) Equazione della retta perpendicolare, nel punto di mezzo, al segmento (x_1, y_1), (x_2, y_2). Le perpendicolari ai tre lati di un triangolo nei loro punti medi passano per uno stesso punto (centro del cerchio circoscritto); calcolare le coordinate di esso per un triangolo generale, o per i triangoli nominati nell' es. 1).

4) Si dimostri che la retta formante con due rette di date equazioni normali $l = 0$, $m = 0$ un rapporto semplice assegnato k, è $l - km = 0$. Si deduca di qua nuovamente l'espressione del doppio rapporto di quattro rette di un fascio (n.° 107).

5) Date due rette mediante le loro equazioni normali o generali, scrivere le equazioni delle bisettrici degli angoli che esse formano; dimostrare analiticamente che le due bisettrici sono perpendicolari, e dividono armonicamente i lati dell' angolo.

6) Date le equazioni normali dei tre lati di un triangolo, scrivere le equazioni delle bisettrici interne ed esterne. Dimostrare che: *a*) le bisettrici interne passano per uno stesso punto (centro del cerchio iscritto);

---

[1] Gli assi si suppongono ortogonali quando non si dica il contrario.

b) due bisettrici esterne e la interna relativa al terzo vertice passano per uno stesso punto (centro di un cerchio ex - iscritto); *c*) le bisettrici esterne segano i lati opposti in tre punti allineati; *d*) due bisettrici interne e la esterna relativa al terzo vertice segano i lati opposti in tre punti allineati. (Conviene supporre fissati i versi positivi sui lati, in modo che seguendoli si possa descrivere il perimetro del triangolo).

7) Si calcolino le equazioni delle bisettrici e le coordinate delle loro intersezioni per uno dei triangoli nominati nell'es. 1).

8) In un triangolo l'ortocentro, il baricentro (punto comune alle mediane) e il centro del cerchio circoscritto sono allineati, e la distanza fra i due primi punti è doppia della distanza dei due ultimi. (Eulero). (Conviene scegliere il baricentro come origine).

9) Dimostrare analiticamente il teorema enunciato nell'es. 18 del n.° 89; (si possono supporre date le coordinate dei sei vertici dei due triangoli o le equazioni dei sei lati).

II — 10) L'espressione dell'area di un triangolo può anche ottenersi (in assi ortogonali od obliqui) osservando che, se Q è il punto di incontro di P_1P_4 con P_2P_3, si ha (anche nel segno)

$$\frac{P_1P_2P_3}{P_4P_2P_3} = (P_1P_4Q).$$

Esprimendo il rapporto semplice mediante le coordinate dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 (n.° 110, es. 8)), si troverà che il rapporto delle due aree è uguale al rapporto dei determinanti formati colle coordinate dei vertici e colle unità. Con passaggi analoghi si viene ad esprimere il rapporto $\frac{P_1P_2P_3}{P_4P_5P_6}$ come quoziente di due determinanti; ora se ai punti P_4, P_5, P_6, che sono arbitrari, si danno particolari posizioni, per es. $P_4\,(0,0)$, $P_5\,(1,\ 0)$, $P_6\,(0,\ 1)$, in guisa da poter calcolare direttamente l'area $P_4P_5P_6$, si ritrova la formula che dà l'area di $P_1P_2P_3$ (Lucas).

11) Teorema di Varignon: Se $ABCD$ è un parallelogramma (A, C vertici opposti) ed M un punto qualsiasi del piano, sussiste, in valore e segno, la relazione fra aree triangolari:

$$MAC = MAB + MAD.$$

12) Dati in un piano n punti $P_i\,(x_i,\ y_i)$ (dove $i = 1, 2, \ldots n$), vertici di un n.gono semplice, comunque intrecciato, e detto $M\,(x,\ y)$ un ulteriore punto del piano, si dimostri che la somma algebrica di aree $MP_1P_2 + MP_2P_3 + \ldots + MP_nP_1$ è indipendente dalla posizione del punto M, e vale $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i\,y_{i+1} - x_{i+1}\,y_i)$, dove l'indice $n+1$ va sostituito con 1. Per $n = 3$ quella somma ha per valore l'area del triangolo $P_1P_2P_3$; in generale, per n qualsiasi, se l'n.gono è convesso, quella somma esprime l'area dell'n.gono, come si verifica dalla figura assumendo M nell'interno di questo. Partendo da queste osservazioni, si assume in ogni caso il valore di quella somma come area dell'n.gono semplice $P_1P_2\ldots P_n$. Si ha così il modo per definire l'area di un n.gono intrecciato, e in generale (mediante passaggio al limite) l'area limitata da un con-

torno chiuso curvilineo, comunque intrecciato. Come applicazione si noti che, se $P_1P_2P_3P_4$ è un quadrangolo semplice intrecciato, i cui lati P_2P_3 e P_4P_1 si seghino nel punto Q interno ad essi, l'area del quadrangolo è data dalla differenza tra i valori assoluti delle aree QP_1P_2 e QP_3P_4, presa con segno opportuno.

13) L'area dell' n.gono sopra nominato è espressa (in assi ortogonali) dalla formola di Gauss: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} y_i\,(x_{i-1} - x_{i+1})$, dove gli indici 0 ed $n+1$ equivalgono agli indici n ed 1; in parole: «il doppio dell' area di un poligono è data dalla somma dei prodotti dell' ordinata (od ascissa) di ciascun vertice per la differenza delle ascisse (o rispett. ordinate) dei due vertici contigui».

14) Un'altra espressione della stessa area è la seguente:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=n}^{i=1}(y_i + y_{i+1})\,(x_i - x_{i+1}),$$

che ha una interpretazione geometrica semplice: «l'area di un poligono è data dalla somma delle aree dei trapezi aventi come basi le ordinate condotte dalle coppie di vertici consecutivi, ciascuna di queste aree essendo presa con segno conveniente».

15) Dimostrare che l' area del triangolo limitato dalle tre rette $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$ è data (in assi ortogonali) da

$$\frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2,$$

dove C_1, C_2, C_3 sono i complementi algebrici di c_1, c_2, c_3.

III — 16) Se O è il baricentro di n punti A_i presi coi pesi p_i, $(i = 1, 2, \ldots n)$ (n.° 110, es. 6)), ed è P un altro punto qualsiasi del piano, vale la relazione

$$\Sigma_i p_i \overline{PA_i}^2 = \Sigma_i p_i \overline{OA_i}^2 + \overline{OP}^2 \Sigma_i p_i .$$

17) Da questa può dedursi la relazione (cfr. n.° 27, es. 11))

$$\left(\Sigma_i p_i\right)\left(\Sigma_i p_i \overline{OA_i}^2\right) = \Sigma_{ik} p_i p_k \overline{A_i A_k}^2 ,$$

e, nel caso di pesi uguali,

$$n\Sigma_i \overline{OA_i}^2 = \Sigma_{ik} \overline{A_i A_k}^2 ,$$

(la seconda somma essendo estesa a tutte le combinazioni binarie dei numeri 1, 2, ... n).

18) Segue dalle precedenti la relazione di Lagrange (cfr. n.° 27, es. 12)):

$$\left(\Sigma_i p_i\right)\left(\Sigma_i p_i \overline{PA_i}^2\right) - \overline{OP}^2\left(\Sigma_i p_i\right)^2 = \Sigma_{ik} p_i p_k \overline{A_i A_k}^2 ,$$

dove P è un punto arbitrario del piano.

Capitolo III.

Trasformazione delle coordinate.
Coordinate omogenee di punti e rette. - Coordinate proiettive.

122. Formole pel passaggio da un sistema cartesiano ad un nuovo sistema cartesiano. — Accade spesso che, dopo aver riferito una figura piana a due assi cartesiani x, y, si scorga la convenienza di assumere come nuovi assi cartesiani due certe rette X, Y del piano, legate, ad es., in particolar modo a quella figura. Sorge allora il problema di stabilire tali relazioni fra le *antiche* coordinate (x, y) e le *nuove* (X, Y) di uno stesso punto, che permettano di esprimer le une coordinate mediante le altre.

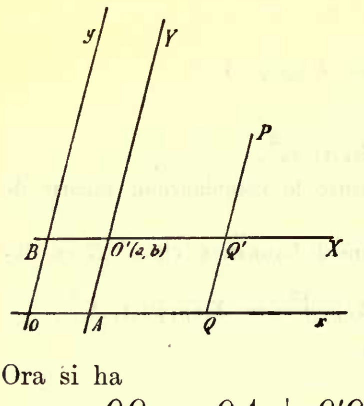
Nel trattare questo problema (detto *della trasformazione delle coordinate*) distingueremo tre casi, di cui i primi due sono particolari.

I. I nuovi assi X, Y sono paralleli agli antichi x, y.

II. Gli assi X, Y ed x, y hanno la stessa origine, ma direzioni diverse.

III. I nuovi assi sono in posizione affatto generale rispetto agli antichi.

I.° Caso — Per assegnare la posizione dei nuovi assi X, Y rispetto agli assi antichi, basterà dare le coordinate $OA = a$, $AO' = b$ della nuova origine O' riferita ad x, y.



Preso ora un punto P ad arbitrio, conduciamo per esso la parallela agli assi y ed Y, fino ad incontrare gli assi x ed X in Q e Q', rispettivamente; otteniamo così le antiche coordinate di P

$$OQ = x, \quad QP = y,$$

e le nuove

$$O'Q' = X, \quad Q'P = Y.$$

Ora si ha

$$OQ = OA + O'Q', \quad QP = AO' + Q'P,$$

ossia

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + X, \\ y = b + Y, \end{cases}$$

le quali danno le antiche coordinate mediante le nuove.

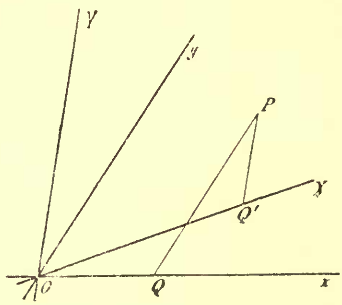
Le formole

$$X = x - a,$$
$$Y = y - b,$$

risolvono il problema inverso.

II.° Caso — Per fissare la posizione dei nuovi assi rispetto agli antichi, basta dare in valore e segno gli angoli $\widehat{xX}$, $\widehat{xY}$; però, per maggior simmetria, riterremo noti anche gli angoli $\widehat{yX}$, $\widehat{yY}$, che sono legati ai primi dalle relazioni

$$\widehat{xX} + \widehat{Xy} = \widehat{xy},$$
$$\widehat{xY} + \widehat{Yy} = \widehat{xy}.$$



Di un punto qualsiasi P costruiamo sulla figura le antiche coordinate $x = OQ$, $y = QP$ e le nuove $X = OQ'$, $Y = Q'P$. Osserviamo poi che le due spezzate OQP, $OQ'P$, avendo gli stessi estremi, avranno uguali proiezioni ortogonali sopra una retta r qualsiasi; sarà dunque

$$(\alpha) \qquad x \cos xr + y \cos yr = X \cos Xr + Y \cos Yr.$$

Se supponiamo r perpendicolare all'asse y, in guisa che sia $\widehat{yr} = + \frac{\pi}{2}$, risulterà

$$\widehat{xr} = \widehat{xy} + \frac{\pi}{2}, \qquad \widehat{Xr} = \widehat{Xy} + \frac{\pi}{2}, \qquad \widehat{Yr} = \widehat{Yy} + \frac{\pi}{2}.$$

Sostituendo nella (α), e ricordando che $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = - \operatorname{sen} \varphi$, si ottiene

$$x \operatorname{sen} xy = X \operatorname{sen} Xy + Y \operatorname{sen} Yy.$$

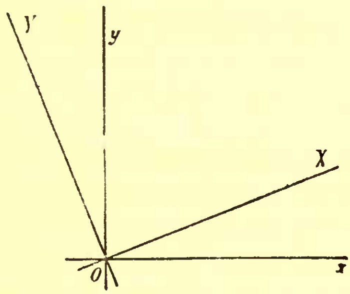
Se invece si suppone la r perpendicolare all'asse x, si arriva alla formola

$$y \operatorname{sen} yx = X \operatorname{sen} Xx + Y \operatorname{sen} Yx.$$

Le due formole ora scritte, o le due

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= X\,\frac{\operatorname{sen} Xy}{\operatorname{sen} xy} + Y\,\frac{\operatorname{sen} Yy}{\operatorname{sen} xy}, \\ y &= X\,\frac{\operatorname{sen} Xx}{\operatorname{sen} yx} + Y\,\frac{\operatorname{sen} Yx}{\operatorname{sen} yx}, \end{aligned}\right.$$

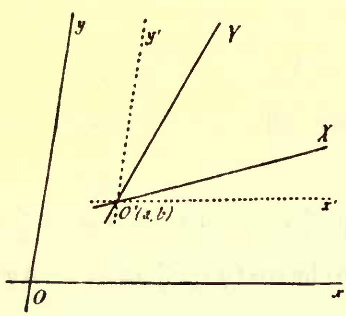
esprimono le antiche coordinate mediante le nuove. Volendo ricavar queste mediante quelle, basterebbe risolvere le (2) rispetto ad X, Y, o, più rapidamente, ripetere il ragionamento ora fatto, considerando però x, y come nuovi assi, ed X, Y come antichi, il che porta a scambiare nelle (2) le lettere maiuscole colle minuscole.



È utile ricordare la ipotesi particolare che entrambi i sistemi siano ortogonali (*trasformazione ortogonale*), e precisamente si abbia $\widehat{xy} = \widehat{XY} = +\frac{\pi}{2}$. Posto allora $\widehat{xX} = \alpha$, le formole di trasformazione (2) assumono la forma più semplice:

$$(2')\qquad \left\{\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha, \\ y &= X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha. \end{aligned}\right.$$

III.° Caso — Affinchè i nuovi assi X, Y siano fissati di posizione rispetto agli antichi, bisognerà dare questa volta le coordinate a, b di O' rispetto ad x, y, e gli angoli xX, xY.



Costruiamoci un sistema di coordinate ausiliari, conducendo per O' gli assi x', y' paralleli ad x, y, ed indichiamo con x', y' le coordinate di P rispetto a questi nuovi assi (essendo al solito x, y e X, Y le antiche e le nuove coordinate di P). Per le formole (2), corrispondenti al secondo caso, si avrà intanto

$$x' = X\,\frac{\operatorname{sen} Xy}{\operatorname{sen} xy} + Y\,\frac{\operatorname{sen} Yy}{\operatorname{sen} xy},$$

$$y' = X\,\frac{\operatorname{sen} Xx}{\operatorname{sen} yx} + Y\,\frac{\operatorname{sen} Yx}{\operatorname{sen} yx}.$$

Ma per le (1)

$$x = x' + a, \quad y = y' + b;$$

quindi in fine

$$(3) \qquad \begin{cases} x = X \dfrac{\operatorname{sen} Xy}{\operatorname{sen} xy} + Y \dfrac{\operatorname{sen} Yy}{\operatorname{sen} xy} + a, \\ y = X \dfrac{\operatorname{sen} Xx}{\operatorname{sen} yx} + Y \dfrac{\operatorname{sen} Yx}{\operatorname{sen} yx} + b. \end{cases}$$

Se i due sistemi sono ortogonali, ed il nuovo sistema è ottenuto dall'antico mediante una rotazione di un angolo α intorno ad O, seguita da una traslazione, le formule (3) divengono

$$(3') \qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha + a, \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

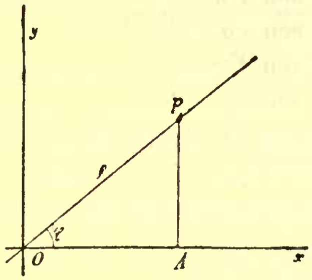
Osservazione. — In molte questioni non occorre tener conto dei valori dei coefficienti che entrano nelle formole trovate, basta ricordare l'aspetto di queste, e scriverle così:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = a + a'X + a''Y, \\ y = b + b'X + b''Y, \end{cases}$$

dove $a, a', \dots b''$ sono sei costanti, che non dipendono dalla posizione del punto considerato. In parole: *le coordinate dell'un sistema si esprimono mediante funzioni lineari delle coordinate dell'altro sistema*; funzioni che inoltre sono omogenee ($a = b = 0$), quando le origini coincidono.

123. Coordinate polari. — Il problema della trasformazione delle coordinate comprende, in generale, quei procedimenti mediante i quali, date le coordinate di un punto in un sistema *qualsiasi* di coordinate (sia pure non cartesiano), si possono calcolare le coordinate del punto stesso in un altro sistema di coordinate. Sarebbe dunque qui il caso di parlare di sistemi di coordinate diversi dal cartesiano. Basterà definire, tra questi, un sistema, detto *sistema polare*, che viene talvolta adoperato, specialmente nelle matematiche applicate.

Nel piano si fissi un punto proprio O, *polo*, ed una retta orientata, o semiretta, x passante per O, detta *asse polare*. Allora, dato un punto P, rimane determinata la distanza $OP = \varrho$, *raggio vettore* del punto, e (a meno di multipli di 2π) l'angolo $\widehat{xp} = \varphi$, *anomalia* od *ascissa angolare*, che la semiretta positiva x forma colla semiretta p uscente da O e passante per P. Viceversa, quando siano noti i numeri ϱ e φ, rimane individuato il punto P, come intersezione di un cerchio di centro O e raggio ϱ (luogo dei punti che hanno il raggio vettore ϱ costante) con una semiretta uscente da O (luogo dei punti che hanno costante l'anomalia φ). I due numeri ϱ e φ si chiamano *coordinate polari* di P.



Per avere tutti i punti del piano, basta far variare φ da 0 a 2π, e il raggio vettore ϱ tra 0 e $+\infty$; oppure, come talvolta è preferibile, φ da 0 a π, e ϱ da $-\infty$ a $+\infty$, convenendo allora che i raggi vettori negativi siano da valutarsi sulla semiretta opposta a quella che forma l'anomalia φ con x.

Si noterà inoltre che i punti della semiretta positiva x hanno $\varphi = 0$, $\varrho > 0$; quelli della semiretta negativa hanno $\varphi = \pi$, $\varrho > 0$, (oppure $\varphi = 0$, $\varrho < 0$), il polo ha $\varrho = 0$, φ indeterminata.

Le formole per passare dal sistema polare al cartesiano si ottengono subito nel caso che uno, x, degli assi cartesiani coincida coll'asse polare, e l'altro, y, gli sia perpendicolare nel polo. Infatti dall'esame del triangolo rettangolo OAP, i cui cateti $OA = x$, $AP = y$ danno le coordinate cartesiane di P, mentre l'ipotenusa $OP = \varrho$ e l'angolo $\widehat{AOP} = \varphi$ danno le coordinate polari, risulta

$$(1) \qquad x = \varrho \cos\varphi, \qquad y = \varrho \operatorname{sen}\varphi;$$

donde si ricavano le formole inverse

$$(2) \quad \begin{cases} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Se poi il sistema cartesiano non si trovasse nella particolare posizione ora considerata, basterà introdurre un sistema cartesiano ausiliare, che sia legato al sistema polare dalla relazione suddetta.

Esercizi. — 1) Come si presentano le formule per la trasformazione delle coordinate quando i nuovi assi X, Y sono le bisettrici degli angoli degli assi antichi?

2) Scrivere direttamente le formole che permettono di passare da due assi x, y a due nuovi assi X, Y rappresentati, nell'antico sistema, dalle equazioni

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

3) Il determinante formato coi coefficienti di X, Y nelle (2) del n.° 122 (*determinante della sostituzione lineare* (2)) vale $\frac{\operatorname{sen} XY}{\operatorname{sen} xy}$.

4) Si dimostri, sia mediante considerazioni geometriche, sia mediante l'effettivo calcolo, che una trasformazione di coordinate, la quale non alteri l'origine, muta il trinomio $x^2 + 2xy \cos xy + y^2$ nel trinomio $X^2 + 2XY \cos XY + Y^2$, essendo (x, y) ed (X, Y) le antiche e le nuove coordinate di uno stesso punto; caso particolare della trasformazione ortogonale.

5) Nelle ipotesi dell'es. 4), dette (x', y'), (X', Y') le antiche e le nuove coordinate di un secondo punto, si dimostri che la espressione $(xy' - x'y) \operatorname{sen} xy$ si muta nella espressione $(XY' - X'Y) \operatorname{sen} XY$.

6) Se si moltiplica il determinante del terzo ordine formato colle coordinate di tre punti e colle unità, per il seno dell'angolo degli assi, si ottiene una espressione, la quale, per una *qualsiasi* trasformazione di coordinate cartesiane, si muta nell'analoga espressione relativa ai nuovi assi. Da questa osservazione, che si giustifica col calcolo diretto, si deduca una nuova dimostrazione della formola che dà l'area di un triangolo mediante le coordinate dei vertici (n.° 120). (Si assumano come assi ausiliari due lati del triangolo).

7) Posto $z = x + iy$, $Z = X + iY$ (dove $i = \sqrt{-1}$), le formole (3') del n.° 122 per il passaggio da assi ortogonali ad assi ortogonali, si riassumono nella seguente: $z = mZ + n$, dove m, n sono due numeri complessi, il primo dei quali ha per modulo l'unità.

8) Esprimere la distanza di due punti, e l'area del triangolo determinato da tre punti, mediante le coordinate polari dei punti stessi. Condizione di allineamento di tre punti in coordinate polari.

9) L'equazione di una retta in coordinate polari (ϱ, φ) può porsi sotto la forma

$$\varrho \cos(\varphi - \alpha) = p,$$

dove α e p sono due costanti; quali grandezze geometriche misurano?

124. Coordinate cartesiane omogenee [1]. — Ritorniamo ora al sistema di coordinate cartesiane, e cerchiamo di estenderne

---

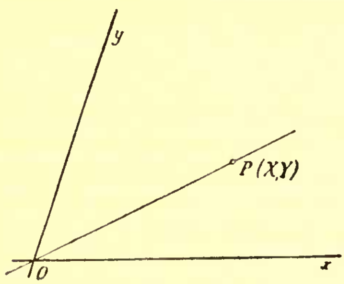
[1] Il lettore, a questo punto, può passare senz'altro allo studio dei Cap. IV e V, omettendo quelle osservazioni ove si fa uso di coordinate omogenee di punti o rette; egli ritornerà sulle parti omesse, dopo aver letto i n[i] 124 - 131 del presente Capitolo.

il concetto, in guisa da poter individuare anche i punti impropri (n.° 98). Noi riusciremo allo scopo rappresentando i punti del piano, non più mediante coppie, bensì mediante terne di numeri reali (x, y, z), dei quali però interessano soltanto i mutui rapporti.

Tracciamo a tal fine i due assi cartesiani x, y; e supponiamo anzitutto che di tre numeri dati x, y, z, il terzo, z, sia diverso da zero. Allora sono pienamente determinati i due rapporti

$$(1) \qquad X = \frac{x}{z}, \quad Y = \frac{y}{z},$$

ed è quindi individuato quel punto *proprio* P che ha l'ascissa X e l'ordinata Y (1).



Viceversa, dato un punto proprio P di coordinate cartesiane X, Y, si possono sempre scegliere tre numeri x, y, z $(z \neq 0)$ tali che sussistano le (1). Anzi questa scelta può farsi in infiniti modi; giacchè si può assumere la terna

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = 1,$$

od ogni altra terna la quale si componga di numeri proporzionali a questi.

Cerchiamo ora di far corrispondere ad una terna di numeri, di cui il terzo numero sia nullo, un punto *improprio* del piano. Attribuiamo perciò ad x, y due valori arbitrari, purchè non entrambi nulli, ed a z un valore variabile, e per ora non nullo. Avremo in corrispondenza un punto proprio P di coordinate cartesiane X, Y, date dalle (1), il quale, al variare di z, si muove descrivendo una retta uscente dall'origine, la cui equazione è

$$(2) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y}, \qquad (X, Y \text{ variabili})$$

---

(1) Nei numeri seguenti di questo Cap. indicheremo con X, Y le coordinate cartesiane ordinarie (e, più tardi, le proiettive non omogenee), riservando le lettere x, y, z alle coordinate omogenee. Questa convenzione verrà abbandonata nel seguito, quando sia impossibile l'equivoco.

o meglio

$$(2') \qquad Xy - Yx = 0,$$

per comprendere anche il caso che la x, o la y, sia nulla. Ora, se z tende a zero, senza che mutino x ed y, i valori X, Y dati dalle (1) (od uno almeno di essi) vanno crescendo senza limite, ed il punto P va allontanandosi all'infinito lungo la retta (2). Siamo condotti perciò a far corrispondere alla terna di numeri $(x, y, 0)$ il punto all'infinito della retta (2). Viceversa, dato un punto improprio P_∞, lo si congiunga all'origine, e si scriva la equazione di questa retta sotto la forma (2), o (2'); saranno allora x, y due numeri noti, ai quali potrebbero pure sostituirsi due numeri proporzionali. I due numeri x, y (o due numeri proporzionali), insieme a 0, danno una terna $(x, y, 0)$, che faremo corrispondere al punto P_∞.

Riassumendo:

Segnati nel piano due assi cartesiani x, y, *ad ogni gruppo di tre numeri* x, y, z, *non tutti nulli, corrisponde un unico punto* P *del piano; se* z $\neq$ 0, P *è proprio ed ha per coordinate cartesiane* $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; *se invece* z = 0, P *sta all'infinito sulla retta* $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$ (X, Y coordinate variabili). *Viceversa, un punto* P *corrisponde ad infinite terne di numeri; però da una di queste si ottengono tutte le altre, moltiplicando i tre numeri della terna per uno stesso fattore non nullo. Alla terna* (0, 0, 0) *non corrisponde alcun punto del piano.*

Tre numeri x, y, z, ai quali corrisponda un punto P nel modo detto, si chiamano *coordinate* (*cartesiane*) *omogenee* di P; la posizione di P dipende solo dai mutui rapporti delle coordinate omogenee.

Dalla definizione seguono subito alcune osservazioni.

Vi sono tre punti del piano, punti *fondamentali del sistema*, o vertici del *triangolo fondamentale*, che hanno nulle due coordinate omogenee, e la terza diversa da zero, ad es. uguale ad 1 (come si potrà sempre supporre); sono l'*origine* (0, 0, 1), il *punto all'infinito dell'asse* x (1, 0, 0), e *il punto all'infinito dell'asse* y (0, 1, 0). I punti per cui una delle tre coordinate è nulla, costituiscono tre rette *fondamentali*, lati del triangolo fondamentale; precisamente un punto $(0, y, z)$ sta sull'*asse* y, un punto $(x, 0, z)$ sull'*asse* x, ed un punto $(x, y, 0)$ sulla *retta all'infinito.* Vi è un punto (*punto unità*) le cui tre coordinate sono uguali fra loro, e possono assumersi uguali ad 1; è il punto $(1, 1, 1)$, che ha le coordinate cartesiane $X = 1$, $Y = 1$. Il punto all'infinito della retta $X = Y$, congiungente il punto unità colla origine, ha le coordinate $(1, 1, 0)$; ecc.

Come applicazione, cerchiamo le coordinate omogenee del punto all'infinito della retta

$$aX + bY + c = 0.$$

Quel punto appartiene pure alla parallela uscente dall'origine (n.° 105)

$$aX + bY = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{X}{-b} = \frac{Y}{a},$$

ed ha quindi le coordinate uguali, o proporzionali, a $(-b, a, 0)$ [1].

Osservazione. — Noi riterremo estesa la definizione di coordinate omogenee anche al caso di punti immaginari; per un punto siffatto, uno almeno dei mutui rapporti delle tre coordinate x, y, z sarà un numero complesso.

Cerchiamo ad es. le coordinate dei punti ciclici del piano. Ricordando che essi sono i punti all'infinito delle direzioni assolute uscenti, dall'origine, le quali hanno le equazioni (in coordinate ortogonali, n.° 121, Oss.)

$$x \pm iy = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{\pm i},$$

concludiamo che *i punti ciclici del piano hanno, rispetto ad assi ortogonali, le coordinate omogenee*

$$(1, i, 0), \quad (1, -i, 0).$$

125. Equazione omogenea di una retta. — Per trasformare in coordinate omogenee x, y, z la equazione cartesiana di una retta

(3) $$aX + bY + c = 0,$$

si eseguiscano le sostituzioni (1) e si liberi da frazioni; così si ottiene la *equazione omogenea della retta*

(4) $$ax + by + cz = 0.$$

---

[1] Se gli assi sono ortogonali, visto che $-\frac{a}{b} = \operatorname{tg} xr = \frac{\cos yr}{\cos xr}$, (n.° 114), risulta che le due prime coordinate omogenee del punto all'infinito di una retta sono proporzionali ai coseni di direzione della retta.

Questa è soddisfatta, non solo dalle coordinate dei punti propri della retta, ma pure dalle coordinate $(-b, a, 0)$ del punto all'infinito della retta stessa. Il passaggio inverso dalla (4) alla (3), si eseguisce dividendo i due membri della (4) per z e ricordando le (1).

Qui si noti che la equazione omogenea (4) ha senso, anche quando due dei coefficienti sono nulli (non tutti e tre); ad es., se $a = b = 0$, la (4) si riduce a $z = 0$, che è soddisfatta dalle coordinate omogenee dei punti impropri; dunque *la equazione omogenea della retta all'infinito del piano è* $z = 0$; mentre questa retta non poteva rappresentarsi colle ordinarie coordinate cartesiane.

126. Coordinate di una retta nel piano. — Fin dal principio del corso (n.° 6) abbiamo osservato che, nella geometria proiettiva piana, i punti e le rette si comportano in modo analogo, di guisa che nelle proposizioni concernenti proprietà grafiche, è permesso lo scambio delle parole *punto e retta*. Ma in seguito, nello stabilire la geometria analitica del piano, abbiamo trattato in modo diverso il punto e la retta; il punto fu rappresentato mediante un gruppo di numeri (coordinate), la retta invece mediante quella equazione lineare, a cui soddisfano le coordinate dei singoli suoi punti. In tal modo la retta veniva considerata come descritta dal movimento di uno dei suoi punti, come sostegno di una punteggiata.

Proponendoci ora di operare sulle rette di un piano, come finora abbiamo operato sui punti, dobbiamo cercare anzitutto il modo di definire una retta mediante coordinate. A questo risultato si può esser condotti, o da considerazioni geometriche (notando ad es. che per fissare una retta r nel piano, basta conoscere i punti in cui r sega due rette fisse), oppure da considerazioni analitiche, ricorrendo alle nozioni finora acquistate di geometria piana. Seguiremo questa seconda via.

Fissati nel piano due assi cartesiani x, y, noi sappiamo che ogni retta r può essere rappresentata da un' equazione lineare ed omogenea

(1) $$ax + by + cz = 0,$$

o, ciò che fa lo stesso (eccettuata la retta all'infinito), dall'equazione

$$aX + bY + c = 0$$

in coordinate cartesiane ordinarie. Dati tre numeri a, b, c, dei quali uno almeno non nullo, è nota la equazione (1), e quindi la retta r corrispondente. Viceversa, data r, si potrà scrivere una equazione che la rappresenti, sia la (1) ad esempio; ogni altra equazione della stessa retta si otterrà, come sappiamo (n.° 105), dalla (1), moltiplicandone i tre coefficienti a, b, c per uno stesso fattore. Sicchè data la retta r, saranno determinati i tre numeri a, b, c, o tre numeri ad essi proporzionali.

Ora una corrispondenza di questo tipo, tra ente geometrico e terna di numeri, ci si presentò nell' introdurre le *coordinate omogenee di un punto.* L' analogia ci porta ad assumere i tre numeri a, b, c suddetti come *coordinate omogenee* della retta r.

In conclusione: *noi chiamiamo coordinate omogenee di una retta, rispetto a due assi* x, y, *tre numeri* a, b, c *tali, che*

$$ax + by + cz = 0$$

sia l' equazione della retta in coordinate omogenee di punti (od $aX + bY + c = 0$ l'equazione cartesiana della retta).

127. Coordinate plückeriane. — Le coordinate omogenee di una retta si sogliono indicare con u, v, w. La retta da esse rappresentata ha dunque l'equazione

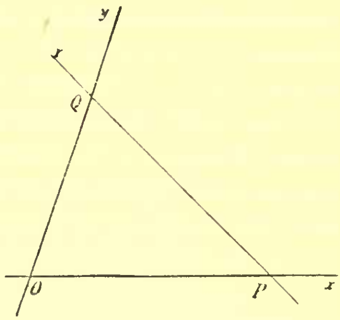
$$ux + vy + wz = 0. \tag{1}$$

Le tre coordinate possono assumere valori arbitrari, purchè non tutti nulli; *alla terna* (0, 0, 0) *non corrisponde nessuna retta.* Se due coordinate sono nulle (e la terza può quindi supporsi uguale ad 1), la retta è *fondamentale* nel sistema di coordinate. Precisamente:

le coordinate (1, 0, 0) spettano all' *asse delle* y,
» (0, 1, 0) » all' *asse delle* x,
» (0, 0, 1) » alla *retta all' infinito.*

Se una delle tre coordinate è nulla, la retta passa per uno dei tre punti fondamentali. Così, se è $w = 0$, la retta passa per l'origine; se $u = 0$, la retta è parallela all'asse x; e se $v = 0$, la retta è parallela all' asse y. Vi è una retta (*retta unità*), le cui tre coordinate sono uguali fra loro, e possono supporsi uguali ad 1; essa ha l'equazione cartesiana $X + Y + 1 = 0$; ecc.

Come le coordinate omogenee di un punto (x, y, z) non hanno significato geometrico, ma lo hanno i rapporti $X = \frac{x}{z}$, $Y = \frac{y}{z}$, così, non le coordinate omogenee di retta u, v, w, ma i rapporti $U = \frac{u}{w}$, $V = \frac{v}{w}$ hanno una interpretazione geometrica. E precisamente, poichè i due segmenti OP, OQ, staccati dalla retta (1) sugli assi, hanno i valori (n.° 102)



$$OP = -\frac{w}{u}, \quad OQ = -\frac{w}{v},$$

segue che sarà

$$U = \frac{u}{w} = -\frac{1}{OP}, \quad V = \frac{v}{w} = -\frac{1}{OQ}.$$

Dunque: *I rapporti delle prime due coordinate* u, v *di una retta alla terza* w, *hanno valori inversi e contrari a quelli dei segmenti che la retta stacca sugli assi* (a partire dall'origine).

Si osserverà che la conoscenza dei due numeri U e V è già sufficiente, in generale, per individuare una retta del piano; perciò U e V possono riguardarsi come *coordinate non omogenee* della retta, o *coordinate plückeriane*, come si chiamano (in contrapposto a coordinate cartesiane), per riguardo al Plücker che primo introdusse (1828) le coordinate di una retta [1].

Va però avvertito che le coordinate plückeriane non si prestano a rappresentare le singole rette passanti per l'origine; giacchè per ognuna di esse (eccettuati gli assi) si ha $U = \pm \infty$, $V = \pm \infty$. Questo fatto fa riscontro a quello relativo alle coordinate cartesiane ordinarie, le quali non sono atte a rappresentare i punti di una determinata retta (all'infinito).

128. Equazione di un punto in coordinate di rette. — Dire che una retta p ha le coordinate u, v, w, equivale a dire che essa è rappresentata, in coordinate x, y, z di punti, dall'equazione

$$(1) \qquad ux + vy + wz = 0.$$

[1] Talvolta u, v, w si chiamano *coordinate plückeriane omogenee*.

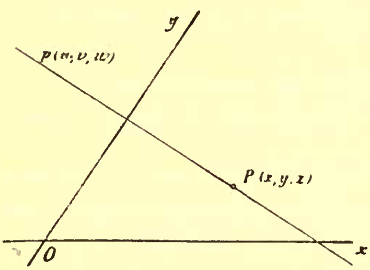
Questa definizione si traduce subito nell'enunciato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il punto (x, y, z) *stia sulla retta* (u, v, w), *è che si verifichi la relazione* (1). (In coordinate non omogenee, X, Y di punti, U, V di rette, la (1) diviene

(1')
$$UX + VY + 1 = 0).$$

Ora la (1) contiene simmetricamente le coordinate di un punto $P(x,y,z)$ e di una retta $p(u, v, w)$, e dà luogo a due interpretazioni diverse, secondo che si fanno variare le une o le altre coordinate.

1) Se attribuiamo valori costanti ad u, v, w, e teniamo quindi fissa la retta p, ma lasciamo variare x, y, z, ad ogni terna di valori (x, y, z) soddisfacenti alla (1) corrisponde un punto P della retta p; in tale ipotesi, la (1) rappresenta la retta $p(u, v, w)$, è *la equazione, in coordinate di punti, della retta stessa*, la quale viene riguardata come sostegno di una punteggiata.



2) Se invece attribuiamo valori costanti ad x, y, z, tenendo fisso il punto P, ma lasciamo variare u, v, w, ad ogni terna di valori (u, v, w) soddisfacenti alla (1), corrisponde una retta p passante per il punto P; questa volta, dunque, la (1) ci rappresenta il fascio di rette che ha per centro il punto $P(x, y, z)$, è (come si suol dire) *la equazione, in coordinate di rette, del punto P,* riguardato come centro di un fascio.

Riassumendo:

Quando i punti si determinano mediante coordinate omogenee x, y, z, *le rette vengono rappresentate da equazioni lineari ed omogenee in* x, y, z; *quando invece le rette si determinano mediante coordinate omogenee* u, v, w, *i punti vengono rappresentati da equazioni lineari ed omogenee in* u, v, w.

129. Problemi fondamentali su punti e rette in coordinate omogenee. — L'analogia che fin da ora si riscontra fra le coordinate omogenee di punto e di retta, ci si presenterà anche più spiccata trattando in coordinate omogenee i problemi fondamentali sulla mutua posizione di punti e rette, problemi che già in gran parte abbiamo risolto mediante coordinate non omogenee di punti.

α) Se un punto muovendosi descrive una punteggiata p, le coordinate variabili (x, y, z) del punto soddisfano ad una equazione lineare ed omogenea,

p) $ax + by + cz = 0$,

equazione della retta p (che ha per coordinate omogenee a, b, c).

β) Si abbia una seconda equazione lineare ed omogenea in x, y, z,

p') $a'x + b'y + c'z = 0$,

la quale rappresenti una seconda retta $p'(a', b', c')$.

Determinare analiticamente il punto d'incontro delle rette p, p', vuol dire cercare una terna di valori, non tutti nulli, x, y, z (coordinate del punto pp'), che verifichino le due equazioni lineari ed omogenee p), p').

α') Se una retta muovendosi descrive un fascio di rette di centro P, le coordinate variabili (u, v, w) della retta soddisfano ad una equazione lineare ed omogenea,

P) $au + bv + cw = 0$,

equazione del punto P (che ha per coordinate omogenee a, b, c).

β') Si abbia una seconda equazione lineare ed omogenea in u, v, w,

P') $a'u + b'v + c'w = 0$,

la quale rappresenti un secondo punto $P'(a', b', c')$.

Determinare analiticamente la retta congiungente i due punti P, P', vuol dire cercare una terna di valori non tutti nulli, u, v, w (coordinate della retta PP'), che verifichino le due equazioni lineari ed omogenee P), P')

Ora questi valori sono uguali, o proporzionali, ai tre determinanti

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

estratti dalla matrice formata coi coefficienti delle due equazioni [1].

Un caso eccezionale si presenta soltanto, quando i tre determinanti si annullano insieme; ma allora una delle due equa-

---

[1] I rapporti dei primi due determinanti al terzo, danno, nel problema di sinistra, le coordinate cartesiane X, Y del punto di incontro delle due rette $aX + bY + c = 0$, $a'X + b'Y + c' = 0$ (n.° 104). La condizione di parallelismo è espressa dall' annullarsi del terzo determinante (n.° 105).

zioni lineari è conseguenza dell'altra, e le due rette p e p', od i due punti P e P', coincidono. Ciò d'altronde risulta osservando che allora si ha

$$a : b : c = a' : b' : c',$$

(a meno che non siano tutte nulle le a, b, c, o le a', b', c').

Data una terza retta p''

$p'')$ $a''x + b''y + c''z = 0$

(di coordinate a'', b'', c''), *la condizione affinchè le tre rette p, p', p'' passino per uno stesso punto,* è che esista una terna di valori x, y, z, non tutti nulli (coordinate del punto nominato), soddisfacenti alle tre equazioni $p)$, $p')$, $p'')$; è adunque che *sia nullo il determinante formato coi coefficienti delle equazioni delle tre rette, o* (ciò che fa lo stesso) *colle coordinate plückeriane omogenee delle rette*; ossia (cfr. n.° 106)

Dato un terzo punto P''

$P'')$ $a''u + b''v + c''w = 0$

(di coordinate a'', b'', c''), *la condizione affinchè i tre punti P, P', P'' stiano in una stessa retta,* è che esista una terna di valori u, v, w, non tutti nulli (coordinate della retta nominata), soddisfacenti alle tre equazioni $P)$, $P')$, $P'')$; è dunque che *sia nullo il determinante formato coi coefficienti delle equazioni dei tre punti, o* (ciò che fa lo stesso) *colle coordinate cartesiane omogenee dei tre punti*; ossia (cfr. n.° 100)

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

(E qui si noti che, se nella (1) si suppongono costanti gli elementi delle ultime due orizzontali, e si lasciano variare gli elementi della prima orizzontale, l'equazione (1) rappresenta o il punto pp' in coordinate di rette a, b, c, oppure la retta PP' in coordinate di punti a, b, c).

γ) L'annullarsi del determinante (1), quando non siano tutti nulli i minori del secondo ordine estratti dalla matrice delle prime due orizzontali, per una osservazione già fatta, porta l'esistenza di due numeri λ e μ, tali da soddisfare le relazioni

(2) $a'' = \lambda a + \mu a'$, $\quad b'' = \lambda b + \mu b'$, $\quad c'' = \lambda c + \mu c'$.

Sostituendo questi binomi al posto dei coefficienti nelle equazioni $p'')$ e $P'')$, esse assumono le forme:

(3) $\lambda(ax + by + cz) + \mu(a'x + b'y + c'z) = 0.$

(3′) $\lambda(au + bv + cw) + \mu(a'u + b'v + c'w) = 0.$

Dunque: *l' equazione* (in coordinate omogenee di punti) *di ogni retta appartenente al fascio pp', può scriversi come combinazione lineare delle equazioni delle due rette p, p'* (n.° 106).

E si può anche dire *che le coordinate* (a″, b″, c″) *di una retta appartenente al fascio delle due rette* (a, b, c), (a′, b′, c′), *possono esprimersi, in funzione delle coordinate di queste, mediante le relazioni* (2).

δ) Il parametro $h = \frac{\mu}{\lambda}$ che entra nella equazione (3) (o nelle coordinate (2)) della retta p'', è coordinata proiettiva di questa retta, variabile nel fascio pp', rispetto alle rette fondamentali p', p, e alla retta che corrisponde al valore $h = 1$.

E se in un fascio si considerano quattro rette di coordinate

$p\ (a, b, c)$,
$p'\ (a', b', c')$,
$p''\ (a + ha', b + hb', c + hc')$,
$p'''(a + ka', b + kb', c + kc')$,

il loro doppio rapporto è espresso da [1]

$$(4)\quad (pp'p''p''') = \frac{h}{k}.$$

Dunque: *l' equazione* (in coordinate omogenee di rette) *di ogni punto appartenente alla retta PP', può scriversi come combinazione lineare delle equazioni dei due punti P, P'.*

E si può anche dire *che le coordinate* (a″, b″, c″) *di un punto appartenente alla congiungente i due punti* (a, b, c), (a′, b′, c′), *possono esprimersi, in funzione delle coordinate di questi, mediante le relazioni* (2).

δ') Il parametro $h = \frac{\mu}{\lambda}$ che entra nella equazione (3′) (o nelle coordinate (2)) del punto P'', è coordinata proiettiva di questo punto, variabile sulla punteggiata PP', rispetto ai punti fondamentali P', P ed al punto che corrisponde al valore $h = 1$.

E se in una punteggiata si considerano quattro punti di coordinate

$P\ (a, b, c)$,
$P'\ (a', b', c')$,
$P''\ (a + ha', b + hb', c + hc')$,
$P'''(a + ka', b + kb', c + kc')$,

il loro doppio rapporto è espresso da [1]

$$(4')\quad (PP'P''P''') = \frac{h}{k}.$$

[1] La formola (4) fu già dimostrata al n.° 107, come si vede scrivendo le equazioni delle quattro rette. Per giustificare la (4′) si osservi che le ascisse dei quattro punti P, P', P'', P''' sono rispettivamente $\frac{a}{c}$, $\frac{a'}{c'}$, $\frac{a + ha'}{c + hc'}$, $\frac{a + ka'}{c + kc'}$, e queste sono pure le ascisse dei quattro punti

ε) Date tre rette mediante le loro equazioni in coordinate di punti, la condizione perchè quelle formino fascio può anche esprimersi dicendo, che deve esistere una conveniente combinazione lineare delle tre equazioni, la quale si riduca ad una identità (n.° 108).

Se invece le tre rette non formano fascio, mediante una conveniente combinazione lineare delle loro equazioni, si può rappresentare una quarta retta assegnata ad arbitrio nel piano (n.° 109).

ε') Dati tre punti mediante le loro equazioni in coordinate di rette, la condizione perchè quelli siano allineati può anche esprimersi dicendo, che deve esistere una conveniente combinazione lineare delle tre equazioni, la quale si riduca ad una identità.

Se invece i tre punti non sono allineati, mediante una conveniente combinazione lineare delle loro equazioni, si può rappresentare un quarto punto assegnato ad arbitrio nel piano.

130. Legge di dualità piana. — L'ultimo paragrafo contiene una serie di procedimenti analitici che possono ricevere una doppia interpretazione geometrica, secondo che le coordinate ivi adoperate, si considerano come coordinate di punti, o coordinate di rette.

Ora si voglia studiare una proprietà *proiettiva* di una figura piana, composta ad es. di n punti ed N rette; quella proprietà riguarderà la mutua posizione dei punti e delle rette nominate, o le relazioni fra certi doppi rapporti; (tali sarebbero ad es. il teorema dei triangoli omologici, dell'esagono iscritto fra due rette, i teoremi generali sulle proiettività ed involuzioni . . .). Per dimostrare analiticamente quella proprietà si potrà riferire la figura ad un sistema di coordinate omogenee di punti; si rappresenteranno dunque gli n punti mediante n terne

---

dell' asse x, che risultano come proiezioni di quelli secondo la direzione y. Ora il doppio rapporto degli ultimi punti è espresso dal doppio rapporto delle loro ascisse, ossia (fatti i calcoli) da $\frac{h}{k}$; segue quindi la (4'). Se poi i quattro punti appartenessero all'asse y, o alla retta all'infinito, nei quali casi la precedente dimostrazione cadrebbe in difetto, si terrebbe conto delle loro ordinate $\frac{b}{c}, \ldots$, o delle loro coordinate proiettive sulla retta all'infinito $\frac{a}{b}, \ldots$

di numeri, e le N rette mediante N equazioni lineari ed omogenee in coordinate di punti; ed applicando in un ordine conveniente i risultati del n.° precedente, si dimostrerà che la relazione analitica in cui si traduce la tesi dell'enunciato, può dedursi algebricamente dalle relazioni traducenti le ipotesi.

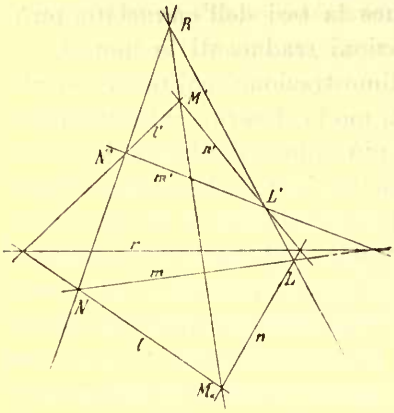
Giunti però alla fine della dimostrazione, noi possiamo rileggere tutte le formole scritte, in modo diverso, interpretando ora le coordinate introdotte, non più come coordinate di punti, bensì come coordinate di rette. In tale ipotesi, le n terne di numeri, sopra nominate, rappresentano *n rette*, e le N equazioni lineari rappresentano *N punti*. I passaggi analitici continueranno a sussistere; però l'interpretazione geometrica del risultato non ci darà più il teorema da cui siamo partiti; ma invece quel teorema in cui il primitivo si muta, quando si scambino tra loro nell'enunciato le parole *punto* e *retta* di un piano, *punteggiata* e *fascio di rette*. L'osservazione qui fatta, secondo cui la dimostrazione analitica di un certo teorema, interpretata in un altro modo, ci dà la dimostrazione del teorema duale, giustifica pienamente la *legge dualità nel piano*: *Da ogni proposizione grafica di geometria piana si può dedurne un'altra* (in generale diversa della prima) *mediante lo scambio delle parole punto e retta.*

E qui si noti che per applicare la legge di dualità ad un teorema, non occorre nemmeno che il teorema sia dimostrato analiticamente, ma basta sapere che il teorema sussiste, e che le ipotesi e la tesi di esso possono tradursi analiticamente coi mezzi di cui si parla nel n.° precedente. Infatti, dovendo la tesi esser conseguenza delle ipotesi, si è sicuri che il teorema può dimostrarsi per via analitica coi mezzi nominati; e ciò è sufficiente per il nostro scopo.

131. Dimostrazione analitica del teorema dei triangoli omologici. — Per render più chiare, con un esempio, le considerazioni dell'ultimo n.°, esporremo qui una dimostrazione analitica del teorema dei triangoli omologici giacenti in uno stesso piano (n.° 14).

a) Consideriamo anzitutto due triangoli LMN, $L'M'N'$, *i cui lati omologhi si seghino in punti di una stessa retta.* Riferiamoci ad un sistema di *coordinate omogenee di punti.* I lati l, m, n del primo triangolo avranno tre equazioni lineari, che potremo indicare brevemente con

(1) $$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0.$$



Se poi

(2) $$r = 0$$

è la equazione della retta su cui si segano i lati omologhi dei due triangoli, le equazioni dei lati l', m', n' del secondo triangolo potranno scriversi sotto la forma

(3) $$\begin{cases} r + \lambda l = 0, \\ r + \mu m = 0, \\ r + \nu n = 0, \end{cases}$$

dove λ, μ, ν sono certi parametri.

Ora per procurarci le equazioni delle rette congiungenti vertici omologhi, osserviamo che se dalla seconda delle equazioni (3) si sottrae membro a membro la terza, si ottiene l'equazione $\mu m - \nu n = 0$, la quale, pel modo come fu ricavata, rappresenta una retta passante per il vertice $m'n' \equiv L'$; ma poichè quella equazione è pure una combinazione lineare di $m = 0$, $n = 0$, la retta stessa passerà anche pel punto $mn \equiv L$. Dunque le rette LL', MM', NN' hanno rispettivamente le equazioni

(4) $$\mu m - \nu n = 0, \quad \nu n - \lambda l = 0, \quad \lambda l - \mu m = 0.$$

Ora le (4), sommate membro a membro, danno una identità; si conchiude dunque (n.° 129, ε)) che le rette LL', MM', NN' *passano per uno stesso punto*; e con ciò rimane dimostrata una parte del teorema dei triangoli omologici.

a') Per dimostrare la seconda parte del teorema (duale della prima), basta rileggere la precedente dimostrazione nell'ipotesi che le equazioni scritte abbreviatamente contengano, come variabili, le *coordinate di rette*, anzichè quelle di punti. Allora le (1) sono le equazioni di tre punti L, M, N, vertici di un triangolo, la (2) rappresenta pure un punto R, e le (3) rappresentano altri tre punti L', M', N', vertici di un secondo triangolo, i quali stanno ordinatamente sulle rette RL, RM, *RN*. La ipotesi è dunque che le *rette congiungenti i vertici omologhi dei due triangoli passino per uno stesso punto.* Le (4) finalmente rappresentano, come è facile vedere, i punti d'incontro dei lati omologhi dei due triangoli; dal fatto che le (4), sommate membro a membro, forniscono una identità, si conclude questa volta (n.° 129, ε')) che i *tre punti ora nominati stanno sopra una stessa retta,* c. d. d.

Esercizi — 1). Quale è la distanza del punto $P(X, Y)$ dalla retta $r(U, V)$? Quale è l'angolo delle due rette (U, V), (U', V')?

2) Se una retta si muove in un piano in guisa che sia nulla la somma delle distanze da essa di n punti dati M_i. moltiplicate ordinatamente per n numeri dati p_i $(i = 1, 2 \dots n)$, la retta descrive un fascio intorno al baricentro dei punti M_i presi coi pesi p_i (n.° 110, es. 6)). Si consideri il caso particolare che sia nulla la somma dei pesi.

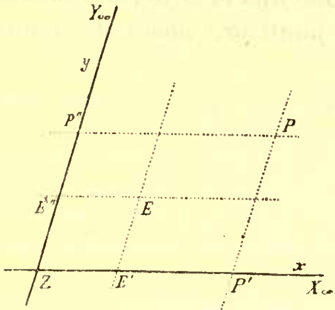
3) Scrivere le formule di trasformazione per le coordinate plückeriane (non omogenee), quando si muta il sistema di riferimento.

4) Quali punti immaginari rappresentano le due equazioni $u \pm iv = 0$?.

* **132. Coordinate proiettive di punti.** — Le coordinate cartesiane (rese omogenee, quando convenga) permettono, come dicemmo, di studiare anche le proprietà *proiettive* del piano; esse però non offrono il sistema più adatto per quest'ultimo studio. Ciò dipende dal fatto che la definizione del sistema cartesiano è fondata sopra concetti *metrici* (parallelismo). Segue ad es. che quella definizione non può tradursi per dualità, in guisa da condurre ad un sistema di coordinate nel piano rigato (il sistema plückeriano fu introdotto mediante considerazioni di altra natura); nè può estendersi alle altre forme di seconda specie, stella di rette o di piani. Segue ancora che le coordinate dei punti di una figura piana si alterano, quando la figura venga proiettata sopra un altro piano.

Per ovviare a questi inconvenienti si è cercato di definire un sistema di *coordinate proiettive* (che comprende il cartesiano come caso particolare), partendo da nozioni puramente proiettive. Noi vi giungeremo nel modo più naturale, procurando anzitutto di esprimere le ordinarie coordinate cartesiane mediante doppi rapporti di punti, alcuni dei quali impropri, e liberandoci poi dalla restrizione relativa alle particolari posizioni di questi ultimi punti.

Siano dunque x, y gli assi cartesiani, Z il loro punto di incontro (origine), X_∞, Y_∞ i loro punti all'infinito. Sia finalmente E un punto proprio, fuori degli assi, *punto unità*, al quale attribuiremo convenzionalmente le coordinate cartesiane $(+1, +1)$; vuol dire che assumeremo come unità di misura l'ascissa di E per i segmenti paralleli ad x (ascisse), e l'ordinata di E per i segmenti paralleli ad y (ordinate), senza preoccuparci se quelle due unità di misura sono uguali o diverse. Ciò posto, per aver le coordinate cartesiane di un punto P, proprio, qualsiasi del piano, dovremo proiettare P ed E da Y_∞ sull'asse x ottenendo i punti P', E', e da X_∞ sull'asse y ottenendo i punti P'', E''. L'ascissa X sarà allora il valore del segmento ZP' misurato coll'unità di lunghezza ZE', ossia $X = \frac{ZP'}{ZE'}$; e similmente l'ordinata $Y = \frac{ZP''}{ZE''}$. Esprimendo questi rapporti semplici mediante doppi rapporti (n.° 40), avremo



$$X = (X_\infty Z E' P'),\quad Y = (Y_\infty Z E'' P'');$$

e sostituendo ai doppi rapporti di punti, i doppi rapporti delle rette proiettanti da Y_∞ ed X_∞ rispettivamente,

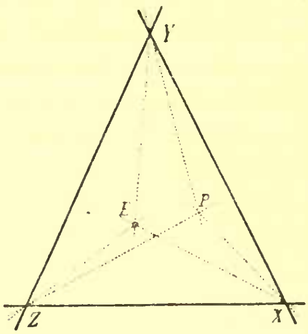
$$X = Y_\infty(X_\infty ZEP),\quad Y = X_\infty(Y_\infty ZEP).$$

Liberiamoci ora dalla restrizione che i punti X_∞, Y_∞ siano impropri. Sopra un piano qualsiasi (proprio, od anche improprio) assumiamo *ad arbitrio* un *triangolo fondamentale* XYZ, e fissiamo un *punto unità* E, pure ad arbitrio, ma fuori dei lati del triangolo. Allora dato un punto P qualsiasi, fuori della retta XY, rimangono definiti in valore e segno i doppi rapporti

(1) $$X = Y(XZEP),\quad Y = X(YZEP);$$

e viceversa, dati due numeri finiti X, Y, rimane individuato, in virtù delle (1), il punto P. I due numeri X, Y, collegati al punto P mediante le (1), si dicono *coordinate proiettive* (non omogenee) di P, rispetto ai *punti fondamentali* X, Y, Z ed al *punto unità* E.

Il punto Z ha le coordinate proiettive $(0, 0)$; ogni punto della retta ZX ha $Y = 0$, ogni punto di ZY ha $X = 0$; il punto E ha le coordinate $(1, 1)$. I punti di una retta uscente da X hanno costante la Y, ed i punti di una retta uscente da Y hanno costante la X. Un punto generico della retta XY avrebbe, secondo le (1), $X = \pm \infty$, $Y = \pm \infty$; ma a togliere la indeterminazione analitica relativa a quei punti, provvederemo colla introduzione di una terza coordinata. Se la retta XY si suppone impropria, si ricade nell'ordinario sistema cartesiano.



Dovremmo ora trattare in coordinate proiettive le relazioni fondamentali di posizione fra punti e rette di un piano. Una semplice osservazione ce ne dispensa. *Tutti i risultati ottenuti in coordinate cartesiane nel* Cap. I *valgono senz'altro in coordinate proiettive, purchè ai punti impropri, di cui ivi talvolta si parla, si sostituiscano ora i punti della retta fondamentale* XY; quindi al rapporto semplice di tre punti allineati, si sostituisca il doppio rapporto formato dai tre punti col punto in cui la loro retta sega XY; ecc. In particolare: *ogni formola esprimente in coordinate cartesiane una relazione proiettiva di punti e rette, conserva inalterato il suo significato in coordinate proiettive.*

Questa affermazione si giustifica osservando che i ragionamenti fatti in quel Cap. I, possono ripetersi letteralmente in coordinate proiettive, pur di tener presente la suddetta avvertenza relativa agli elementi impropri (1).

(1) Ad es. il primo problema risolto in coordinate cartesiane (n.° 99), ora va enunciato così: «Date le coordinate proiettive di due punti $P_1(X_1, Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$, e detta Q la intersezione della retta P_1P_2 colla retta XY, determinare sulla prima retta quel punto $P(X, Y)$ che forma con P_1, P_2, Q un doppio rapporto assegnato $(P_1P_2PQ) = r$». Proiettando i quattro punti P_1, P_2, P, Q da Y sopra la retta ZX, otterremo quattro punti aventi come prime coordinate proiettive X_1, X_2, X, $\pm\infty$; e dovrà essere $(X_1, X_2, X, \pm\infty) = r$, donde segue (n.° 45) $X = \frac{X_1 - rX_2}{1 - r}$. Similmente $Y = \frac{Y_1 - rY_2}{1 - r}$. Si ritrovano così le formole (1) del n.° 99, le quali conducono alle conseguenze dedotte nei n.i 100, 101. Ecc.

Risulta così che, *in coordinate proiettive, una retta è ancora rappresentata da una equazione lineare.* In particolare $X = 0$, $Y = 0$ rappresentano le rette fondamentali YZ, XZ; $aX + c = 0$, $bY + c = 0$ rappresentano rette uscenti rispettivamente dai punti fondamentali Y, X; $aX + bY = 0$ è una retta uscente dal punto Z, e precisamente $X - Y = 0$ rappresenta la retta ZE; ecc.

* **133. Coordinate proiettive omogenee di punti.** — Volendo rappresentare anche i punti della retta fondamentale XY, faremo uso di *coordinate proiettive omogenee*, che definiremo seguendo la via tenuta al n.° 124. Fissato un *triangolo fondamentale* XYZ ed un *punto unità* E, chiameremo coordinate proiettive omogenee di un punto P tre numeri x, y, z, non tutti nulli, tali che

$$(1) \qquad X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z}$$

siano le coordinate proiettive, non omogenee, sopra definite del punto P. Questa definizione vale, a dir vero, colla restrizione $z \neq 0$, la quale porta che il punto P sia fuori della retta XY. Per togliere la restrizione osserviamo anzitutto che il detto punto $P(x, y, z)$, congiunto con Z, dà una retta ZP avente la equazione

$$(2) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y},$$

dove X, Y sono le coordinate proiettive variabili; conveniamo poi di attribuire le coordinate $(x, y, 0)$ alla intersezione della retta (2) colla retta XY. Da queste definizioni segue che i rapporti $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ hanno i significati geometrici

$$(1') \qquad \frac{x}{z} = Y(XZEP), \quad \frac{y}{z} = X(YZEP).$$

Quanto al rapporto $\frac{x}{y}$, si osservi che la retta ZP avente l'equazione (2), ossia $X - \frac{x}{y} Y = 0$, forma colle tre rette ZY, ZX, ZE di equazioni

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad X - Y = 0$$

il doppio rapporto (n.[i] 107, 132)

$$Z(YXEP) = \frac{y}{x}.$$

Riunendo questa alle (1'), possiamo ora definire come *coordinate proiettive omogenee di un punto* P *tre numeri* x, y, z, *non tutti nulli, tali che sussistano le relazioni* (*di cui due sole sono indipendenti*)

$$(3)\quad \frac{y}{z}=X(YZEP),\quad \frac{z}{x}=Y(ZXEP),\quad \frac{x}{y}=Z(XYEP).$$

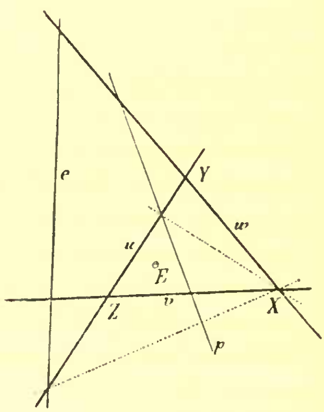
Le tre coordinate omogenee di un punto possono evidentemente esser moltiplicate per uno stesso fattore, senza che il punto cambi. I vertici X, Y, Z del triangolo fondamentale hanno rispettivamente coordinate uguali (o proporzionali) a (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1); il punto unità E ha le coordinate (1, 1, 1); per un punto della retta YZ è $x = 0$, per un punto di ZX è $y = 0$, e per un punto di XY è $z = 0$. Ecc.

In coordinate proiettive omogenee una retta è rappresentata da una equazione lineare ed omogenea. In particolare $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ rappresentano i lati del triangolo fondamentale; $ax + by = 0$ è una retta uscente dal vertice Z. Ecc.

***134. Coordinate proiettive di una retta.** — Supposto che una retta p sia rappresentata in coordinate proiettive omogenee di punti (x, y, z) dall'equazione

$$(1)\qquad ux + vy + wz = 0,$$

potremo chiamare i coefficienti u, v, w coordinate *proiettive omogenee* della retta p; $\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right.$, coordinate *non omogenee*; cfr. n.^{i} 126, 127).



La (1) dà allora la condizione affinchè un punto (x, y, z) appartenga ad una retta (u, v, w).

Di queste coordinate di rette si può pure assegnare una definizione diretta, che corrisponde per dualità alla definizione delle coordinate proiettive di punti. A tal fine indichiamo con u, v, w le rette fondamentali YZ, ZX, XY; e consideriamo, oltre alla retta p rappresentata dalla (1), la *retta unità* e avente l'equazione

$$(2)\qquad x + y + z = 0,$$

e quindi le coordinate (1, 1, 1). È facile vedere che le rette proiettanti da X i punti eu, pu della retta u ($x = 0$) hanno rispettivamente le equazioni

$$y + z = 0, \quad vy + wz = 0;$$

queste due rette formano adunque colle v, w, di equazioni

$$y = 0, \quad z = 0,$$

il doppio rapporto

$$u(vwep) = \frac{v}{w}.$$

Operando in modo analogo sugli altri lati del triangolo fondamentale, troviamo che, *fissato un trilatero* u, v, w *ed una retta unità* e, *la quale non contenga alcun vertice di questo, per coordinate proiettive omogenee di una retta* p *si devono intendere tre numeri* u, v, w, *tali che sussistano le relazioni* (*di cui due sole indipendenti*)

$$\frac{v}{w} = u(vwep), \quad \frac{w}{u} = v(wuep), \quad \frac{u}{v} = w(uvep).$$

Partendo da quest'ultima definizione, si può ritenere che la retta unità e sia una retta generica del piano. Ma se si vuole, come sarà sempre supposto, che la nuova definizione concordi colla precedente, o, in altri termini, che la (1) esprima la condizione di appartenenza di punto e retta, bisogna che la retta unità sia rappresentata in coordinate di punti dall'equazione (2). E ciò esige, come si dimostra facilmente, che per retta unità si scelga la retta *armonica* del punto unità, rispetto al triangolo fondamentale (n.° 110, d)) [1].

In questa ipotesi la (1), secondo che in essa si suppongono variabili le x, y, z, o le u, v, w, rappresenta la retta $p(u, v, w)$ in coordinate di punti, o il punto $P(x, y, z)$ in coordinate di rette. *Un punto è rappresentato adunque da un' equazione lineare in coordinate proiettive di rette.* Ad es. il punto $X \equiv vw$ ha l'equazione $u = 0$; ecc.

Tutte le considerazioni stabilite al n.° 129, *allo scopo di esprimere analiticamente le relazioni di posizione di punti e rette*

---

[1] Si osservi infatti che le rette proiettanti da X i punti eu ed E hanno le equazioni $y + z = 0$, $y - z = 0$, e quindi dividono armonicamente le rette XY, XZ; ecc.

di un piano, valgono ancora quando le coordinate (x, y, z) *o* (u, v, w) *ivi adoperate, si interpretino come coordinate proiettive omogenee di punti o rette.*

Ogni formola esprimente in coordinate cartesiane o plückeriane una proprietà proiettiva di una figura piana, conserva il suo significato se quelle coordinate si riguardino come proiettive.

Tuttavia valendosi di coordinate proiettive nell'esame di proprietà grafiche, si hanno, fra gli altri, i seguenti vantaggi:

1) una maggior libertà nella scelta del triangolo fondamentale, di cui ora si possono assumere ad arbitrio i tre lati, mentre nel sistema cartesiano omogeneo uno deve esser improprio;

2) il piano su cui si opera può esser proprio od improprio;

3) il procedimento analitico tenuto nel piano si estende immediatamente alle altre forme di seconda specie, come ora diremo;

4) operando mediante proiezione o sezione sulla figura considerata e sugli elementi di riferimento (triangolo fondamentale e punto o retta unità), le coordinate dei punti e delle rette della figura non si alterano.

Per quanto riguarda i caratteri metrici, le formole in coordinate cartesiane non sono certo applicabili alle nuove coordinate. Delle modificazioni da introdursi non parleremo qui, proponendoci di adoperare sistematicamente coordinate cartesiane nello studio delle proprietà metriche.

* **135. Coordinate proiettive nella stella di rette o piani.** — La definizione di coordinate proiettive nel piano punteggiato o rigato si estende senz'altro alla stella di rette o di piani. Allo stesso risultato si perviene nel modo seguente. Si tagli la stella S con un piano π, non passante per il centro della stella, e si fissi su π un sistema di coordinate proiettive di punti o rette. Si potranno allora far corrispondere ad ogni retta o piano della stella S, quelle coordinate che appartengono al punto o alla retta sezione su π. È facile scorgere che una forma di prima specie entro alla stella S (fascio di rette o fascio di piani) è rappresentata da una equazione lineare (in coordinate di rette o di piani), ecc.

Osservazione. — Considerazioni della stessa natura permettono di definire sul piano il sistema di coordinate proiettive di punti nel modo seguente, che talvolta è utile ricordare.

Sia π un piano sopra cui sia fissato un sistema di coordinate cartesiane, omogenee o no. Proiettiamo i punti di π sopra un nuovo piano π' da un centro S, ed associamo ad ogni punto P' di π' quei numeri che sono coordinate cartesiane del punto corrispondente P di π; questi numeri saranno evidentemente coordinate proiettive di P', rispetto a quel triangolo fondamentale, che è proiezione su π' del triangolo di π formato dai due assi cartesiani e dalla retta all'infinito. Coll'operazione inversa si trasforma un sistema di coordinate proiettive su π' in un sistema di coordinate cartesiane su π (cfr., per la punteggiata, la Oss. del n.° 42).

* **136. Trasformazione delle coordinate proiettive.** — Fissati in una forma di seconda specie due diversi sistemi di coordinate proiettive, sorge il problema di esprimere le coordinate di un elemento nell'un sistema mediante le coordinate dello stesso elemento nell'altro sistema. Ragioniamo ad es. nella ipotesi che la forma sia un piano punteggiato; i risultati a cui giungeremo, potranno poi estendersi a tutte le altre forme con semplici cambiamenti di parole.

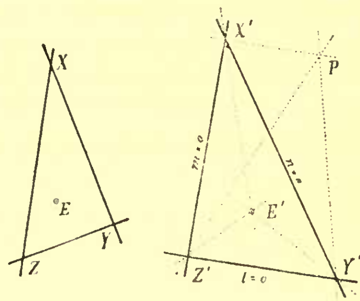
Sia XYZ il triangolo fondamentale ed E il punto unità dell'*antico* sistema di coordinate proiettive (x, y, z); siano $X'Y'Z'$ ed E' gli analoghi elementi del *nuovo* sistema (x', y, z'). Per individuar la posizione di questo, rispetto al primitivo, supporremo assegnate intanto le equazioni delle nuove rette fondamentali nelle antiche coordinate; siano

$$\left.\begin{array}{lrl} Y'Z') & l \equiv & ax + by + cz = 0, \\ Z'X') & m \equiv & a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ X'Y') & n \equiv & a_2x + b_2y + c_2z = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

dove l, m, n indicano abbreviatamente i polinomi scritti accanto. Quanto al punto unità E', possiamo tenerne conto nel modo seguente. Se sostituiamo, al posto delle variabili, le antiche coordinate di E' nei polinomi l, m, n, questi acquistano certi tre valori non nulli; ora possiamo sempre fare in modo che i tre valori siano uguali fra loro, purchè immaginiamo moltiplicati per convenienti fattori quei polinomi (o due di essi). Noi supporremo già fatta sin dal principio questa *preparazione* delle equazioni (1), supporremo in altri termini che le rette $X'E'$, $Y'E'$, $Z'E'$ siano rappresentate, nell'antico sistema, dalle equazioni

$$m - n = 0, \quad n - l = 0, \quad l - m = 0.$$

E con ciò potremo dire di conoscere pienamente i nuovi elementi fondamentali rispetto agli antichi.



Ciò premesso, consideriamo un punto P, il quale abbia le antiche coordinate (x, y, z) e le nuove (x', y', z'); cerchiamo di esprimere queste mediante quelle. È per definizione, ad es.,

$$\frac{y'}{z'} = X'(Y'Z'E'P).$$

Ora delle quattro rette indicate a secondo membro, le prime tre hanno le equazioni (nelle antiche coordinate)

$$n = 0, \quad m = 0, \quad m - n = 0;$$

e la quarta avrà una equazione del tipo

$$m - \nu n = 0,$$

dove $\nu = \frac{m}{n}$ è il rapporto dei valori assunti dai polinomi m, n, quando al posto delle variabili si sostituiscono le coordinate x, y, z di P. D'altra parte ν è il doppio rapporto delle rette aventi quelle quattro equazioni (n.° 129, δ)); dunque si ha

$$\frac{y'}{z'} = \frac{m}{n},$$

insieme alle due analoghe che si ottengono con analoghi ragionamenti:

$$\frac{z'}{x'} = \frac{n}{l}, \quad \frac{x'}{y'} = \frac{l}{m}.$$

Introducendo un fattore di proporzionalità ϱ, non nullo, e sostituendo ai simboli l, m, n le loro espressioni, giungiamo in fine alle formole richieste

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varrho x' &= ax + by + cz, \\ \varrho y' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \varrho z' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z. \end{aligned} \right.$$

Le formole (2) (dove si può pur supporre $\varrho = 1$) stabiliscono, come si suol dire, *una sostituzione lineare ed omogenea fra le due terne di variabili* x, y, z *e* x', y', z'. Il *determinante* (*di terzo ordine*) *della sostituzione*, formato coi nove coefficienti dei trinomi che compariscono a secondo membro, è certo diverso da zero, visto che le tre rette (1) non formano fascio. Dunque:

Stabiliti sopra una forma di prima specie due sistemi di coordinate proiettive ed omogenee, le coordinate di uno stesso elemento nei due sistemi sono collegate da una sostituzione lineare ed omogenea a determinante non nullo. E viceversa. L'inversa segue osservando che ogni siffatta sostituzione può scriversi sotto la forma (2), e che le (2) servono a passare da un sistema di coordinate (x, y, z) a quel nuovo sistema (x', y', z'), che ha per rette fondamentali le (1), e per punto unità il punto che colle sue coordinate x, y, z rende uguali i valori dei tre trinomi (1).

Osservazione. — Nelle (2) si può supporre che x, y, z siano coordinate cartesiane omogenee (o, posto $z = 1$, coordinate cartesiane ordinarie). In tale ipotesi, le (2) ci conducono alla seguente definizione di coordinate proiettive nel piano punteggiato.

Si fissi sopra un piano un sistema di coordinate cartesiane, e si scrivano le equazioni (1) di tre rette formanti un triangolo. Ad ogni punto P del piano corrispondono allora tre numeri x', y', z', che sono i valori assunti dai primi membri delle (1), quando al posto delle variabili si scrivano le coordinate cartesiane di P. Quei tre numeri x', y' z', o numeri proporzionali, possono assumersi come nuove coordinate del punto P. Che si tratti di coordinate proiettive (rispetto al triangolo nominato) risulta dalle (2).

Le coordinate baricentriche del Möbius (1827), di cui parla l'es. 5), costituirono il primo sistema di coordinate proiettive di punti. Il Plücker (1828-31), ricorrendo a considerazioni simili a quella contenuta nell'ultima Osservazione, introdusse coordinate omogenee di punti, rette ... nel piano e nello spazio. La definizione (da noi seguita) di coordinate proiettive, mediante i valori di certi doppi rapporti, fu proposta dallo Staudt (1857) e sviluppata dal Fiedler (1870).

Esercizi. — 1) Assunto come fondamentale il triangolo diagonale di un quadrangolo completo, e come punto unità un vertice del quadrangolo, si scrivano le coordinate degli altri vertici e le equazioni dei sei lati. Dall' aspetto di queste risultano subito le proprietà armoniche del quadrangolo. Questione duale per il quadrilatero.

2) Scrivere l'equazione della retta armonica del punto (x_1, y_1, z_1) rispetto al triangolo fondamentale (n.° 110, *d*)). Questione duale.

3) Dimostrare il teorema dei triangoli omologici, assumendo uno dei triangoli come fondamentale, e il centro di omologia come punto unità. Questione duale.

4) Dimostrare il teorema sull' esagono iscritto fra due rette (n.° 70, Oss. II), assumendo i tre lati di posto dispari come rette fondamentali ed una delle due rette come retta unità.

5) Specializzando la posizione del punto unità E rispetto al triangolo fondamentale XYZ, si ottengono particolari sistemi di coordinate proiettive, che possono prestarsi ad applicazioni metriche. Così, se E è il baricentro (punto di concorso delle mediane) del triangolo fondamentale, si ottiene il sistema di *coordinate baricentriche* (Möbius), nel quale ad ogni punto P spettano tali coordinate x, y, z, che risulti P il baricentro dei punti X, Y, Z, presi coi pesi x, y, z; le dette coordinate sono pure proporzionali alle aree dei triangoli PYZ, PZX, PXY. Detti X, Y, Z gli angoli interni del triangolo, si trova che le coordinate baricentriche dell' ortocentro del triangolo sono proporzionali a $\operatorname{tg} X$, $\operatorname{tg} Y$, $\operatorname{tg} Z$; le coordinate del centro del cerchio circoscritto sono proporzionali a $\operatorname{sen} 2X, \ldots$; del centro del cerchio iscritto a $\operatorname{sen} X, \ldots$ La retta unità è all'infinito, e le coordinate di una retta sono proporzionali alle distanze della retta dai tre vertici del triangolo.

6) Se il punto unità si sceglie nel centro del cerchio iscritto al triangolo, le coordinate diconsi *trimetriche* o *trilineari;* esse sono proporzionali alle distanze del punto, cui si riferiscono, dai tre lati del triangolo. Le coordinate trimetriche del baricentro sono proporzionali a $\frac{1}{\operatorname{sen} X}, \ldots,$ quelle dell' ortocentro a $\frac{1}{\cos X}, \ldots,$ quelle del centro del cerchio circoscritto a $\cos X, \ldots$; ecc. Qual'è la retta unità? Nel sistema trimetrico la retta all' infinito ha l'equazione $x \operatorname{sen} X + y \operatorname{sen} Y + z \operatorname{sen} Z = 0$.

7) Dimostrare, valendosi del sistema baricentrico o trimetrico, che il baricentro, l'ortocentro e il centro del cerchio circoscritto in ogni triangolo sono allineati (cfr. n.° 121, es. 8)).

8) Come si presenta la condizione di parallelismo di due rette nell'uno o nell' altro sistema?

9) Come si specializzano le coordinate non omogenee di punti e rette, se il vertice Z del triangolo fondamentale è improprio ed il punto unità è equidistante dai lati ZX, ZY?

Capitolo IV.

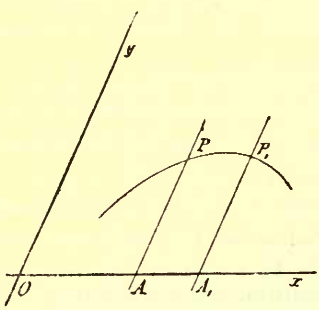
Rappresentazione analitica delle curve piane. Inviluppi di rette.

137. Equazione di una curva piana. — Il problema fondamentale della Geometria analitica consiste nel rappresentare i luoghi geometrici (curve, superficie...) mediante equazioni a più variabili, e nel dedurre le proprietà di quelli dalle proprietà delle equazioni corrispondenti.

Noi faremo vedere anzitutto come ad una equazione fra due variabili x, y si possa associare una linea piana. Cominciamo a supporre che la equazione sia risolta rispetto ad una delle variabili, ed abbia il tipo

(1) $$y = f(x), \quad \text{ossia} \quad y - f(x) = 0,$$

dove f indica una qualsiasi funzione. Fissato un sistema qualunque di coordinate (non omogenee), per es. cartesiane, consideriamo quei punti le cui coordinate soddisfano alla equazione (1). Per costruirne uno, si attribuirà ad x un particolare valore a, e si determinerà il valore corrispondente di y, che si suole indicare con $f(a)$; poi si segnerà quel punto P che ha l'ascissa a, e l'ordinata $f(a)$. Attribuendo ad x un nuovo valore a_1, e determinando $y = f(a_1)$, si avrà un nuovo punto P_1; e così si troveranno quanti altri punti si vogliano. Tutti i punti che in tal guisa possono costruirsi, formano un luogo geometrico, *il luogo di quei punti che colle loro coordinate soddisfano all'equazione* (1); la (1) è *l'equazione* del nominato luogo, *rappresenta analiticamente* il luogo, (mentre *il luogo* rappresenta geometricamente la equazione (1)).

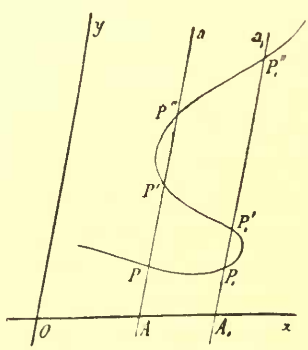


Qui si badi che gli infiniti punti del luogo possono formare una o più linee (nel senso intuitivo della parola *linea*); ma possono anche, in altri casi, giacere sparsi nel piano, in guisa che non riesca possibile di ordinarli lungo curve [1]. Affinchè il primo caso si presenti, è necessario che si verifichino alcune condizioni, delle quali basterà qui ricordar la più semplice ed evidente. Occorre dunque che, mentre il punto A varia con continuità sull'asse x, o almeno in un certo tratto di questo, il corrispondente valore dell'ordinata AP vari, esso pure, con continuità; in termini precisi: la y deve esser funzione continua della x, per tutti i valori di x compresi fra certi limiti. D'altronde questa e le analoghe condizioni saranno sempre soddisfatte in tutti i casi che avremo da considerare. Potremo dire adunque, in quei casi, che *la* (1) *rappresenta una curva*, è la *equazione di una curva.*

Viceversa, segnata nel piano degli assi cartesiani x, y una curva arbitraria (convenientemente limitata), rimane stabilita una dipendenza tra x ed y, per la quale ad ogni valore di x compreso in un certo intervallo, corrisponde un valore di y, ordinata del punto della curva avente quell'ascissa x; rimane dunque definita y come funzione di x. La relazione $y = f(x)$, a cui così si arriva, è la equazione della curva.

L'equazione (1) a due variabili è una forma particolare della equazione

(2) $$f(x, y) = 0,$$



dove, questa volta, f è simbolo di funzione di due variabili. Anche la (2) rappresenta un luogo geometrico, *il luogo di quei punti che con le loro coordinate* x, y *verificano l'equazione stessa.*

Volendo costruire questo luogo *per punti*, nella ipotesi ad es. che x, y siano coordinate cartesiane ordinarie, attribuiremo ad x un primo valore arbitrario $x = a$; con ciò la (2) diviene una equazione ad

[1] Ciò accadrebbe, ad es., se la funzione fosse definita dalle condizioni seguenti: per ogni valore razionale di x, è $y = 0$; per ogni valore irrazionale di x, è $y = 1$.

una sola incognita $f(a, y) = 0$, equazione la quale, risolta, ci darà per y certi valori $y = b, b', b'' \dots$ I punti

$$P(a, b), \quad P'(a, b'), \quad P''(a, b'') \dots$$

appartengono al luogo. Attribuendo ad x un nuovo valore a_1, e calcolando i corrispondenti valori di y, troveremo nuovi punti del luogo; e così si potrà continuare.

Nei casi che avremo da trattare, quei punti si susseguiranno lungo una o più curve, che sono definite dalla equazione (2).

Inversamente, data nel piano una curva, le coordinate x, y di un punto che la descriva, saranno legate da una certa relazione, che potrà scriversi simbolicamente sotto la forma (2), e si dirà *equazione della curva.*

Osservazione. — Di questa rappresentazione geometrica delle funzioni (o delle equazioni (1)) si approfitta spesso nelle scienze di osservazione, dove talvolta si costruiscono curve (*diagrammi*) per presentare in modo sensibile i risultati di una serie di osservazioni; talvolta invece la curva vien tracciata direttamente, ad es. mediante strumenti registratori, e da quella si cerca di dedurre la funzione. È pur da notarsi che la rappresentazione geometrica ha suggerito agli analisti le prime proprietà generali delle funzioni, che oggi si dimostrano in modo rigoroso senza ricorrere all'intuizione geometrica.

138. Intersezioni di due curve. — Se

$$(1) \qquad f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

sono le equazioni di due curve riferite ad uno stesso sistema di coordinate, la ricerca dei punti di incontro di quelle, si riduce alla ricerca delle coppie di valori (x, y) che soddisfano insieme alle equazioni (1); queste coppie si ottengono *risolvendo il sistema* (1) *rispetto alle incognite* x, y. Possiamo dire che il sistema (1) rappresenta il gruppo delle nominate intersezioni, gruppo che potrà comporsi, secondo i casi, di un numero finito o infinito di punti.

139. Studio di una curva piana partendo dalla sua equazione. — Riprendiamo in esame una sola curva e la sua equazione in un determinato sistema di coordinate. La stretta connessione che passa fra curva ed equazione dà luogo ad una serie di problemi fondamentali, che possono distribuirsi nei due gruppi seguenti.

I.° *Definire e studiare le curve partendo dalle equazioni rappresentative*; classificare le curve secondo la natura delle equazioni, dedurre da queste la forma, le principali proprietà delle curve corrispondenti, assegnare possibilmente una semplice costruzione della curva.

II.° *Definita una curva mediante una costruzione geometrica (o meccanica), o mediante una proprietà di quella, scrivere la equazione rappresentativa in un sistema prefisso di coordinate.*

Occupiamoci intanto del primo problema. E notiamo anzitutto che, in certi casi, l'aspetto della equazione lascia subito vedere come la curva sia formata.

Così, in coordinate cartesiane, *una equazione che contenga una sola coordinata variabile, rappresenta un gruppo di rette parallele ad uno degli assi.* Ad es., data la equazione

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

e posto che essa sia soddisfatta da certi valori di x

$$x = a,\ a', \ldots,$$

è chiaro che i punti soddisfacenti colle loro coordinate alla (1) appartengono alle rette $x = a$, $x = a'$, ..., sicchè queste rette, parallele all'asse y, compongono la linea rappresentata dalla (1).

Se la equazione data contiene le due coordinate x, y, *omogeneamente*, di guisa che possa assumersi come unica incognita il rapporto $\frac{x}{y}$, e l'equazione possa scriversi

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \tag{2}$$

la linea corrispondente è costituita da un gruppo di rette uscenti dall'origine, aventi le equazioni

$$\frac{x}{y} = k, \quad \frac{x}{y} = k', \quad \frac{x}{y} = k'', \ldots,$$

dove k, k', k'' ... sono le radici della (2).

Osservazione. — Il tipo di equazione (1) è d'altronde analogo al tipo (2), giacchè se si adottano coordinate cartesiane omogenee x, y, z, la (1) diviene $f(\frac{x}{z}) = 0$.

140. Curve algebriche; ordine della curva. — Le curve piane si sogliono classificare in relazione alle equazioni che le rappresentano in *coordinate cartesiane* [1]. Se la equazione della

---

[1] È necessario ricordare che la classificazione muterebbe totalmente quando la curva si riferisse a coordinate non cartesiane, nè proiettive.

curva è algebrica, e quindi può porsi sotto forma razionale intera (un polinomio contenente le potenze intere e positive di x, y, uguagliato a zero), la curva dicesi *algebrica*; altrimenti dicesi *trascendente*. Trascendenti ad es. sono le curve $y = \operatorname{sen} x$ (*sinussoide*), $y = \operatorname{tg} x$, $y = \log x$, ecc.

Noi nel seguito ci dovremo occupare soltanto di curve algebriche. Queste possono classificarsi ulteriormente secondo il *grado* della equazione (cioè del polinomio sopra nominato), grado a cui si dà il nome di *ordine* della curva corrispondente.

Una curva algebrica d'ordine n ha dunque una equazione del tipo

$$(1) \qquad \Sigma_{rs} C_{rs} x^r y^s = 0, \qquad (r + s \leqq n)$$

dove C_{rs} è un coefficiente, r ed s sono numeri interi non negativi, la cui somma raggiunge, come massimo valore, n.

Le curve, o linee, algebriche del primo ordine sono le *rette*. Fra le curve del secondo ordine troveremo il cerchio, insieme alle sue proiezioni centrali sopra piani.

Una curva d'ordine $n > 1$ può esser anche costituita da due o più curve algebriche di ordini inferiori, la somma dei quali sia n. Ad es., se $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sono due polinomi, i cui gradi μ, ν abbiano per somma n, l'equazione

$$\varphi(x, y) \cdot \psi(x, y) = 0$$

rappresenta una curva d'ordine n, la quale è composta delle (o si spezza nelle) due curve algebriche di ordini μ, ν

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0.$$

In particolare, può darsi che una curva d'ordine n si componga di n rette; ed inversamente l'insieme di n rette deve riguardarsi come una speciale curva d'ordine n.

Osservazione. — L'equazione cartesiana (1) di una curva algebrica di grado n si traduce subito in coordinate cartesiane *omogenee* x, y, z, pur di sostituire nella (1) al posto di x, y i rapporti $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, e moltiplicare i due membri per z^n (n.° 124). Così si trova

$$(2) \qquad \Sigma_{rs} C_{rs} x^r y^s z^{n-r-s} = 0,$$

equazione *omogenea* di grado n (ciascun termine della quale ha il grado n). Il passaggio inverso dalla (2) alla (1) si eseguisce dividendo per z^n, ecc.

141. Invariabilità dell'ordine di una curva algebrica in una trasformazione di coordinate. — Per giustificare la definizione di *ordine* di una curva algebrica, occorre dimostrare che l'ordine è un carattere della curva indipendente dal particolare sistema di coordinate cartesiane a cui la curva vien riferita; ossia che il grado della equazione cartesiana rappresentante la curva, riferita a certi assi x, y, non varia quando la stessa curva si riferisca a due nuovi assi X, Y.

Sia

(1) $$\Sigma_{rs} C_{rs} x^r y^s = 0 \qquad (r + s \leqq n)$$

una equazione di grado n, rappresentante una certa curva riferita agli assi x, y. Per aver l'equazione della stessa curva riferita a due nuovi assi X, Y, dobbiamo tener conto delle formole per la trasformazione delle coordinate (n.° 122, Oss.)

(2) $$x = a + a'X + a''Y, \qquad y = b + b'X + b''Y,$$

dove $a, \ldots, b''$ sono sei costanti. Fatte le sostituzioni (2) nella (1), questa diviene

(3) $$\Sigma_{rs} C_{rs} (a + a'X + a''Y)^r (b + b'X + b''Y)^s = 0$$
$$(r + s \leqq n).$$

Ora il termine della sommatoria che è posto in evidenza, si sviluppa in un polinomio di grado $r + s \leqq n$ in X, Y; riunendolo cogli altri polinomi analoghi provenienti dagli altri valori di r, s, risulta in fine che il primo membro della (3) si riduce ad un polinomio in X, Y di grado n' *non superiore* ad n. E con ciò è provato che una trasformazione di coordinate non può aumentare il grado di una equazione algebrica (razionale, intera). Ma non può nemmeno diminuirlo, perchè altrimenti la trasformazione inversa, che permette di passare dalle coordinate X, Y alle x, y, e quindi dalla (3) alla (1), dovrebbe mutare il grado n' di quella nel grado $n > n'$ di questa, mentre l'aumento del grado fu dimostrato impossibile. Si conclude che $n = n'$.

* **Osservazione.** — Un ragionamento analogo prova che, se la equazione cartesiana omogenea di una curva algebrica si trasforma in coordinate *proiettive* omogenee x', y', z' (n.° 133), si perviene ad una nuova equazione algebrica omogenea *dello stesso grado* in x', y', z'. Infatti le coordinate cartesiane omogenee x, y z, si esprimono mediante fun-

zioni lineari ed omogenee di x', y', z' (n.° 136). Si conclude che *una curva algebrica d'ordine* n *è rappresentata pure in coordinate proiettive da una equazione algebrica di grado* n; equazione omogenea, o no, secondo che tali sono le coordinate adoperate.

142. Significato geometrico dell'ordine di una curva. — Che l'ordine di una curva sia un carattere di questa indipendente dagli assi coordinati a cui la curva è riferita, risulta pure dal seguente teorema che ne mette in luce il significato geometrico:

L'ordine di una curva algebrica è il numero dei punti in cui questa è segata da una retta generica del suo piano, purchè si tenga conto delle intersezioni immaginarie, coincidenti...

Infatti per avere le intersezioni della curva d'ordine n

$$(1) \qquad \Sigma_{rs} C_{rs} x^r y^s = 0 \qquad (r + s \leqq n)$$

colla retta

$$(2) \qquad y = mx + p,$$

basterà sostituire nella (1), ad y, il valore dato dalla (2), ottenendo l'equazione

$$\Sigma_{rs} C_{rs} x^r (mx + p)^s = 0, \qquad (r + s = n)$$

la quale è di grado n nella x (almeno quando si escludono particolari valori di m). Risolvendo questa equazione si ottengono n valori di x,

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

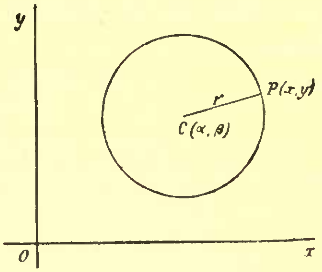
(fra reali, immaginari, coincidenti ...), ai quali corrispondono, per la (2), n valori di y

$$y_1, y_2, \ldots y_n.$$

Si hanno dunque n intersezioni $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$, come si era affermato. Un esame particolareggiato dei casi che possono presentarsi sarà fatto in seguito, nella ipotesi $n = 2$.

143. Equazione del cerchio. — Occupiamoci ora del secondo problema fondamentale che si presenta nello studio analitico dei luoghi geometrici: *data la legge di generazione di una curva, scriverne la equazione.*

Si stabilirà nel piano, su cui giace la curva, un sistema di coordinate, per es. cartesiano, (i cui assi converrà talvolta di assumere in particolari posizioni rispetto alla figura); si chiameranno x, y le coordinate del punto variabile che descrive la curva, e si riguarderanno come note le coordinate di punti, le equazioni di rette che occupino posizioni fisse nella figura, le lunghezze di segmenti assegnati, ecc.; si cercherà finalmente di tradurre la legge secondo cui il punto variabile si muove, in una relazione analitica fra le variabili x, y e le quantità note. Questa relazione, sarà la equazione della curva.



Proponiamoci ad es. di trovare la equazione del cerchio di dato centro e dato raggio. Riferiamoci ad un sistema di coordinate cartesiane *ortogonali*, e diciamo α, β le coordinate del centro C, ed r il raggio.

Se P (x, y) è un punto del cerchio, sarà (n.° 112)

$$CP = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r,$$

ossia

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2,$$

od anche

$$(1') \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0,$$

che è la equazione richiesta. Il cerchio è adunque una curva del *secondo ordine*.

L'equazione cartesiana ortogonale (1') del cerchio, confrontata colla equazione generale di secondo grado a due variabili, offre la particolarità che il coefficiente di x^2 è uguale al coefficiente di y^2, e manca il termine col prodotto xy. È ora il caso di vedere se, inversamente, una equazione di secondo grado dotata di queste particolarità, come è la

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

rappresenti, in assi ortogonali, un cerchio. Notiamo perciò che la (2) può ridursi alla forma

$$(2') \qquad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}.$$

Ora il primo membro è il quadrato della distanza fra il punto variabile (x, y) ed il punto fisso $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, mentre il secondo membro è costante; si conclude che la (2'), o la (2), rappresenta il cerchio di centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e di raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$.

Ciò almeno può dirsi nella ipotesi $a^2 + b^2 - 4c > 0$, giacchè allora r è reale, e si tratta di un cerchio propriamente detto. Ma se $a^2 + b^2 - 4c = 0$, nel qual caso la (2′) diviene

$$(2'') \qquad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = 0,$$

vi è un solo punto reale $\left(x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2}\right)$ soddisfacente colle sue coordinate alla (2″), ed il cerchio, per dir così, si riduce al suo centro (cerchio di raggio 0); mentre nel campo complesso la (2″) si spezza nelle due equazioni lineari

$$\left(x + \frac{a}{2}\right) + i\left(y + \frac{b}{2}\right) = 0, \left(x + \frac{a}{2}\right) - i\left(y + \frac{b}{2}\right) = 0,$$

rappresentanti le direzioni assolute uscenti dal detto centro(n.°121, Oss.), il che porta a riguardare il cerchio di raggio nullo come costituito dalle due direzioni assolute uscenti dal centro di esso. Finalmente se $a^2 + b^2 - 4c < 0$, nessun punto reale soddisfa colle sue coordinate alla (2′), la quale tuttavia (d'accordo colle nostre convenzioni) diremo che rappresenta un *cerchio immaginario*, di centro reale $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e di raggio immaginario.

Concludendo:

In assi ortogonali, una equazione di secondo grado la quale abbia uguali i coefficienti di x^2 *ed* y^2, *e manchi del termine con* xy, *rappresenta un cerchio (reale od immaginario); se la equazione si riduce ad aver l'unità come coefficiente di* x^2 *ed* y^2, *le metà dei coefficienti di* x, y, *cambiate di segno, danno le coordinate del centro.*

In assi obliqui, la equazione di un cerchio si riconosce subito essere del tipo

$$x^2 + 2xy \cos xy + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0;$$

e le condizioni perchè una equazione di secondo grado rappresenti un cerchio sono: che i coefficienti di x^2 ed y^2 siano uguali, ed il coefficiente di xy sia uguale al coefficiente di x^2 moltiplicato per $2\cos xy$; le coordinate del centro hanno espressioni meno semplici che in assi ortogonali.

144. Sistemi di curve. — In vari casi non si riesce a tradurre immediatamente, sotto forma analitica, la legge geometrica a cui obbedisce un punto che si muova lungo una curva. Giova allora seguire una via indiretta che si fonda sulle considerazioni seguenti, già interessanti di per sè.

Riprendiamo un'equazione a due variabili x, y, che siano ad es. coordinate cartesiane, e supponiamo ora che i coefficienti di quella dipendano da una quantità k (*parametro*), che può assumere vari valori nel corso della questione.

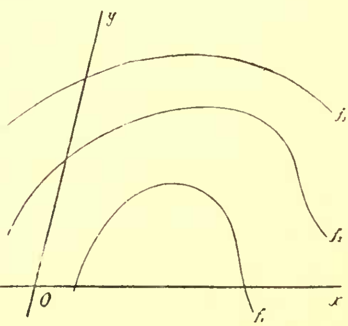
Rappresenteremo l'equazione sotto la forma

$$f(x,\ y;\ k) = 0. \tag{1}$$

Se attribuiamo a k un valore determinato k_1, la (1) diventa

$$f(x,\ y;\ k_1) = 0, \tag{1'}$$

nella quale le variabili sono x ed y soltanto; la (1') rappresenta adunque una certa curva che chiameremo f_1. Ad un secondo valore k_2, attribuito a k, corrisponde una seconda curva che chiameremo f_2, e così via; al variare di k nella (1), varia la corrispondente curva e descrive *un sistema di curve*, sistema le cui componenti (*curve*) corrispondono ai valori attribuiti al parametro k; esse hanno come *coordinate* (si potrebbe dire) i valori di k. Se sono soddisfatte (come succede nei casi ordinari) certe condizioni di continuità, il sistema di curve può considerarsi generato da una delle sue curve, che vada spostandosi e, generalmente, deformandosi in modo continuo. È notevole il caso che, attribuiti ad x, y due valori x', y', scelti ad arbitrio in intervalli convenienti, la (1) fornisca, per l'unica incognita k, *un solo valore* k'. Allora il punto $(x',\ y')$ si troverà sopra una sola curva $f(x,\ y;\ k') = 0$ del sistema; per ogni punto di una certa regione del piano passa dunque una sola curva del sistema.



Un particolare sistema di linee, soddisfacente alle condizioni suddette, è il *fascio di rette*. Esso corrisponde alla ipotesi che f sia una funzione lineare di x, y, nei cui coefficienti entri linearmente il parametro k; poichè allora, staccando i termini che contengono k, dai termini indipendenti dal parametro, la (1) assume la nota forma

$$(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0;$$

qui k è coordinata proiettiva della retta corrispondente.

In generale, se la f è funzione algebrica, razionale, intera, di grado n in x, y, nei cui coefficienti entri linearmente il parametro k, la (1) può scriversi sotto la forma

$$\varphi(x, y) + k\psi(x, y) = 0,$$

dove φ e ψ sono funzioni razionali intere di grado non superiore ad n (una almeno di grado n). Il sistema prende allora il nome di *fascio di curve d'ordine n.* Ci occuperemo in seguito del caso $n = 2$.

145. Concetto generale di sistema di coordinate nel piano. — Si abbiano ora due sistemi di curve, rappresentati dalle equazioni

$$(1) \qquad f(x, y; k) = 0,$$

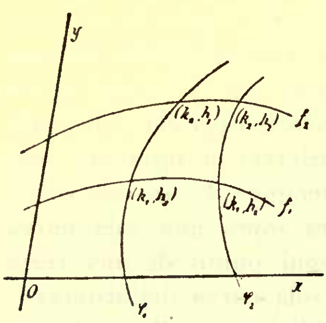
$$(2) \qquad \varphi(x, y; h) = 0,$$

dove k ed h sono due parametri. A due valori k_1, h_1 dei parametri corrispondono le curve f_1, φ_1 rappresentate dalle equazioni

$$(1') \qquad f(x, y; k_1) = 0,$$

$$(2') \qquad \varphi(x, y; h_1) = 0;$$

a due nuovi valori k_2, h_2 corrisponderanno le curve f_2, φ_2, ecc. Ora, se accade che per ogni punto P situato in una certa regione del piano passi una sola curva di ciascuno dei due sistemi, quei valori k, h dei parametri che spettano rispettivamente alle due curve passanti per P, possono assumersi come *coordinate* del punto P in un nuovo sistema di coordinate. Dato P, sono determinate le sue coordinate; mentre, date queste, rimangono determinate in corrispondenza tante posizioni di P, quanti sono i punti di quella regione in cui si segano due curve, l'una del primo, l'altra del secondo sistema. I punti per i quali la prima coordinata k ha un valore costante, appartengono ad una curva



del primo sistema; i punti per cui è costante h, appartengono ad un curva del secondo sistema. Le equazioni (1), (2) stabiliscono le relazioni fra le antiche coordinate x, y, ad es. cartesiane, e le nuove k, h; risolvendo quelle equazioni rispetto a k ed h, o rispetto ad x ed y, si otterrebbero le formole di passaggio dall'uno all'altro sistema.

È facile vedere che il sistema di coordinate (k, h) qui definito comprende, come casi particolari, i sistemi visti sinora. Se infatti i due sistemi (1) e (2) sono fasci impropri, o propri, di rette, si otterrà (scegliendo convenientemente i parametri) l'ordinario sistema di coordinate cartesiane, o il sistema delle coordinate proiettive. Se invece l'un sistema si compone di cerchi di centro comune O, e l'altro di rette uscenti da O, per modo che, in coordinate cartesiane ortogonali, le (1) e (2) assumano le forme particolari

$$x^2 + y^2 - \varrho^2 = 0, \qquad y - x\,\mathrm{tg}\varphi = 0,$$

dove questa volta i parametri sono indicati con ϱ e φ, si avrà in corrispondenza il sistema di coordinate polari (ϱ, φ); le ultime equazioni danno infatti le formole di passaggio fra il sistema cartesiano e il sistema polare (n.° 123).

146. Luogo delle intersezioni di curve corrispondenti in due dati sistemi. — Riprendiamo i due sistemi di curve (1) e (2) del n.° precedente, i quali definiscono un sistema di coordinate (k, h) nel piano.

Se fra k ed h stabiliamo una relazione analitica $\psi(k, h) = 0$, questa ci rappresenterà un luogo geometrico (n.° 137), il luogo di quei punti che colle loro nuove coordinate (k, h) soddisfano alla detta relazione.

Limitiamoci ad esaminare un caso particolare; supponiamo che questa relazione sia l'uguaglianza $k = h$, scriviamo adunque nelle (1), (2), al posto di k ed h, uno stesso valore, sia k. In tale ipotesi, i punti del luogo sono i punti comuni alle due curve

$$f(x, y; k) = 0, \tag{3}$$

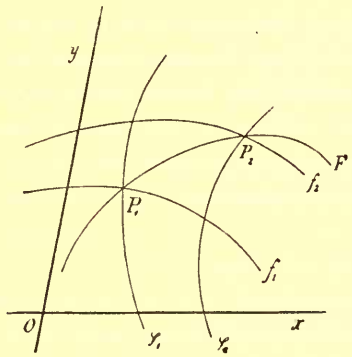
$$\varphi(x, y; k) = 0, \tag{4}$$

le quali variano al variare di k. Se chiamiamo *corrispondenti* queste due curve (entro ai sistemi che esse descrivono al variare di k), possiamo definire il nostro luogo come *il luogo delle* *intersezioni di curve corrispondenti nei due sistemi.* Noi ci proponiamo di scrivere *la equazione del luogo in coordinate* x, y.

Sia

$$(5) \qquad F(x, y) = 0$$

la equazione richiesta; esaminiamo quali relazioni passino fra la (5) e le (3), (4). Notiamo perciò che al nostro luogo appartiene ogni punto P_1 (x_1, y_1), il quale sia comune a due curve corrispondenti dei sistemi (3), (4), ad es. alle due curve f_1, φ_1, che si ottengono attribuendo al parametro variabile k un particolare valore k_1:



$$\begin{cases} f(x, y; k_1) = 0, \\ \varphi(x, y; k_1) = 0. \end{cases}$$

Segue che, se due valori x_1, y_1 soddisfano a queste due equazioni, essi determinano un punto P_1 del luogo, e quindi soddisfano certamente anche all' equazione (5). Si ha così la prima proprietà dell' equazione (5):

I. *Se tre numeri* x_1, y_1, k_1, *sostituiti nelle* (3) *e* (4) (*al posto di* x, y, k), *verificano quelle equazioni, allora i primi due* x_1, y_1 *verificano l'equazione* (5).

Viceversa, se x_1, y_1 verificano l'equazione (5), e quindi sono coordinate di un punto P_1 del nostro luogo, allora, per la legge con cui questo è descritto, devono esistere due curve corrispondenti f_1, φ_1 dei sistemi (3), (4) che passino per P_1; e in conseguenza deve esistere un valore k_1 di k tale, che x_1, y_1, k_1 verifichino tanto la (3), quanto la (4). Abbiamo così la seconda proprietà dell' equazione (5):

II. *Se due numeri* x_1, y_1 *verificano l' equazione* (5), *deve esistere un terzo numero* k_1 *tale, che* x_1, y_1, k_1 *verifichino insieme la* (3) *e la* (4).

Ora quando tre equazioni (3), (4), (5), le due prime a tre variabili x, y, k, l'ultima a due variabili x, y, si trovano legate tra loro dalle due condizioni I. e II. ora esposte, si dice che la (5) è la *risultante* delle equazioni (3) e (4), dopo la eliminazione di k; e la operazione colla quale si passa dalle equazioni (3) e (4) alla equazione (5), dicesi *eliminazione* di k tra le equazioni (3), (4).

Concludiamo adunque che: *dati due sistemi di curve mediante due equazioni (in coordinate* x, y) *contenenti un parametro, l'equazione (in* x, y) *del luogo delle intersezioni di curve dei due sistemi, corrispondenti ad uno stesso valore del parametro, si ottiene eliminando questo tra le equazioni date.*

La possibilità della eliminazione ed i procedimenti per eseguirla vengono studiati nei vari rami dell' Analisi.

147. Equazioni parametriche di una curva. — Alle considerazioni precedenti conviene spesso ricorrere, quando si deve scrivere l'equazione della curva descritta da un punto $P(x, y)$, che si muove con data legge geometrica. Anzichè cercare direttamente la relazione analitica che passa tra x, y, può riuscir più facile di determinare due relazioni tra le coordinate variabili x, y del punto P ed una terza quantità variabile k, legata colla figura; relazioni del tipo

$$f(x, y; k) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi(x, y; k) = 0, \tag{4}$$

di cui conosciamo ormai la interpretazione geometrica. Volendo ottenere l'equazione della curva in coordinate x, y, resta solo da eliminare il parametro k tra le (3) e (4). E in certi casi può anzi convenire di scrivere più relazioni tra x, y e più parametri k, l ...; sempre l' equazione del luogo si otterrà (come si vede mediante ragionamenti analoghi) eliminando tutti i parametri fra quelle relazioni.

Ma talvolta si preferisce di rappresentare la curva mediante due equazioni contenenti le coordinate variabili x, y ed un parametro, anzichè mediante una sola equazione in x, y. Di tal natura sono ad es. le *equazioni parametriche* di una curva

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \tag{6}$$

esprimenti le coordinate x, y di un punto variabile in funzione di un parametro t. Ad ogni valore di t corrisponde allora un punto (x, y) della curva; e la equazione di questa in x, y si otterrebbe eliminando t fra le equazioni (6).

Citiamo ad es. le equazioni

$$x = at + a', \quad y = bt + b',$$

le quali (se x, y sono coordinate cartesiane) rappresentano parametricamente la retta

$$\frac{x - a'}{a} = \frac{y - b'}{b}.$$

Qui a', b' sono le coordinate di un particolar punto P' della retta, mentre a, b definiscono la direzione della retta, ed in assi ortogonali sono proporzionali ai coseni di direzione di essa; posto che siano uguali a quei coseni, il parametro t misura la distanza fra il punto fisso $P'(a, b)$ e il punto variabile $P(x, y)$ descrivente la retta.

Un secondo esempio è offerto dalle equazioni

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi,$$

dove r è costante e φ il parametro, le quali in assi ortogonali danno il cerchio

$$x^2 + y^2 = r^2$$

avente il centro nell'origine e il raggio r. Il parametro φ misura l'angolo formato dall'asse x colla retta che unisce l'origine al punto (x, y), mobile sul cerchio.

148. Luogo della intersezione di rette omologhe in fasci proiettivi. — Come applicazione del metodo esposto nel n° 146, cerchiamo il luogo del punto d'incontro di rette omologhe in due fasci proiettivi giacenti in un piano, ma non sovrapposti.

Per procedere con maggior semplicità premettiamo la seguente osservazione. Siano date in un fascio tre rette che (riferite ad assi cartesiani) abbiano le seguenti equazioni abbreviate (n.° 110):

$$l = 0, \qquad m = 0, \qquad l + \lambda m = 0.$$

Se ora introduciamo il fattore λ nei singoli coefficienti del polinomio m, la nuova equazione $\lambda m = 0$ (il cui primo membro si potrà indicare con una sola lettera) rappresenterà sempre la seconda retta data; ma intanto noi potremo considerare l'equazione della terza retta come ottenuta *sommando membro a membro* le equazioni delle prime due rette. Sicchè, date le equazioni di due rette di un fascio, modificando, se è necessario, una di queste mediante un conveniente fattore, si può ottenere che l'equazione formata sommando quelle due, rappresenti una terza retta assegnata nel fascio.

Ciò posto, siano due fasci proiettivi S ed S' giacenti nello stesso piano; la proiettività sarà determinata (n.° 62) allorquando siano assegnate tre rette l, m, n nel fascio S, e le corrispondenti l', m', n' nel fascio S'.

Per la considerazione ora fatta, le equazioni delle rette l, m, n; l', m', n', si potranno scrivere rispettivamente sotto la forma:

$$l = 0, \quad m = 0, \quad l + m = 0,$$
$$l' = 0, \quad m' = 0, \quad l' + m' = 0.$$

Nella proiettività così determinata, alla retta $l + km = 0$ del primo fascio corrisponderà nel secondo fascio una certa retta $l' + k'm' = 0$; ma il doppio rapporto di quattro rette nel fascio S deve essere uguale al doppio rapporto delle corrispondenti rette nell'altro fascio S', perciò sarà (n.° 107) $k = k'$. Siamo così condotti a cercare la equazione del luogo della intersezione delle due rette corrispondenti di S, S'

$$(1) \qquad \begin{cases} l + km = 0, \\ l' + km' = 0, \end{cases}$$

le quali variano insieme al variare di k. Questa equazione si otterrà dunque eliminando k fra le equazioni (1). Risulta

$$(2) \qquad lm' - l'm = 0.$$

La (2) è di secondo grado nelle coordinate x, y (che entrano linearmente nei polinomi l, m, l', m'); il luogo nominato è dunque di *secondo ordine*. I centri S, S' dei due fasci appartengono al luogo; infatti le coordinate del punto S, ad esempio, annullano i polinomi l, m e quindi soddisfano alla (2). Sicchè possiamo conchiudere:

Il luogo del punto d'incontro di rette omologhe in due fasci proiettivi, giacenti in uno stesso piano, ma non concentrici, è di secondo ordine e passa per i centri dei due fasci.

Se la retta SS' comune ai due fasci fosse unita, rappresentando con $l = 0$ quella retta, il polinomio l' si potrebbe ritener identico al polinomio l, e la equazione (2) del luogo assumerebbe la forma

$$l(m - m') = 0.$$

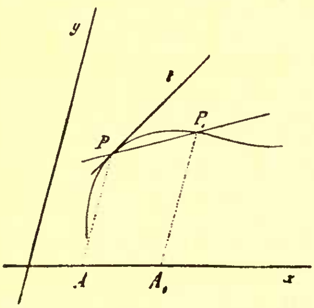
Ora questa rappresenta l'insieme delle due rette

$$l = 0, \quad m - m' = 0,$$

di cui la prima è la SS', mentre la seconda sarà il luogo delle intersezioni di rette corrispondenti non unite. Si ritrova così la proprietà (n.° 67) che i due fasci proiettivi S, S', aventi una retta unita, sono prospettivi (essendo $m - m' = 0$ l'asse di prospettiva).

149. Tangente ad una curva in un punto. — Riprendiamo in esame una sola curva, che supporremo descritta da un punto muoventesi con continuità. Fissiamo un punto P sulla curva, e congiungiamolo con un secondo punto P_1 della curva, che faremo poi scorrere lungo la curva stessa. Se accade che, mentre il punto P_1 si avvicina indefinitamente al punto P (da una banda o dall'altra), la retta mobile PP_1 abbia per limite una retta determinata t uscente da P, si dice che t è la *tangente alla curva in P*. Per una classe estesissima di curve (ad es. per tutte quelle che avremo da considerare in seguito), in ogni punto generico P esiste una determinata tangente.

* **Osservazione.** — La determinazione analitica della tangente ad una curva di nota equazione, in un punto dato, costituisce una delle principali applicazioni geometriche del calcolo differenziale. Noi ci limiteremo qui ad accennare la via che permette di risolvere la questione.



Si supponga che la curva sia definita dalla equazione

(1) $$y = f(x),$$

in coordinate cartesiane. Siano x_0 ed $y_0 = f(x_0)$ le coordinate del punto fisso P, x_1 ed $y_1 = f(x_1)$ le coordinate del punto mobile P_1. La equazione della retta PP_1 potrà scriversi così (n.° 100, (2)):

$$y - y_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

od anche, posto $x_1 - x_0 = h$,

(2) $$y - y_0 = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Ora facciamo che il punto $P_1(x_1, y_1)$ si avvicini sempre più al punto $P(x_0, y_0)$; la differenza h fra le ascisse dei due punti dovrà tendere a zero, e la retta (2) tenderà a coincidere colla retta *tangente*

$$y - y_0 = (x - x_0) \lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

purchè esista e sia determinato il limite che comparisce nel secondo membro. Ora quel limite, supposto esistente, si suole indicare scrivendo

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

e si chiama valore della *derivata* di $f(x)$ (o di y), rispetto ad x, per $x = x_0$. Con questa notazione la equazione della tangente alla curva (1) nel punto $P(x_0, y_0)$ acquista la forma

(3) $$y - y_0 = (x - x_0)\, f'(x_0).$$

La esistenza della derivata porta adunque l'esistenza della tangente, e viceversa (quando si eccettuino punti particolari).

Il calcolo differenziale insegna a calcolare le derivate delle ordinarie funzioni. Ed insegna pure a trasformare la (3), nella ipotesi che la curva sia data mediante una equazione

(1′) $$f(x, y) = 0,$$

contenente implicitamente le due coordinate. Si dimostra che allora la equazione della tangente nel punto (x_0, y_0) può scriversi così

(3′) $$(x - x_0)\, f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) = 0$$

dove f'_x, f'_y sono le *derivate parziali* del polinomio (1′), l'una rispetto ad x, l'altra rispetto ad y; precisamente $f'_x\,(x_0, y_0)$ è il valore che assume, per $x = x_0$, la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x, y_0)$ della sola variabile x, ed un analogo significato ha $f'_y(x_0, y_0)$.

Finalmente se la curva è data da una equazione in coordinate omogenee (cartesiane o proiettive)

(1″) $$f(x, y, z) = 0,$$

la tangente in (x_0, y_0, z_0) ha l'equazione

(3″) $$x f'_x(x_0, y_0, z_0) + y f'_y(x_0, y_0, z_0) + z f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

dove f'_x, f'_y, f'_z sono simboli di derivate parziali.

150. Inviluppi di rette. — Mentre un punto descrive una curva, la tangente in esso generalmente varia ed assume una infinità di posizioni, che costituiscono un sistema od *inviluppo di rette*. In modo più generale, e senza ricorrere alla curva, si può definire un inviluppo di rette come *l'insieme di tutte le rette di un piano soddisfacenti ad una data condizione*; in tal guisa l'inviluppo di rette si presenta come l'ente duale (nel piano) del *luogo di punti* (o curva).

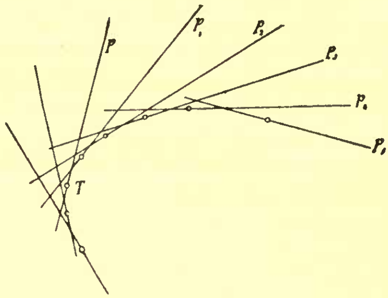
La dualità si riscontra anche nella rappresentazione analitica. Data una equazione

(1) $$f(u, v) = 0,$$

le cui variabili u, v vengano riguardate come coordinate plückeriane (o proiettive non omogenee) di una retta, rimane definito un'inviluppo *costituito da tutte le rette che colle loro coordinate soddisfano all'equazione* (1); la quale vien detta *equazione* dell'inviluppo. Gli inviluppi possono classificarsi secondo la natura delle loro equazioni in coordinate plückeriane (o proiettive). Diremo dunque *algebrico*, o *trascendente*, un inviluppo, secondo che algebrica, o trascendente, è la equazione rappresentativa; e, nel primo caso, chiameremo *classe* dell'inviluppo il grado della equazione algebrica (razionale, intera) di esso. *Gli inviluppi di prima classe sono i fasci di rette*, o, come si suol dire, *i punti* riguardati come centri di fasci (n.° 128). Fra gli inviluppi di seconda classe si trova il sistema delle tangenti a un cerchio, di cui il lettore potrà subito scrivere la equazione, noto il centro ed il raggio del cerchio; ed in generale, vedremo che le tangenti ad una curva del secondo ordine costituiscono uno inviluppo di seconda classe.

La nozione di *classe* di un inviluppo algebrico corrisponde per dualità piana alla nozione di *ordine* di una curva algebrica; le curve piane d'ordine n hanno come enti duali gli inviluppi di rette di classe n. Lo stesso procedimento algebrico che ci ha condotto a scoprire il significato geometrico dell'ordine di una curva (n.° 142), ci fornisce (interpretato nel modo duale) il significato della classe di un inviluppo: *la classe di un inviluppo algebrico è il numero delle rette dell'inviluppo che passano per un punto generico del piano*, purchè si contino convenientemente le soluzioni coincidenti, immaginarie . . .

151. Punti di contatto in un inviluppo. — Il concetto di tangente ad una curva, trasformato per dualità, conduce al concetto di *punto di contatto di un inviluppo*. Supposto che un inviluppo venga descritto da una retta muoventesi con continuità, si consideri una posizione p della retta, e sia p_1, una nuova posizione della retta stessa. Mentre la retta p_1, descrivendo l'inviluppo, va



avvicinandosi indefinitamente alla p, il punto pp_1 va scorrendo lungo la p; se esso tende ad una posizione limite T, si dirà che T è il *punto di contatto* della retta p appartenente all' inviluppo. E l'equazione del punto T in coordinate di rette si potrebbe ritrovare, partendo dall' equazione dell' inviluppo, collo stesso procedimento analitico che dà, in coordinate di punti, l'equazione della tangente ad una curva.

I punti di contatto delle infinite rette di un inviluppo costituiscono generalmente una curva. Ora l' intuizione suggerisce, ed il calcolo infinitesimale dimostra, che (sotto certe restrizioni verificate nei casi più comuni) la curva dei punti di contatto ha precisamente come tangenti le rette dell' inviluppo (ciascuna retta toccando la curva nel proprio punto di contatto). Riunendo questa osservazione con quella fatta al principio del n.° precedente, possiamo dire:

Le tangenti ad una curva piana costituiscono generalmente un inviluppo di rette, i cui punti di contatto sono i punti della curva primitiva.	*I punti di contatto di un inviluppo di rette costituiscono generalmente una curva piana, le cui tangenti sono le rette dell' inviluppo primitivo.*

Segue di qua che ad una curva è associato un determinato inviluppo, e viceversa; ma non sarebbe esatto dire, in generale, che quella curva e quell' inviluppo si corrispondono per dualità. Ad es., si dimostra che le tangenti ad una curva generale d'ordine n formano un inviluppo di classe $n(n-1)$, mentre la curva primitiva ha come ente duale un inviluppo di classe n.

Segue ancora che la nozione di inviluppo acquistata dal considerare l'insieme delle tangenti ad una curva piana, può riguardarsi come sufficientemente generale, escludendo essa solo alcuni inviluppi eccezionali (oltre al fascio di rette).

Esercizi [1] I — 1) Scrivere l'equazione del luogo di un punto tale, che i quadrati delle distanze di esso da due punti fissi abbiano una data differenza.

2) Sopra due rette secantisi in O (che potranno assumersi come assi) variano due punti A, B, in guisa che la somma $OA + OB$ rimanga costante; qual'è il luogo del punto medio di AB, o, in generale, del punto che divide il segmento AB in dato rapporto?

3) Nelle stesse ipotesi dell' es. precedente si conducano in A, B, le perpendicolari ad OA, OB rispettivamente; qual'è il luogo della loro intersezione?

4) Dati in un piano più segmenti A_1A_2, $A_3A_4, \ldots$, il luogo di un punto M tale, che la somma delle aree $MA_1A_2 + MA_3A_4 + \ldots$ abbia un valore assegnato k, è una retta parallela alla risultante dei segmenti dati (n° 111, Oss.), la cui direzione non dipende dunque da k. Fa solo eccezione il caso che quella risultante sia nulla, perchè in tale ipotesi non esistono punti M soddisfacenti al problema se k è dato ad arbitrio, mentre ogni punto del piano vi soddisfa se k ha un conveniente valore; la somma sopra scritta non dipende dunque da M.

5) Dato un triangolo OAB, si conduca una parallela variabile ad AB secante gli altri due lati in A', B'; qual'è il luogo della intersezione delle rette AB', $A'B$?

6) Se più trasversali uscenti da un punto P segano due rette fisse x, y nelle coppie di punti AA', BB', $CC' \ldots$, si cerchi il luogo dei punti $AB' \cdot A'B$, $AC' \cdot A'C$, $BC' \cdot B'C, \ldots$; si troverà una retta passante per il punto $O \equiv xy$ (n.° 16, es. 1)).

7) Se due punteggiate x, y sono riferite proiettivamente, ed AA', BB', $CC' \ldots$ sono coppie di punti corrispondenti, si cerchi il luogo dei punti $AB' \cdot A'B$, $AC' \cdot A'C$, $BC' \cdot B'C, \ldots$; si troverà l'equazione di una retta (n° 70).

8) Date n rette ed un punto O, si conduca per O una trasversale variabile, la quale seghi quelle rette in A_1, $A_2, \ldots A_n$; poi si prenda sulla trasversale un segmento OA tale che sia $\frac{n}{OA} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{OA_i}$. Si dimostri che il luogo del punto A è una retta, *polare armonica* di O rispetto alle n rette. (Si faccia uso di coordinate polari, rispetto al polo O). Si considerino in particolare i casi $n = 2$(n.° 50, I; 53, es. 5)), $n = 3$(n.° 110, d)).

II — 9) Il luogo di un punto le cui distanze da due punti fissi hanno un dato rapporto k, è un cerchio; quale ne è il centro, quale il raggio? E se $k = 1$?

10) Il luogo di un punto tale, che la somma dei quadrati delle distanze di esso da due punti fissi sia costante, è un cerchio il cui centro non dipende dal valore della costante.

11) In generale, dati n punti A_i ed n numeri p_i ($i = 1, 2 \ldots n$), il luogo di un punto M tale che sia costante la somma $\Sigma_i p_i \overline{MA_i}^2 = k$, è

[1] I luoghi qui considerati sono tutti rette (es. 1 — 8) o cerchi (es. 9 — 16). Generazioni di curve superiori si troveranno negli esercizi alla fine del Cap. V.

un cerchio, il cui centro è il baricentro dei punti A_i presi coi pesi p_i (n.° 110, es. 6)); quale ne è il raggio? Ad ogni punto M del piano corrisponde un determinato valore k della somma sopra scritta; ed il baricentro nominato è il punto per cui quella somma è minima (se $\Sigma p_i > 0$), o massima (se $\Sigma p_i < 0$). Come si modificano questi risultati se $\Sigma p_i = 0$?

12) Luogo di un punto da cui un dato segmento è visto sotto angolo costante.

13) Il luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in due fasci direttamente uguali è un cerchio; e viceversa, se la curva generata da due fasci proiettivi è un cerchio, i fasci sono direttamente uguali.

14) Il luogo di un punto tale, che i piedi delle perpendicolari da esso calate sopra due rette fisse x, y abbiano una distanza assegnata, è un cerchio.

15) Il luogo di un punto tale, che i piedi delle perpendicolari da esso calate sopra i lati di un triangolo formino un triangolo di area assegnata Δ, è un cerchio, il cui centro non dipende dal valore di Δ; per $\Delta = 0$ quel cerchio è circoscritto al triangolo (cfr. n.° 37, es. 5)). (Indicando con $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ le equazioni normali dei lati del triangolo, con L, M, N gli angoli opposti, si troverà, per quel luogo, la equazione

$$mn \operatorname{sen} L + nl \operatorname{sen} M + lm \operatorname{sen} N = 2\Delta,$$

la quale, come si verifica, rappresenta appunto un cerchio [1]).

16) In generale, il luogo di un punto tale, che i piedi delle perpendicolari da esso calate sopra i lati di un poligono semplice formino un poligono (*pedale* o *podario* del punto) di area assegnata Δ, è un cerchio, il cui centro è il baricentro dei vertici del poligono, quando a ciascuno si attribuisca come peso il seno del doppio dell' angolo del poligono avente ivi il vertice; il raggio r del cerchio è poi dato dalla formola $r^2 = \frac{8(\Delta - \Delta_0)}{S}$, dove Δ_0 è l'area del poligono pedale del detto baricentro, ed S è la somma dei detti pesi. Se $S = 0$, i poligoni pedali di tutti i punti del piano hanno la stessa area Δ_0. (STEINER).

III — 17) Se una retta (u, v) si muove in guisa che la sua distanza da un punto fisso $C(\alpha, \beta)$ rimanga costante, $= r$, essa inviluppa un cerchio; si deduca di qua l'equazione dell' inviluppo formato dalle tangenti a un cerchio, la quale può scriversi sotto la forma

$$u^2 + v^2 - \frac{P^2}{r^2} = 0,$$

dove $P \equiv u\alpha + v\beta + 1 = 0$ è l'equazione plückeriana del centro.

18) Siano dati n punti A_i ed n numeri p_i, $(i = 1, 2 \ldots n)$; una retta, la quale si muova in guisa che sia costante la somma delle distanze da essa dei punti A_i, moltiplicate rispettivamente per i numeri p_i, descrive l'inviluppo delle tangenti ad un cerchio avente il centro nel baricentro dei punti A_i, presi coi pesi p_i (cfr. n.° 131, es. 2)). Caso particolare in cui $\Sigma p_i = 0$.

---

[1] Segue che, in coordinate trilineari x, y, z (n.° 136, es. 6)), l'equazione del cerchio circoscritto al triangolo fondamentale XYZ è

$$yz \operatorname{sen} X + zx \operatorname{sen} Y + xy \operatorname{sen} Z = 0.$$

Capitolo V.

Il cerchio ed altre curve particolari.

152. Cerchio determinato da tre punti. — Vogliamo in questo Capitolo applicare a curve particolari varie nozioni esposte in generale nel Capitolo che precede. Ci occuperemo anzitutto del cerchio.

L'equazione (detta da alcuni *normale*) del cerchio in coordinate ortogonali è, come sappiamo (n.° 143), del tipo

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \tag{1}$$

dove α, β sono le coordinate del centro ed $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ è il raggio (reale o immaginario). Poichè l'equazione dipende da tre coefficienti α, β, γ, si potrà assoggettare un cerchio a tre condizioni traducentisi in altrettante relazioni fra quei coefficienti. Così, se si vuole che il cerchio passi per tre punti assegnati (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), dovranno esser verificate le tre equazioni di condizione

$$x_i^2 + y_i^2 - 2\alpha x_i - 2\beta y_i + \gamma = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

le quali permettono di calcolare α, β, γ. Il risultato della sostituzione di questi valori nella (1) si ottiene direttamente eliminando α, β, γ fra la (1) e le tre equazioni di condizione. Si giunge così all'equazione

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

che rappresenta appunto il cerchio richiesto.

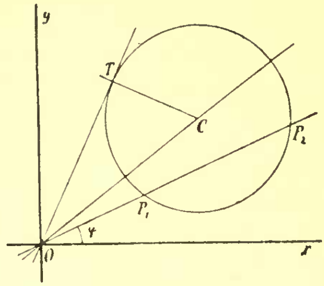
153. Equazione polare di un cerchio. Potenza di un punto rispetto ad un cerchio. — Assumendo come polo ed asse polare di un sistema di coordinate polari (ϱ, φ) l'origine e l'asse x del sistema cartesiano sopra adoperato, si arriva, colle note formole di trasformazione (n.° 123), a scrivere l'equazione polare del cerchio (1) sotto la forma

$$\varrho^2 - 2(\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi)\varrho + \gamma = 0. \tag{2}$$

Per ogni valore di φ, la (2) fornisce due valori ϱ_1, ϱ_2 di ϱ, raggi vettori delle *due* intersezioni del cerchio colla retta uscente da O e formante con x l'angolo φ. Ora si ha dalla (2)

$$\varrho_1 \varrho_2 = \gamma,$$

indipendente da φ, e si conclude che, *se intorno ad un punto ruota una trasversale, il prodotto dei due segmenti compresi fra il punto e le intersezioni della trasversale con un cerchio fisso è costante.* Quel prodotto costante, preso in valore e segno, si chiama (collo Steiner) *potenza* del punto primitivo rispetto al cerchio. La potenza $\gamma = (\alpha^2 + \beta^2) - r^2$ è pur data dalla differenza fra il quadrato della distanza del punto al centro del cerchio e il quadrato del raggio. Per un cerchio reale la potenza è positiva, nulla, o negativa, secondo che il punto è esterno, sulla circonferenza, o interno al cerchio, e nel primo caso è uguale al quadrato del tratto di tangente OT compreso fra il punto ed il cerchio; per un cerchio immaginario, la potenza di ogni punto è positiva.



Dalle cose dette risulta che la potenza dell'origine rispetto ad un cerchio è espressa dal termine noto dell'equazione normale (1). Se fosse richiesta la potenza di un altro punto $P(x_0, x_0)$, basterebbe eseguire la trasformazione di coordinate (n.° 122, I) $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$, assumendo come nuovi assi le parallele agli antichi uscenti da P. L'equazione (1) si trasforma nella

$$(1') \quad X^2 + Y^2 + 2(x_0 - \alpha) X + 2(y_0 - \beta) Y + \\ + (x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma) = 0.$$

Si deduce che *la potenza del punto* (x_0, y_0) *rispetto al cerchio* (1) *è data* da

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma,$$

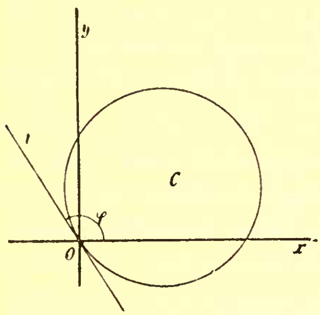
vale a dire *dal valore che assume il primo membro dell'equazione normale* (1), *quando al posto delle variabili si sostituiscano le coordinate del punto.* Secondo che questo valore è positivo, nullo, o negativo, il punto sarà dunque esterno, sulla circonferenza, od interno al cerchio.

154. Tangente ad un cerchio in un punto. — Se il cerchio (1), o (2), passa per l'origine, è $\gamma = 0$. Allora la (2) ha, qualunque sia φ, una radice nulla, come è chiaro geometricamente, mentre l'altra radice vale

$$\rho = 2(\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi).$$

Anche questa seconda radice è nulla, e la retta corrispondente è tangente al cerchio nell' origine, quando φ sia tale da rendere

$$\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi = 0,$$



ossia $\qquad \operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{\alpha}{\beta}.$

La retta in questione ha l'equazione cartesiana

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x,$$

ossia

$$\alpha x + \beta y = 0;$$

questa equazione (ottenuta uguagliando a zero l'insieme dei termini lineari nella (1)) rappresenta dunque la tangente nell' origine al cerchio (1), quando $\gamma = 0$.

Qualunque sia γ, volendo la tangente al cerchio (1) in un punto (x_0, y_0) di esso, si potrà eseguire, come prima, la trasformazione di coordinate che porta in questo punto l'origine; si arriverà così all' equazione (1′), in cui però mancherà la parte indipendente da X e da Y. Uguagliando a zero il complesso dei termini lineari in X, Y nella (1′), troviamo l'equazione

$$(x_0 - \alpha)X + (y_0 - \beta)Y = 0,$$

che rappresenta la tangente richiesta nelle nuove coordinate X, Y; ricordando poi che $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, *l' equazione della tangente al cerchio* (1) *nel punto* (x_0, y_0) assume la forma

(3) $\qquad (x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0.$

Sviluppando la (3), e osservando che

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma = 0,$$

quella equazione può scriversi così:

(3) $\qquad xx_0 + yy_0 - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) + \gamma = 0.$

Il lettore verificherà subito che la tangente nominata è normale al raggio del cerchio passante per il punto di contatto (x_0, y_0).

155. Intersezioni di un cerchio con una retta, in particolare colla retta all'infinito. — Il problema di determinare le intersezioni del cerchio (1) colla retta $ax + by + c = 0$, porta a risolvere il sistema delle equazioni delle due linee, e quindi la equazione di secondo grado nella sola x, che si ottiene sostituendo nella (1), al posto di y, il valore $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (cfr. n.° 142). Quella equazione in x (i cui coefficienti si ricavano mediante operazioni razionali eseguite sopra $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$) ha due radici x_1, x_2, che possono esser reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie coniugate; sostituendo successivamente queste al posto di x nella espressione di y, si ottengono due valori y_1, y_2, ordinate dei punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) soddisfacenti al problema. Si giunge così al noto risultato che un cerchio è segato da una retta in due punti, i quali sono reali e distinti (se la retta è *secante*), o reali e coincidenti (se è *tangente*), o immaginari coniugati (se è *esterna* al cerchio). I tre casi si presentano (come è noto dalla geometria elementare, e può verificarsi per via analitica) in relazione alla distanza del centro del cerchio dalla retta.

In particolare, volendo le intersezioni del cerchio colla retta all'infinito del piano, $z = 0$, scriviamo la (1) in coordinate omogenee

$$x^2 + y^2 - 2\alpha xz - 2\beta yz + \gamma z^2 = 0,$$

e poniamo in questa $z = 0$; troveremo

$$x^2 + y^2 = 0, \quad \text{donde} \quad \frac{y}{x} = \pm i.$$

Concludiamo che i punti cercati hanno le coordinate omogenee $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$, e sono dunque i punti ciclici del piano (n.° 124, Oss.). *Tutti i cerchi di un piano segano la retta all'infinito negli stessi due punti, immaginari coniugati, precisamente nei punti ciclici.* (Poncelet, 1822).

Viceversa: *ogni curva del secondo ordine la quale passi per i punti ciclici del piano, è un cerchio.* Infatti le condizioni perchè l'equazione generale di secondo grado in coordinate ortogonali, omogenee,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

sia soddisfatta dalle coordinate di ciascuno dei punti ciclici, sono

$$a - b + di = 0, \quad a - b - di = 0,$$

donde

$$a = b, \quad d = 0;$$

e queste sono le condizioni perchè quell'equazione rappresenti un cerchio (n.° 143).

156. Intersezione di due cerchi; asse radicale. — Date le equazioni di due cerchi

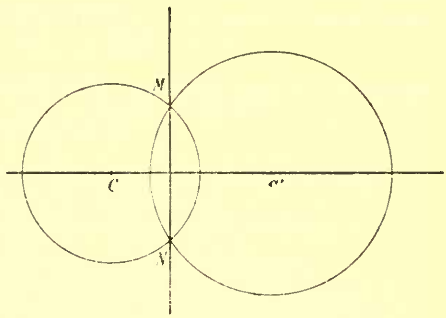
$$(4) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0, \end{cases}$$

si osserverà che ogni soluzione (x, y) di queste soddisfa pure all'equazione

$$(5) \qquad 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y - (\gamma - \gamma') = 0$$

ottenuta dalle (4) mediante sottrazione; e viceversa, ogni soluzione comune ad una delle (4) e alla (5) è comune anche all'altra delle (4). Possiamo dunque risolvere, anzichè il sistema (4), il sistema composto di una delle (4) e della (5). Ma questa rappresenta una retta; concludiamo adunque che *il problema di determinare le intersezioni di due cerchi equivale al problema di determinare le intersezioni di un cerchio con una retta*, e porta, in sostanza, a risolvere una equazione di secondo grado ad una incognita, i cui coefficienti sono funzioni razionali dei coefficienti delle equazioni dei due cerchi. Ciò perquanto riguarda le intersezioni cadenti in punti *propri*; giacchè volendo determinare anche le intersezioni improprie, conviene ridurre le (4) a forma omogenea. Allora, mediante sottrazione, si giunge ad una equazione di secondo grado spezzantesi nella (5), resa omogenea, e nella $z = 0$; occorre dunque tener conto inoltre delle intersezioni di uno dei due cerchi colla retta all'infinito, cioè dei *punti ciclici*, che sappiamo già esser comuni ai due cerchi. *Due cerchi hanno quattro punti comuni, di cui due cadono sempre nei punti ciclici, mentre gli altri due sono generalmente propri, e possono esser reali e distinti* (cerchi secantisi), *reali e coincidenti* (cerchi tangenti), *o immaginari coniugati* (cerchi non secantisi). Anche gli ultimi due punti sono impropri e vanno a coincidere coi due primi, quando la retta (5) è impropria, cioè quando $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, quando adunque i due cerchi sono concentrici.

È facile caratterizzare geometricamente la retta (5). Se infatti cerchiamo il luogo dei punti (x, y) che hanno uguale potenza rispetto ai due cerchi (4), siamo condotti (n.° 153) ad uguagliare i primi membri delle due equazioni (4), e quindi perveniamo alla (5). Dunque: *il luogo dei punti che hanno potenza uguale rispetto a due cerchi, è una retta* (detta *asse radicale*), *la quale contiene le due intersezioni generalmente proprie* (reali o immaginarie) *dei due cerchi.* L'asse radicale è improprio solo quando i cerchi siano concentrici. Escluso questo caso, *l'asse radicale è perpendicolare alla congiungente i centri dei cerchi,* come risulta confrontando la (5) coll'equazione della detta congiungente



$$\frac{x - \alpha}{\alpha - \alpha'} = \frac{y - \beta}{\beta - \beta'}.$$

157. Condizione di ortogonalità di due cerchi. — Si chiama *angolo di due cerchi* (o di due curve) in un punto comune, l'angolo formato dalle due tangenti in quel punto. Se quest'angolo è retto, i due cerchi (o le due curve) *si tagliano ortogonalmente.* È facile stabilire la condizione affinchè i due cerchi (4) si taglino ortogonalmente, sia ricorrendo alle equazioni delle tangenti in un punto ad essi comune, sia notando che i raggi r, r' dei due cerchi passanti per il detto punto devono esser perpendicolari. Considerando il triangolo rettangolo che ha quei raggi come cateti, e come ipotenusa la distanza dei centri (α, β), (α', β'), si ha

$$r^2 + r'^2 = (\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2,$$

ossia, ricordando che $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma, r'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma'$,

$$(6) \qquad 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - (\gamma + \gamma') = 0,$$

che è la condizione richiesta di ortogonalità.

Il lettore potrà, seguendo una via analoga, determinare, in generale, l'angolo dei due cerchi (4).

158. Fascio di cerchi. — Date le equazioni (4) di due cerchi, che indicheremo abbreviatamente con

$$(4') \qquad S=0, \qquad S'=0,$$

consideriamo una loro combinazione lineare

$$\lambda S + \mu S' = 0,$$

od anche, adoperando un solo parametro $k = -\frac{\mu}{\lambda}$,

$$(7) \qquad S - kS' = 0.$$

Questa equazione, che per $k \neq 1$ può scriversi sotto la forma

$$(7') \quad x^2 + y^2 - 2\,\frac{\alpha - k\alpha'}{1-k}\,x - 2\,\frac{\beta - k\beta'}{1-k}\,y + \frac{\gamma - k\gamma'}{1-k} = 0,$$

rappresenta ancora un cerchio, il quale, al variare del parametro k, descrive un sistema di infiniti cerchi detto *fascio* (cfr. n.° 144). Al fascio appartengono evidentemente i cerchi primitivi $S=0$ ed $S'=0$, corrispondenti ai valori $k=0, \pm\infty$; mentre, per $k=1$, la (7) ci dà l'asse radicale dei due cerchi nominati, o meglio (in coordinate omogenee) il detto asse preso insieme colla retta all'infinito del piano, dunque una coppia di rette che conviene riguardare come un cerchio degenere del fascio.

Sono proprietà immediate del fascio le seguenti:

a) *Ogni punto comune ai due cerchi primitivi è comune ad ogni cerchio del fascio*, e dicesi *punto base del fascio* (limitando d'ordinario questo nome alle intersezioni proprie);

b) *per un punto del piano, che non sia base, passa sempre uno ed un sol cerchio del fascio.*

Sia infatti $P_0(x_0, y_0)$ un punto del piano, e siano S_0, S'_0 i valori che assumono i polinomi S, S', quando al posto delle variabili x, y si pongono x_0, y_0. Se P_0 appartiene ai due cerchi primitivi, sarà $S_0 = 0$, $S'_0 = 0$ e quindi

$$S_0 - kS'_0 = 0;$$

segue che P_0 appartiene ad ogni cerchio (7) del fascio. Se invece P_0 non è comune ai cerchi primitivi, i valori S_0, S'_0 non sono entrambi nulli, e l'ultima equazione fornisce un valore per k; sostituendolo nella (7), si ha quel particolare cerchio del fascio che passa per P_0.

Segue dalla *a*) che *i cerchi del fascio hanno a due a due lo stesso asse radicale*, detto *asse radicale del fascio*; ciò si verifica pur subito per via analitica. Ogni punto dell'asse radicale ha la stessa potenza rispetto a tutti i cerchi del fascio. Il fascio è anche determinato da un suo cerchio e dall'asse radicale, mediante combinazione lineare delle relative equazioni, giacchè la (7) può scriversi così:

$$(S - S') - (k - 1)S' = 0.$$

Il luogo dei centri dei cerchi di un fascio è una retta normale all'asse radicale, detta *asse centrale;* infatti il centro del cerchio (7') ha le coordinate $\frac{\alpha - k\alpha'}{1-k}, \frac{\beta - k\beta'}{1-k}$, e quindi (n.° 99) appartiene alla retta congiungente i centri (α, β), (α', β') dei due cerchi (4'), retta che sappiamo già esser normale all'asse radicale. Ogni punto di quella retta è centro di *un* cerchio del fascio. Fa eccezione solo il caso che i due cerchi (4') siano concentrici, giacchè allora tutti i cerchi del fascio hanno lo stesso centro.

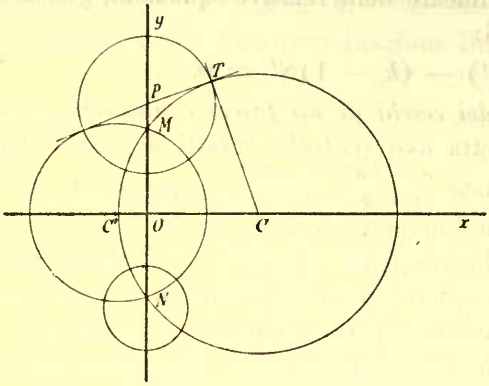
159. Fasci ortogonali di cerchi. — Se per semplificar le formole assumiamo come assi delle x e delle y, l'asse centrale e l'asse radicale di un fascio di cerchi (non concentrici), e poniamo sia $x^2 + y^2 + \gamma = 0$ il particolare cerchio del fascio avente il centro nella origine, ogni altro cerchio del fascio avrà una equazione del tipo

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - 2kx + \gamma = 0,$$

dove k, ascissa del centro, è un parametro variabile da cerchio a cerchio. I punti base propri del fascio, situati sull'asse y, hanno l'ordinata $y = \pm \sqrt{-\gamma}$, e quindi sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati, secondo che γ è negativo, nullo, o positivo; nel caso $\gamma = 0$ tutti i cerchi del fascio toccano l'asse y nell'origine.

Osserviamo ancora che il raggio del cerchio (8) vale $\sqrt{k^2 - \gamma}$; quindi i centri dei cerchi di raggio nullo appartenenti al fascio hanno le ascisse $k = \pm \sqrt{\gamma}$, e sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari, secondo che sono immaginari, reali e coincidenti, o reali e distinti i punti base del fascio; quei due centri si chiamano *punti limite* del fascio. Essi sono (come il lettore vedrà facilmente) punti doppi della involuzione di centro O e potenza γ segata sull'asse x dai cerchi del fascio.

Ciò premesso, prendiamo sopra l'asse y un punto arbitrario $P(0, h)$, e da esso conduciamo la tangente PT ad un cerchio qualsiasi (8) del fascio. Detto ϱ il segmento di tangente compreso fra P e il cerchio, sarà ϱ^2 uguale alla potenza di P rispetto al cerchio (8), ossia (n.° 153)



$$\varrho^2 = h^2 + \gamma,$$

valore indipendente da k, cioè dal particolare cerchio considerato nel fascio, come era prevedibile ricordando la proprietà dell' asse radicale. Con centro P e raggio ϱ descriviamo un cerchio, la cui equazione si trova essere

$$(9) \qquad x^2 + y^2 - 2hy - \gamma = 0.$$

Questo cerchio, qualunque sia h, taglia ortogonalmente il cerchio (8) corrispondente ad un valore arbitrario di k; ciò risulta subito dalla costruzione geometrica eseguita, e si verifica analiticamente ricordando la condizione di ortogonalità (6) (n.° 157). Al variare di h il cerchio (9) descrive pure un fascio, di cui però l'asse centrale è l'asse y, mentre l'asse radicale è l'asse x; inoltre i punti base del nuovo fascio hanno le coordinate $(\pm \sqrt{\gamma}, 0)$ e quindi coincidono coi punti limite del fascio (8), mentre i punti limite del fascio (9), di coordinate $(0, \pm \sqrt{-\gamma})$, coincidono coi punti base del fascio (8). Concludiamo:

Ad ogni fascio di cerchi non concentrici è coniugato un secondo fascio di cerchi, i quali segano ortogonalmente i cerchi del primo fascio; i due fasci sono così situati che l'asse radicale ed i punti base di ciascuno sono asse centrale e punti limite per l'altro fascio. Si suol dire talvolta che i due fasci costituiscono un *sistema doppio ortogonale di cerchi* [1]. Per ogni punto T del piano passa un cerchio del primo fascio ed uno del secondo; ed i due parametri k ed h relativi ai due cerchi nomi-

---

[1] Se il primo fascio si componesse di cerchi concentrici, il secondo dovrebbe riguardarsi costituito dalle infinite rette uscenti dal centro comune, ciascuna presa insieme alla retta all' infinito.

nati potrebbero riguardarsi come coordinate del punto T in un nuovo sistema di coordinate; si avrebbe così un esempio della nozione di sistema generale di coordinate esposta nel n.° 145.

160. Centro radicale di tre cerchi. — Relativamente al sistema di tre cerchi di un piano limitiamoci a dimostrare il teorema seguente:

I tre assi radicali di tre cerchi arbitrari (*non formanti fascio*), *presi a due a due, passano per uno stesso punto,* che ha uguale potenza rispetto ai tre cerchi, e dicesi *centro radicale* di questi. Infatti se

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0$$

sono le equazioni normali dei tre cerchi, i tre assi radicali hanno le equazioni

$$S - S' = 0, \quad S' - S'' = 0, \quad S'' - S = 0,$$

che sommate membro a membro danno una identità, donde segue il teorema (n.° 108).

Esercizi. I — 1) Scrivere la equazione di un cerchio il quale soddisfi ad uno dei seguenti gruppi di condizioni: *a*) ha per centro il punto $(2, 3)$ e passa per il punto $(-1, 6)$; *b*) passa per l'origine e per i punti $(2, 0)$, $(0, -3)$; *c*) passa per l'origine toccando ivi la retta $2x + 3y = 0$ e passa inoltre per il punto $(-1, 0)$; *d*) passa per i punti di ascisse 2, 3 sull' asse x e tocca l'asse y; *e*) passa per il punto $(2, 3)$ e tocca i due assi coordinati; *f*) tocca gli assi coordinati e la retta $2x + y - 5 = 0$. Quanti cerchi soddisfano alle condizioni imposte? Dei detti cerchi determinare il centro e le intersezioni incognite cogli assi; per il cerchio *f*) determinare il punto di contatto colla tangente indicata.

2) Determinare le intersezioni del cerchio *a*) dell' es. precedente colla retta $2x + 3y - 6 = 0$. Determinare le intersezioni dei due cerchi *a*), *b*).

3) Condurre la tangente al cerchio *a*) nel punto $(-1, 6)$; al cerchio *b*) in ciascuno dei tre punti che lo individuano.

4) Determinare le tangenti al cerchio $x^2 + y^2 = r^2$ che sono parallele ad una retta assegnata $ax + by = 0$. Dedurre di qua l'equazione in coordinate plückeriane dell' inviluppo delle tangenti al cerchio (equazione *tangenziale* del cerchio; cfr. n.° 151, es. 17)).

5) Condurre le tangenti al cerchio precedente da un punto (x_0, y_0) assegnato; qual' è l'equazione della retta (sempre reale) congiungente i due punti di contatto (*polare* del punto dato)? Qual'è l'angolo racchiuso dalle due tangenti?

6) Luogo del punto da cui un dato cerchio $x^2 + y^2 = r^2$ è visto sotto un angolo assegnato (racchiuso dalle due tangenti); in particolare, sotto un angolo retto.

7) Dato un cerchio mediante la sua equazione normale, condurre ad esso le tangenti dall' origine. Si tratti poi un caso numerico, supponendo ad es. che il cerchio abbia per centro il punto (3, 4) e per raggio 2.

8) Luogo dei punti medi delle corde di un cerchio passanti per un punto assegnato; dove cadono le intersezioni del luogo col cerchio dato? (Il problema può trattarsi in coordinate cartesiane o polari, collocando l'origine, o il polo, nel punto assegnato).

II — 9) Dati due cerchi mediante le loro equazioni normali, determinare l'angolo sotto cui si segano (cfr. n.° 157). Qual'è la condizione perchè i due cerchi si tocchino?

10) I cerchi di un fascio segano sopra una trasversale coppie di una involuzione; esistono quindi al più due cerchi in un fascio (o per due punti) i quali tocchino una data retta; come si costruiscono? Quale particolarità si presenta se la retta passa per uno dei punti base? (Nella trattazione analitica si può supporre che la retta sia l'asse x; per la trattazione sintetica cfr. n.° 89, es. 6)).

11) Dati tre cerchi $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$, non appartenenti ad un fascio, si considerino gli infiniti cerchi rappresentati dall' equazione $\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$, al variare dei parametri; essi formano un sistema, detto *rete*, contenente ogni fascio determinato da due cerchi della rete presi comunque. Per un punto generico del piano passano infiniti cerchi della rete formanti un fascio; per due punti generici del piano passa un solo cerchio della rete. Il centro radicale di tre cerchi della rete (n.° 160) non varia col variare dei cerchi stessi, e dicesi *centro radicale della rete*. Reti particolari sono costituite da tutti i cerchi che passano per un dato punto, oppure da tutti i cerchi che hanno i centri sopra una data retta.

12) Scelto come centro il centro radicale di una rete, e come raggio il segmento di tangente (reale o immaginario) compreso tra il centro ed un cerchio qualsiasi della rete, si descriva un cerchio; questo sega ortogonalmente ogni cerchio della rete, e dicesi *cerchio fondamentale della rete*. Esso è pure il luogo dei centri dei cerchi di raggio nullo appartenenti alla rete. Ed ogni rete può riguardarsi come l'insieme dei cerchi che segano ortogonalmente un dato cerchio. Note le equazioni di tre cerchi di una rete, si scriva l'equazione del cerchio fondamentale.

13) I cerchi di un fascio segano sopra un cerchio fisso coppie di punti formanti una involuzione (n.[i] 160, 87); quale ne è il polo? Segue che in un fascio (o per due punti) vi sono al più due cerchi che toccano un cerchio assegnato; come si costruiscono?

14) Dati due cerchi di centri (α, β), (α', β') e di raggi r, r', si determinino le tangenti ad essi comuni, ricorrendo ad es. alle equazioni tangenziali dei cerchi stessi (n.° 151, es. 17)). Le quattro tangenti, reali od immaginarie, determinano un quadrilatero di cui due vertici opposti, sempre reali, si trovano sulla congiungente i due centri ed hanno le coordinate $\dfrac{\alpha' r \pm \alpha r'}{r \pm r'}$, $\dfrac{\beta' r \pm \beta r'}{r \pm r'}$; essi diconsi *centri di similitudine* dei due cerchi, e precisamente centro *esterno* od *interno*, secondo che si prendono i segni

superiori o inferiori. Come si costruiscono i punti stessi partendo dai centri e dai raggi dei due cerchi?

15) Tre cerchi, presi a due a due, danno complessivamente sei centri di similitudine; si dimostri che i tre centri esterni sono allineati, e sono pure allineati due centri interni e il centro esterno relativo alla coppia rimanente di cerchi. I sei centri di similitudine sono adunque vertici di un quadrilatero completo, il cui trilatero diagonale ha i vertici nei centri dei cerchi.

III. *Inversione rispetto ad un cerchio.* (DANDELIN, PLÜCKER) — 16) Dato un cerchio di centro O e raggio r, ad ogni punto P del piano si faccia corrispondere quel punto P' della retta OP che rende $OP \cdot OP' = r^2$ (anche nel segno). La corrispondenza che così viene a stabilirsi fra P e P', dicesi *trasformazione per raggi rettori reciproci*, o *inversione*, rispetto al *centro d'inversione* O ed al *cerchio fondamentale* dato. La relazione fra P e P' è scambievole, e sopra ogni retta uscente da O le coppie di punti corrispondenti formano una involuzione, i cui punti doppi appartengono al cerchio d' inversione. La corrispondenza è biunivoca, fatta eccezione per P coincidente con O, al qual punto corrisponde ogni punto all' infinito; tale eccezione si può togliere convenzionalmente, riguardando, in questa teoria, l'insieme dei punti all' infinito come un unico elemento, il *punto* (∞, ∞) del piano. Ogni punto del cerchio d'inversione corrisponde a sè stesso. È facile stabilire le relazioni fra le coordinate polari o cartesiane di due punti corrispondenti P, P'. Assunto ad esempio il raggio del cerchio come unità, $r = 1$, e riferiti i punti $P(x, y)$, $P'(x', y')$ a due assi ortogonali uscenti da O, valgono le formole $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$. Queste possono riassumersi in una sola, se si introducono i numeri complessi $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $\bar{z}' = x' - iy'$; si ha infatti $\bar{z}' = \frac{1}{z}$.

17) Se il punto P descrive una curva, il punto inverso P' descrive una curva, *inversa* della prima. Si dimostri che l'inversa di una retta è un cerchio, il quale tocca in O la retta parallela alla data (a meno che la retta primitiva non passi per O, giacchè allora ha per inversa sè stessa). In generale, *ogni cerchio si muta per inversione in un cerchio*, o in una retta se il cerchio primitivo passa per O, eccezione questa che può ritenersi inclusa nell' enunciato, ove si riguardino le rette come casi particolari di cerchi.

18) Due cerchi inversi l'uno dell' altro segano negli stessi due punti (reali o immaginari) il cerchio fondamentale, e determinano un fascio a cui questo appartiene. Un centro di similitudine dei primi due cerchi coincide col centro d'inversione. Viceversa, due cerchi si corrispondono in una inversione che ha come fondamentale un cerchio del loro fascio, e come centro uno dei centri di similitudine dei cerchi dati.

19) Due rette formano lo stesso angolo che i cerchi ad esse corrispondenti. L'angolo di due cerchi è pure uguale all' angolo dei due cerchi inversi. Cerchi tangenti si mutano per inversione in cerchi tangenti. Ed

in generale, si può dimostrare che, se due curve si toccano in un punto (hanno ivi la stessa tangente), le curve inverse si toccano nel punto corrispondente. Da queste premesse segue il teorema:

20) *L'angolo di due curve* (n.° 157) *in un punto comune è uguale all'angolo delle curve inverse nel punto corrispondente*; in breve, *la inversione non altera gli angoli* (ne inverte però i segni); è, come suol dirsi, una trasformazione *isogonale* o *conforme*.

21) Ogni cerchio ortogonale al cerchio fondamentale vien mutato dall'inversione in sè stesso; e viceversa, un cerchio inverso di sè stesso, se non è il cerchio fondamentale, è ortogonale ad esso. È inverso di sè stesso, quindi ortogonale al cerchio fondamentale, ogni cerchio passante per due punti distinti corrispondentisi nell'inversione.

22) Un meccanismo per realizzare l'inversione è il seguente: s'immagini un parallelogramma equilatero, articolato nei vertici, del quale due vertici opposti A, C siano costretti a muoversi sopra un cerchio fisso di centro O e raggio ϱ; gli altri due vertici B, D si corrispondono allora in una inversione rispetto al centro O e ad un cerchio di raggio $r = \sqrt{\varrho^2 - l^2}$, essendo l il lato del parallelogramma. Segue che se B è costretto a descrivere un cerchio passante per O, D descriverà una retta. Un apparecchio, fondato su questo concetto, per trasformare il moto circolare in moto rettilineo è l'*inversore* di Peaucellier.

161. Forme delle curve del secondo ordine. — Abbandonando ora il cerchio, vogliamo mostrare sopra un esempio, utile per il seguito, come dall'equazione di una curva si possa dedurne la forma. Ci fermeremo sulle curve del secondo ordine, le cui equazioni vedremo in seguito potersi ridurre, mediante una conveniente scelta degli assi coordinati ortogonali, ad uno dei tipi seguenti (esclusi alcuni casi di secondario interesse):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

dove a, b, p sono costanti positive.

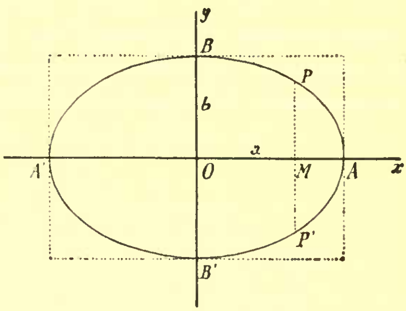
I. La curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

detta *ellisse*, sega l'asse x in due punti A, A', di cui si trovano le ascisse ponendo nella (1) $y = 0$; si ha così $x = \pm a$. Similmente si vede che la curva stessa sega l'asse y in due punti B, B' di ordinate $y = \pm b$. I punti A, A', B, B' diconsi *vertici*. Scritta ora la (1) sotto la forma

$$(1') \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

risulta che per aver valori reali di y, occorre attribuire ad x valori tali che $x^2 \leqq a^2$, ossia $|x| \leqq a$; si conclude che i punti reali della curva stanno tutti entro la striscia compresa fra le parallele ad y condotte per A ed A' (tangenti alla curva nei vertici A ed A'). Ed in modo analogo, risolvendo la (1) rispetto ad x, si vede che la curva è compresa fra le parallele ad x condotte per B e B' (tangenti in questi punti). La curva sta dunque nel rettangolo avente per mediane AA' e BB'.



Se ad x si attribuiscono valori positivi decrescenti da a a 0, la (1') dà per y valori aritmeticamente crescenti da 0 a b, ciascuno dei quali va preso col doppio segno; si hanno dunque due archi di curva, simmetrici rispetto all'asse x, che partono da A e vanno scostandosi dall'asse x, fino a raggiungere B e B' rispettivamente. Dall'altra parte dell'asse y si ritrova un arco di curva $BA'B'$ simmetrico all'arco già tracciato, rispetto all'asse y; infatti il secondo membro della (1') non muta cambiando x in $-x$. La curva è dunque chiusa, possiede due assi di simmetria ortogonali x, y, e per conseguenza un centro di simmetria nell'origine, *assi e centro* della ellisse.

Che la curva non abbia punti reali all'infinito risulta altresì dal fatto che, trasformata la (1) in coordinate omogenee scrivendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

e posto poi $z = 0$ per avere i punti all'infinito, si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

la quale fornisce per $\frac{x}{y}$ valori complessi.

Notiamo la ipotesi $a = b$; la equazione (1) diviene allora

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

e rappresenta un cerchio, caso particolare della ellisse.

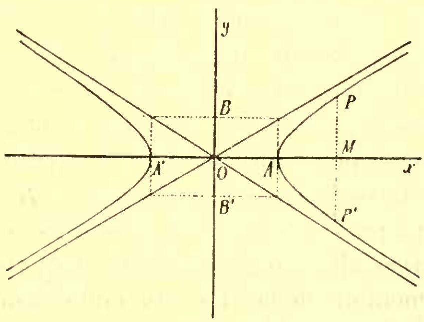
II. La curva

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

detta *iperbole*, sega pure l'asse x in due punti A, A' (*vertici*) di ascisse $\pm a$; ma non sega in punti reali l'asse y, perchè le ordinate delle corrispondenti intersezioni sono date da $\pm bi$. La (2), risolta rispetto ad y,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \tag{2'}$$

fa vedere che i punti reali della curva hanno ascisse tali che sia $|x| \geqq a$. Ne viene che la curva sta al di fuori della striscia compresa fra le parallele ad y condotte per A ed A' (tangenti alla iperbole nei vertici); la curva deve quindi comporsi di due rami distinti, situati nelle due regioni del piano esterne a quella striscia. Facendo crescere x da a a $+\infty$, (o decrescere x da $-a$ a $-\infty$), la (2′) fornisce per y valori che vanno crescendo aritmeticamente da 0 a $+\infty$, e devono essere presi col doppio segno. Ciascun ramo di curva, a partire dal punto A od A' rispettivamente, va scostandosi dall'asse x al disopra e al disotto, in modo simmetrico, e si estende all' infinito. I due rami sono d'altronde mutuamente simmetrici rispetto all' asse y. Anche la iperbole possiede adunque due assi di simmetria x, y ed il centro di simmetria O, *assi* e *centro* della iperbole.



Quanto ai punti all' infinito della curva, resa omogenea la (2)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

e fatto $z = 0$, si trova

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b},$$

e si conclude che la iperbole possiede due punti reali all'infinito, di coordinate $(a, b, 0)$, $(a, -b, 0)$, punti appartenenti alle rette rappresentate dall'ultima equazione presa coi due segni indicati. Quelle rette diconsi *asintoti*, e dividono il piano in quattro regioni, delle quali due opposte al vertice contengono i due rami della curva. Se $a = b$ gli asintoti sono perpendicolari, e la iperbole $x^2 - y^2 = a^2$ dicesi *equilatera*.

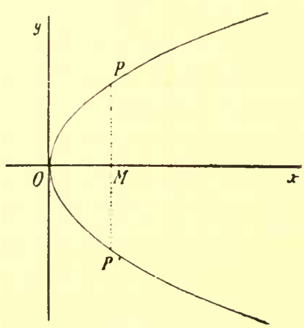
III. Finalmente la curva

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

detta *parabola*, passa per l'origine (*vertice*), sega ivi in due punti coincidenti l'asse y (tangente nel vertice), e non sega in altri punti propri l'asse x. La (3), scritta così

$$y = \pm \sqrt{2px}, \tag{3'}$$

indica che i punti reali della curva hanno tutti ascissa positiva (o nulla), essendo per ipotesi $p > 0$; sicchè la curva sta tutta da una stessa banda dell'asse y. Mentre x cresce da 0 a $+\infty$, il valore assoluto di y cresce pure da 0 a $+\infty$, e la curva va scostandosi sempre più dall'asse x al disopra e al disotto, simmetricamente, e si estende all'infinito. La retta all'infinito



$z = 0$ sega la curva (3), ossia (in coordinate omogenee) la

$$y^2 = 2pxz,$$

in due punti reali e coincidenti di coordinate $(1, 0, 0)$, quindi nel punto all'infinito dell'asse x.

La parabola si compone adunque di un solo ramo che si estende all'infinito, dove la curva ha un sol punto; e possiede un (unico) asse di simmetria, *asse* della parabola.

162. Alcune generazioni di curve del secondo ordine. —

a) *Il luogo di un punto le cui distanze da due punti fissi (fuochi) hanno una data somma, o una data differenza, è rispettivamente una ellisse, od una iperbole.*

Detti F, F' i due punti fissi, si scelga la loro congiungente come asse x, e la perpendicolare nel punto medio O di FF' come asse y; si ponga poi $FF' = 2c$, sicchè le coordinate di F, F' saranno $(c, 0)$, $(-c, 0)$, e si chiami $2a$ la somma o differenza costante di cui parla l'enunciato. Indicando con (x, y) le coordinate di un punto P che descrive il luogo, si osservi che le distanze PF, PF' sono espresse (in valore assoluto) da

$$d = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad d' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

e devono soddisfare alla condizione

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Per render questa razionale, trasportiamo il primo radicale nel secondo membro ed innalziamo a quadrato; avremo, fatte alcune semplificazioni,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

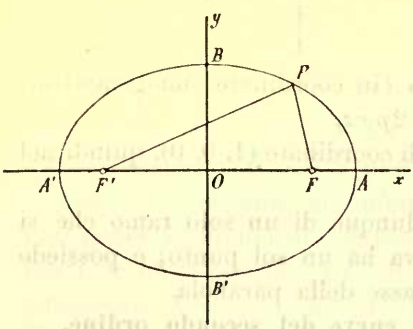
e di qua, mediante nuovo innalzamento a quadrato e riduzioni (nella ipotesi $a \neq c$),

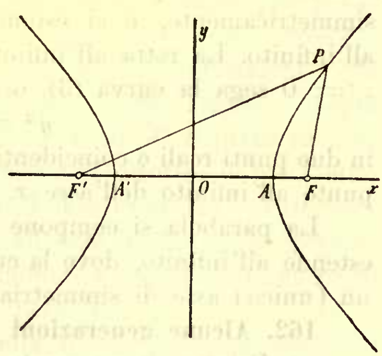
$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

È questa l'equazione del luogo, il quale è adunque del secondo ordine. Si badi però che, in conseguenza delle due elevazioni a quadrato, alla equazione (1) si arriva partendo da ciascuna delle quattro seguenti

(2) $d + d' = 2a, \quad d - d' = 2a, \quad -d + d' = 2a, \quad -d - d' = 2a,$

dove d e d' sono, come si disse, i valori assoluti dei due lati





PF, PF' del triangolo PFF'. Ora, se $a > c$ e quindi $2a > F'F$, delle quattro relazioni (2) solo la prima può sussistere (in virtù delle note disuguaglianze fra i lati di un triangolo); in questa ipotesi adunque la (1), che può scriversi così

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (b^2 = a^2 - c^2)$$

rappresenta una *ellisse* (n.° 161, I), luogo dei punti le cui distanze da F, F' hanno costante la *somma* (ed uguale a $2a$, che è il maggiore dei due assi della curva).

Se invece $a < c$, e quindi $2a < F'F$, delle (2) può sussistere la seconda o la terza; e la (1), che può scriversi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (b^2 = c^2 - a^2)$$

rappresenta una *iperbole* (n.° 161, II), luogo dei punti le cui distanze da F, F' hanno costante la *differenza* (ed uguale a $2a$, che è la lunghezza dell'asse secante la curva); questa differenza è positiva o negativa secondo il ramo d'iperbole che si considera.

b) *Il luogo di un punto le cui distanze da un punto fisso (fuoco) e da una retta fissa (direttrice) hanno un dato rapporto, è una ellisse, una parabola od una iperbole, secondo che quel rapporto è inferiore, uguale o superiore all'unità.*

Assunta la retta fissa come asse delle y, e la perpendicolare a questa dal punto fisso F come asse delle x, detta f l'ascissa di F ed e il rapporto dato, potremo scrivere la relazione a cui soddisfano le coordinate (x, y) di un punto P del luogo, sotto la forma

$$\frac{\pm\sqrt{(x - f)^2 + y^2}}{x} = e,$$

ossia

(3) $$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2fx + f^2 = 0.$$

Si tratta dunque di una curva del secondo ordine, la quale sega l'asse x nei due punti le cui ascisse sono date dall'equazione

$$(1 - e^2)x^2 - 2fx + f^2 = 0.$$

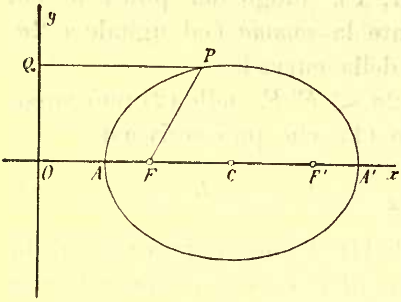
Se $e \neq 1$, quei punti sono propri, equidistanti dal punto $C\left(\frac{f}{1 - e^2}, 0\right)$. Assumendo questo come nuova origine, ed eseguendo quindi la traslazione di assi data dalle formole $x = X + \frac{f}{1 - e^2}$, $y = Y$, la (3) si muta nella

$$(1 - e^2)X^2 + Y^2 - \frac{f^2e^2}{1 - e^2} = 0,$$

ossia, ponendo $\frac{f^2e^2}{(1-e^2)^2} = a^2$,

$$(3') \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2(1-e^2)} = 1,$$

la quale rappresenta una *ellisse* se $e < 1$, od una *iperbole* se $e > 1$. La nuova origine C è centro della curva; la distanza CF è data da (1) $c_1 = f - \frac{f}{1-e^2} = -\frac{fe^2}{1-e^2}$.



Se invece $e = 1$, la curva (3) sega l'asse x nel solo punto proprio $\left(\frac{f}{2}, 0\right)$; trasportando ivi la origine colle formole $x = X + \frac{f}{2}$, $y = Y$, la (3) diventa

$$(3'') \qquad Y^2 = 2fX$$

rappresentante una parabola (n.° 161, III).

Esercizi. — 1) Si scrivano le equazioni polari della ellisse e della iperbole, assumendo come polo il centro. Quali sono i punti della curva che hanno dal centro distanze massime o minime?

2) Si trasformi l'equazione di una iperbole assumendo come nuovi assi coordinati gli asintoti. Si arriverà ad una equazione del tipo $XY = \text{cost.}$, la quale adunque rappresenta una iperbole. Si deduca dalla nuova equazione che un punto il quale, descrivendo la curva, vada allontanandosi dal centro, si avvicina sempre più ad un asintoto.

3) Una ellisse può rappresentarsi mediante le equazioni parametriche $x = a \cos\varphi$, $y = b \cos\varphi$; qual'è il significato geometrico del parametro φ? (Si descriva il cerchio concentrico all'ellisse che ha il raggio a, oppure b, ecc.).

4) Per la iperbole possono servire le equazioni parametriche $x = a \sec\varphi$, $y = b \operatorname{tg}\varphi$; qui il parametro ha un significato meno semplice.

5) Se un segmento di lunghezza costante scorre coi suoi estremi sopra due rette ortogonali fisse x, y, un punto qualsiasi del segmento descrive una ellisse, avente per assi x, y; su questa proprietà è fondato il *compasso ellittico* che descrive la curva con un moto continuo (Proclo, V secolo d. C.).

6) In un triangolo isoscele ORS è fisso un estremo O della base, la

---

(1) Nella ipotesi che la (3') e la (1) rappresentino una stessa curva, risulta dal confronto $c^2 = a^2e^2 = \frac{f^2e^4}{(1-e^2)^2} = c_1^2$, ossia $c = \pm c_1$, donde si ricava che le due denominazioni di fuoco adoperate negli enunciati *a*) e *b*) concordano.

retta x sopra cui questa si trova e la lunghezza $OR = RS$ del lato; quale luogo descrive un punto di RS, mentre S percorre x?

7) Il luogo dei centri dei cerchi che toccano due cerchi fissi, si compone di due iperboli aventi per fuochi i centri di questi cerchi.

8) Qual' è il luogo dei centri dei cerchi che toccano un dato cerchio ed una data retta?

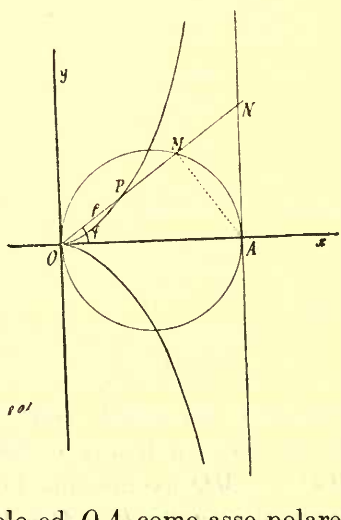
9) Luogo dei centri dei cerchi che intercettano su due rette x, y, ad es. ortogonali, corde di data lunghezza.

163. Alcune curve particolari algebriche o trascendenti. — In questo n.° parleremo di alcune particolari curve che, per le applicazioni a cui diedero luogo o per ragioni storiche, presentano qualche interesse; dovremo limitarci a brevi cenni, giacchè un esame più particolareggiato esigerebbe l'uso del Calcolo infinitesimale.

I. *Curve algebriche.*

Indichiamo anzitutto due curve che furono proposte dai geometri greci, cui vengono attribuite, per risolvere problemi di terzo grado (v. Appendice).

1) *Cissoide* (di Diocle, 2° secolo av. Cr.). Si parta da una circonferenza, della quale sia segnato un punto O e la tangente nel punto diametralmente opposto A; condotta per O una trasversale ad arbitrio, che seghi di nuovo la circonferenza in M e la tangente in N, si prenda sulla trasversale un segmento $OP = MN$ (in valore e segno). Il luogo descritto dal punto P, al variare della trasversale, è la cissoide.



È facile scrivere la equazione della curva in coordinate polari (ϱ, φ), prendendo O come polo ed OA come asse polare; detto a il diametro del cerchio, si trova

$$\varrho = a \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Da questa, colle note formole di trasformazione (n.° 123), si passa alla equazione in coordinate cartesiane ortogonali, essendo O l'origine, ed OA l'asse x:

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)x - ay^2 = 0.$$

La cissoide è dunque del *terzo ordine*, ed è simmetrica rispetto all'asse x, perchè la sua equazione non si altera mutando il segno ad y. L'equazione risolta rispetto ad y,

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a - x}},$$

fa vedere che la curva è tutta compresa nella striscia fra l'asse $y (x = 0)$ e la tangente in $A (x = a)$, e si estende all'infinito al disopra e al disotto dell'asse x, mentre va avvicinandosi sempre più alla detta tangente; questa è un *asintoto* della curva (cioè tangente in un punto improprio). I due rami di curva separati dall'asse x si ricongiungono in O, dove la curva ha un punto *singolare*. Questo presenta la particolarità che, dei tre punti in cui una retta generica $y = mx$ uscente da esso sega la curva, *due* cadono nel punto O stesso, mentre il terzo, di coordinate $x = \frac{am^2}{1 + m^2}$, $y = \frac{am^3}{1 + m^2}$ [1], è in generale distinto da O; perciò si suol dire che il punto O è *doppio* per la curva; ed è precisamente una *cuspide*, perchè una sola retta uscente da O, la $y = 0$, sega ivi la curva in tre punti coincidenti. Il lettore potrà cercare le intersezioni della cissoide colla circonferenza segnata, e dimostrerà facilmente che la curva sega la retta all'infinito nel punto all'infinito dell'asse y e nei punti ciclici.

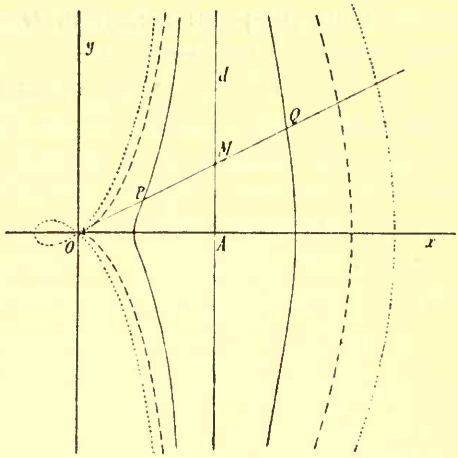
2) *Concoide* della retta (o di Nicomede, 2^0 secolo av. Cr.). Data una retta d (*base*) ed un punto O (*polo*) fuori della retta, sopra ogni trasversale condotta per O, e secante d in un punto M, si porti dall'una e dall'altra banda di M un segmento $MP = MQ$ avente una lunghezza l assegnata (*intervallo*); il luogo dei punti P e Q è la concoide. Assunto O come polo,

---

[1] Queste possono riguardarsi come *equazioni parametriche* della cissoide (cfr. n.° 147).

la OA perpendicolare a d come asse polare, e posto $OA = a$, l'equazione polare della concoide è (¹)

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l;$$



e l'equazione cartesiana ortogonale rispetto all'origine O, e all'asse x coincidente con OA,

$$(2) \quad (x^2 + y^2)(x - a)^2 - l^2x^2 = 0.$$

La curva è del *quarto ordine*, simmetrica rispetto all'asse x, e si compone di due rami, situati da bande opposte rispetto alla retta d; i due rami vengono rappresentati insieme dall'equazione cartesiana scritta in forma razionale, e quindi costituiscono una *unica* curva algebrica. La (2), posta sotto la forma

$$y^2 = x^2\left[\frac{l^2}{(x-a)^2} - 1\right] = \frac{x^2}{(x-a)^2}(l + x - a)(l - x + a),$$

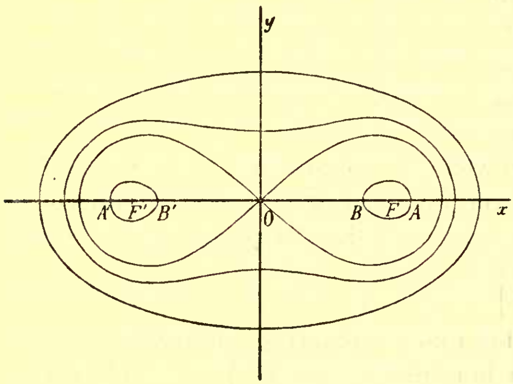
fa vedere che uno dei due rami è compreso fra le rette $x = a$, $x = a + l$, l'altro fra le rette $x = a - l$, $x = a$; inoltre che i due rami, mentre si allontanano dall'asse x, vanno sempre più avvicinandosi alla retta base $x = a$.

La origine soddisfa colle sue coordinate all'equazione (2) della curva, ed è anzi un *punto doppio*, perchè una retta generica uscente da O, $y = mx$, sega la curva in quattro punti di cui *due* cadono sempre in O, mentre gli altri due sono in generale distinti da O, ed hanno le ascisse $x = a \pm \frac{l}{\sqrt{1 + m^2}}$. Uno di questi viene però a coincidere con O se $l : \sqrt{1 + m^2} = a$, ossia se $m = \pm \frac{1}{a}\sqrt{l^2 - a^2}$. Ora ad un siffatto valore di m non corrisponde nessuna retta se $l < a$; accade allora che, men-

(¹) Si può anche assumere, innanzi ad l, sempre il segno $+$, pur di lasciar variare φ oltre ai limiti π e $-\pi$, interpretando i valori negativi del raggio vettore secondo una convenzione accennata nel n.° 123.

tre il punto O appartiene alla curva per la ragione analitica sopra esposta, nessun *ramo continuo* di curva passa per O; ed O dicesi *punto isolato*. Se invece $l = a$, allora soltanto la retta $y = 0$ ha tre punti riuniti in O comuni colla curva, ed O è una *cuspide*. Finalmente, se $l > a$, ciascuna delle due rette $y = \pm \frac{x}{a} \sqrt{l^2 - a^2}$ ha in comune colla curva tre punti riuniti in O, ed il punto O (per cui un ramo passa due volte) dicesi *nodo* della curva. I tre casi sono rappresentati, nella figura qui tracciata, rispettivamente con segno continuo, tratteggiato o punteggiato (¹).

3) *Curva di* CASSINI (astronomo del XVII secolo, il quale emise la ipotesi che la terra potesse descrivere una curva siffatta intorno al sole, anzichè una ellisse). La curva si definisce come luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi F, F' (*fuochi*) danno un prodotto costante. Assunta la retta FF' come asse x di un sistema ortogonale avente l' origine nel



punto medio O del segmento FF', posto $FF' = 2c$, e detto a^2 il prodotto costante, l'equazione della curva è

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2,$$

o, in forma razionale,

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4. \tag{3}$$

La curva è del *quarto ordine*, simmetrica rispetto agli assi x ed y.

L'equazione, risolta rispetto ad y^2, ci dà

$$y^2 = -(x^2 + c^2) \pm \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}, \tag{3'}$$

dove la quantità sotto al radicale è positiva, per x reale; però dei due valori di y^2 uno è sempre negativo e non dà punti reali; l'altro è positivo (o, al minimo, nullo) se

$$a^4 + 4c^2x^2 \geq (x^2 + c^2)^2,$$

(¹) Quali sono le intersezioni della curva colla retta all'infinito?

ossia se

$$a^2 \geqq | x^2 - c^2 |,$$

dove il secondo membro indica il valore assoluto della espressione scritta. Staccando i due casi $x^2 \gtrless c^2$, abbiamo in fine le limitazioni

$$c^2 - a^2 \leqq x^2 \leqq a^2 + c^2.$$

Di qua vediamo intanto che la curva è tutta compresa nella striscia definita dalle parallele ad y condotte per i punti A ed A' di ascisse $\pm \sqrt{a^2 + c^2}$.

Inoltre, se $a < c$, fra le parallele ad y condotte per i punti B e B' di ascisse $\pm \sqrt{c^2 - a^2}$, non si trovano punti reali della curva; e quindi la curva si spezza in due parti (ovali), di cui una è compresa fra le parallele uscenti da A e B, e l'altra è simmetrica a questa rispetto ad y.

Se $a = c$ la curva, di cui l'equazione può scriversi così

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0,$$

passa per l'origine, e si compone di un solo ramo annodato nell'origine; essa porta il nome di *lemniscata* di BERNOULLI (1694), ed ha una semplice equazione polare (rispetto al polo O e all'asse polare x):

$$\varrho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi,$$

la quale mostra che i due tratti annodantisi in O hanno ivi per tangenti le bisettrici dell'angolo degli assi (giacchè si ha $\varrho = 0$ quando $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$).

Finalmente se $a > c$ la curva si compone di un unico tratto ovale non passante per l'origine.

Risolvendo la (3) rispetto ad x^2, il lettore potrà vedere che la ordinata di un punto della *curva di* CASSINI è limitata dalla condizione $| y | \leqq \frac{a^2}{2c}$; al segno di uguaglianza corrispondono quattro punti di incontro della curva col cerchio di centro O e raggio OF, punti che sono reali finchè $a \leqq c\sqrt{2}$, ed hanno effettivamente l'ordinata massima (in valore assoluto). Ma se $a > c\sqrt{2}$, il cerchio non sega la curva in punti reali, ed il massimo valore dell' ordinata è raggiunto nei punti $x = 0$, $y = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$. Conviene adunque spezzare la ipotesi $a > c$, che conduce ad una ovale, nelle due ipotesi $a \leqq c\sqrt{2}$ (ovale schiacciata vicino all' asse y), $a > c\sqrt{2}$ (ovale propriamente detta).

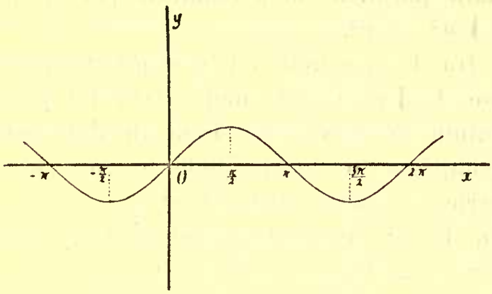
In ogni caso la curva di Cassini passa (doppiamente) per i punti ciclici del piano.

II. *Curve trascendenti.*

4) *Sinusoide* è la curva definita dall'equazione

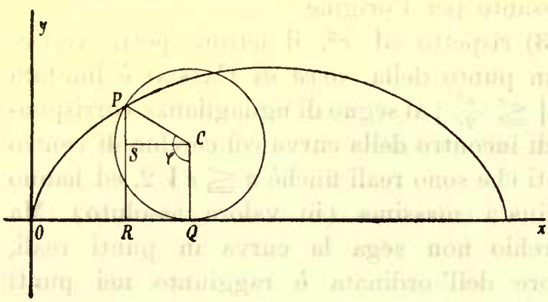
$$y = \operatorname{sen} x,$$

in coordinate ortogonali. Essa passa per l'origine, sega l'asse delle x in infiniti punti di ascissa $k\pi$, dove k è un intero qualsiasi positivo o negativo, e compie infinite oscillazioni fra le rette $y = +1$, $y = -1$, che raggiunge nei punti di ascissa $\frac{(4k+1)\pi}{2}$, $\frac{(4k+3)\pi}{2}$, rispettivamente.



Le curve $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$, dove a, b, c sono costanti, ed in particolare $y = \cos x$, non differiscono dalla sinusoide che per spostamenti dell'origine od eventuali cambiamenti nelle unità di lunghezza.

5) *Cicloide* è la curva generata da un punto di una circonferenza, la quale rotoli senza strisciare sopra una retta fissa (*base*). La cicloide si compone di infinite arcate, tutte uguali, le quali poggiano sulla base in punti che distano l'uno dall'altro di $2\pi r$, essendo r il raggio del cerchio generatore; ad una delle dette arcate si limita d'ordinario il nome di cicloide. Si assumano come origine O di un sistema ortogonale l'origine di un'arcata (posizione in cui il punto generatore della curva si porta nel punto di contatto fra il cerchio e la base), e come asse x la base. Indicando con C il centro del



cerchio mobile in un determinato istante, con P la posizione corrispondente del punto generatore, e con Q il punto in cui il cerchio stesso tocca la base, è facile esprimere le coordinate x, y di P in funzione dell'angolo $Q\widehat{C}P = \varphi$. Notando infatti che $OQ =$ arco $QP = r\varphi$, si hanno subito le equazioni parametriche della cicloide

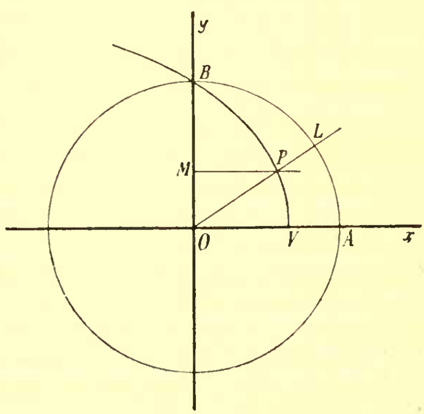
$$x = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi), \qquad y = r(1 - \cos \varphi),$$

ed, eliminando $\varphi (= \operatorname{arc\,cos} \frac{r-y}{r})$, la equazione cartesiana

$$x = r \operatorname{arc\,cos} \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

La cicloide è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi r$ che passa per il punto più elevato ($y = 2r$) della curva. La cicloide fu argomento di numerose ricerche nel secolo XVII, da parte di Galileo, Torricelli, Roberval, Pascal ed altri.

6) *Quadratrice* di Dinostrato (IV secolo av. Cr.). Siano OA, OB due raggi perpendicolari di un cerchio; due punti mobili L, M descrivono, con moto uniforme, rispettivamente la circonferenza ed il diametro OB, in guisa che essi, partendo nel tempo stesso da A ed O, giungano insieme in B; il luogo del punto P, in cui la parallela ad OA condotta per M sega la retta OL, è la quadratrice.



Detti ϱ e φ le coordinate polari di P rispetto al polo O e all'asse polare OA, posto $y = OM$, e preso come unità il raggio del cerchio, si ha la relazione

$$y = \frac{2\varphi}{\pi}.$$

Da questa si trae l'equazione polare della curva

$$\varrho = \frac{2}{\pi} \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi},$$

e l'equazione cartesiana (poichè $\varphi = \frac{\pi y}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$)

$$y = x \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}.$$

Posto $y = 0$, l'equazione darebbe un valore indeterminato per x. Tuttavia, come punto V di partenza della curva dall'asse x (*vertice*), è naturale assumere il punto il cui raggio vettore è dato da

$$\lim_{\varphi=0} \varrho = \frac{2}{\pi} \lim_{\varphi=0} \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{2}{\pi}.$$

Il segmento terzo proporzionale dopo OV ed OA vale adunque $\frac{\pi}{2}$, ed è uguale al quadrante di cerchio. Questa ed altre simili applicazioni della curva alla rettificazione e quadratura del cerchio giustificano il nome dato ad essa.

Esercizi I. — 1) Costruire per punti le curve rappresentate dalle seguenti equazioni in coordinate cartesiane ortogonali: $y = \frac{1}{2} x^2$ (*parabola*), $y = \frac{4}{x}$ (*iperbole*), $y = x^3$ (*parabola cubica*), $y^2 = x^3$ (*parabola semicubica*), $y = \operatorname{tg} x$ (*curva delle tangenti*).

2) Costruire per punti le curve rappresentate dalle seguenti equazioni in coordinate polari (a essendo una costante qualsiasi): $\varrho = a\varphi$ (*spirale di* ARCHIMEDE), $\varrho = \frac{a}{\varphi}$ (*spirale iperbolica*), $\varrho = a^{\varphi}$ (*spirale logaritmica*), $\varrho^2 = \varphi$ (*spirale parabolica* o di FERMAT), $\varrho = \cos \frac{\varphi}{2}$.

II. — 3) Date due rette ortogonali x, y uscenti da O ed un punto A sopra x, si conduca per A una trasversale variabile; detto M il punto in cui questa sega y, si portino sopra la trasversale, a partire da M, due segmenti MP, MQ uguali ad MO; i punti P e Q descrivono una curva del terzo ordine, detta *strofoide*, la quale ha un nodo in O. Si domandano le equazioni cartesiana e polare della curva.

4) Una generazione meccanica, dovuta a NEWTON, della cissoide (n.° 163,1)) e della strofoide si ottiene così. Siano x, y due rette ortogonali uscenti da O, ed A sia un punto di x; si immagini ora un angolo retto $A\widehat{P}R$, un cui lato AP di lunghezza variabile passi costantemente per A, mentre l'altro lato $PR = AO$, di lunghezza costante, scorra coll'estremo R lungo y; il vertice P dell'angolo descrive una strofoide, ed il punto medio di PR descrive una cissoide. Qual'è l'equazione del luogo descritto da un punto generico di PR?

5) La cissoide, la strofoide e la lemniscata (n.° 163, 3)) si ottengono pure da curve del secondo ordine mediante la trasformazione per inversione (n.° 160, es. 16)); precisamente, la prima curva è l'inversa di una parabola rispetto al vertice, la terza è l'inversa di una iperbole equilatera $x^2 - y^2 = a^2$ rispetto al centro, e la seconda è l'inversa della stessa iperbole rispetto ad un vertice. (Si adoperino le equazioni polari delle rispettive curve).

6) Un' altra generazione della lemniscata si ottiene partendo da un cerchio e da due sue tangenti ortogonali secantisi in un punto O, conducendo per O una trasversale variabile che seghi il cerchio in M, N, e prendendo su questa i due segmenti $OP = -OP' = MN$; il luogo dei punti P, P' è una lemniscata.

7) Se sopra una trasversale variabile, condotta per un punto fisso O di un cerchio, si portano, a partire dalla seconda intersezione M col cerchio, due segmenti $MP = -MP'$ uguali ad un segmento costante l, i punti P e P' descrivono una curva del quarto ordine, detta *concoide del cerchio* o *lumaca di* PASCAL. Nello studiare la forma della curva si distinguano i tre casi $l \lesseqgtr 2r$, essendo r il raggio del cerchio; per $l = 2r$ la curva dicesi pure *cardioide.*

8) La *lumaca di* PASCAL può pure definirsi come il luogo dei piedi delle perpendicolari calate da un punto fisso O sopra le tangenti ad un cerchio qualsiasi (*podaria* del punto rispetto al cerchio). La nuova costruzione si riconduce alla precedente, ove si consideri il cerchio che ha per diametro la distanza di O dal centro del cerchio nominato nell' ultima costruzione.

9) La curva inversa della *lumaca* di PASCAL rispetto al punto O è una curva di secondo ordine, di cui si dimostra che O è un fuoco (n.° 162). Invertendo questa osservazione si ha una terza definizione di quella curva.

10) Un segmento MN, di lunghezza costante a, scorre coi suoi estremi lungo due rette ortogonali x, y uscenti da O. Siano P e Q i piedi delle perpendicolari calate sul segmento da O e dal quarto vertice del rettangolo avente i lati OM, ON. I punti P e Q descrivono due curve del sesto ordine, delle quali la prima (che passa con quattro rami per O) dicesi *rosa a quattro foglie*, mentre la seconda (non passante per O) dicesi *astroide.* L'equazione di quest' ultima può porsi sotto la forma semplice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Si dimostra col Calcolo differenziale che l'astroide ha come tangente in ogni suo punto la relativa posizione della retta MN; partendo di qua, si scriva la equazione plückeriana dell' inviluppo (di quarta classe) delle tangenti all' astroide.

11) Un punto P il quale vari in modo che le sue distanze da due punti fissi A, B siano legate da una relazione lineare $aPA + bPB = c$ (a, b, c costanti), descrive una curva del quarto ordine detta *ovali di* CARTESIO.

12) Data una circonferenza con due diametri ortogonali x, y, da un estremo del primo si conduca una trasversale variabile che seghi y in M e il cerchio nuovamente in N, poi si conducano da M, N le parallele ad x, y rispettivamente; il luogo del punto d'incontro di queste è una curva del terzo ordine.

III. — 13) Se un cerchio di raggio r ruota senza strisciare sulla periferia di un cerchio fisso di raggio R, un punto di quello descrive una curva detta *epicicloide* od *ipocicloide*, secondo che i due cerchi si toccano esternamente od internamente. Misurando il rotolamento mediante la lunghezza $R\varphi = r\psi$ dell' arco variabile del cerchio fisso e del cerchio mobile che viene percorso dal punto di contatto, le equazioni parametriche della epicicloide si presentano sotto la forma

$$\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\varphi - r\cos(\varphi + \psi), \\ y &= (R + r)\,\mathrm{sen}\,\varphi - r\,\mathrm{sen}(\varphi + \psi), \end{aligned} \qquad (R\varphi = r\psi)$$

mentre le equazioni della ipocicloide si ottengono mutando il segno ad r. La curva è in generale trascendente; ma diviene algebrica quando $\frac{R}{r}$ è razionale. Così la ipocicloide, se $R = 2r$, si riduce ad un diametro del cerchio fisso (donde un mezzo per trasformare un movimento rotatorio in rettilineo); e se $R = 4r$, diviene un astroide (es. 10)). La epicicloide, se i due cerchi sono eguali, diviene una cardioide (es. 7)), ecc.

14) Intorno ad un cerchio fisso è avvolto un filo, un cui estremo cade nel punto P del cerchio; se ora si svolge il filo tenendolo teso pel detto estremo (in guisa che il tratto svolto PQ si mantenga sempre tangente al cerchio nel punto variabile Q), il punto P descrive una curva trascendente detta *sviluppante del cerchio.* Si ricerchino le equazioni parametriche, assumendo come parametro l'angolo al centro che insiste sull'arco di cerchio PQ.

Capitolo VI.

Proiettività tra forme di seconda specie.

164. Esempi di proiettività fra piani. — Nei capitoli precedenti abbiamo considerato *una sola* forma di seconda specie. Vogliamo ora mettere in relazione due tali forme mediante certe corrispondenze, che hanno la massima analogia colle proiettività tra forme di prima specie.

Siano ad es. π, π' due piani punteggiati. Possiamo in infiniti modi stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di π e i punti di π'. Ai punti situati sopra una retta generica di π corrisponderanno in π' punti costituenti un qualche luogo (continuo o no). La ipotesi più semplice che si possa fare è che ai punti di ogni retta di π corrispondano punti di una retta in π'. Diremo allora *proiettivi* i due piani punteggiati; e per *proiettività* fra due piani punteggiati intenderemo una corrispondenza tale, che ad ogni punto di ciascun piano corrisponda *un* punto dell' altro piano, ed a punti allineati corrispondano punti allineati.

Esistono certo corrispondenze siffatte. Tale è ad es. la corrispondenza (*prospettiva*) che si stabilisce fra due piani distinti

π, π', proiettando i punti dell'uno sull'altro da un centro arbitrario, che non appartenga nè a π, nè a π' (n°. 11). Tale è pure la corrispondenza di *uguaglianza* che passa fra due posizioni π e π' di uno stesso piano mobile, quando si riguardino come corrispondenti due punti di π e π', che siano posizioni assunte da uno stesso punto mobile, e si supponga inoltre che il movimento non deformi le figure.

* Finalmente un esempio di proiettività fra piani punteggiati (esempio che conduce, come vedremo, alla più generale proiettività fra i due piani) si ottiene nel seguente modo. Si fissi su ciascuno dei piani π, π' un sistema di coordinate proiettive omogenee (o casi particolari), ed al punto generico (x, y, z) di π si faccia corrispondere in π' il punto (x', y', z') definito dalle relazioni

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z$$

(o, trattandosi di coordinate omogenee, $x : y : z = x' : y' : z'$). È chiaro che la corrispondenza così stabilita è biunivoca, e muta i punti di una retta $ax + by + cz = 0$ di π nei punti della retta $ax' + by' + cz' = 0$ di π'; si tratta dunque di una proiettività. Si osserverà che i punti fondamentali e il punto unità di π hanno per corrispondenti i punti fondamentali ed il punto unità in π'.

165. Definizione di proiettività fra due forme di seconda specie. — Considerazioni analoghe alle precedenti possono applicarsi a due forme qualisivogliano di seconda specie, e conducono alla definizione seguente:

Due forme di seconda specie Σ, Σ' diconsi riferite proiettivamente (o *proiettive*), *quando ad ogni elemento* (*reale*) *di Σ o Σ' corrisponde un unico elemento* (*reale*) *di Σ' o Σ, ed inoltre agli elementi di ogni forma di prima specie contenuta in Σ o Σ', corrispondono in Σ' o Σ elementi di una forma di prima specie*; due tali forme di prima specie, come pure i loro sostegni, diconsi *corrispondenti* nella proiettività fra Σ e Σ'.

Stacchiamo i vari casi a cui la definizione dà luogo:

a) Se le forme di seconda specie sono due piani *punteggiati π, π'*, allora ad ogni punto A di π corrisponde un punto A' di π', ed ai punti di una retta b di π, corrispondono i punti di una retta b' (*corrispondente* a b) in π'. Se il punto A e la retta b si appartengono in π, il punto A' e la retta b' si apparterranno in π'; alle rette b di un fascio A in π, corrispondono dunque le rette b' di un fascio A' in π', ecc. In breve, ad ogni retta di π corrisponde una retta di π', e ad ogni fascio di rette in π un fascio di rette in π'; ma queste due condizioni definiscono una proiettività fra due piani *rigati* π e π'. Concludiamo che una proiettività fra due piani punteggiati trae con sè una proiettività fra i piani stessi, riguardati come rigati, e viceversa; è dunque opportuno riunire le due proiettività sotto un unico nome. Una siffatta duplice corrispondenza si suol chiamare *collineazione* (od *omografia*) fra i due piani π, π'; e si può definire direttamente dicendo, che essa fa corrispondere ad ogni punto e ad ogni retta di π, rispettivamente *un* punto ed *una* retta in π', colla condizione che se un punto ed una retta di π si appartengono, devono appartenersi gli elementi corrispondenti in π'. Gli esempi portati nel n.° 164 si riferiscono appunto a collineazioni.

b) Se la prima forma è un piano *punteggiato* π e la seconda un piano *rigato* π', ad ogni punto A di π corrisponde una retta a' di π', ed ai punti di una retta b di π corrispondono in π' le rette di un fascio di centro B' (punto *corrispondente* a b); se il punto A appartiene a b, la retta a' passerà per B', sicchè alle rette b' di un fascio A in π, corrispondono i punti B' di una punteggiata a' in π'. Nasce così una proiettività fra il piano π riguardato come *rigato*, e il piano π' riguardato come *punteggiato*. In tal caso si dice che i due piani sono legati da una *correlazione* (o *reciprocità*); intendendo, sotto questo nome, una corrispondenza fra due piani π, π', che muta ogni elemento (punto o retta) di π in un elemento di nome diverso (retta o punto) di π', e due elementi che si appartengono su π in due elementi che si appartengono su π'. Si vedranno in seguito esempi di correlazioni.

c) Una proiettività fra due stelle S, S' dicesi *collineazione*, se ad ogni retta o piano di S corrisponde rispettivamente una retta od un piano di S', (ed alle rette od ai piani di un fascio corrispondono rette o piani di un fascio). Una particolar collineazione (*prospettiva*) fra due stelle S, S' si ottiene riguardando come corrispondenti due elementi (rette o piani), che proiettino da S, S' uno stesso elemento (punto o retta) di un piano ausiliare.

d) Una proiettività fra due stelle S, S' dicesi invece *correlazione*, se alle rette e ai piani di S corrispondono rispettivamente i piani e le rette di S' (ed agli elementi di un fascio corrispondono gli elementi di un fascio). Una particolare correlazione (ortogonale) fra due stelle proprie S, S' si ottiene, come vedremo, facendo corrispondere ad ogni retta o piano per S, il piano o la retta perpendicolare condotta per S'.

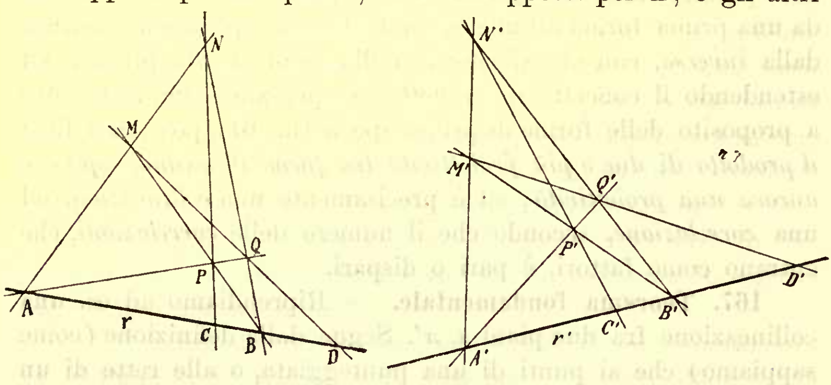
e), *f*) Finalmente tra un piano π ed una stella S' si può fissare una proiettività in modo che ai punti ed alle rette di π corrispondano rispettivamente le rette ed i piani di S' (*collineazione*), oppure corrispondano i piani e le rette di S' (*correlazione*).

Il concetto di corrispondenza proiettiva fra due piani fu stabilito in tutta la sua generalità dal Möbius (1827). Casi particolari erano noti anche prima; ad es., sotto l'aspetto metrico, l'uguaglianza, la similitudine, e l'affinità (considerata già da Eulero, 1748); e, sotto l'aspetto proiettivo, la relazione prospettiva fra due piani, la omologia e la polarità rispetto ad una conica (studiate principalmente dal Poncelet, 1822).

166. Prodotto di proiettività. — Segue subito dalla definizione che *due forme di seconda specie riferite proiettivamente ad una terza forma, sono riferite proiettivamente fra di loro.* In altre parole, chiamando *proiettività* l'operazione con cui si passa da una prima forma ad una seconda forma (operazione distinta dalla *inversa*, con cui si ritorna dalla seconda alla prima), ed estendendo il concetto di *prodotto* di operazioni, già introdotto a proposito delle forme di prima specie (n.° 61), possiamo dire: *il prodotto di due o più proiettività tra forme di seconda specie è ancora una proiettività*; ed è precisamente una *collineazione* od una *correlazione*, secondo che il numero delle *correlazioni*, che entrano come fattori, è pari o dispari.

167. Teorema fondamentale. — Riprendiamo ad es. una collineazione fra due piani π, π'. Segue dalla definizione (come sappiamo) che ai punti di una punteggiata, o alle rette di un fascio di π, corrispondono biunivocamente i punti di una punteggiata, o le rette di un fascio in π'; che ad un triangolo, quadrangolo ... di π corrisponde un triangolo, quadrangolo ... di π'. Ma da queste osservazioni ben poco si potrebbe dedurre, se non si riuscisse a scoprire di qual natura sia la corrispondenza biunivoca fra le due punteggiate od i due fasci sopra nominati. Sarà una corrispondenza proiettiva? Detti A, B, C, D quattro punti arbitrari di una retta r di π, ed A', B', C', D' i quattro punti corrispondenti di π', situati in una retta r', occorrerebbe (in base alla definizione di proiettività fra punteggiate, n.° 58) esaminare se risultino uguali i due doppi rapporti $(ABCD)$ ed $(A'B'C'D')$. Ma così procedendo si urterebbe in una difficoltà grave, dipendente dal fatto che il doppio rapporto fu da noi definito partendo da nozioni metriche, mentre la collineazione fra due piani fu stabilita in modo puramente grafico. La difficoltà si supera purchè si ricordi il teorema di Staudt (n.° 60), il quale afferma che una corrispondenza biunivoca fra due punteggiate è proiettiva, se muta ogni gruppo armonico dell'una in un gruppo armonico dell'altra; e si ricordi inoltre che il gruppo armonico può definirsi graficamente servendosi del quadrangolo completo (n.° 48). Siamo adunque condotti a chiederci se a quattro punti armonici A, B, C, D di r, corrispondano quattro punti armonici A', B', C', D' di r'.

Ora, se i punti A, B, C, D sono armonici, si può costruire (in infiniti modi) in π un quadrangolo completo, di cui due lati opposti passino per A, due lati opposti per B, e gli altri



due lati passino per C e D rispettivamente. Al detto quadrangolo la collineazione fa corrispondere su π' un quadrangolo completo, di cui due lati opposti passano per A', due lati opposti per B', un quinto lato per C' e il sesto per D'; ma allora A', B', C', D' sono quattro punti armonici, come si voleva dimostrare. E quindi si conclude che le due punteggiate r, r' sono riferite proiettivamente. Similmente si dimostra (servendosi di quadrilateri completi, anzichè di quadrangoli) che due fasci di rette corrispondenti di π e π' sono proiettivi, perchè a quattro rette armoniche dell'un fascio corrispondono sempre quattro rette armoniche dell'altro fascio.

La stessa dimostrazione, con semplici cambiamenti di parole, può estendersi ad ogni proiettività tra forme qualsiasi di seconda specie (alle quali d'altronde si potrebbero sempre sostituire, ove fossero stelle, dei piani sezioni). Si arriva così al seguente teorema fondamentale:

Due forme di prima specie, corrispondenti in una proiettività tra forme di seconda specie, sono riferite proiettivamente fra loro.

La detta proiettività tra forme di prima specie si dice *subordinata* su queste dalla proiettività primitiva tra le forme di seconda specie.

168. Determinazione e costruzione di una proiettività fra due forme di seconda specie. — Il teorema fondamentale conduce alla proposizione seguente:

Assegnate sopra due forme di seconda specie due quaterne di elementi A, B, C, D *ed* A′, B′, C′, D′, *tali che i quattro elementi di una stessa forma abbiano lo stesso nome, e di essi mai tre appartengano ad una forma di prima specie, rimane individuata una proiettività fra le due forme primitive, che fa corrispondere ad* A, B, C, D, *rispettivamente* A′, B′, C′, D′.

Questa proiettività si indica talvolta col simbolo

$$\begin{pmatrix} A\ B\ C\ D \\ A'B'C'D' \end{pmatrix}.$$

Noi dimostreremo in primo luogo che, ammessa l'esistenza di una siffatta proiettività, essa è unica; in secondo luogo, che quella proiettività certo esiste. E ragioneremo nella ipotesi che gli elementi nominati siano punti di due piani punteggiati π, π'; ma il ragionamento potrà estendersi a tutti gli altri casi con semplici cambiamenti di parole.

1) Ammettiamo che esista una proiettività, anzi una collineazione, fra i piani π, π', la quale muti i vertici di un quadrangolo $ABCD$ nei vertici di un quadrangolo $A'B'C'D'$, e

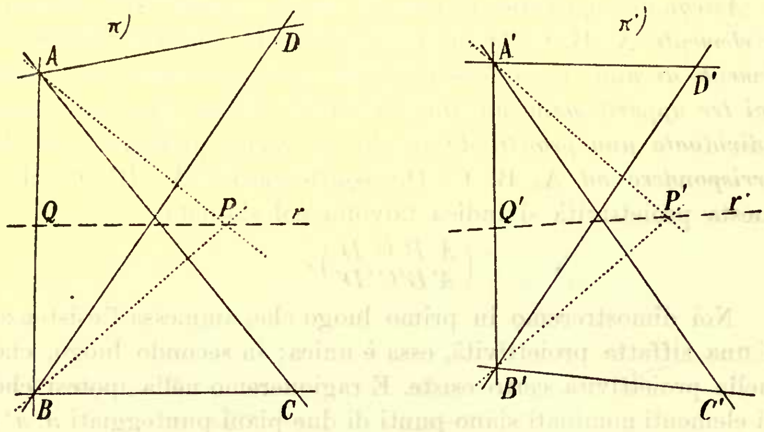
siano P, P' due punti corrispondenti arbitrari dei due piani. Posto ad es. che P non appartenga al lato AB, sussisteranno (n.° 167) le proiettività tra fasci

$$\alpha)\qquad A(BCDP) \;\overline{\wedge}\; A'(B'C'D'P'),$$
$$\beta)\qquad B(ACDP) \;\overline{\wedge}\; B'(A'C'D'P'),$$

le quali, dato P, *individuano* le rette $A'P'$, $B'P'$, e quindi il punto P' in π'. Non possono dunque esistere due diverse collineazioni soddisfacenti alle condizioni imposte.

2) Astraendo ora dalla ipotesi che esista la collineazione, si osservi che sempre le α) e β) fissano una *corrispondenza biunivoca* tra i piani π, π' descritti dai punti P, P', corrispondenza che muta i punti A, B, C, D nei punti A', B', C', D', ed ogni punto P, fuori di AB, in un punto P', fuori di $A'B'$ (e viceversa). Fanno, tutto al più, eccezione i punti generici di AB ed $A'B'$, giacchè le α), β) non determinano veramente una corrispondenza biunivoca tra queste due punteggiate; ma una tale eccezione verrà tolta tra poco.

La corrispondenza biunivoca fra π, π' è tale, che *se il punto* P *descrive una retta* r *in* π, *il punto* P' *descrive pure una retta* r' *in* π'. Ciò è evidente se r passa per A o per B, ed è



ad es. la AP, giacchè ad essa corrisponde la retta $A'P'$ in π'. Nella ipotesi opposta, si noti che, mentre P descrive la punteggiata r, le rette AP, BP generano due fasci proiettivi (anzi prospettivi)

$$A(BP\ldots) \;\overline{\wedge}\; B(AP\ldots).$$

Ma allora applicando ai due fasci, rispettivamente, le proiettività α), β), risultano proiettivi in π' i due fasci

$$A'(B'P'\ldots) \;\pi\; B'(A'P'\ldots),$$

anzi prospettivi perchè hanno unita la retta $A'B'$; quindi il luogo del punto P' è una retta r', che corrisponde alla retta r di π.

Ed ora siamo in grado di completare la corrispondenza biunivoca tra i due piani punteggiati π, π', facendo vedere come di ogni punto Q di AB, si possa assegnare *il* punto corrispondente Q' di $A'B'$. Condotte infatti per Q più rette r, $s\ldots$ in π, e dette r', $s'\ldots$ le rette corrispondenti in π', si osservi che queste passano per uno stesso punto Q' di $A'B'$; giacchè, se ad es. il punto $r's'$ non cadesse su $A'B'$, il punto corrispondente $Q \equiv rs$ non cadrebbe su AB, contro la ipotesi.

Con ciò risulta dimostrato che la corrispondenza stabilita fra i due piani π, π' mediante le α) e β), possiede tutti i caratteri della collineazione. E si ha pure il modo per *costruire* effettivamente una collineazione tra π, π', quando si conoscano due quadrangoli corrispondenti.

Costruzioni analoghe, a cui si arriva con semplici cambiamenti dei nomi degli elementi e delle forme, si applicano agli altri casi di proiettività tra forme di seconda specie.

* **Osservazione.** — Ricorrendo alle coordinate proiettive, si può dimostrare la parte 2) del teorema precedente con una considerazione immediata. Si stabiliscano infatti nei piani π, π' due sistemi di coordinate proiettive (x, y, z) e (x', y', z'), assumendo ABC e $A'B'C'$ come triangoli fondamentali, D e D' come punti unità. Allora le relazioni

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

(o $x' : y' : z' = x : y : z$, che è lo stesso, data l'omogeneità) rappresentano effettivamente una collineazione (n.° 164) tra π e π', che muta il quadrangolo $ABCD$ nel quadrangolo $A'B'C'D'$. Ed è questa, per ciò che dicemmo, l'unica collineazione soddisfacente allo scopo.

* **169. Una nuova interpretazione del teorema fondamentale.** — Val la pena di indicare come il teorema fondamentale permetta di caratterizzare, in un modo notevole, il sistema delle coordinate proiettive. Proponiamoci la seguente questione: *fra*

gli infiniti sistemi di coordinate applicabili al piano punteggiato, determinare il più generale, soddisfacente alla condizione di rappresentare le linee rette mediante equazioni lineari.

Supponiamo di conoscere un siffatto sistema di coordinate sopra un piano π; e per evitare difficoltà relative a punti eccezionali del piano, immaginiamo di aver rese omogenee le coordinate in questione, di guisa che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

1) ad ogni terna di numeri reali x, y, z, non tutti nulli, corrisponda *un* punto di π, e ad ogni punto di π corrispondano infinite terne x, y, z, composte però tutte di numeri proporzionali;

2) le coordinate dei punti di una qualsiasi retta di π soddisfino ad una equazione lineare ed omogenea, e viceversa.

Per decidere la natura del nostro sistema di coordinate, consideriamo un piano ausiliare π', sopra cui fissiamo un sistema di *coordinate proiettive* (x', y', z'). Poi stabiliamo fra π e π' la corrispondenza definita dalle relazioni

$$x : y : z = x' : y' : z'. \tag{1}$$

Questa corrispondenza è tale, che ad ogni punto $P'(x', y', z')$ di π' corrisponde *un* punto $P(x, y, z)$ di π, e viceversa; tale inoltre che ad ogni retta $ax' + by' + cz' = 0$ di π' corrisponde una retta $ax + by + cz = 0$ di π, e viceversa. Si tratta adunque (n° 165) di una *collineazione* fra i due piani π π'. Ma allora x, y, z sono le coordinate *proiettive* di P, rispetto a quei punti fondamentali ed unità di π che hanno le coordinate $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$. Dunque un sistema di coordinate che soddisfi alle condizioni 1) e 2), è necessariamente un sistema di coordinate proiettive. *Il sistema delle coordinate proiettive è il più generale sistema di coordinate del piano punteggiato, in cui le rette vengano rappresentate mediante equazioni lineari.*

Questa proposizione giustifica pienamente l'interesse che il detto sistema presenta [1].

Si può facilmente dedurre un corollario metrico. *Il solo sistema di coordinate (non omogenee) in cui ogni punto proprio è rappresentato, senza eccezione, da una coppia di numeri reali,*

---

[1] È pur da notarsi che, come l'ultimo teorema discende dal teorema fondamentale, così si potrebbe ricavare il teorema fondamentale da quello.

e viceversa, ed ogni retta propria da una equazione lineare, è il sistema cartesiano.

* **170. Equazioni della collineazione fra due piani.** — Se due forme di seconda specie sono riferite proiettivamente, e su ciascuna di quelle è fissato un sistema di coordinate proiettive, si può chiedere di qual tipo siano le relazioni che legano le coordinate di elementi corrispondenti nelle due forme. Noi tratteremo la questione nella ipotesi che si abbiano due piani collineari; ma estenderemo subito il risultato ad ogni altro caso.

Siano adunque π e π' i due piani collineari, e $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ siano due punti corrispondenti di essi, riferiti a due sistemi di coordinate proiettive, omogenee. Notiamo anzitutto che, se i punti fondamentali ed unità nei due piani si corrispondono, le relazioni richieste si riducono alle proporzioni (n.° 168, Oss.)

$$x' : y' : z' = x : y : z.$$

Se invece, come generalmente succede, i sistemi di riferimento sono indipendenti, potremo considerare in π' un sistema ausiliare di coordinate proiettive (x_1, y_1, z_1), che abbia i punti fondamentali ed unità nei punti corrispondenti ai punti fondamentali ed unità di π. Allora le coordinate ausiliari (x_1, y_1, z_1) di P' saranno uguali, o proporzionali, alle coordinate (x, y, z) di P; mentre per passare dalle coordinate ausiliari (x_1, y_1, z_1) alle coordinate primitive (x', y', z') dello stesso punto P', bisognerà ricorrere alle formole per la trasformazione delle coordinate proiettive, formole le quali (n.° 136) costituiscono una sostituzione lineare ed omogenea, a determinante non nullo, fra le terne di variabili x_1, y_1, z_1 ed x', y', z'. Si conclude in fine che:

Ogni collineazione fra due piani, sopra cui siano fissati sistemi di coordinate proiettive ed omogenee, è rappresentata da relazioni del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \rho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \rho z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

dove ρ è un coefficiente di proporzionalità qualsiasi, purchè non nullo, e le a_{ik} sono nove costanti, soggette alla condizione che il determinante di terzo ordine A, da esse formato, sia diverso da zero:

$$(2) \qquad A \neq 0.$$

E, più generalmente, si può dire che le (1), colla condizione (2), definiscono una proiettività fra due forme qualisivogliano di seconda specie, purchè si riguardino (x, y, z) ed (x', y', z') come coordinate proiettive degli elementi che si suppongono generare le due forme.

Osservazione. — Si noterà che le stesse equazioni (1) (formanti, come si disse, una sostituzione lineare ed omogenea fra due terne di variabili) danno luogo a due interpretazioni geometriche; giacchè esse servono a rappresentare, sia una trasformazione di coordinate proiettive in una unica forma di seconda specie, sia una proiettività fra due forme di seconda specie. La ragione di questa doppia interpretazione risulta dalle cose dette.

171. Ancora sulle equazioni della collineazione. — Dimostriamo ora direttamente, sebbene ciò risulti dal n.° precedente, che tre relazioni del tipo (dove ϱ è un fattore di proporzionalità, non nullo)

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

colla condizione che il determinante delle a_{ik} non sia nullo,

$$(2) \qquad A \neq 0,$$

definiscono sempre una collineazione fra i piani π e π' descritti rispettivamente dai punti P e P', aventi le coordinate omogenee (cartesiane o proiettive) (x, y, z) e (x', y', z').

Osserviamo in primo luogo che a tre numeri x, y, z, non tutti nulli, corrispondono, in virtù delle (1), tre numeri x', y', z', definiti a meno del fattore di proporzionalità ϱ, e certo non tutti nulli, giacchè per la (2) i tre trinomi a secondo membro delle (1) non possono annullarsi insieme. Dunque ad ogni punto P di π corrisponde *un* punto P' di π'.

Se poi risolviamo le (1) rispetto ad x, y, z (per il che basta sommare membro a membro le (1), dopo averle moltiplicate rispettivamente per i complementi algebrici degli elementi di una verticale nel determinante A), otteniamo le relazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} \sigma x = A_{11}x' + A_{21}y' + A_{31}z', \\ \sigma y = A_{12}x' + A_{22}y' + A_{32}z', \\ \sigma z = A_{13}x' + A_{23}y' + A_{33}z', \end{cases}$$

(dove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik}, e $\sigma = \frac{A}{\varrho}$ è un coefficiente di proporzionalità non nullo), le quali esprimono le coordinate di un punto P di π, in funzione delle coordinate del punto corrispondente P' di π', e fanno vedere che ad ogni punto di π' corrisponde *un* punto di π.

Resta ancora da dimostrare che ad ogni retta dell'un piano corrisponde una retta nell'altro piano. Consideriamo a tal fine una retta, ad es. sul piano π', la quale abbia l'equazione

$$r') \qquad u'x' + v'y' + w'z' = 0$$

(e quindi le coordinate u', v', w'). Mentre il punto (x', y', z') descrive questa retta, il punto corrispondente (x, y, z) descrive in π quel luogo, la cui equazione si ottiene sostituendo nella r'), al posto di x', y', z', i loro valori espressi dalle (1).

Ordinando, la nuova equazione si presenta sotto la forma

$$r) \quad \begin{aligned} &(a_{11}u' + a_{21}v' + a_{31}w')x + (a_{12}u' + a_{22}v' + a_{32}w')y \\ &\quad + (a_{13}u' + a_{23}v' + a_{33}w')z = 0, \end{aligned}$$

e rappresenta quindi una retta del piano π; anzi quella retta, le cui coordinate u, v, w sono espresse dalle

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tau u &= a_{11}u' + a_{21}v' + a_{31}w', \\ \tau v &= a_{12}u' + a_{22}v' + a_{32}w', \\ \tau w &= a_{13}u' + a_{23}v' + a_{33}w', \end{aligned} \right.$$

(dove τ è un coefficiente di proporzionalità non nullo). Ed in modo analogo si ricaverebbero le coordinate u', v', w' in funzione delle u, v, w.

Rimane così pienamente dimostrato che le relazioni (1) definiscono una collineazione fra i piani π, π'. Se poi si volesse far vedere che *ogni* collineazione tra i due piani può esser rappresentata a quel modo (evitando così di servirci, come si è fatto nel n.° 170, delle formole per la trasformazione delle coordinate proiettive, formole che verrebbero ridimostrate per questa nuova via indiretta), basterebbe provare che si possono calcolare i nove coefficienti a_{ik} delle (1) in guisa, che a quattro punti dati arbitrariamente in π corrispondano quattro punti dati arbitrariamente in π'. Trasformiamo a tal fine le (1) in coordinate non omogenee, il che si ottiene dividendo membro a membro la prima e seconda per la terza, e ponendo ad es. $\frac{x'}{z'} = X'$, $\frac{y'}{z'} = Y'$, $\frac{x}{z} = X$, $\frac{y}{z} = Y$ [1]:

$$(1') \quad \begin{cases} X' = \dfrac{a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}}{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}}, \\ Y' = \dfrac{a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}}{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}}. \end{cases}$$

Osserviamo poi che le (1′) dipendono effettivamente da *otto* costanti, giacchè si possono dividere i due termini di ciascuna frazione per uno stesso dei coefficienti che entrano a denominatore, purchè non sia nullo. Ora, ogniqualvolta si stabilisca che ad un punto dato (X, Y) di π debba corrispondere un punto dato (X', Y') in π', si ottengono *due* equazioni lineari fra quelle *otto* costanti (come risulta dalle (1′) liberate da frazioni). Se adunque fossero date quattro coppie di punti corrispondenti, avremmo otto equazioni lineari rispetto ad otto quantità, le quali, in tal guisa, sarebbero generalmente determinate.

Osservazione I. — Lo stesso procedimento col quale, data l'equazione di una retta in uno dei due piani, si ottiene l'equazione della retta corrispondente nell'altro, permette di trovare la equazione di quella curva dell'un piano, che corrisponde ad una curva assegnata nell'altro. Poichè tutto si riduce ad eseguire una sostituzione lineare sulle coordinate omogenee di punti, si conclude (cfr. n.° 141) che il grado di una equazione algebrica non si altera, e quindi *l'ordine di una curva algebrica non viene alterato da una collineazione*; o, brevemente, *l'ordine è un carattere proiettivo della curva.* In particolare: un cerchio, trasformato mediante una collineazione (od una proiezione), dà una curva di secondo ordine.

Dualmente, adoperando le formole (4), anzichè le (1), risulta che *la classe di un inviluppo algebrico di rette non viene alterata da una collineazione*, è un carattere proiettivo dell'inviluppo. Ed è pur chiaro che la tangente ad una curva, od il punto di contatto di un inviluppo, si mutano, mediante una collineazione, nella tangente, o nel punto di contatto, della curva o dell' inviluppo trasformato.

---

[1] È evidente l'analogia di queste formole colla (1′) del n.° 63 rappresentante la proiettività fra due forme di prima specie.

* **Osservazione II.** — Nell'esaminare la collineazione definita dalle (1) noi abbiamo escluso la ipotesi $A = 0$, giacchè questa conduce ad una collineazione *degenere*, che è priva di interesse per il seguito del corso. Basti qui notare che se $A = 0$, ma non sono nulli tutti i minori del secondo ordine di A (caratteristica $= 2$), esiste in π un punto *singolare* S a cui corrisponde *ogni* punto di π', mentre, per ogni altro punto di π, il punto corrispondente è determinato ed appartiene ad una certa retta *singolare* s' di π'. Viceversa, ad un punto generico di π' corrisponde solo il punto S in π, ma ad un punto di π' preso sopra s' corrispondono tutti i punti di una retta uscente da S.

Se poi sono nulli tutti i minori del secondo ordine di A (caratteristica $= 1$), allora ad un punto generico di π corrisponde un unico punto *singolare* S' di π'; mentre i punti di π che appartengono ad una retta *singolare* s, hanno il corrispondente indeterminato. Viceversa, ad un punto generico di π' corrisponde su π ogni punto della retta singolare s; ed al punto singolare S' di π' corrisponde ogni punto di π.

172. Particolarità metriche della collineazione fra due piani. — Volendo ora esaminare alcune particolarità metriche della collineazione fra piani π, π', supponiamo che le (x, y, z) e (x', y', z') figuranti nelle formole

$$(1) \quad \begin{cases} \varrho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

siano proprio coordinate *cartesiane* omogenee.

Alla retta all'infinito i'_∞, di equazione $z' = 0$, in π', corrisponde nel piano π una retta i, *retta limite* o *di fuga*, generalmente propria, di equazione $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$. Similmente, in virtù delle (3) del n.° 171, risulta che alla retta $j_\infty (z = 0)$ del piano π corrisponde in π' la *retta limite* $j'(A_{13}x' + A_{23}y' + A_{33}z' = 0)$, generalmente propria. È chiaro che due punteggiate r, r' corrispondenti, e quindi proiettive, dei piani π e π', avranno rispettivamente su i, j' i loro punti limite. Ed a rette parallele del piano π corrisponderanno in π' rette secantisi in un punto, generalmente proprio, di j'. Al solo punto improprio ij_∞ di π corrisponde un punto improprio $i'_\infty j'$ di π'; sicchè ogni retta di π parallela alla retta limite i, ha per corrispondente in π' una retta parallela alla retta limite j'; e le punteggiate sostenute dalle due rette sono simili.

173. Affinità. — Può accadere che alla retta all'infinito i_∞ di π corrisponda la retta all'infinito i'_∞ di π'. In tal caso la collineazione prende il nome di *affinità*, ed *affini* diconsi i due piani. Per stabilire un'affinità fra due piani π, π' basta, ai tre vertici (proprî), e quindi ai tre lati, di un triangolo in π, far corrispondere in π' i tre vertici (proprî), e quindi i tre lati, di un triangolo.

Nell' affinità, punteggiate corrispondenti r, r' sono simili, è dunque costante il *rapporto di similitudine* fra due segmenti corrispondenti qualisivogliano delle due punteggiate. A rette parallele di π corrispondono in π' rette parallele, ad un parallelogramma un parallelogramma. Quindi a due segmenti equipollenti (n.° 111) fra loro in π, corrispondono due segmenti equipollenti fra loro in π'; ossia il rapporto di similitudine relativo a due punteggiate corrispondenti r, r' non varia se r, e quindi r', si muove parallelamente a sè stessa; ma varia, generalmente, col variare della direzione di r o di r'.

Le equazioni dell' affinità fra due piani, in coordinate cartesiane omogenee (poichè a $z' = 0$ corrisponde $z = 0$), si riducono al seguente tipo

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,\\ \varrho y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,\\ \varrho z' &= a_{33}z, \end{aligned}\right.$$

ossia, dividendo membro a membro la prima e la seconda per la terza, e sostituendo ai rapporti $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ le coordinate *cartesiane ordinarie* x, y, x', y',

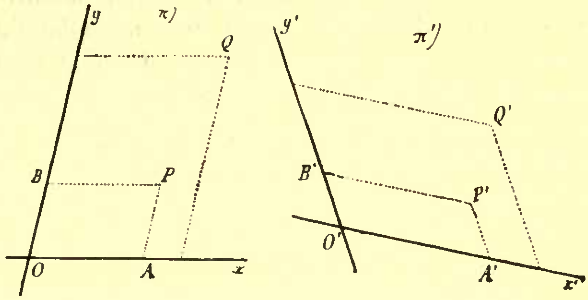
$$\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13},\\ y' &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}, \end{aligned}$$

dove $\alpha_{11} = \frac{a_{11}}{a_{33}}, \ldots$ sono sei costanti.

Le equazioni si semplificano ulteriormente se si suppone, come è lecito, che agli assi coordinati $x' = 0$, $y' = 0$ di π' corrispondano in π gli assi coordinati $x = 0$, $y = 0$; quelle formole infatti acquistano l'aspetto

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= mx,\\ y' &= ny, \end{aligned}\right.$$

dove m, n sono due costanti (rapporti di similitudine relativi alle rette corrispondenti x, x', od y, y', rispettivamente). Le (2) lasciano vedere che, per passare da ogni punto P di π al punto corrispondente P' di π', basta alterare l'ascissa di P in un rapporto costante e l'ordinata di P in un altro rapporto costante. Per assegnare i valori dei due rapporti, basterebbe dare, oltre alle due coppie x, x' ed y, y' di rette corrispondenti, due punti corrispondenti non appartenenti a quelle rette.



Un'altra proprietà notevole dell'affinità è la seguente:

È costante il rapporto fra le aree di figure corrispondenti in una affinità.

Basterà dimostrare il teorema per le aree triangolari, giacchè ogni poligono può spezzarsi in triangoli, e l'area di una figura curvilinea può riguardarsi come limite di aree di poligoni iscritti.

Siano dunque (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) i vertici di un triangolo in π; l'area sarà data (n.° 120) da

$$\Delta = \frac{\operatorname{sen} xy}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il triangolo corrispondente in π', se l'affinità è rappresentata dalle (2), avrà i vertici $(mx, ny) \ldots$, e quindi l'area

$$\Delta' = \frac{\operatorname{sen} x'y'}{2} \begin{vmatrix} mx & ny & 1 \\ mx_1 & ny_1 & 1 \\ mx_2 & ny_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Portando in evidenza i fattori m, n, e dividendo membro a membro l'ultima relazione per la precedente, troviamo

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = mn \frac{\operatorname{sen} x'y'}{\operatorname{sen} xy},$$

la quale dimostra il teorema. Se, in particolare, questo rapporto vale ± 1, l'affinità dicesi *equivalente*.

174. Similitudine ed uguaglianza. — Nell'affinità fra due piani π, π' le rispettive punteggiate all'infinito si corrispondono proiettivamente. Se questa proiettività è una uguaglianza (di guisa che l'angolo di due direzioni arbitrarie A_∞, B_∞ di π, sia uguale all'angolo delle direzioni corrispondenti A'_∞, B'_∞ di π'; n.° 64, II), allora *ogni angolo di* π *uguaglia l'angolo corrispondente di* π'; ogni triangolo di π è simile al triangolo corrispondente di π'; e quindi *il rapporto di due segmenti corrispondenti dei due piani* (ossia il rapporto di similitudine delle punteggiate a cui quei segmenti appartengono) *è costante*, indipendente dalla direzione dei segmenti stessi. Una siffatta collineazione, che non altera i valori degli angoli nè i rapporti fra segmenti, dicesi *similitudine* (1).

Riferiti due piani *simili* a due sistemi corrispondenti di assi coordinati ($\widehat{xy} = \widehat{x'y'}$), e assunta una stessa unità di misura per valutare i segmenti dell'uno e dell'altro piano, le equazioni della similitudine sono

$$x' = mx, \quad y' = my,$$

dove m è il rapporto costante fra due segmenti corrispondenti del secondo e del primo piano; il rapporto costante fra aree corrispondenti si riconosce essere m^2.

Se $m = 1$, i due piani sono *uguali*, e con un movimento nello spazio è possibile sovrapporre le figure dell'uno alle figure corrispondenti dell'altro.

* **Osservazione.** — L'uguaglianza fra due punteggiate improprie è, come sappiamo (n.° 89), una proiettività caratterizzata dal fatto che i punti ciclici delle due punteggiate si corrispondono. Segue che *la similitudine fra due piani può definirsi* come *una collineazione che muta i punti ciclici dell'un piano nei punti ciclici dell'altro.* È istruttivo ricavare da questa definizione le equazioni della similitudine. Riferiti i due piani a due sistemi di assi cartesiani ortogonali xy ed $x'y'$, comunque scelti, e notando che in virtù della definizione le rette all'in-

---

(1) Si osserverà che l'affinità fra due piani π, π', determinata coll'assegnare due triangoli simili corrispondenti (n.° 173), è una similitudine; di qua segue, in base ad una considerazione di geometria elementare, che fra due piani π, π' si può stabilire in due modi diversi una similitudine, per la quale a due punti assegnati di π corrispondano due punti assegnati di π'.

finito dei due piani si corrispondono, potremo anzitutto ricondurre le equazioni della collineazione al tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \rho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \rho z' = z, \end{cases}$$

(dove nell'ultima si è presa l'unità come coefficiente di z, il che è lecito disponendo del fattore di proporzionalità ρ). Ora ad uno dei punti ciclici $(i, 1, 0)$ di π corrisponde, per ipotesi, uno dei punti ciclici di π', che possiamo supporre (fissando convenientemente i versi positivi su x', y') sia ad es. il punto $(i, 1, 0)$; le (1) ci danno allora

$$\rho i = a_{11}i + a_{12}, \qquad \rho = a_{21}i + a_{22},$$

donde, eliminando ρ,

$$(a_{12} + a_{21}) + (a_{11} - a_{22})i = 0.$$

Similmente, tenendo conto del punto ciclico $(-i, 1, 0)$ dei due piani (o ricordando che le a sono numeri reali), si ha

$$(a_{12} + a_{21}) - (a_{11} - a_{22})i = 0,$$

e finalmente

$$a_{12} + a_{21} = 0, \qquad a_{11} - a_{22} = 0.$$

Posto ora nelle (1)

$$a_{11} = a_{22} = m, \qquad a_{21} = -a_{12} = n,$$

e passando a coordinate non omogenee, quelle equazioni assumono la forma

$$(2)\ \begin{cases} x' = mx - ny + a, \\ y' = nx + my + b, \end{cases} \qquad \left(\widehat{xy} = \widehat{x'y'} = \frac{\pi}{2}\right),$$

dove m, n, a, b sono quattro costanti.

Che le (2) rappresentino effettivamente una similitudine, si può anche verificare calcolando la distanza d di due punti (x, y), (x_0, y_0) di π, e paragonandola colla distanza d' dei punti corrispondenti (x', y'), (x'_0, y'_0) di π'. Si ha infatti (in virtù delle (2) applicate alle due coppie di punti corrispondenti)

$$x' - x'_0 = m(x - x_0) - n(y - y_0),$$
$$y' - y'_0 = n(x - x_0) + m(y - y_0),$$

e, quadrando e sommando,

$$d'^2 = (m^2 + n^2)d^2.$$

Dunque è costante ed uguale a $\sqrt{m^2 + n^2}$ il rapporto fra segmenti corrispondenti dei due piani.

I due piani sono uguali se $m^2 + n^2 = 1$; allora, essendo $-1 \leqq m \leqq 1$, esiste un angolo α tale, che $\cos\alpha = m$ e $\operatorname{sen}\alpha = n$. Con queste posizioni le (2) divengono (¹)

$$(3) \quad \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha + a, \\ y' = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha + b, \end{cases} \qquad \left(\widehat{xy} = \widehat{x'y'} = \frac{\pi}{2}\right)$$

formole che definiscono, sia una uguaglianza fra due piani π, π', sia una trasformazione di coordinate ortogonali sopra uno stesso piano (n.° 122).

Il doppio significato delle (3) era prevedibile. Infatti, se i due piani uguali sono riferiti ad assi coordinati corrispondentisi, allora le coordinate x', y' di un punto P' di π' sono rispettivamente uguali alle coordinate x, y del punto corrispondente P di π; se invece gli assi coordinati non si corrispondono, i valori x, y possono riguardarsi come coordinate di P' rispetto a due assi ausiliari di π', i quali corrispondono agli assi x, y di π, sicchè per giungere alle vere coordinate x', y' di P', occorre applicare alle coordinate ausiliari x, y le formole che servono a passare dai due assi ausiliari di π' agli assi dati x', y'.

175. Elementi uniti di una collineazione. — Vogliamo ora occuparci di questioni relative alle particolari posizioni che possono avere due forme dello stesso nome (in particolare due piani) collineari. Chiameremo al solito (n.° 66) *unito* un elemento comune alle due forme, e tale che, considerato in una di esse, abbia per corrispondente sè stesso nell'altra. E potremo supporre che le due forme abbiano sostegni distinti, oppure siano *sovrapposte*; notando che nell' ultima ipotesi ogni elemento del sostegno comune deve esser considerato due volte, secondo la forma a cui si vuole attribuire quell'elemento.

Dalla definizione di elemento unito segue che, se P e Q sono due punti uniti in una collineazione fra due piani, la retta PQ è pure unita; ed i punti dei due piani appartenenti a questa si corrispondono in una proiettività di cui P e Q sono punti uniti. In generale, nessun altro punto della retta è unito; ma

---

(¹) Se ai punti ciclici $(\pm i, 1, 0)$ di π si fossero fatti corrispondere ordinatamente i punti ciclici $(\mp i, 1, 0)$ di π', si sarebbero trovate, in luogo delle (3), formole che si possono ottener da queste cambiando il segno alla sola y.

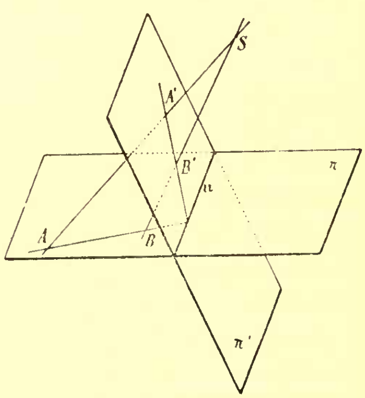
se vi è un terzo punto unito, ogni altro punto è unito (n.° 66), e la retta è *luogo di punti uniti.*

Questa osservazione (insieme alle analoghe) dà luogo all'enunciato: *se in una collineazione tra due forme di seconda specie sono uniti due elementi distinti, dello stesso nome, il sostegno della forma di prima specie a cui quegli elementi appartengono è pure unito. Se quest'ultima forma possiede un terzo elemento unito, ogni altro suo elemento è unito.*

176. Piani prospettivi. — Fu già notato (n.ⁱ 164, 11) che la proiezione di un piano π sopra un piano distinto π' da un centro S, non appartenente a nessuno dei due piani, dà luogo ad una particolare collineazione (prospettiva) fra i piani stessi, nella quale sono uniti tutti i punti della retta $\pi\pi'$. Viceversa:

Se in una collineazione fra due piani distinti sono uniti tutti i punti della retta comune intersezione, le congiungenti i punti dell'un piano coi punti corrispondenti dell'altro passano per un stesso punto, ed i due piani sono prospettivi rispetto a questo punto (centro di prospettiva) [1].

Siano π, π' i due piani, $u \equiv \pi\pi'$ la retta di punti uniti. Presi sopra π e fuori di u due punti arbitrari A, B, e detti A', B' i corrispondenti in π', osserviamo anzitutto che le rette corrispondenti AB, $A'B'$ segano u in uno stesso punto; infatti il punto d'incontro di AB con u, essendo unito, deve appartenere anche ad $A'B'$. Segue che le rette AA', BB', giacendo in un piano, si segano. Dunque le rette congiungenti i punti di π coi punti corrispondenti di π' si segano a due a due; e poichè non sono tutte in uno stesso piano, dovranno tutte passare per uno stesso punto (n.° 7, δ')), c. d. d.



---

[1] Si enunci e si dimostri il teorema analogo relativo alle stelle, che si deduce trasformando il nostro per dualità nello spazio.

Osservazione I. — Da questo teorema, analogo a quello del n.° 67 sulle punteggiate prospettive, si deduce similmente che *si può sempre passare dall'uno all'altro di due piani collineari, mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.* Lasciamo al lettore la cura di dimostrare tale proprietà, seguendo le traccie indicate nell'es. 14) dopo il n.° 185.

Osservazione II. — Facendo ruotare uno, π', di due piani prospettivi π, π' intorno alla comune intersezione u (senza che le figure di π' subiscano alterazioni), i piani rimangono collineari e conservano, come uniti, tutti i punti di u; quindi sono sempre prospettivi rispetto ad un centro, che si muove al variare di π' (cfr. n.° 185, es. 11)). Quando però, dopo una conveniente rotazione, il piano π' viene ad adagiarsi su π, non potremo più chiamare *prospettivi* i due piani, almeno nel senso sopra adottato; ma dovremo dire che i due piani sovrapposti sono ancora collineari, ed hanno come uniti tutti i punti di una retta u, senza che per questo siano uniti tutti gli altri punti dei piani stessi. A questo particolar caso di collineazione (*omologia*) conducono anche le considerazioni seguenti.

177. Forme collineari sovrapposte. — Occupiamoci ora degli elementi uniti di una collineazione tra forme sovrapposte. Vale il seguente teorema:

Se in una collineazione tra due forme di 2ª specie sovrapposte, sono uniti quattro elementi dello stesso nome, dei quali tre qualunque non appartengano ad una forma di prima specie, ogni altro elemento è unito, e la collineazione è una identità.

Infatti, se i quattro elementi uniti sono A, B, C, D, noi sappiamo (n.° 168) che esiste *una sola* collineazione, la quale fa corrispondere ad A, B, C, D, considerati come elementi della prima forma, gli elementi stessi nella seconda forma. Ma una collineazione soddisfacente a queste condizioni è evidentemente *l'identità*, che fa corrispondere ad ogni elemento l'elemento stesso: dunque la nostra collineazione è l'identità.

Se quindi dalle nostre ricerche escludiamo la identità, la ipotesi di quattro elementi omonimi uniti in una collineazione porta di conseguenza, che almeno tre fra quelli, ad es. A, B, C, appartengono ad una stessa forma di prima specie, la quale allora avrà unito ogni altro elemento (n.° 175). All'infuori di questa forma, vi sarà al più un ulteriore elemento unito dello stesso nome di A, B, C.

178. Omologia piana. — Limitandoci allo studio delle collineazioni (non identiche) fra due piani sovrapposti π, π', siamo così condotti ad esaminare le ipotesi che siano uniti tutti i punti di una retta, o tutte le rette di un fascio. Le due ipotesi non differiscono però, in virtù del seguente teorema:

Se in una collineazione, non identica, fra due piani sovrapposti sono uniti tutti i punti di una retta, sono pure unite tutte le rette di un fascio; e viceversa.

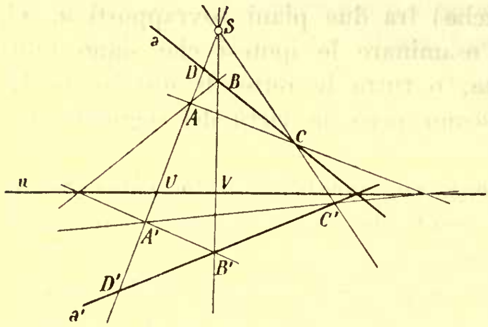
Basterà dimostrare la proposizione diretta, poichè da questa si deduce l'inversa per dualità piana. Sia u la retta luogo di punti uniti; presi due punti corrispondenti distinti A, A' nei piani π, π', e detto U il punto (unito) in cui la congiungente AA' sega u, si osservi che alla retta AU di π corrisponde in π' la retta $A'U$, cioè la retta stessa. È dunque unita ognuna delle infinite rette congiungenti punti omologhi distinti; e di qua segue (n.° 177), poichè la collineazione non è l'identità, che sono unite tutte le rette di un fascio, c. d. d.

Dicesi omologia (piana) una collineazione, non identica, fra due piani sovrapposti, in cui sono uniti tutti i punti di una retta e tutte le rette di un fascio; quella retta, luogo di punti uniti, dicesi *asse di omologia*, ed il punto, centro del fascio di rette unite, dicesi *centro di omologia* (¹).

In una omologia piana, di centro S ed asse u, sono uniti tutti i punti dell'asse u, ed il centro S (generalmente esterno ad u), perchè in S si segano due, anzi infinite rette unite (n.° 175); e sono unite tutte le rette per il centro S, e l'asse u. All'infuori di questi, l'omologia non possiede altri elementi uniti.

(¹) Che esistano collineazioni siffatte risulta per ora dalla Oss. II. del n.° 176, dove l'asse di omologia è la retta u, intorno a cui uno dei due piani prospettivi si è fatto ruotare; e dalle considerazioni del n.° 13, dove due piani sovrapposti π, π', proiezioni di uno stesso terzo piano π_0 da due centri distinti S, S', risultano omologici, essendo asse e centro di omologia le tracce di π_0 e di SS' sul piano $\pi \equiv \pi'$.

Ciò è chiaro intanto se S non appartiene ad u, giacchè una collineazione non identica, fuori di una retta di punti uniti, ha al più *un* punto unito; e dualmente (n.° 175). Se poi S cade in u, si osservi che, ammessa l'esistenza di un punto unito T fuori di u, ogni retta per T, congiungendo questo punto unito ad un punto unito di u, sarebbe unita, e quindi, fuori del fascio S di rette unite, esisterebbero effettivamente infinite rette unite, il che non è possibile.



179. Proprietà fondamentale e costruzione di una omologia. — Vale il teorema:

Punti distinti corrispondentisi in una omologia sono allineati col centro; rette distinte corrispondentisi si segano sull'asse.

Infatti, se A, A' sono due punti corrispondenti, ed a, a' due rette corrispondenti in una omologia di centro S ed asse u, la retta SA (uscente dal centro) è unita, e, poichè contiene A, conterrà pure A'; similmente il punto ua (dell'asse) è unito e, appartenendo ad a, apparterrà pure ad a'.

Una omologia è individuata quando di essa si conoscano il centro, l'asse e due elementi corrispondenti distinti, che possono essere o punti allineati col centro, o rette secantisi sull'asse.

Ammesso, in primo luogo, che esista una omologia avente il centro S, l'asse u, e due punti corrispondenti distinti A, A' allineati con S, vedremo che in un unico modo si può costruire quel punto B' di π', che corrisponde ad un dato punto B di π. Infatti B' deve appartenere alla retta SB, ed inoltre alla retta omologa di AB, che passa per A' e per la intersezione di AB con u. La costruzione indicata cadrebbe solo in difetto, quando quel punto, sia D ad es., di cui si chiede l'omologo D', fosse scelto sopra la retta SA; ma allora basterebbe servirsi in quella costruzione, anzichè della coppia AA', di una coppia ausiliare di punti corrispondenti BB', fuori della retta SA.

Se poi di una retta a si chiedesse la corrispondente a', basterebbe di un punto di a, costruire il corrispondente, e congiungerlo col punto ua.

Dimostriamo, in secondo luogo, che esiste effettivamente una omologia, di cui sono assegnati arbitrariamente il centro S, l'asse u e due punti corrispondenti A, A' allineati con S, ma non cadenti nè in S, nè sopra u. A tal fine costruiamo (il che può farsi in infiniti modi) due triangoli ABC, $A'B'C'$ omologici rispetto al centro S, ed all'asse u, aventi due vertici omologhi in A, A'; e consideriamo la collineazione ben determinata $\binom{SABC}{SA'B'C'}$ (n.° 168). Questa ha come unite tre rette SAA', SBB', SCC', e quindi le infinite rette del fascio S; è adunque una omologia di centro S, di cui l'asse, dovendo contenere i punti di incontro di rette omologhe $AB \cdot A'B'$, $AC \cdot A'C'$, $BC \cdot B'C'$, coincide con u. Esiste per conseguenza l'omologia in discorso.

180. Caratteristica di una omologia. — Sopra una retta uscente da S i punti arbitrari A, D, . . . , considerati nel piano π, e i loro corrispondenti nell'omologia A', D', . . . in π', formano due punteggiate proiettive sovrapposte, i cui punti uniti sono S e il punto U intersezione della retta con u; la proiettività è dunque iperbolica, o parabolica, secondochè S non cade o cade sopra u. Nel primo caso si ha (n.° 73, a))

$$(SUAA') = (SUDD') = \ldots;$$

ma lo stesso valore ha il doppio rapporto $(SVBB')$ formato dal punto S, da un altro punto V dell'asse e da due punti omologhi B, B' della retta SV, perchè l'ultima quaterna è prospettiva a ciascuna delle precedenti; quindi:

In una omologia è costante il doppio rapporto formato da due punti omologhi qualunque, dal centro e dalla intersezione della congiungente i due punti coll'asse; ed ha lo stesso valore il doppio rapporto formato da due rette omologhe, dalla congiungente la loro intersezione col centro, e dall'asse, perchè due rette omologhe a, a' segano una retta per S in due punti omologhi.

Questo doppio rapporto costante dicesi *caratteristica* od *invariante assoluto* della omologia. La caratteristica ha pure un significato per le omologie *speciali* aventi il centro sull'asse; ma per queste ha sempre il valore $+1$.

Una omologia non speciale è determinata e può costruirsi, quando sia dato il centro, l'asse e la caratteristica.

181. Omologia involutoria. — È notevole quella particolare omologia che ha la caratteristica — 1; in essa due punti omologhi qualisivogliano A, A' sono separati armonicamente dal centro e dall'asse di omologia; e le coppie di punti omologhi appartenenti ad una retta uscente dal centro formano una involuzione. I due punti A, A' si corrispondono in doppio modo o *involutoriamente*; vale a dire, agli elementi A, A' considerati in uno dei due piani π, π' legati dall'omologia, corrispondono nell'altro piano gli elementi A' ed A. Perciò questa omologia si suol chiamare *involutoria* (o *armonica*); ed è chiaro, inversamente, che una omologia dotata della proprietà involutoria ha la caratteristica — 1.

Ma è notevole il fatto che *le omologie armoniche sono le sole collineazioni involutorie fra due piani sovrapposti* (collineazioni non identiche, in cui gli elementi si corrispondono in doppio modo; od anche, collineazioni $\boldsymbol{K}$ coincidenti colle loro inverse, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{-1}$; collineazioni il cui quadrato è l'identità, $\boldsymbol{K}^2 = 1$; cfr. n.° 79). Se infatti a due punti distinti A, A' di un piano π corrispondono, nel piano collineare sovrapposto π', i punti A' ed A, la retta AA' corrisponde ad $A'A$, ed è quindi unita. Ma in tal caso la collineazione possiede infinite rette unite (congiungenti punti corrispondenti), ed è una omologia (n.° 178) involutoria.

Una collineazione fra due piani sovrapposti è involutoria (e quindi omologica), se possiede due coppie di punti i quali si corrispondano in doppio modo, e costituiscano un quadrangolo. Se infatti una collineazione $\boldsymbol{K}$ muta i punti A, A', B, B' in A', A, B', B, la collineazione $\boldsymbol{K}^2$ ha come uniti i quattro punti nominati, e quindi è una identità.

Segue, ad es., che se una collineazione fra due piani sovrapposti subordina una involuzione sopra ciascuna di due rette unite distinte, essa è una omologia involutoria col centro nella intersezione delle due rette.

182. Proprietà e particolarità metriche di una omologia. — Alla retta all'infinito di due piani π, π' sovrapposti, legati da una omologia, corrispondono rispettivamente in π' e π due rette

i' ed j, generalmente proprie, dette *rette limite* dei rispettivi piani; queste sono parallele all'asse (n.° 179). Inoltre, poichè nella proiettività che la omologia subordina sopra una retta qualsiasi uscente dal centro S, i punti uniti stanno in S e sopra u, mentre i punti limite appartengono ad j ed i', segue (n.° 73, b)) la seconda parte del teorema:

In una omologia le rette limite sono parallele all'asse; e la retta che biseca la striscia compresa fra quelle, dista ugualmente (*in versi opposti*) *dal centro e dall'asse.*

Le rette limite sono improprie se la retta all'infinito è unita; e ciò può accadere:

a) quando la retta all'infinito è asse di omologia;

b) quando il centro di omologia è improprio;

c) quando le due particolarità si presentano insieme.

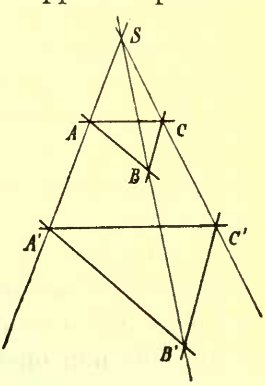
Esaminiamo staccatamente queste ipotesi.

a) Se l'asse di omologia è improprio, rette corrispondenti sono parallele, ed angoli corrispondenti sono uguali; i due piani π, π' sono *simili* (n.° 174), ma, per mettere in luce il parallelismo accennato, si suol dire che sono *simili e similmente posti*, od *omotetici*.

Se S è il centro (supposto proprio) di omologia, o di *omotetia*, ed A, A'; B, B'; ... sono coppie di punti corrispondenti, si ha

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \ldots = \text{caratteristica.}$$

Questo rapporto costante si chiama *rapporto di omotetia*, e la omotetia è *diretta* od *inversa*, secondo che il rapporto è positivo o negativo. Il rapporto tra le aree di figure corrispondenti (come sono ad es. i triangoli SAB, $SA'B'$) è il quadrato del rapporto di omotetia.



Preso S come origine di un sistema di coordinate cartesiane non omogenee, e dette (x, y), (x', y') le coordinate di due punti corrispondenti, la omotetia è rappresentata dalle equazioni

$$x' = mx, \quad y' = my,$$

dove $\frac{1}{m}$ è il rapporto di omotetia.

Se il rapporto vale -1, la omotetia è involutoria, e si riduce alla *simmetria rispetto ad un centro* S; figure corrispondenti sono *direttamente uguali*, ed una di esse può sovrapporsi all'altra mediante la rotazione di un angolo piatto intorno ad S.

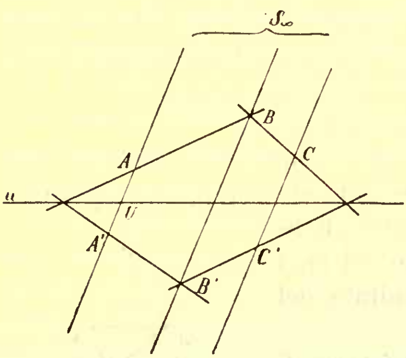
(Talvolta si chiama pure *omotetia* una collineazione fra due piani paralleli *distinti*, in cui rette corrispondenti sono parallele. In una siffatta collineazione, caso particolare di similitudine, sono evidentemente uniti i punti all'infinito comuni ai due piani; e quindi i piani stessi sono prospettivi (n.° 176)).

b) Se il centro di una omologia è improprio, S_∞, e l'asse proprio, u, la omologia prende il nome di *affinità omologica*. Le rette congiungenti punti omologhi sono tutte parallele fra loro; ed è costante il rapporto delle distanze di due punti omologhi A, A' dall'asse, perchè, detta U la intersezione di AA' coll'asse, la caratteristica, o *rapporto di affinità*, diviene

$$(AA'S_\infty U) = \frac{A'U}{AU}.$$

Lo stesso rapporto intercede fra le aree di figure corrispondenti.

Casi particolari si presentano quando la direzione di S_∞ è normale all'asse (*affinità ortogonale*), o quando il rapporto di affinità vale -1 (*affinità involutoria*, o *simmetria obliqua*). Se queste due condizioni si verificano insieme, si ha la *simmetria ortogonale rispetto ad un asse*; due figure corrispondenti sono inversamente uguali, e per ottenerne la sovrapposizione bisogna far ruotare di un diedro piatto il piano dell'una intorno all'asse.



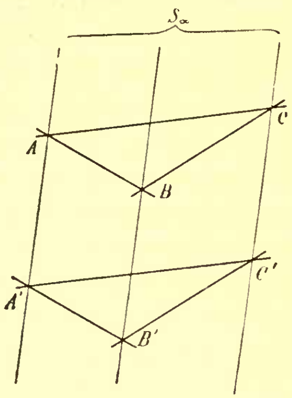
Un altro caso particolare (*affinità omologica speciale*) si presenta quando il centro S_∞ è il punto all'infinito dell'asse.

Per rappresentare analiticamente una affinità omologica non speciale, assumiamo l'asse di affinità come asse delle x, ed S_∞ come direzione dell'asse y, in un sistema di coordinate cartesiane non omogenee; troveremo subito le equazioni

$$x' = x, \quad y' = ny,$$

essendo n il rapporto di affinità sopra menzionato.

c) Se finalmente il centro di omologia S_∞ e l'asse sono impropri, tutte le rette AA', BB',... congiungenti punti corrispondenti sono parallele, e sono pure parallele rette corrispondenti, come AB ed $A'B'$. Segue che i segmenti AA', BB', ..., congiungenti punti omologhi, sono uguali, paralleli ed ugualmente diretti, o, brevemente, *equipollenti*. Ed *equipollenza* può chiamarsi questa speciale omologia. Figure corrispondenti AB... ed $A'B'$ ... sono uguali, e per sovrapporre la prima alla seconda basta effettuare una *traslazione* del piano su sè stesso nella direzione di S_∞ (movimento in cui tutti i punti descrivono segmenti equipollenti).



Riferendo il piano a coordinate cartesiane di cui l'asse x passi per S_∞, la equipollenza sarà rappresentata da relazioni del tipo

$$x' = x + a, \quad y' = y$$

(a costante); o, se gli assi coordinati sono scelti comunque,

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

(a e b costanti).

183. Determinazione analitica degli elementi uniti di una collineazione fra piani sovrapposti. — Riprendiamo in esame una collineazione qualsiasi fra due piani sovrapposti π, π', e proponiamoci di determinare gli elementi uniti, che, in generale, saranno in numero finito (al più tre punti e tre rette; n.° 175) [1]. Volendo condurre la ricerca per via analitica, riferiamo i due piani ad uno *stesso* sistema di coordinate omogenee (cartesiane o proiettive). Indichiamo con (x, y, z) le coordinate di un punto di π, con (x', y', z') le coordinate del punto corrispondente di π', e ricordiamo le equazioni della collineazione (n.° 171)

$$(1) \quad \begin{cases} \rho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \rho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \rho z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

---

[1] In modo analogo si procederebbe, quando si avesse una collineazione fra stelle sovrapposte.

Se x, y, z sono le coordinate di *un punto unito* nella collineazione, noi potremo nelle (1), al posto di x', y', z', scrivere x, y, z. Con ciò, portando tutti i termini in uno stesso membro, le (1) divengono

$$(2)\quad \begin{cases} (a_{11}-\varrho)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + (a_{22}-\varrho)y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}-\varrho)z = 0. \end{cases}$$

Si tratta di ricavare x, y, z (o meglio, i rapporti $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$) dalle equazioni (2), che contengono inoltre la incognita ausiliare ϱ. Cominciamo a calcolare quest'ultima, osservando che, se esiste un punto unito, le (2) devono coesistere per valori non tutti nulli di x, y, z (coordinate del punto), e quindi deve aversi

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione è di *terzo grado* in ϱ, e fornisce tre radici

$$(4)\quad \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3.$$

Sostituendo nelle (2), al posto di ϱ, uno dei valori trovati, ad es. ϱ_1, una fra le (2) diviene conseguenza delle rimanenti due, per l'annullarsi del determinante (3); e queste due (siano, per fissar le idee, le due prime), risolte rispetto ad x, y, z, forniscono le coordinate richieste di un punto unito:

$$(5)\quad x_1 : y_1 : z_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22}-\varrho_1 & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}-\varrho_1 \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho_1 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo poi, al posto di ϱ_1, successivamente ϱ_2 e ϱ_3, le (5) daranno le coordinate (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) di altri due punti uniti. Si conclude:

Una collineazione fra due piani sovrapposti ha, in generale, tre punti uniti, e (per dualità) *tre rette unite.*

Del resto la determinazione delle rette unite si potrebbe ricavare dalle relazioni (4) stabilite al n.° 171, le quali legano le coordinate (u, v, w), (u', v', w') di rette corrispondenti nei due piani. Ripetendo il ragionamento ora fatto, si trova che le coordinate di una retta unita devono soddisfare alle equazioni

$$(2') \quad \begin{cases} (a_{11} - \varrho)u + a_{21}v + a_{31}w = 0, \\ a_{12}u + (a_{22} - \varrho)v + a_{32}w = 0, \\ a_{13}u + a_{23}v + (a_{33} - \varrho)w = 0, \end{cases}$$

dove ϱ è radice della equazione che si ottiene da queste mediante eliminazione di u, v, w. Ora, poichè la equazione in ϱ coincide colla (3), si conclude che ciascuna radice ϱ della (3) fornisce, secondo che vien sostituita nelle (2) o nelle (2′), le coordinate di un punto o di una retta unita. E si vede così che ad ogni punto unito è associata una retta unita, e viceversa (1).

* Accenniamo ora brevemente ai vari casi che si possono presentare, in relazione colle radici dell'equazione cubica (3), a coefficienti reali.

1) Le tre radici ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 possono esser reali e distinte; in tal caso *i punti uniti* U_1, U_2, U_3 *sono reali e distinti, vertici di un triangolo, i cui lati* u_1, u_2, u_3 (opposti ad U_1, U_2, U_3) *sono le rette unite.* Scegliendo questo triangolo come fondamentale per il sistema di coordinate proiettive, è facile vedere che le equazioni della collineazione assumono la forma

$$(\alpha) \qquad \varrho x' = ax, \quad \varrho y' = by, \quad \varrho z' = cz$$

(essendo a, b, c tre costanti reali, non nulle, e distinte).

2) Delle tre radici, una ϱ_1 è reale, e due ϱ_2, ϱ_3 sono immaginarie coniugate; allora *un punto unito* U_1 *è reale, e gli altri due* U_2, U_3 *sono immaginari coniugati; una retta unita* $u_1 \equiv U_2U_3$ *è reale, non passante per* U_1, *e le altre due* $u_2 \equiv U_1U_3$, $u_3 \equiv U_1U_2$ *sono immaginarie coniugate.* Non si può in tal caso assu-

(1) Per quanto riguarda la mutua posizione dei punti e delle rette in questione, si può dimostrare che un punto ed una retta, corrispondenti a due diverse radici ϱ_1, ϱ_2 della (3), si appartengono. Si sostituiscano infatti nelle (2), al posto di ϱ, x, y, z, i simboli ϱ_1, x_1, y_1, z_1, ottenendo le relazioni che chiameremo (2_0), e si sostituiscano nelle (2′), al posto di ϱ, u, v, w, i simboli ϱ_2, u_2, v_2, w_2, ottenendo certe relazioni $(2_0')$; poi si moltiplichino le (2_0) per u_2, v_2, w_2 rispettivamente, e si sommino membro a membro. Risulterà, tenuto conto delle $(2_0')$,

$$(\varrho_2 - \varrho_1)(u_2 x_1 + v_2 y_1 + w_2 z_1) = 0,$$

la quale, poichè $\varrho_2 \neq \varrho_1$, dimostra che il punto unito (x_1, y_1, z_1) appartiene alla retta unita (u_2, v_2, w_2).

mere il triangolo unito come fondamentale, quando si voglia far uso di coordinate reali per rappresentare punti reali. Ma si può ad es. assumere il sistema di coordinate in guisa, che i tre punti uniti U_1, U_2, U_3 abbiano rispettivamente le coordinate $(0, 0, 1)$, $(i, 1, 0)$, $(-i, 1, 0)$, (per modo che U_1 sia un punto fondamentale, ed u_1 una retta fondamentale); si dimostra che, con questa scelta, le equazioni della collineazione assumono la forma

$$(\beta) \qquad \rho x' = ax - by, \quad \rho y' = bx + ay, \quad \rho z' = cz$$

(dove a, b, c sono tre costanti reali, di cui le due ultime almeno diverse da zero).

3) Delle tre radici ρ_1, ρ_2, ρ_3, due sono reali e coincidenti $\rho_1 = \rho_2$, la rimanente ρ_3 è reale e distinta da queste; allora *dei tre punti uniti* (certo reali) *due coincidono in* $\mathrm{U}_1 \equiv \mathrm{U}_2$, *mentre* U_3 *è distinto da questi, e delle tre rette unite due* $\mathrm{u}_1 \equiv \mathrm{U}_2\mathrm{U}_3$, $\mathrm{u}_2 \equiv \mathrm{U}_1\mathrm{U}_3$ *coincidono, mentre l'altra* u_3 *è distinta da queste e passa per i punti uniti coincidenti.* Scelto in U_3 il punto fondamentale $(1, 0, 0)$, in $U_1 \equiv U_2$ il punto $(0, 0, 1)$, e in un punto arbitrario di u_3 il terzo punto fondamentale $(0, 1, 0)$ di un sistema di coordinate proiettive, le equazioni della collineazione si presentano sotto la forma

$$(\gamma) \qquad \rho x' = ax, \quad \rho y' = by, \quad \rho z' = cy + bz$$

(dove a, b, c sono tre costanti reali, non nulle, di cui le due prime si suppongono distinte fra loro).

4) Le tre radici ρ_1, ρ_2, ρ_3 sono reali e coincidenti; allora *i tre punti uniti coincidono in un punto reale* $\mathrm{U}_1 \equiv \mathrm{U}_2 \equiv \mathrm{U}_3$, *e le tre rette unite coincidono in una retta reale* $\mathrm{u}_1 \equiv \mathrm{u}_2 \equiv \mathrm{u}_3$ *passante per l'unico punto unito.*

Scelto l'unico punto unito come punto fondamentale $(0, 0, 1)$ e l'unica retta unita come retta fondamentale $x = 0$, le equazioni della collineazione assumono la forma

$$(\delta) \qquad \rho x' = ax, \quad \rho y' = bx + ay, \quad \rho z' = cx + dy + az,$$

(dove a, b, c, d sono quattro costanti reali, di cui a, b, d almeno sono diverse da zero).

5) Può anche succedere che una radice della equazione (3), ad es. ρ_1, annulli tutti i minori del secondo ordine del determinante (3), nel qual caso ρ_1 è radice almeno doppia (e quindi

reale), $\varrho_1 = \varrho_2$, giacchè essa annulla pure la prima derivata del polinomio (3) (la quale è data dalla somma dei complementi algebrici relativi agli elementi della diagonale principale). Sostituendo ϱ_1 al posto di ϱ nelle (2), due di quelle equazioni divengono conseguenza della rimanente, di guisa che ogni sistema di valori (x, y, z) soddisfacente questa, soddisfa certo le altre due, e fornisce quindi un punto unito. *Esistono* adunque *infiniti punti uniti appartenenti ad una retta*, rappresentata da quella equazione. E dualmente *esistono* (come risulta sostituendo ϱ_1 al posto di ϱ nelle (2')) *infinite rette unite appartenenti ad un fascio.* Il centro del fascio è pure un punto unito, che si riconosce corrispondere alla terza radice ϱ_3, pure reale, della equazione (3). In questo caso adunque la collineazione è una *omologia* (n.° 178), e precisamente una omologia generale (col centro fuori dell'asse) se $\varrho_3 \neq \varrho_1$, speciale se $\varrho_3 = \varrho_1 = \varrho_2$.

Assumendo il centro di omologia come punto (0, 0, 1) di un sistema di coordinate proiettive, e ricordando che le rette uscenti da esso sono unite, e quindi, in particolare, alle rette $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$ del primo piano corrispondono le rette $x' = 0$, $y' = 0$, $x' + y' = 0$ del secondo piano, si trova che le equazioni della omologia sono del tipo

$$\varrho x' = a_{11}x, \quad \varrho y' = a_{11}y, \quad \varrho z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Formando con questi coefficienti l'equazione analoga alla (3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} - \varrho & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

risulta che $\varrho_1 = \varrho_2 = a_{11}$ è radice doppia ed annulla tutti i minori del secondo ordine; ad essa corrisponde l'asse di omologia

$$a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - a_{11})z = 0.$$

All'altra radice $\varrho_3 = a_{33}$ corrisponde il centro (0, 0, 1).

Se $a_{11} \neq a_{33}$, e quindi il centro non cade sull'asse, possiamo ancora assumer l'asse come retta $z = 0$, il che equivale a suppor nulli i coefficienti a_{31}, a_{32}. Vediamo così che le equazioni di una *omologia generale*, avente per centro il punto (0, 0, 1) e per asse la retta $z = 0$, sono del tipo

$$(\varepsilon) \qquad \varrho x' = ax, \quad \varrho y' = ay, \quad \varrho z' = bz,$$

dove a e b sono costanti diverse tra loro e non nulle; $\frac{b}{a}$ è la caratteristica (n.° 180).

Se invece $a_{11} = a_{33}$ (e quindi $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$), il centro cade sull'asse; assunto questo come retta $y = 0$ (e posto dunque $a_{31} = 0$, $a_{33} = a_{11}$), le equazioni della *omologia speciale* si presentano sotto la forma

$$(\varepsilon') \qquad \varrho x' = ax, \quad \varrho y' = ay, \quad \varrho z' = by + az,$$

dove a e b sono costanti non nulle.

* **184. Costruzione dei punti uniti di una collineazione fra piani sovrapposti.** — La costruzione dei punti uniti di una collineazione generale fra piani sovrapposti, dipendendo da una equazione di terzo grado, generalmente irriducibile, non può eseguirsi col compasso e colla riga (cfr. Appendice). Essa porta a determinare le residue intersezioni di due curve del secondo ordine aventi un punto noto comune. Infatti la collineazione che muta il piano π nel piano π', faccia corrispondere ad un punto arbitrario P di π il punto P', ed a P' (considerato in π) il punto P''. Allora il fascio di rette di centro P sarà riferito proiettivamente al fascio di centro P', e questo al fascio di centro P''. I luoghi delle intersezioni di rette corrispondenti nelle due coppie di fasci P, P' e P', P'' saranno due curve del secondo ordine passanti, la prima per P e P', la seconda per P' e P'' (n.° 148). Le due curve, all'infuori di P', hanno tre intersezioni, come si vedrà in seguito. Sia U una di queste, e sia U' il punto (di π') corrispondente ad U nella nostra collineazione. Poichè U appartiene alle due rette PU, $P'U$, dovrà U' appartenere alle rette che a quelle corrispondono cioè a $P'U$ e $P''U$, dovrà quindi coincidere con U. Dunque U sarà un punto unito.

Quando fosse già noto un punto unito U_1, la determinazione degli altri elementi uniti si potrebbe eseguire con mezzi elementari. Infatti la collineazione fa corrispondere ad ogni retta di π uscente da U_1, una retta di π' uscente dallo stesso punto; viene così a stabilirsi una proiettività fra due fasci di centro U_1, di cui le rette unite u_2 e u_3 sono pure unite per la collineazione. La terza retta unita u_1 (associata al punto unito U_1) si dimostra poi esser il luogo del centro di prospettiva di tutte le coppie di punteggiate proiettive, anzi prospettive, che hanno per sostegni due rette uscenti da U_1, corrispondentisi nella collineazione.

*** 185. Uguaglianza fra piani sovrapposti.** — Per fare una applicazione di vari risultati precedenti, cerchiamo gli elementi uniti in una uguaglianza tra piani sovrapposti.

Sappiamo già (n.° 174, Oss.) che in una uguaglianza (o similitudine) fra due piani π e π', i punti ciclici dell' un piano corrispondono ai punti ciclici dell' altro. Ma se i due piani sono sovrapposti, può darsi che ciascun punto ciclico corrisponda a sè stesso, o che ciascuno corrisponda all' altro. Nel primo caso la uguaglianza (o similitudine) dicesi *diretta*; le punteggiate sovrapposte all' infinito sono direttamente uguali (n.° 89), e direttamente uguali sono fasci corrispondenti nei due piani. Nel secondo caso la uguaglianza (o similitudine) dicesi *inversa*; le punteggiate all' infinito sono inversamente uguali, ed inversamente uguali sono fasci corrispondenti. Limitandoci alla ipotesi della uguaglianza, nell' uno e nell' altro caso segmenti corrispondenti sono uguali.

a) Nella *uguaglianza diretta*, oltre ai punti ciclici, immaginari, che sono uniti, vi sarà almeno un punto unito reale U (n.° 183). Se U è proprio, ed $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ sono figure corrispondenti dei due piani π, π', i due fasci corrispondenti $U(ABC\ldots)$, $U(A'B'C'\ldots)$ risulteranno direttamente uguali, e si avrà pure $UA = UA'$, ecc. Ma allora, facendo ruotare il piano π intorno ad U di un angolo conveniente, si potrà portare ogni retta del primo fascio a coincidere colla retta corrispondente del secondo fascio, in guisa inoltre che A venga a coincidere con A'. Dopo questa operazione il piano π ruotato, ed il piano π' hanno come unite tutte le rette per U, tutti i punti impropri, ed inoltre il punto A; dunque hanno unito ogni elemento.

Se invece l' uguaglianza diretta fra π e π' non possiede punti uniti propri, il punto reale U sopra nominato sarà improprio, e la retta all' infinito, contenendo tre punti uniti, avrà ogni punto unito. L' uguaglianza sarà una omologia col centro e l' asse all' infinito, vale a dire una equipollenza (n.° 182, *c*)). Giungiamo così al teorema:

Se due piani sovrapposti (o due figure in uno stesso piano) sono direttamente uguali, si può portare l' uno a coincidere punto per punto coll' altro mediante una rotazione intorno ad un punto determinato, o mediante una traslazione in una determinata direzione.

Od anche, poichè uno scorrimento di un piano su sè stesso genera una uguaglianza diretta fra due diverse posizioni del piano, possiamo dire:

Uno scorrimento di un piano sopra sè stesso può sempre esser sostituito (per quanto riguarda le posizioni iniziale e finale) *da una rotazione intorno ad un punto, o da una traslazione.*

b) Nella *uguaglianza inversa* le punteggiate di π, π' sulla retta all'infinito si corrispondono in una involuzione, in cui i punti ciclici sono coniugati (n.° 89). Vi saranno dunque, sulla retta all'infinito, due punti reali uniti in direzioni ortogonali, U_∞, V_∞, e nessun altro punto unito. Se l'uguaglianza fra π e π' ammette un terzo punto unito (reale) W, questo deve esser proprio. Allora le rette WU_∞, WV_∞ sono unite; e su ciascuna di queste la collineazione subordina una uguaglianza. Ora, ad es., l'uguaglianza sopra WU_∞ ha due punti uniti distinti W, U_∞, è quindi una simmetria rispetto a W, cioè una particolare involuzione, o l'identità. Ma nel primo caso la collineazione fra π e π' subordina su due rette distinte WU_∞, $V_\infty U_\infty$ una involuzione; ed è quindi (n.° 181) una omologia involutoria di centro U_∞ ed asse WV_∞, vale a dire una simmetria ortogonale rispetto a questo asse (n.° 182, *b*)). Nel secondo caso, quando cioè ogni punto di WU_∞ è unito, si arriva similmente alla stessa conclusione, salvo che l'asse di simmetria è ora WU_∞. Nei due casi basta dunque ribaltare uno dei due piani intorno all'asse di simmetria per sovrapporre ogni punto al proprio corrispondente.

Rimane la ipotesi che la collineazione fra i piani π e π' abbia i due soli punti uniti U_∞ e V_∞. Essa avrà quindi due sole rette unite, reali e distinte (n.° 183, 3)), di cui una è la retta all'infinito, e l'altra sarà una retta propria passante per U_∞ o per V_∞; sia ad es. la u passante per V_∞. Sopra u la nostra collineazione subordina una uguaglianza, che è diretta, avendo l'unico punto unito in V_∞ (n.° 72); è dunque costante la distanza fra due punti corrispondenti A, A' di u. Ma allora mediante una traslazione conveniente del piano π parallelamente ad u, si riuscirà a sovrapporre ogni punto A di u al corrispondente punto A'. Fra la nuova posizione di π e il piano π' passerà ancora una uguaglianza inversa; ma questa avrà come uniti tutti i punti della retta u, e sarà, per quanto precede, una simmetria rispetto ad u. Sicchè in fine:

Se due piani sovrapposti (o due figure in uno stesso piano) sono inversamente uguali, si può portare uno di essi a coincidere punto per punto coll'altro mediante una traslazione parallelamente ad una retta determinata, seguita da un ribaltamento intorno a questa retta. Basta la seconda operazione quando vi siano punti uniti propri.

I risultati precedenti potrebbero esser confermati per via analitica, partendo dalle equazioni della uguaglianza diretta

$$(a)\qquad \begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha + a,\\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha + b, \end{aligned}$$

o della uguaglianza inversa

$$(b)\qquad \begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha + a,\\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\alpha - y\cos\alpha + b, \end{aligned}$$

in coordinate cartesiane ortogonali.

Esercizi. I. — 1) Costruire (1) la collineazione $\binom{A\,B\,C\,D}{A'B'C'D'}$ fra due piani sovrapposti, supponendo: a) che siano uniti tre, due, o uno dei punti dati; b) che i quattro punti A, B, A', B' siano allineati.

2) Costruire l'affinità $\binom{A\,B\,C}{A'B'C'}$ fra due piani; nella ipotesi che questi siano sovrapposti, si supponga che sia unito il punto A, o la retta AB, o le due rette AB, AC.

3) Una similitudine fra due piani è determinata, in due modi diversi, quando di due punti A, B (propri) nell'un piano si conoscano i punti corrispondenti (propri) A', B' nell'altro piano.

4) Costruire una omologia determinata: a) mediante il centro, l'asse e due elementi omologhi; b) due triangoli omologici corrispondentisi.

5) Costruire una omologia speciale, o involutoria, o di data caratteristica ($= 2$, ad es.), conoscendo: a) due punti corrispondenti e l'asse; b) due rette corrispondenti e il centro; c) due coppie di punti corrispondenti su rette distinte; d) due coppie di rette corrispondenti uscenti da punti distinti.

6) Costruire una omologia che trasformi un dato quadrilatero in: a) un parallelogramma; b) un rettangolo; c) una losanga; d) un quadrato.

7) Una omologia trasforma un cerchio in una ellisse, parabola, od iperbole, secondo che la retta limite del piano cui appartiene il cerchio, è esterna, tangente, o secante rispetto al cerchio. Costruire effettivamente più punti e più tangenti della curva nei tre casi. In particolare, costruire gli asintoti

(1) Vuol dire che di più punti o rette assegnate nell'un piano, si chiedono gli elementi corrispondenti nell'altro; in particolare le rette limite.

della iperbole; dove deve trovarsi il centro di omologia perchè questi riescano perpendicolari (e quindi la iperbole sia equilatera)?

II. — 8) Una collineazione che trasformi *un* parallelogramma di π in *un* parallelogramma di π', è una affinità [2]; ed è una similitudine, se trasforma *un* quadrato in *un* quadrato. Una collineazione che trasformi gli angoli retti di π negli angoli retti di π', è pure una similitudine.

9) Un'affinità che trasformi *un* cerchio in *un* cerchio, è una similitudine. Ed una collineazione che muti *un* cerchio di π in *un* cerchio di π' e il centro del primo cerchio nel centro del secondo, è pure una similitudine; (si dimostri anzitutto che si corrispondono i punti all'infinito di diametri corrispondenti).

10) Una collineazione che trasformi i cerchi di π nei cerchi di π', è una similitudine; (può la retta limite di π esser propria?).

III. — 11) Teorema di Chasles: Se di due piani prospettivi uno ruota intorno alla comune intersezione, esso rimane prospettivo all'altro; ed il centro di prospettiva descrive un cerchio, il cui piano è normale alla detta intersezione, ed il cui centro trovasi sulla retta limite del piano fisso (cfr. n.° 70, es. 3)).

12) Se di due piani sovrapposti legati da una omologia involutoria ad asse proprio, si fa ruotare uno di un diedro piatto intorno all'asse, si otterrà in fine una omologia speciale; e viceversa. In particolare una simmetria obliqua rispetto ad un asse si muta in una affinità omologica speciale.

13) La simmetria obliqua rispetto ad un asse e la affinità omologica speciale sono trasformazioni *equivalenti*, le quali cioè non alterano il valore delle aree; e sono le sole affinità omologiche dotate di questa proprietà. Si dimostri ciò anche analiticamente, scrivendo le equazioni delle collineazioni nominate.

14) Si può sempre passare dall'uno all'altro di due piani collineari π, π' mediante un numero finito di proiezioni e sezioni; (si trattino successivamente i seguenti casi, di cui ciascuno può ricondursi al precedente mediante una proiezione: *a*) tutti i punti della retta $\pi\pi'$ sono uniti (n.° 176); *b*) un punto della retta $\pi\pi'$ è unito; *c*) nessun punto della retta $\pi\pi'$ è unito; *d*) i due piani sono sovrapposti).

15) Dati due piani collineari non affini, si determini nell'uno una punteggiata od un fascio di rette, a cui corrisponda nell'altro una punteggiata uguale od un fascio uguale. Ciascuno dei due problemi ammette sempre due soluzioni.

16) In base all'esercizio precedente, si dimostri che due piani collineari non affini possono sempre situarsi in tal posizione, da riuscire prospettivi od omologici.

---

[2] Si viene a dire con ciò che basta la conoscenza di due parallelogrammi corrispondenti, per asserire che la collineazione è una affinità; osservazioni analoghe per gli enunciati successivi.

17) Due piani simili possono sempre situarsi in tal posizione da divenire omotetici.

18) Due piani affini non sempre possono sovrapporsi in modo da dar luogo ad una affinità omologica; ciò è possibile soltanto (ed in infiniti modi) se il rapporto di similitudine relativo a due convenienti direzioni, corrispondentisi nei due piani, vale 1. Ora, date le equazioni dell'affinità $x' = mx$, $y' = ny$, dove si può supporre $\widehat{xy} = \widehat{x'y'} = \frac{\pi}{2}$, si esamini come vari quel rapporto mentre rette corrispondenti ruotano intorno alle origini; si dimostri che vi sono due direzioni ortogonali a cui corrisponde un valore massimo o minimo di quel rapporto, e che esistono punteggiate uguali nei due piani, quando dei due numeri m, n uno sia (in valore assoluto) ≤ 1 e l'altro ≥ 1.

19) La condizione del precedente esercizio è sempre soddisfatta quando l'affinità tra i due piani sia *equivalente*. Dunque: due piani affini equivalenti possono sempre sovrapporsi in modo da dar luogo ad una affinità omologica, che sarà (es. 13)) o una simmetria (generalmente) obliqua, od una affinità omologica speciale. L'affinità equivalente fra due piani non differisce dalla simmetria obliqua rispetto ad una retta, se non per la mutua posizione dei due piani.

IV. — 20) Se due figure piane sono omologiche ad una terza figura rispetto ad uno stesso asse (o centro), esse sono pure omologiche fra loro rispetto a questo asse (o centro); ed i tre centri (o assi) di omologia appartengono ad una stessa retta (o punto), a meno che non coincidano. La prima parte dell'enunciato può presentarsi così: due omologie aventi lo stesso asse (o centro) danno per prodotto una omologia avente quell'asse (o centro). Quale relazione passa fra le caratteristiche delle tre omologie? In particolare, se le due prime omologie sono speciali, anche il prodotto sarà una omologia speciale; come si enuncia questo corollario se l'asse delle omologie speciali è all'infinito?

21) Due cerchi non concentrici di un piano si corrispondono in due diverse omotetie, i cui centri diconsi *centri di similitudine* dei due cerchi, e precisamente centro di similitudine *interno* od *esterno*, secondo la posizione che occupa rispetto ai centri dei cerchi stessi (cfr. n.° 160, es. 14)).

22) Tre cerchi presi a due a due determinano, in generale, tre coppie di centri di similitudine; i tre centri esterni sono allineati, e due centri interni sono allineati col centro esterno relativo alla rimanente coppia di cerchi (es. 20); cfr. n.° 160, es. 15)).

23) Se ABC è un triangolo, il prodotto di una omologia avente il centro A e l'asse BC, per una omologia avente il centro B e l'asse CA, è una collineazione avente il triangolo ABC come unito; ma se le due omologie hanno la stessa caratteristica k, il prodotto è una omologia di centro C, asse AB e caratteristica $\frac{1}{k}$. Vale dunque il teorema: il prodotto di tre omologie aventi ordinatamente come centri i vertici di un triangolo, come assi i lati opposti, ed aventi la stessa caratteristica, è

l'identità. Caso particolare $k = -1$; caso che B e C siano punti impropri, ad es. in direzioni ortogonali.

V. — 24) Data una affinità fra due piani sovrapposti, determinarne (analiticamente e graficamente) i punti uniti.

25) Le affinità fra due piani sovrapposti si distinguono in *dirette* ed *inverse*, secondo che aree di figure corrispondenti hanno segni uguali od opposti. Date le equazioni di una affinità (riferite ad un unico sistema di assi), dal segno di un certo determinante si deduce se l'affinità è diretta od inversa. Ogni affinità inversa subordina sulla retta all'infinito una proiettività discorde (n.° 78, es. 3)), ed ha quindi all'infinito due punti uniti, sempre reali e distinti fra loro; un'affinità diretta può non avere punti uniti reali all'infinito, od averne uno solo, od averne due.

26) Qual valore assoluto ha il determinante nominato nell'es. precedente, se la affinità è *equivalente?* Si scrivano, sotto la forma più semplice che possono assumere, le equazioni di una affinità equivalente fra piani sovrapposti, distinguendo i vari casi relativi all'esser diretta od inversa l'affinità, od alla realtà... dei punti uniti.

VI. — 27) Due stelle proprie collineari diconsi uguali, se l'angolo di due rette qualisivogliano dell'una stella è uguale all'angolo delle rette corrispondenti dell'altra, e quindi diedri corrispondenti sono uguali. Ora si dimostri che due stelle sono uguali, se ad ogni triedro trirettangolo dell'una corrisponde un triedro trirettangolo dell'altra (n.° 89, Oss.).

28) Due stelle proprie uguali, concentriche, ammettono sempre una retta (reale) unita tale, che facendo ruotare una stella di un diedro conveniente intorno a quella retta, essa viene a coincidere coll'altra stella, elemento per elemento; ogni rotazione di una figura intorno ad un punto equivale dunque ad una rotazione intorno ad una retta uscente dal punto. Se $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$ sono due figure appartenenti a due stelle (concentriche o distinte), e tali che $\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}$, $\widehat{ac} \equiv \widehat{a'c'}, \ldots \pmod{\pi}$, si può con un movimento conveniente sovrapporre l'una figura all'altra; ma quest'ultimo fatto vale per figure composte di *intere* rette, e può cadere in difetto per figure composte di semirette (ad es. per i triedri della geometria elementare).

VII. — *Sulle affinità circolari.* — 29) Dicesi (con MÖBIUS) *affinità circolare* una corrispondenza biunivoca fra due piani punteggiati π, π', la quale trasformi i punti di un qualsiasi cerchio di π nei punti di un cerchio di π', e viceversa. In questa teoria le rette vengono ad esser riguardate come cerchi particolari; l'affinità circolare trasformerà dunque una retta in un cerchio o in una retta. Ora, se ogni retta di π vien trasformata in una retta di π', l'affinità circolare è una particolare collineazione (n.° 165), e precisamente una similitudine (es. 10)).

30) Se, al contrario, le rette di π vengono trasformate in cerchi di π', dovranno questi segarsi a due a due in un solo punto variabile, col variare dei detti cerchi, e precisamente in quel punto che corrisponde alla intersezione delle rette corrispondenti. Segue che i cerchi nominati passeranno

tutti per uno stesso punto fisso O' di π', detto *punto centrale* (o *fondamentale*); il punto O' fa eccezione alla univocità della corrispondenza fra π' e π, giacchè il suo corrispondente in π è indeterminato, e precisamente (come risulterà dal seguito) sulla retta all'infinito [1]. Similmente alle rette di π' corrispondono in π cerchi passanti per un punto centrale P.

31) Una particolare affinità circolare tra due piani sovrapposti π, π' è la *inversione* o *trasformazione per raggi vettori reciproci* (n.° 160, es. 16)), nella quale i punti centrali O' e P vengono a coincidere nel *centro d'inversione*. Quella trasformazione coincide colla propria inversa, è involutoria.

32) Ciò posto, e detta $\mathbf{T}$ una affinità circolare qualsiasi che trasformi il piano π nel piano (arbitrario) π', si consideri in π' una inversione $\mathbf{I}$ avente come centro il punto centrale O' di $\mathbf{T}$, e si formi il prodotto $\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}$. Questo prodotto è una collineazione, anzi una similitudine $\mathbf{S}$ (es. 29)); dunque $\mathbf{T} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{S}$, e moltiplicando ancora per $\mathbf{I}$ (a destra in ciascun membro), e ricordando che $\mathbf{I}^2 = 1$ (identità), si ha infine $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$; *ogni affinità circolare può riguardarsi come prodotto di una similitudine per una inversione.* Il rapporto di similitudine dipende dal raggio del cerchio di inversione, e, scegliendo questo opportunamente, quel rapporto può rendersi uguale ad 1. Dunque: *due piani legati da una affinità circolare possono sempre sovrapporsi in modo che la corrispondenza divenga una inversione*; e viceversa. L'affinità circolare differisce dall'inversione soltanto per la mutua posizione dei sostegni.

33) Seguono le proprietà: *l'affinità circolare è una trasformazione conforme* (o *isogonale*), vale a dire l' angolo di due cerchi (o curve) in π uguaglia l'angolo dei cerchi (o curve) corrispondenti in π' (n.° 160, es. 20)). Alle rette uscenti dal punto centrale P in π, corrispondono le rette uscenti dal punto centrale O' in π'; e l'angolo di due delle prime rette uguaglia l'angolo corrispondente. Inoltre, sopra due rette corrispondenti l'affinità circolare subordina punteggiate proiettive aventi in P, O' rispettivamente i punti limite (donde risulta che a P di π corrispondono i punti all'infinito di π', ecc.). *Il prodotto delle distanze di punti corrispondenti dei due piani dai rispettivi punti centrali è costante.*

34) Una trasformazione biunivoca fra due piani punteggiati π, π', la quale trasformi le rette di π nei cerchi di π' passanti per uno stesso punto O', colla condizione che l'angolo di due rette qualisivogliano di π sia uguale all'angolo dei cerchi corrispondenti di π', è una affinità circolare. (Si moltiplichi infatti la trasformazione nominata per una inversione di centro O' in π'; il prodotto è una similitudine).

35) Sappiamo già (n.° 78, es. 14)) che, se sopra due piani π, π' si rappresentano i numeri complessi $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ nel solito modo,

---

[1] La eccezione potrebbe togliersi quando si riguardassero convenzionalmente i punti all'infinito di ciascun piano, ad es. di π, come riuniti in un *punto all'infinito* O_∞, corrispondente di O'; e le rette di π come cerchi passanti per O_∞. Ciò si suol fare talvolta in questa teoria, o quando si rappresentano sul piano i numeri complessi secondo Gauss.

una equazione bilineare (o trasformazione lineare) fra z, z' rappresenta una affinità circolare fra i due piani. Ora sussiste pure la proposizione inversa. Supposto infatti che π e π' siano legati da una affinità circolare, si assumano anzitutto come punti $z = 0$, $z' = 0$ i punti centrali O, P'; si consideri poi un piano ausiliare π'', sovrapposto a π', il quale sia descritto da un punto z'' (riferito agli stessi assi x', y'), e sia legato da una similitudine a π e da una inversione di centro P' a π'; si avrà (n.° 160, es. 16))

$$z = mz'', \quad z'' = \frac{1}{\overline{z'}}, \qquad (m \text{ costante complessa, } \overline{z'} = x' - iy')$$

donde $\overline{z'} = \frac{m}{z}$, od anche $z' = \frac{m}{z}$, invertendo il verso positivo sull'asse y'. Se poi si trasportano parallelamente a sè stessi gli assi nei due piani, per liberarsi da ipotesi particolari, bisognerà sostituire a z, z' rispettivamente $z + h$, $z' + k$, dove h e k sono costanti complesse, e si avrà in fine una relazione del tipo

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \text{od anche } \alpha z z' + \beta z + \gamma z' + \delta = 0,$$

dove $a, \ldots$, oppure $\alpha \ldots$ sono costanti complesse tali che $ad - bc \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. (Ove non si possa disporre dei versi positivi sugli assi cartesiani in π, π', occorrerà talvolta sostituire $\overline{z'}$ *a* z'). *Una affinità circolare fra due piani si traduce dunque in una trasformazione lineare a determinante non nullo fra le variabili complesse rappresentate sui piani stessi*; *e viceversa.*

36) Le proprietà della proiettività tra due punteggiate, ove si considerino i punti immaginari, danno adunque proprietà della affinità circolare. Ad es.: *una affinità circolare è determinata pienamente quando di tre punti dell'un piano si assegnino i corrispondenti nell'altro, e si indichi inoltre quali versi di rotazione devono corrispondersi nei due piani.* Il doppio rapporto di quattro punti dell'un piano è uguale al doppio rapporto dei corrispondenti quattro punti dell'altro (n.° 160, es. 12)); ecc.

186. Correlazione fra piani. — Vogliamo ora occuparci in particolare delle correlazioni fra due forme di seconda specie, e specialmente fra due piani. Sappiamo già che una correlazione fra i piani π, π' muta una figura di π, composta di punti e rette (P, Q, ..., p, q, ...) in una figura di π', composta di rette e punti (p', q', ..., P', Q', ..). Ogni proprietà grafica della prima figura si traduce in una proprietà grafica della seconda, purchè si scambino tra loro le parole *punto* e *retta.* Dimostrata sopra una figura la prima proprietà, si è dunque sicuri che la seconda proprietà, corrispondente a quella per *dualità piana* (n.° 6), sussiste per una seconda figura. Ed in ciò si ha una nuova giustificazione della legge di dualità piana, giustificazione che, tradotta analiticamente, si riduce a quella esposta nel n.° 130.

Per rappresentare analiticamente una correlazione fra due piani π, π', si stabiliscano sopra questi due sistemi di coordinate omogenee di punti e rette (per es. cartesiane e plückeriane, o proiettive); allora fra le coordinate (x, y, z) di un punto P di π e le coordinate (u', v', w') della retta corrispondente p' di π' passeranno relazioni del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho u' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho v' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho w' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità non nullo, e le a_{ik} sono nove costanti, costituenti un determinante di terzo ordine

$$(2) \qquad A \neq 0.$$

Le (1) si giustificano in modo perfettamente analogo a quello tenuto nei n.[i] 170, 171 a proposito della collineazione.

Risolvendo le (1) rispetto ad x, y, z, si ottengono le relazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} \sigma x = A_{11}u' + A_{21}v' + A_{31}w', \\ \sigma y = A_{12}u' + A_{22}v' + A_{32}w', \\ \sigma z = A_{13}u' + A_{23}v' + A_{33}w', \end{cases}$$

(dove i simboli hanno i soliti significati; cfr. n.° 171), che danno il punto P di π quando sia nota la retta p' di π'.

Se invece fosse dato nel piano π' un punto Q' di coordinate (x', y', z') e quindi di equazione, in coordinate di rette,

$$u'x' + v'y' + w'z' = 0,$$

e si chiedesse la retta corrispondente q in π, basterebbe trasformare l'ultima equazione eseguendo le sostituzioni (1) (cfr. n.° 171). Ordinando rispetto alle variabili x, y, z l'equazione trasformata, si trovano, come coefficienti delle variabili, i trinomi scritti qui sotto, che sono proporzionali alle coordinate (u, v, w) della retta q:

$$(4) \qquad \begin{cases} \tau u = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z', \\ \tau v = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z', \\ \tau w = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'. \end{cases}$$

Finalmente si potrebbero cercare le formole che esprimono x', y', z' coordinate di Q', in funzione di u, v, w coordinate di q; il che sarà lasciato al lettore.

Mediante le formole precedenti si può, quando sia data la equazione di una curva in uno dei due piani, determinare sull'altro piano la equazione dell' inviluppo formato dalle rette corrispondenti ai punti della curva; o viceversa. E dall'essere lineari quelle formole risulta che *una curva algebrica d'ordine* n *viene trasformata da una correlazione in un inviluppo algebrico di classe* n, *e viceversa.*

187. Correlazione fra piani sovrapposti. — Supponiamo ora che i due piani correlativi π, π' siano sovrapposti, e vengano riferiti ad uno stesso sistema di coordinate omogenee, sia di punti, sia di rette. Un punto $P(x, y, z)$ del sostegno sarà considerato una prima volta come punto di π; ad esso, in virtù della correlazione K, con cui si passa da π a π', corrisponderà in π' una certa retta $p'(u', v', w')$, le cui coordinate saranno espresse dalle (1). Ma se consideriamo P una seconda volta come punto di π', nel qual caso potremo indicare il punto stesso con Q' e le sue coordinate con $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, dovremo cercare quella retta $q(u, v, w)$ di π che corrisponde a Q' mediante la correlazione inversa K^{-1}; le coordinate di q saranno date allora dalle (4). Il confronto fra le (1) e le (4) fa vedere che, generalmente, le due rette p' e q corrispondenti allo stesso punto $P \equiv Q'$ nelle correlazioni K e K^{-1} sono distinte fra loro. Si presentano allora i due problemi seguenti:

1) esaminare se esistano punti particolari $P \equiv Q'$, ai quali corrisponda (*doppiamente*) un'unica retta $p' \equiv q$, nelle correlazioni K e K^{-1};

2) esaminare se esistano correlazioni K così particolari, che, comunque sia scelto il punto $P \equiv Q'$, sempre le due rette corrispondenti p' e q in K e K^{-1} vengano a coincidere; vale a dire, esaminare se una correlazione K fra piani sovrapposti, possa coincidere colla correlazione inversa, $K \equiv K^{-1}$.

Qui si osservi, sotto l'aspetto sintetico, che la retta q, trasformata mediante K, dà il punto $Q' \equiv P$, il quale, trasformato ancora mediante K, dà la retta p'; sicchè la retta q si muta nella p' mediante la *collineazione* K^2. Quindi il primo problema si riduce in sostanza a determinare gli elementi uniti della detta collineazione; ed il secondo problema ad esaminare quando essa sia una identità.

Sotto l'aspetto analitico, il problema 1) porta ad esaminare per quali valori di x, y, z (coordinate di $P \equiv Q'$) le coordinate della retta p', che sono espresse (in forza delle (1)) da

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

risultino proporzionali alle coordinate della retta q, che sono espresse (in forza delle (4)) da

$$a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \quad a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z.$$

Detto k il fattore incognito di proporzionalità, sottraendo dalle coordinate di p' le corrispondenti coordinate di q moltiplicate per k, si giunge al sistema di equazioni

$$(5)\quad \begin{cases} (a_{11} - ka_{11})x + (a_{12} - ka_{21})y + (a_{13} - ka_{31})z = 0, \\ (a_{21} - ka_{12})x + (a_{22} - ka_{22})y + (a_{23} - ka_{32})z = 0, \\ (a_{31} - ka_{13})x + (a_{32} - ka_{23})y + (a_{33} - ka_{33})z = 0, \end{cases}$$

il quale contiene come incognite le coordinate x, y, z $\left(\text{od } \frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ del punto $P \equiv Q'$ richiesto, e la incognita ausiliare k. Eliminando x, y, z fra le (5) si ottiene

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a_{11} - ka_{11} & a_{12} - ka_{21} & a_{13} - ka_{31} \\ a_{21} - ka_{12} & a_{22} - ka_{22} & a_{23} - ka_{32} \\ a_{31} - ka_{13} & a_{32} - ka_{23} & a_{33} - ka_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

equazione di terzo grado in k, che dà per k tre valori (uno dei quali si riconosce esser uguale ad 1). Ciascuno di questi, introdotto nelle (5), rende compatibili quelle equazioni per valori non tutti nulli di x, y, z, e quindi fornisce le coordinate di uno dei punti richiesti. Si conclude che: *in una correlazione fra due piani sovrapposti esistono in generale tre punti, ciascuno dei quali corrisponde doppiamente ad una retta.* Un esame più attento farebbe vedere che, nel triangolo formato dai tre punti nominati U, V, W, un vertice U, ad es., corrisponde doppiamente al lato opposto VW, mentre gli altri due vertici V, W corrispondono ordinatamente, in modo duplice, ai lati UV, UW che passano per essi.

Non vogliamo discutere tutti i casi particolari che si possono presentare, nè la ipotesi che esista un valore di k il quale annulli tutti i minori del secondo ordine del determinante (6) (ipotesi che porta l'esistenza di infiniti punti allineati, ciascuno dei quali corrisponde doppiamente ad una retta).

Esamineremo invece la ipotesi che esista un valore di k, il quale annulli tutti gli elementi del determinante (6), vale a dire, verifichi le nove relazioni

(7) $$a_{il} - k a_{li} = 0. \qquad (i, l = 1, 2, 3)$$

Per questo valore di k le tre equazioni (5) diventano identità, e sono soddisfatte dalle coordinate di ogni punto del piano; sicchè *ogni* punto corrisponde doppiamente ad una retta; e la correlazione $\boldsymbol{K}$ è identica alla sua inversa $\boldsymbol{K}^{-1}$, è, come diremo, *involutoria*, e soddisfa dunque al problema 2).

Ora, se uno almeno dei tre elementi principali a_{11}, a_{22}, a_{33} del determinante A non è nullo, la corrispondente relazione (compresa nelle (7))

$$a_{ii} - k a_{ii} = 0$$

determina $k = 1$; e questo valore, sostituito nelle altre relazioni (7), ci dà

(8) $$a_{il} = a_{li}. \qquad (i, l = 1, 2, 3)$$

Concludiamo che il determinante A della correlazione è, in tal caso, *simmetrico.*

Se invece $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, dovrà esser diverso da zero qualcuno degli altri elementi del determinante A, perchè si suppone sempre $A \neq 0$. Sia, per es., $a_{12} \neq 0$; allora una delle (7)

$$a_{12} - k a_{21} = 0$$

ci dice anzitutto che k ed a_{21} sono diversi da zero. Moltiplicando ora, membro a membro, la stessa relazione scritta sotto la forma $a_{12} = k a_{21}$, per l'analoga $a_{21} = k a_{12}$, che è pur compresa fra le (7), si ottiene subito

$$k^2 = 1, \quad \text{ossia} \quad k = \pm 1.$$

La soluzione $k = 1$ ci dice nuovamente che A è simmetrico. La $k = -1$ ci dà invece

(8′) $$a_{ii} = 0, \quad a_{il} = -a_{li}, \quad (i, l = 1, 2, 3)$$

e conduce ad un determinante A emisimmetrico. Ma è noto che un determinante emisimmetrico d'ordine dispari è nullo [1];

[1] V. ad es. il *Corso di Analisi algebrica* del CESARO (1894) pag. 35. Per un determinante del 3° ordine la proprietà si verifica subito mediante sviluppo.

e perchè noi supponiamo $A \neq 0$, dobbiamo respingere le soluzioni (8'). Concludiamo infine che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una correlazione fra due piani sovrapposti sia involutoria, è che il determinante della sostituzione lineare rappresentante la correlazione sia simmetrico.

188. Polarità piana. — Una correlazione involutoria fra due piani sovrapposti si chiama *correlazione polare*, o brevemente *polarità* (piana). Essa è rappresentata da equazioni del tipo

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varrho u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{array} \right. \qquad (a_{il} = a_{li})$$

colla condizione

$$(2) \qquad A \neq 0.$$

Un punto $P(x, y, z)$ ed una retta $p(u, v, w)$ corrispondentisi (doppiamente) nella polarità, si dicono rispettivamente *polo di* p e *polare di* P. È inutile distinguere in quale dei due piani si consideri il polo o la polare.

Se un secondo punto Q ha per polare q, e Q appartiene a p, dovrà (per la proprietà fondamentale della correlazione) q appartenere a P. Dunque:

Se di due punti il secondo appartiene alla polare del primo, il primo apparterrà alla polare del secondo; i due punti diconsi *coniugati*, o *reciproci*, nella polarità.

Un punto ha dunque una sola polare, ma infiniti punti ad esso coniugati (tutti i punti della detta polare).

Se un punto descrive una punteggiata sopra una retta, la polare del punto ruota intorno al polo della retta, generando un fascio proiettivo (n.° 167) *alla detta punteggiata.*

Se di due rette la seconda passa per il polo della prima, la prima passerà per il polo della seconda; le due rette diconsi *coniugate*, o *reciproche*, nella polarità.

Una retta ha dunque un solo polo, ma infinite rette ad essa coniugate (tutte le rette per il detto polo).

Se una retta descrive un fascio intorno ad un punto, il polo della retta percorre la polare del punto, generando una punteggiata proiettiva (n.° 167) *al detto fascio.*

La condizione perchè due punti $P(x,y,z)$, $Q(x',y',z')$ siano coniugati nella polarità (1), si trova esprimendo che Q appartiene alla polare (u, v, w) di P, ossia che è $ux' + vy' + wz' = 0$; sostituendo ad u, v, w le loro espressioni date dalla (1), si ottiene

$$(3) \qquad a_{11}xx' + a_{22}yy' + a_{33}zz' + a_{12}(xy' + x'y) + a_{13}(xz' + x'z) + a_{23}(yz' + y'z) = 0,$$

la quale, come era prevedibile, contiene simmetricamente le coordinate dei due punti.

Ponendo nella (3) $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, troviamo la condizione perchè un punto $P(x, y, z)$ sia *autoconiugato*, vale a dire perchè esso appartenga alla propria polare. Giungiamo così al risultato:

Il luogo dei punti autoconiugati in una polarità è una curva del secondo ordine rappresentata dall' equazione

$$(4) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0.$$

Questa curva dicesi *fondamentale* nella polarità, giacchè, come vedremo (e come risulterebbe pure dalle cose dette), non solo la curva è determinata dalla polarità, ma anche questa è determinata da quella, cioè da una curva *generale* di secondo ordine. È da notare che i punti della curva (4) potrebbero esser tutti immaginari.

Dualmente, se partiamo dalle equazioni (1) risolte rispetto ad x, y, z,

$$(1') \qquad \begin{cases} \sigma x = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w, \\ \sigma y = A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w, \\ \sigma z = A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w, \end{cases} \qquad (A_{il} = A_{li})$$

dove le A_{il} sono i soliti complementi algebrici estratti da A, possiamo scrivere la condizione affinchè due rette (u, v, w), (u', v', w') siano coniugate nella polarità, sotto la forma

$$(3') \qquad A_{11}uu' + A_{22}vv' + A_{33}ww' + A_{12}(uv' + u'v) + A_{13}(uw' + u'w) + A_{23}(vw' + v'w) = 0.$$

Le rette autoconiugate in una polarità, vale a dire le rette passanti per i propri poli, costituiscono un inviluppo di seconda classe rappresentato dall' equazione

$$(4') \quad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0.$$

È questo l'*inviluppo fondamentale* della polarità, il quale potrebbe anche esser composto di rette tutte immaginarie. Vedremo nella teoria delle curve di secondo ordine lo stretto legame che passa tra la curva fondamentale (4) e l'inviluppo fondamentale (4'); e troveremo allora altre proprietà della polarità.

* **Osservazione.** — Avvertiamo (riservandoci di dimostrarlo in seguito) che una polarità ammette infiniti *triangoli autopolari*, od *autoreciproci*, tali cioè che ciascun vertice sia polo del lato opposto; e quindi i vertici (ed i lati) siano coniugati a due a due.

Le equazioni di una polarità si semplificano, quando, come triangolo fondamentale del sistema di coordinate, si assuma un triangolo autopolare. Notando infatti che i punti fondamentali $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, hanno per polari le rette fondamentali $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, risulta che *la polarità sarà rappresentata da equazioni del tipo*

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = cz,$$

dove a, b, c sono tre costanti non nulle.

189. Correlazione ortogonale fra due stelle. — Abbiamo già definito la correlazione fra due stelle di centri S, S'. Se due figure delle due stelle si corrispondono in una correlazione, ad ogni retta e ad ogni piano della prima figura corrisponde un piano ed una retta della seconda; ed ogni proprietà grafica dell'una figura trova riscontro in una proprietà grafica dell'altra, proprietà che si ottiene dalla prima collo scambio delle parole *retta* e *piano*. Segue che anche per la stella vale una *legge di dualità*, in virtù della quale da ogni proprietà grafica di una figura composta di rette e piani di una stella, si può dedurre una seconda proprietà grafica col detto scambio di parole. Ma per la stella possiamo estendere la validità di questa legge anche alle proprietà metriche, mediante le considerazioni seguenti.

Supposto che S ed S' siano due punti propri, facciamo corrispondere ad ogni retta a uscente da S, il piano α' che passa per S' ed è normale ad a. Con ciò veniamo a stabilire una corrispondenza biunivoca fra le rette di S ed i piani di S', corrispondenza che è una correlazione, perchè alle rette di un fascio nella stella S, situato in un piano β, corrispondono, nella stella S', i piani di un fascio avente per asse la retta b' normale a β. Questa particolare correlazione, che muta ogni retta ed ogni piano della prima stella, nel piano e nella retta rispettivamente normale appartenente alla seconda stella, dicesi *ortogonale*. L'angolo di due rette nell'una stella è uguale (a meno di multipli di π) al diedro dei due piani corrispondenti nell'altra stella; e l'angolo di una retta con un piano in una stella uguaglia l'angolo del piano e della retta corrispondenti nell'altra stella. Dunque, se due figure di due stelle si corrispondono in una correlazione ortogonale, ogni proprietà *metrica* dell'una figura trova riscontro in una proprietà metrica dell'altra, proprietà che si ottiene dalla prima collo scambio delle parole *retta* e *piano*, *angolo di due rette* e *diedro di due piani;* dimostrata la prima proprietà, si è sicuri che è vera anche la seconda. In breve: *nella stella propria la legge di dualità vale, non solo per le proprietà grafiche, ma pure per le proprietà metriche.* Di questa considerazione si fa uso anche nella geometria elementare (ad es. nella teoria dei triedri); coll'avvertenza che, per il modo come ivi si fissa la misura degli angoli (di semirette) e dei diedri (di semipiani), un angolo e un diedro corrispondenti risultano supplementari anzichè uguali.

190. Polarità ortogonale nella stella o sul piano all'infinito. — Le cose dette sussistono pure se le due stelle hanno lo stesso centro $S \equiv S'$. In tale ipotesi però la correlazione ortogonale riesce involutoria, è una *polarità nella stella;* infatti la stessa operazione di perpendicolarità che conduce da una retta a di S al piano corrispondente α' di S', conduce pure (come si è visto) da una retta b' di S' al piano corrispondente β di S. Dunque:

In una stella propria esiste una particolare polarità, detta ortogonale o sferica, nella quale le rette corrispondono ai piani ad esse perpendicolari.

Se si nota che una polarità piana dà, mediante proiezione da un punto esterno S, una polarità nella stella, e viceversa, risulta che tutte le proprietà ed i concetti stabiliti nella polarità piana si trasportano subito alla polarità nella stella, pur di sostituire ai punti ed alle rette del piano, le rette e i piani della stella. Alla curva del secondo ordine (fondamentale di una polarità piana), bisognerà sostituire il *cono di secondo ordine* costituito dalle rette proiettanti da S i punti della curva; ed all'inviluppo di rette di seconda classe (fondamentale), si sostituirà l'*inviluppo conico di seconda classe* costituito dai piani proiettanti da S le rette di quell'inviluppo.

In particolare, osserveremo che *due rette coniugate, o due piani coniugati, nella polarità ortogonale di una stella sono perpendicolari fra loro, e viceversa.* Le coppie di rette coniugate appartenenti ad un fascio, cioè ad un piano della stella, generano in quello la involuzione circolare; quindi le rette autoconiugate nel piano sono le direzioni assolute uscenti da S nel detto piano. *L'insieme delle rette autoconiugate nella polarità ortogonale, o delle direzioni assolute uscenti da un punto* S, *è un cono del secondo ordine*, detto *cono assoluto* relativo al punto S; si tratta evidentemente di un cono immaginario.

Dualmente: *i piani autoconiugati* (immaginari) *nella polarità ortogonale costituiscono un inviluppo conico di seconda classe.*

Triedri autopolari nella detta polarità sono trirettangoli, ecc.

Segando la polarità sferica nella stella S con un piano non passante per S, si ottiene su questo una particolare polarità piana, che viene spesso considerata nella Geometria descrittiva (sotto il nome di *antipolarità*).

Se poi per piano secante si assume il piano all'infinito, la polarità ottenuta non dipende più dal centro S della stella che si considera, e vien detta *polarità sferica*, od *assoluta*, nel piano all'infinito. *Sul piano all'infinito esiste adunque una determinata polarità* (*assoluta*), *in cui si corrispondono sempre un punto improprio ed una retta impropria che definiscano, nello spazio, una direzione ed una giacitura ortogonali.* La curva (immaginaria) del secondo ordine fondamentale nella detta polarità dicesi (*cerchio*) *assoluto* dello spazio; ed è il luogo dei punti ciclici di tutti i piani dello spazio. Punti o rette coniugate nella polarità assoluta definiscono direzioni o giaciture ortogonali; ecc.

Il cerchio assoluto (o la polarità assoluta) ha nella geometria solida lo stesso ufficio che i punti ciclici nella planimetria. *Ogni relazione proiettiva di una figura col cerchio assoluto può enunciarsi in forma metrica*; *e, viceversa, ogni proprietà metrica della figura può riguardarsi come una relazione proiettiva di questa col piano all' infinito e col cerchio assoluto* (cfr. n°. 89, Oss.). Incontreremo nello studio della geometria solida vari esempi che chiariranno questa affermazione.

Esercizi. I. — 1) Costruire la correlazione $\binom{A\,B\,C\,D}{a'b'c'd'}$ fra due piani.

2) Se fra due piani π, π' passa una correlazione, a due punteggiate (di sostegni) a, b di π corrispondono proiettivamente due fasci (di centri) A', B' di π'; ed al punto ab di quelle corrisponde la retta $A'B'$ in questi. Viceversa, una correlazione fra i piani π, π' è individuata quando si diano due punteggiate a, b in π, e due fasci ad esse ordinatamente proiettivi A', B' in π', colla condizione che al punto ab delle due punteggiate corrisponda la retta $A'B'$ dei due fasci (cfr. n.° 168).

3) Se i due piani π, π' dell'es. precedente sono sovrapposti, si può supporre in particolare che il fascio A' sia prospettivo alla punteggiata a, e B' prospettivo a b, e inoltre che la retta $A'B'$ passi per il punto ab. In tal caso la costruzione della collineazione si semplifica notevolmente. Si applichi ad es. una siffatta correlazione a trasformare un cerchio di π; si otterrà in π' un inviluppo di seconda classe (formato, come poi si vedrà, dalle tangenti ad una curva del secondo ordine).

4) Se in una correlazione K fra due piani sovrapposti π, π' vi è una punteggiata a di π che sia prospettiva al corrispondente fascio di rette A' di π', vi sarà, in generale, una seconda punteggiata b di π che riuscirà prospettiva al fascio di rette B' corrispondente in π'; e la retta $A'B'$ passerà per il punto ab. Ma in casi particolari le due punteggiate a, b possono coincidere, ed allora coincidono i due fasci A', B'; ed ogni punto P di a corrisponde doppiamente (cioè in K e K^{-1}) alla retta $A'P$ di A'. (Si applichi infatti la collineazione K^2 alle due forme prospettive a, $A'\ldots$).

5) Se una correlazione muta un n.gono semplice $ABC\ldots H$, sui lati del quale si trovano ordinatamente certi punti M, $N,\ldots R$, in un n.latero $abc\ldots h$, dai cui vertici escono le rette m, $n,\ldots r$, sussiste la relazione fra rapporti semplici:

$$(ABM)(BCN)\ldots(HAR) = (abm)(bcn)\ldots(har).$$

(Si consideri infatti una trasversale secante i lati dell' n.gono in M', $N',\ldots R'$; allora il primo membro della relazione precedente uguaglia il prodotto dei doppi rapporti $(ABMM')\,(BCNN')\ldots$, per il n.° 36; ma un doppio rapporto non viene alterato da una correlazione; poi n.° 37, es. 12)).

II. — 6) Due relazioni del tipo

$$(1)\qquad u = x, \qquad v = y,$$

oppure

$$(2)\qquad u = -x, \qquad v = -y,$$

tra le coordinate cartesiane (x, y) di un punto e le coordinate plückeriane (u, v) di una retta, definiscono una polarità piana; qual'è la polare dell'origine? Se le coordinate sono ortogonali, la curva fondamentale è un cerchio immaginario nel caso (1) (che rappresenta una *antipolarità* (n.° 190)), reale nel caso (2) (*polarità circolare*). Nell'uno e nell'altro caso, la polare p di un punto P è normale alla retta OP congiungente il punto coll'origine O, e passa una semplice relazione fra le distanze di O da P e da p; ad es. nella polarità (2), il punto P è coniugato armonico del punto $p \cdot OP$, rispetto alle intersezioni di OP col cerchio fondamentale. L'angolo di due rette arbitrarie è uguale all'angolo sotto cui da O sono visti i relativi poli.

7) Sopra ogni retta di un piano, nel quale sia fissata una polarità, si trovano infinite coppie di punti coniugati; queste formano una involuzione avente come doppi i punti autoconiugati appartenenti a quella retta. E dualmente; (si ricorra alla (3) o (3') del n.° 188, supponendo, il che è lecito, che la retta o il punto sia fondamentale nel sistema di coordinate).

8) Una correlazione fra due piani sovrapposti π, π', la quale muti i vertici di un triangolo ABC di π nei lati opposti, considerati in π', è una polarità, avente il triangolo ABC come autopolare. Si dimostri il teorema per via sintetica ed analitica (assumendo ad es. ABC come triangolo fondamentale).

9) Una polarità è pienamente determinata quando si assegni (arbitramente) un triangolo autopolare ABC, ed inoltre di un punto P, non appartenente a nessun lato, si dia la retta polare p, non appartenente a nessun vertice. Sopra ciascun lato rimane così determinata la involuzione di punti coniugati nella polarità. Ora, o le tre involuzioni sono ellittiche, ed allora nessun punto reale del piano può appartenere alla propria polare, la cui curva fondamentale sarà dunque immaginaria; o di quelle tre involuzioni due sono iperboliche ed una ellittica, ed allora esistono infiniti punti reali del piano appartenenti alla propria polare, e la curva sopra nominata è reale.

10) Dato nel piano un pentagono semplice, esiste una determinata polarità che muta i vertici del pentagono nei lati opposti.

11) Se in una correlazione fra due piani π, π' le rette all'infinito di π, π' hanno per corrispondenti in π', π due punti propri (*punti-limite*), è possibile sovrapporre i due piani in guisa da ottenere una polarità; (si facciano coincidere anzitutto i punti limite, e si cerchi di formare un triangolo i cui vertici corrispondano ai lati opposti; n.° 93, es. 3)).

12) In una polarità, non ortogonale, nella stella propria S esiste sempre un triedro trirettangolo autopolare, ed in generale uno solo; se ne esiste un secondo, ve ne sono infiniti, i quali hanno tutti in comune uno spigolo e la faccia opposta. (Detta infatti Π la polarità data e Π' la polarità sferica, si consideri la collineazione $\Pi \cdot \Pi'$).

13) In una collineazione, o correlazione, fra due stelle proprie S, S' esiste sempre (almeno) un triedro trirettangolo dell'una, cui corrisponde nell'altra un triedro, o trispigolo, trirettangolo. (Infatti, detta K la proiettività che fa passare da S ad S', esiste in S' una polarità Π in cui si corrispondono sempre due elementi che provengano, mediante K, da due elementi ortogonali di S; ecc.).

14) Due stelle proprie correlative possono sempre sovrapporsi in modo da dar luogo ad una polarità (es. 13), 8)).

Parte Terza.

Curve di secondo ordine.

Capitolo I.

Polarità definita dalla curva.

191. Cenno storico. — Più volte nel nostro corso ci accadde di nominare le curve del secondo ordine. Le proprietà che già ne conosciamo potrebbero fornire altrettante definizioni di queste curve, la cui teoria, trattata sotto molti aspetti diversi, può collocarsi tra le più perfette della Geometria. Rivediamo ora quelle definizioni seguendo l'ordine storico.

1) I geometri greci definivano le curve di secondo ordine come *sezioni piane del cono circolare*, proiettante un cerchio da un punto esterno al suo piano, vale a dire come curve prospettive di un cerchio (cfr. n.° 171, Oss. I); di qua il nome di *sezioni coniche*, o brevemente *coniche*, con cui le dette curve vennero indicate dai greci, nome che noi pure adotteremo. Le restrizioni relative alla natura del cono, od alla posizione del piano secante, che imponevano Menecmo (IV secolo av. Cr.) ed Euclide (verso il 300 av. Cr.), furono tolte da Apollonio (verso il 200 av. Cr.), il quale nella sua grande opera sulle coniche (in otto libri, di cui sette sono pervenuti a noi) espose la maggior parte delle proprietà tuttora note di quelle curve, e propose i nomi di *ellisse, parabola* ed *iperbole* per designarne le varie specie.

2) Apollonio deduceva dalla generazione delle coniche una proprietà che, tradotta coi simboli moderni, equivale ad una equazione di secondo grado fra le coordinate cartesiane di un punto descrivente la curva. E poichè, inversamente, ogni curva rappresentata da una equazione di secondo grado in coordinate cartesiane può riguardarsi (quando abbia punti reali) come sezione piana di un cono circolare, si definirono (in seguito a Fermat e Descartes, 1637) le coniche come *curve del secondo ordine* (n.° 140).

3) Introdotta sul principio del secolo XIX la nozione di corrispondenza proiettiva, dalla nota generazione del cerchio mediante due fasci uguali di rette seguì subito che ogni conica, proiezione di un cerchio, poteva riguardarsi come *luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in due fasci proiettivi*. Sussiste pure la proprietà inversa (cfr. n.° 148); quindi quella generazione può essere assunta come definizione delle coniche. Così fecero Steiner (nel 1832) e Chasles (presso a poco nella stessa epoca), deducendo da essa, per via sintetica, tutte le proprietà delle dette curve (1).

4) Nel piano di una conica, ad ogni punto corrisponde una determinata retta, *polare*, di cui si trova cenno in Apollonio, e di cui si occuparono Desargues (1639) e De La Hire (1685). La correlazione polare che lega le posizioni del punto e della retta, considerata da Poncelet e Gergonne (fra il 1810 e il 1820), fu definita da Staudt (1847) senza ricorrere alla teoria delle coniche (v. n.° 188). Egli vide che il luogo di un punto appartenente alla propria retta polare, è sempre una conica, e fu quindi condotto a definir le coniche come *curve fondamentali delle polarità piane* (n.° 188), offrendo così una ulteriore definizione di quelle curve, che presenta, sulle altre due definizioni sintetiche, il vantaggio di comprendere anche le coniche immaginarie (2).

Noi però, disponendo delle coordinate, ricorreremo alla definizione analitica, che permette di ritrovare nel modo più semplice tutte le proprietà delle coniche.

192. Definizione delle coniche. — Noi adunque intendiamo per *conica* il luogo dei punti (reali o immaginari) soddisfacenti, colle loro coordinate cartesiane x, y, ad una equazione di secondo grado a due variabili. L'equazione può contenere tre termini di secondo grado (x^2, xy, y^2), due termini di primo grado (x, y), un termine noto. La scriveremo così:

$$(1)\quad a_{11}x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0;$$

---

(1) Cfr. ad es. la *Geometria di posizione* di Reye.

(2) Si veda la *Geometria di posizione* di Staudt, ed i trattati più recenti di Geometria proiettiva di Sannia, Enriques...

le sei quantità a_{ik} sono coefficienti costanti, che supporremo reali; alcune possono anche esser nulle [1].

Spesso ci converrà trasformare la (1) in coordinate cartesiane omogenee, il che si fa sostituendo, al posto di x, y, i rapporti $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, e moltiplicando per z^2; otteniamo così l'equazione *cartesiana omogenea* della conica

$$(1') \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

la quale si presta a rappresentare anche i punti impropri della curva [2]. Ponendo 1 nella (1′) al posto di z, si riproduce la (1).

* Talvolta ci servirà pure la equazione di una conica in coordinate proiettive. Ricordando che il grado di una equazione non muta col passaggio da coordinate cartesiane a proiettive, potremo dire che la (1), o la (1′), rappresentano pure una conica, quando le variabili si riguardino come coordinate proiettive non omogenee, od omogenee.

193. Esempi di coniche. — Per seguire sopra figure la teoria che esporremo, ricordiamo che il cerchio è una particolare conica (n.° 143); tali son pure la ellisse, la parabola e la iperbole (n.° 161).

Anche l'insieme di due rette $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$ è una curva del secondo ordine (*degenere*) rappresentata dall'equazione (n°. 140)

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha' x + \beta' y + \gamma') = 0;$$

e viceversa, se il primo membro della (1) è il prodotto di due polinomi lineari in x, y, la linea corrispondente è una *coppia di rette*. Le due rette possono eventualmente coincidere, e si ha allora la *retta doppia*.

Avvertiamo infine che una conica, secondo la nostra definizione, può non possedere alcun punto reale (come ad es. la curva $x^2 + y^2 + 1 = 0$), o possederne uno solo (come la

---

(1) La notazione a doppio indice adottata per i coefficienti, ed il fattore 2 premesso ad alcuno di quelli, giovano a dare maggior simmetria alle formole.

(2) La (1′) fa vedere che gli indici 1, 2, 3 affissi ai coefficienti sono legati rispettivamente alle variabili x, y, z, di guisa che ciascun coefficiente ha gli indici relativi alle due variabili per cui viene moltiplicato; ad es. $a_{11}xx = a_{11}x^2$, $a_{12}(xy + yx) = 2a_{12}xy$, ecc.

curva $x^2 + y^2 = 0$; cfr., per il cerchio, il n.° 143). Tali curve immaginarie presentano in certe questioni lo stesso interesse delle curve reali; in altre, quando ad es. si tratti di costruzioni, saranno lasciate da parte.

194. Numero dei punti che individuano una conica. — Ci proponiamo ora di dedurre dall' equazione di una conica le principali proprietà della curva. Cominceremo dallo studio delle proprietà proiettive (Cap.[i] I e II), dalle quali seguiranno facilmente le proprietà metriche.

Osserviamo anzitutto che l'equazione

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

di una conica dipende da sei coefficienti $a_{11}, \ldots, a_{33}$, o, meglio, dai *cinque* rapporti di cinque di essi al rimanente, poichè tutta l'equazione può dividersi per questo, supposto non nullo. Segue che una conica può assoggettarsi a *cinque* condizioni, traducentisi in altrettante equazioni indipendenti fra i detti rapporti. Supponiamo ad es. che siano dati cinque punti (x_i, y_i) (dove $i = 1, 2, \ldots 5$), per cui la conica (1) debba passare. Dovranno allora esser soddisfatte le cinque equazioni di condizione

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_i y_i + a_{22}y_i^2 + 2a_{13}x_i + 2a_{23}y_i + a_{33} = 0,$$

le quali sono lineari ed omogenee rispetto ai coefficienti incogniti $a_{11}, \ldots, a_{33}$ (1). Queste equazioni individueranno in generale i mutui rapporti delle incognite; ossia forniranno sei valori proporzionali ad $a_{11}, \ldots a_{33}$, valori che, sostituiti nella (1) al posto dei coefficienti, daranno l'equazione della conica richiesta. Dunque:

Per cinque punti del piano passa sempre una conica, ed in generale una sola (2).

Osservazione. — La detta conica è unica se le cinque equazioni di condizione sono indipendenti. Ma se una di esse è conseguenza delle altre quattro, allora succede che ognuna delle *infinite* coniche passanti per certi quattro A, B, C, D dei punti dati, passa per il quinto E. Ora ciò non è possibile se quei quattro punti sono vertici di un quadrangolo, perchè allora le due coniche composte, l'una delle rette AB, CD, l'altra delle rette AC, BD, non hanno un quinto punto E comune. E nemmeno ciò succede

(1) Ad es., la condizione perchè la conica (1) passi per l'origine (0, 0), è $a_{33} = 0$.

(2) Se dei cinque punti due cadono nei punti ciclici, si ha, come corollario metrico (n.° 155), il noto teorema: *per tre punti passa un cerchio.*

se i tre punti A, B, C appartengono ad una retta non contenente nè D nè E, perchè una conica composta di quella retta e di una seconda retta condotta per D, ma non per E, passa per i primi quattro punti e non per il quinto. Ma se quattro almeno dei cinque punti sono allineati, allora esistono infinite coniche (spezzate in quella retta e in una retta arbitraria per il punto rimanente) le quali contengono i cinque punti. Dunque: *la conica nominata nell'enunciato precedente è unica, tranne nel caso che quattro almeno dei cinque punti siano allineati.*

195. Intersezioni con una retta. — La ricerca delle intersezioni della conica (1) con una retta conduce a risolvere il sistema formato dalla (1) coll'equazione lineare della retta; se questa si risolve rispetto ad una variabile, ad es. rispetto alla y, e si sostituisce nella (1) il valore trovato al posto di y, si arriva in fine ad una equazione di secondo grado nella sola x. Segue di qua che le intersezioni cercate sono *due* (cfr. n.° 142).

Volendo esaminare tutti i casi a cui il problema può dar luogo, supponiamo che la retta in questione sia l'asse delle x ($y = 0$); a questa ipotesi ogni altra può ridursi, pur di eseguire una trasformazione di coordinate, che non altera il grado della (1).

Posto $y = 0$ nella

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

otteniamo

$$(2) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0,$$

equazione che dà due valori

$$x_1,\ x_2 = \frac{-a_{13} \pm \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}}{a_{11}},$$

ascisse delle intersezioni della conica coll'asse x. Queste sono reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie coniugate, secondo che $a_{13}^2 - a_{11}a_{33}$ è maggiore, uguale o inferiore a zero.

Se però nella (1) è $a_{11} = 0$, la (2) si abbassa a primo grado, e fornisce per x un solo valore $x = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$; ma, ricorrendo allora all'equazione omogenea (1') della conica, si trova (per $y = 0$), in luogo della (2), l'equazione

$$(2') \qquad a_{11}x^2 + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = 0,$$

che rimane di secondo grado anche quando $a_{11} = 0$, e fornisce, in questa ipotesi, le due soluzioni

$$\left(\frac{x}{z} = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}\right),\ \left(x \text{ arbitrario},\ z = 0\right).$$

La prima definisce il punto *proprio* sopra ottenuto, mentre la seconda dà il punto *all'infinito* dell'asse x, che appartiene pure, nel caso presente, alla conica. Similmente, se $a_{11} = a_{13} = 0$, la (2) dà, in generale, un assurdo, mentre la (2') diviene $a_{33}z^2 = 0$ e fornisce $z = 0$, x arbitrario; le due intersezioni della conica coll'asse x coincidono nel punto all'infinito del detto asse.

Le due ipotesi ora esaminate, rientrano dunque, sotto l'aspetto proiettivo, nella teoria generale. L'unico caso di eccezione si presenta quando $a_{11} = a_{13} = a_{33} = 0$, perchè allora la (2), o (2'), diviene una identità, è soddisfatta da tutti i valori delle incognite. Vuol dire che ogni punto dell'asse x appartiene alla conica. D'altronde, in queste ipotesi, l'equazione (1) si riduce alla forma

$$y(2a_{12}x + a_{22}y + 2a_{23}) = 0,$$

e quindi la conica si spezza nelle due rette

$$y = 0, \qquad 2a_{12}x + a_{22}y + 2a_{23} = 0.$$

Estendendo ad una retta qualsiasi del piano i risultati ora ottenuti, concludiamo:

Una retta sega una conica in due punti, che possono esser reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati; a meno che la retta non abbia più di due, e quindi infiniti punti comuni colla conica, nel qual caso questa si spezza in quella retta e in una seconda retta (che potrebbe eventualmente coincidere colla prima).

Secondo che si presenta il primo, il secondo o il terzo dei tre casi enumerati nella prima parte dell'enunciato, la retta dicesi *secante*, *tangente* od *esterna* (non secante) rispetto alla conica. E se è tangente, l'unico punto che essa ha in comune colla curva dicesi *punto di contatto*. Nel piano di una conica reale, non spezzata in rette, esistono rette secanti, tangenti ed esterne; e le tangenti rientrano, come risulterà in seguito, nella definizione che fu data al n.° 149, partendo da concetti alquanto diversi.

Ma se la conica è tutta immaginaria, o si spezza in due rette, mancheranno alcune delle famiglie di rette sopra nominate. Così ad es., se la conica si compone di due rette reali uscenti da un punto O, ogni retta del piano è secante, tranne le rette del fascio O, che figurano come tangenti secondo la nuova definizione (mentre non soddisfarebbero all'antica definizione di tangente [1]).

196. Le tre specie di coniche. — Abbandonando per un momento il campo proiettivo, cerchiamo le intersezioni di una conica colla retta all'infinito. Scritta perciò l'equazione della curva in coordinate *cartesiane omogenee*

$$(1') \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

poniamo in questa $z = 0$. Troviamo [2]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

donde si trae

$$\frac{x}{y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Si hanno qui i rapporti delle prime due coordinate omogenee di due punti impropri. Questi sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati, secondo che l'espressione $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ è positiva, nulla, o negativa.

Ora una conica dicesi *ellisse*, quando non sega in punti reali la retta all'infinito; *parabola*, quando la sega in due punti coincidenti, vale a dire quando la tocca in un punto; *iperbole*, quando sega quella retta in due punti reali e distinti [3]. Data l'equazione (1), o (1'), di una conica, si può subito assegnarne la specie in base al seguente criterio, dove l'espressione sopra nominata apparisce col segno cambiato:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \begin{cases} > 0 & \textit{ellisse}, \\ = 0 & \textit{parabola}, \\ < 0 & \textit{iperbole}. \end{cases}$$

La condizione per la parabola può anche esprimersi, dicendo che il trinomio formato coi termini a secondo grado dell'equazione cartesiana non omogenea (1) deve essere un quadrato perfetto.

Le tre specie di coniche hanno le *identiche* proprietà proiettive, sicchè non occorrerà distinguerle finchè rimarremo

---

[1] Questa contraddizione, limitata ad un caso particolarissimo, generalmente scartato, non dà mai luogo ad equivoci.

[2] L'equazione qui scritta, presa isolatamente, rappresenta le due rette proiettanti dall'origine i punti all'infinito della curva; presa insieme colla $z = 0$, definisce i punti all'infinito richiesti.

[3] Queste definizioni si accordano con quelle del n.° 161.

nel campo proiettivo; differiscono invece sia per la forma, sia per talune proprietà metriche.

Esercizi. I. — 1) Scrivere le equazioni delle coniche passanti per i seguenti gruppi di cinque punti: *a*) $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -3)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$; *b*) $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$, punti all'infinito degli assi x, y; *c*) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -3)$, punti all'infinito delle due bisettrici degli angoli xy.

2) Le coniche dell'es. 1) sono ellissi, parabole, o iperboli?

3) Determinare le intersezioni della conica $x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ cogli assi coordinati, colle rette $x + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$, colla retta all'infinito.

4) Scrivere la equazione di una parabola passante per i punti $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 4)$; quante soluzioni ha il problema?

5) Qual'è la condizione perchè la conica $a_{11}x^2 + \cdots = 0$ sia tangente all'asse x, o all'asse y? quali sono le condizioni perchè il punto di contatto abbia coordinate assegnate $(\alpha, 0)$, o $(0, \beta)$? quali condizioni perchè la conica tocchi la retta all'infinito in un dato punto $(\alpha, \beta, 0)$?

6) In particolare, come si presenta l'equazione di una conica che tocchi nella origine l'asse x, o l'asse y? e la equazione di una conica che tocchi uno degli assi nel punto all'infinito?

7) Scrivere la equazione di una conica (iperbole) che passi per i punti $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(2, 2)$, e tocchi l'asse x nel punto all'infinito.

8) Scrivere la equazione di una parabola che passi per i punti $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, e tocchi la retta all'infinito nel punto situato sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{xy}$.

9) Dimostrare che la equazione di una conica tangente agli assi x, y nei loro punti all'infinito, vale a dire di una iperbole avente come asintoti [1] gli assi coordinati, si presenta sotto la forma $2a_{12}xy + a_{33} = 0$, ossia $xy =$ costante (cfr. n.° 162, es. 2)). Quale proprietà ne segue relativamente al parallelogramma formato dalle coordinate di un punto?

10) Dimostrare che una parabola, la quale passi per l'origine toccando ivi l'asse y, e tocchi la retta all'infinito nel punto all'infinito dell'asse x, ha una equazione del tipo $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$, ossia $y^2 = 2px$, dove p è una costante (cfr. n.° 161); in questo sistema di riferimento l'ascissa è dunque proporzionale al quadrato dell'ordinata.

11) Scrivere la equazione di una parabola che tocchi gli assi x. y in punti dati $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$, rispettivamente; si dimostri che delle due equazioni soddisfacenti al problema, una rappresenta la congiungente i due punti contata due volte.

II. — 12) Si dimostri che la equazione, in coordinate proiettive omogenee, di una conica passante per i vertici del triangolo fondamentale si presenta sotto la forma

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0,$$

dove α, β, γ sono coefficienti.

---

[1] Per *asintoto* di una iperbole si intende, come poi diremo, la tangente alla conica in un punto all'infinito.

13) Come si comporta la conica
$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy = 0$$
rispetto ai lati del triangolo fondamentale?

14) La equazione di ogni conica tangente ai due lati $x = 0$, $y = 0$ del triangolo fondamentale nei vertici situati sopra il terzo lato $z = 0$, è $2\lambda xy + \mu z^2 = 0$.

197. Intersezioni di una conica colla retta congiungente due punti. — Il problema del n.° 195 può esser pure trattato per la via seguente, che ha il pregio di condurre a notevoli proprietà delle coniche.

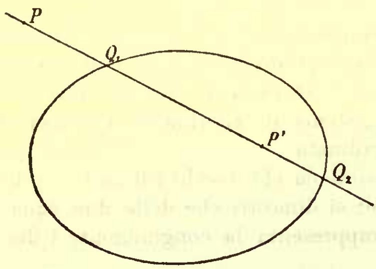
Partiamo dall'equazione della curva in coordinate omogenee (cartesiane o proiettive); se indichiamo brevemente con $f(x, y, z)$ il primo membro di quella, potremo scrivere

$$(1) \qquad f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0.$$

Nelle formole che troveremo converrà talvolta, per simmetria, scrivere a_{21}, a_{31}, a_{32} al posto di a_{12}, a_{13}, a_{23}; stabiliamo dunque che sia $a_{hk} = a_{kh}$ $(h, k = 1, 2, 3)$. Si fissi ora nel piano una retta coll'assegnare le coordinate di due suoi punti $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$; allora ogni punto Q della retta avrà coordinate del tipo (n.° 129, γ))

$$Q(kx + x', \quad ky + y', \quad kz + z'),$$

dove k è un parametro che varia da punto a punto (ed è anzi coordinata proiettiva di Q in un conveniente sistema di riferimento). Volendo determinare le intersezioni della retta PP' colla conica (1), occorre esaminare per quali valori di k le coordinate di Q soddisfino la (1); quando adunque risulti



$$f(kx + x', \; ky + y', \; kz + z') \equiv a_{11}(kx + x')^2 + \ldots = 0.$$

Sviluppando ed ordinando secondo le potenze decrescenti di k, si trova

$$(2) \quad k^2 f(x, y, z) + 2kf\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} + f(x', y', z') = 0,$$

dove $f(x, y, z)$, $f(x', y', z')$ sono i valori assunti dal polinomio (1), quando in luogo delle variabili si sostituiscano le coordinate di P o di P', e dove inoltre si è posto per brevità

$$(3)\left\{\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} &\equiv a_{11}xx' + a_{22}yy' + a_{33}zz' + a_{12}(xy' + yx') \\ &\quad + a_{13}(xz' + zx') + a_{23}(yz' + zy') \\ &\equiv (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)x' \\ &\quad + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)y' \\ &\quad + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)z' \\ &\equiv (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')x \\ &\quad + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')y \\ &\quad + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')z. \end{aligned}\right.$$

Sul polinomio stesso va notato:

1) che esso è lineare e simmetrico rispetto alle due terne di valori (x, y, z), (x', y', z'), prese separatamente (come mostra la prima espressione del polinomio);

2) che, ordinato ad es. secondo x', y', z' (come nella seconda espressione), i coefficienti rispettivi sono le semiderivate parziali di $f(x, y, z)$, prese rispetto ad x, y, z [1];

3) che, se si suppongono le tre quantità x', y', z' identiche rispettivamente alle tre x, y, z, il polinomio (3) si riduce al polinomio $f(x, y, z)$.

La (2) è una equazione di secondo grado in k. Se k_1, k_2 ne sono le radici, i punti Q_1, Q_2, comuni alla curva ed alla retta PP', avranno le coordinate

$$Q_1(k_1x + x', \quad k_1y + y', \quad k_1z + z'),$$
$$Q_2(k_2x + x', \quad k_2y + y', \quad k_2z + z').$$

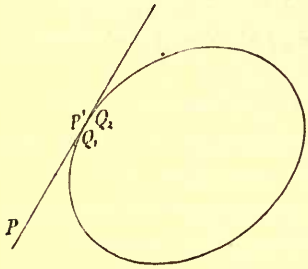
Così, anche per questa via, resta confermato che una conica è segata in due punti (reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari) da una retta.

198. Tangente. — Se il punto $P'(x', y', z')$ è un punto della conica, allora $f(x', y', z') = 0$, e quindi l'equazione (2) manca del termine noto ed ha una radice $k_1 = 0$; il punto Q_1

---

[1] Adottando la segnatura delle derivate parziali indicata al n.° 149, la seconda espressione del polinomio $f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix}$ si presenta sotto la forma $\frac{1}{2}(x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z)$; e la terza espressione si deduce dalla seconda scambiando le x, y, z colle x', y', z'.

coincide con P'. L'altra radice k_2, in generale diversa da zero, corrisponde alla seconda intersezione Q_2 di PP' colla curva.



Ma se anche $k_2 = 0$, le due intersezioni Q_1, Q_2 della retta PP' colla conica coincidono in P', e la retta è tangente ivi alla conica. D'altronde, in questa ipotesi, l'equazione (2), avendo nulle le due radici, mancherà pure del secondo termine. Ne segue che

$$(4) \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} = 0,$$

ossia

$$(4') \qquad (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')z = 0,$$

è la condizione affinchè il punto $P(x, y, z)$ stia sulla tangente alla conica nel punto $P'(x', y', z')$, è la *equazione della tangente alla curva* in questo punto.

Concludiamo che: *fra le infinite rette passanti per un punto* P' *di una conica, ve n'è una determinata che tocca ivi la curva; e l'equazione di questa tangente si forma attribuendo come coefficienti alle variabili* x, y, z *i valori assunti dalle semiderivate parziali del polinomio* f(x, y, z), *quando in esse si sostituiscano le coordinate del punto di contatto* (¹).

La tangente in P' è indeterminata soltanto quando quelle tre semiderivate si annullino per le coordinate di P'; ciò, come vedremo, accade nel solo caso che la conica si spezzi in due rette uscenti da P'.

Osservazione. — Se la curva è data mediante una equazione in coordinate non omogenee, l'equazione della tangente in un suo punto $P'(x', y')$ si ottiene dalla (4') ponendo $z = z' = 1$. Si giunge pure a comporre questa equazione ricordando una delle due regole seguenti, che il lettore vedrà equivalere a quella sopra esposta (tenendo conto, per la prima di esse, che x', y' soddisfano l'equazione della curva).

(¹) Cfr. colla equazione (3″) del n.° 149 rappresentante la tangente ad una curva qualsiasi.

1) Si formino le derivate, o semiderivate, parziali del primo membro dell'equazione della curva rispetto ad x, y, si sostituiscano in quelle le coordinate del punto di contatto, si moltiplichino ordinatamente i valori ottenuti per $x - x'$ ed $y - y'$, e si uguagli a zero la somma dei prodotti (cfr. n.° 149, (3')); in simboli

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})(x - x') + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})(y - y') = 0.$$

2) Nella equazione della curva si sostituiscano:

al posto di x^2, $2xy$, y^2, $2x$, $2y$,

rispettivamente xx', $xy' + yx'$, yy', $x + x'$, $y + y'$,

e si troverà l'equazione sotto la forma

$$a_{11}xx' + a_{12}(xy' + yx') + a_{22}yy' + a_{13}(x + x') + a_{23}(y + y') + a_{33} = 0.$$

In un modo o nell'altro, il lettore vedrà ad es. che la conica passante per l'origine

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

ha come tangente ivi la retta

$$a_{13}x + a_{23}y = 0,$$

la cui equazione si ottiene annullando l'insieme dei termini a primo grado dell'equazione della curva [1].

199. Coppia di tangenti ad una conica uscenti da un punto. — Ritornando alla (2), abbandoniamo la ipotesi che $P'(x', y', z')$ sia un punto della curva (1). Se $P(x, y, z)$ è un punto qualsiasi di una tangente condotta per P' alla conica, le due intersezioni Q_1, Q_2 della retta PP' colla conica coincidono, e quindi l'equazione (2) ha una radice doppia. Ora, perchè ciò accada, deve essere

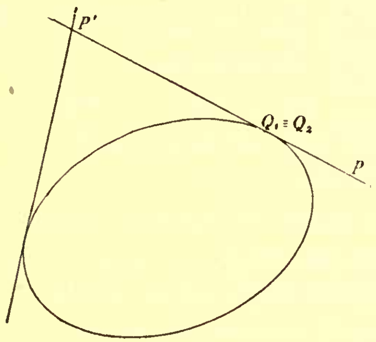
$$(5) \qquad f(x, y, z) \cdot f(x', y', z') - \left\{ f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} \right\}^2 = 0.$$

Questa è una equazione di secondo grado in x, y, z, la quale è soddisfatta dalle coordinate di ogni punto P situato sopra una tangente condotta alla conica dal punto fisso P'. Dunque la (5) rappresenta il gruppo delle tangenti uscenti da P', anzi

---

[1] Un altro esempio è offerto dall'equazione della tangente ad un cerchio; n.° 154.

la *coppia* di tangenti, essendo la (5) di *secondo* grado. Concludiamo che: *da un punto* (*reale*) *del piano si possono condurre due tangenti ad una conica, le quali però sono reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie* (coniugate). Nel primo caso il punto dicesi *esterno* rispetto alla curva, nel terzo caso *interno*, nel secondo caso (come risulterà dal seguito) il punto appartiene alla curva. È del resto evidente che se P' appartiene alla conica, le due tangenti uscenti da P' coincidono colla tangente ivi; e la (5) si riduce a



$$\left\{ f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} \right\}^2 = 0,$$

che rappresenta appunto la detta tangente contata due volte.

Comunque sia situato P', i punti di contatto delle tangenti alla conica uscenti da esso, devono avere tali coordinate (x, y, z), da soddisfare la (5) e la equazione della curva $f(x, y, z) = 0$. Tenuto conto dell'ultima relazione, la (5) si riduce a

$$(4) \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} = 0,$$

donde segue che le coordinate dei detti punti verificano anche la (4), la quale rappresenta una retta, quando si riguardino le x, y, z come variabili. I punti di contatto sono adunque le intersezioni della conica colla retta (4), di cui vedremo subito il significato geometrico.

Osservazione. — Impareremo in seguito a spezzare una equazione di secondo grado rappresentante una coppia di rette, come la (5), nelle equazioni delle due rette componenti. Per ora, volendo le equazioni staccate delle tangenti condotte da un punto P' ad una conica, potremo seguire quest'altra via, che è spesso preferibile a quella sopra indicata, quando l'equazione della curva sia data con coefficienti numerici, ad es. in coordinate non omogenee: $f(x, y, 1) = 0$. Riguardiamo come incognite le coordinate (x_0, y_0) di un punto di contatto. Scritta l'equazione della tangente in questo punto $f\binom{x,\ y,\ 1}{x_0, y_0, 1} = 0$, esprimiamo che essa deve passare per il punto $P'(x', y')$, troveremo così una prima equazione $f\binom{x',\ y',\ 1}{x_0, y_0, 1} = 0$ (equivalente alla (4)), a cui devono soddisfare le incognite. Una seconda equazione tra queste è la $f(x_0, y_0, 1) = 0$, ottenuta esprimendo che il punto (x_0, y_0) sta sulla curva. Risolvendo insieme le due equazioni, otterremo due sistemi di soluzioni (x_0, y_0), che, sostituiti successivamente nella equazione della tangente, daranno le due tangenti richieste.

200. Punti coniugati rispetto ad una conica. — Siamo ora condotti a chiederci quale sia il significato geometrico della relazione

$$(4) \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} = 0,$$

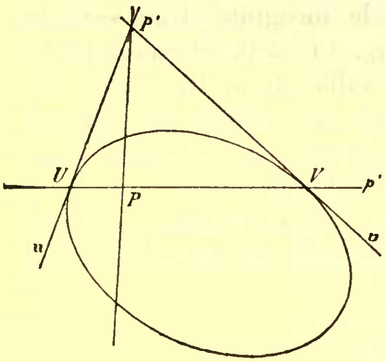
nella ipotesi che $P'(x', y', z')$ sia un punto qualsiasi del piano.

Riprendiamo perciò la (2), da cui dipendono le intersezioni Q_1, Q_2 della retta PP' colla conica, e notiamo che, se sussiste la (4), le radici k_1 e k_2 della (2) sono uguali in valore assoluto, ma di segno opposto. Vuol dire che i punti Q_1, Q_2 separano armonicamente i punti P e P' (n.° 129, δ')); od anche, che P e P' separano armonicamente le intersezioni Q_1, Q_2 della conica colla loro congiungente; e viceversa.

Ora si dice che *due punti* P *e* P' *sono coniugati* (*o reciproci*) *rispetto ad una conica, quando essi dividono armonicamente le intersezioni della loro congiungente colla curva.* Concludiamo che *la* (4) *esprime la condizione affinchè i punti* (x, y, z) *ed* (x' y', z') *siano coniugati rispetto alla conica* (1).

Sia dalla definizione, sia dalla simmetria con cui entrano nella (4) le due terne di coordinate, risulta che la condizione di coniugio di due punti P e P' è *simmetrica*; e si esprime pure dicendo che P' *è coniugato di* P, o che P *è coniugato di* P'.

Sopra ogni retta del piano esistono infinite coppie di punti coniugati, le quali formano una involuzione avente come punti doppi le intersezioni colla conica; l'involuzione è iperbolica, parabolica od ellittica, secondo che la retta è secante, tangente od esterna. I punti coniugati di sè stessi, od autoconiugati, sono i punti della conica; ciò risulta pure dal fatto che, se P' coincide con P, la (4) si identifica colla (1).



201. Polare di un punto. — Su ciascuna retta uscente dal punto fisso $P'(x', y', z')$ esiste un punto $P(x, y, z)$ coniugato di P' rispetto alla conica. Qual'è il luogo dei punti P al variare della retta?

L'equazione (4), che è soddisfatta dalle coordinate variabili (x, y, z) di P, è lineare rispetto a queste, e può scriversi:

$$(4') \quad (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')z = 0.$$

Essa rappresenta dunque una retta.

Il luogo dei punti coniugati di un punto fisso rispetto ad una conica è una retta, che dicesi la polare di quel punto rispetto alla conica. Il punto dicesi, alla sua volta, *polo* della retta.

L'equazione (4′), quando P' sia un punto della curva, rappresenta la tangente ivi alla curva; perciò riguarderemo *come polare di un punto della conica, la tangente ivi alla conica.*

202. Polarità determinata da una conica. — Le ultime considerazioni ci mostrano che una conica (1) definisce nel suo piano una corrispondenza, per la quale ad un punto generico $P'(x', y', z')$ corrisponde una retta p', *polare di* P', che ha l'equazione (4′), e le coordinate (n.° 126):

$$(6) \quad \begin{cases} \rho u' = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ \rho v' = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ \rho w' = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{cases}$$

(essendo ρ un fattore di proporzionalità).

Ora queste relazioni, confrontate colle (1) del n.° 186, ci dicono che la nominata corrispondenza è una *correlazione* tra i due piani sovrapposti descritti, l'uno dal punto $P'(x', y', z')$, l'altro dalla retta $p'(u', v', w')$. Ciò almeno nella ipotesi che sia *diverso da* 0 il determinante

$$(7) \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ipotesi che sarà sottintesa nei paragrafi seguenti, finchè non si dichiari il contrario (¹).

Il determinante A, che risulta dall'eliminazione delle variabili fra le tre semiderivate parziali della equazione (1), dicesi *discriminante* della (1), o della conica corrispondente (²). Esso è un determinante simmetrico (poichè $a_{hk} = a_{kh}$); quindi (n.° 188) la correlazione ora nominata ha carattere involutorio, è una *polarità*. Ad essa potremo dunque applicare le proprietà dimostrate nel n.° 188. Anche le locuzioni ivi adottate concordano con quelle qui introdotte, perchè ad es. la definizione di punti coniugati in una polarità, tali cioè che l'uno stia sulla polare dell'altro, equivale alla definizione recente, secondo la quale due punti diconsi coniugati rispetto ad una conica, quando essi dividono armonicamente le intersezioni della loro congiungente colla curva.

Come ogni punto $P(x', y', z')$ possiede una unica polare definita dalle (6), così ogni retta $p'(u', v', w')$ possiede un unico polo, le cui coordinate sono fornite dalle formole (n.° 188)

$$(8) \qquad \begin{cases} \sigma x' = A_{11}u' + A_{12}v' + A_{13}w', \\ \sigma y' = A_{21}u' + A_{22}v' + A_{23}w', \\ \sigma z' = A_{31}u' + A_{32}v' + A_{33}w', \end{cases}$$

dove $A_{hk} (= A_{kh})$ è il complemento algebrico dell'elemento a_{hk} entro al determinante A.

(¹) Risulterà poi che con tale restrizione si escludono soltanto le coniche degeneri, le quali presentano interesse secondario.

(²) In generale, data una funzione razionale intera ed omogenea di n variabili, dicesi *discriminante* il risultante delle n derivate parziali della funzione, rispetto alle variabili; il discriminante uguagliato a zero esprime dunque la condizione perchè quelle n derivate si annullino insieme, per un sistema di valori non tutti nulli delle variabili. Ad es. il discriminante di $ax^2 + 2bxy + cy^2$ è il risultante delle due funzioni $ax + by$, $bx + cy$, ossia $ac - b^2$; ecc.

203. Equazione tangenziale di una conica. — La teoria della correlazione polare ci insegna (n.° 188) che una polarità piana possiede una *curva fondamentale* del secondo ordine, luogo dei punti che appartengano alle proprie polari, ed un *inviluppo fondamentale* di seconda classe, formato dalle rette che contengono i propri poli. Quanto alla curva, se confrontiamo l'equazione (4) del n.° 188 colla (1) del n.° 197, vediamo che *la curva fondamentale della nostra polarità* (6) *è precisamente la conica* $f(x, y, z) = 0$, *da cui siamo partiti*; risultato prevedibile, poichè ogni punto della conica appartiene alla propria polare (tangente ivi alla curva).

Rimane ora da esaminare come sia formato l'inviluppo fondamentale, la cui equazione in coordinate di rette fu scritto al n.° 188, (4′), sotto la forma

$$(9)\quad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0.$$

Notiamo perciò che, se una retta $p(u, v, w)$ appartiene al detto inviluppo, essa, per definizione, contiene il proprio polo P, il quale (giacendo sulla propria polare) starà sulla conica (1); ma allora p è tangente alla conica in P; e viceversa. Dunque la (9) rappresenta l'inviluppo delle tangenti alla nostra conica (1); donde il risultato fondamentale:

Le tangenti ad una conica (*di discriminante non nullo*) *formano un inviluppo di seconda classe.*

L'equazione (9) *di questo* (o, come si suol dire, l'equazione *tangenziale*, o *plückeriana*, della conica) *si ottiene dall'equazione puntuale* (1) *della conica, sostituendo alle coordinate di punti, le coordinate di rette, ed ai coefficienti, i rispettivi complementi algebrici estratti dal discriminante* (1).

---

(1) Un'altra forma, sotto cui si suole scrivere l'equazione tangenziale della conica, è la seguente, che si riconosce, mediante sviluppo, non differire dalla (9):

$$\begin{vmatrix} o & u & v & w \\ u & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ v & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ w & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

204. Metodo delle polari reciproche. — Riassumendo gli ultimi risultati, possiamo dire:

Una conica (di discriminante non nullo) determina nel suo piano una correlazione polare, la quale muta ogni punto del piano nella propria polare, ed ogni retta nel proprio polo; in particolare, ogni punto della conica corrisponde alla propria tangente, e viceversa.

Questo teorema completa, invertendolo, il teorema del n.° 188, secondo il quale una polarità piana definisce una conica (fondamentale). Ora vediamo che i due enti *conica* e *polarità piana* sono così strettamente collegati, che, dato l'uno, rimane individuato l'altro. Ciò spiega come lo Staudt abbia potuto definire e studiare le coniche in base alla teoria della polarità.

La polarità determinata da una conica trasforma una figura composta di m punti ed n rette, in una figura (*polare* della prima rispetto alla curva) composta di m rette ed n punti; ad es., un poligono *iscritto* nella conica (avente cioè i suoi vertici sulla curva) ha come figura polare il moltilatero *circoscritto,* formato dalle tangenti nei vertici di quello. Due figure mutuamente polari hanno proprietà duali. Così, da ogni proprietà grafica (proiettiva) relativa ai punti di una conica si deduce, per dualità, una proprietà grafica relativa alle tangenti della curva.

Questa considerazione può applicarsi a tutte le proposizioni sulle coniche viste sinora. Ad es., la proprietà: « una retta ha in comune con una conica due punti (reali e distinti, o reali e coincidenti o immaginari) », tradotta mediante la polarità, ci dice che « per un punto si possono condurre ad una conica due tangenti (reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie) », proposizione che avevamo già ottenuto per altra via (n.° 199). Quì però vediamo inoltre che la figura costituita da una retta p' e dalle sue intersezioni U, V colla conica, si muta, per polarità, nella figura costituita da un punto P', polo di p', e dalle rette u, v passanti per P' e tangenti alla conica in U e V (v. fig. di pag. 342). Donde segue:

Le tangenti ad una conica uscenti da un punto toccano la conica nelle intersezioni di questa colla polare del punto; (ciò che analiticamente risultava dall'equazione (4) del n.° 199, interpretata nel n.° 201). Supposta la conica reale, vediamo di qua che *un punto esterno, od interno, ha, rispettivamente, come polare una retta secante, o non secante,* mentre i punti della curva hanno come polari le relative tangenti.

Fu precisamente la considerazione di due figure mutuamente polari rispetto ad una conica che condusse il PONCELET (1818-24) a formulare, per la prima volta, la legge di dualità piana, da lui denominata *metodo delle polari reciproche.* Solo qualche anno più tardi (1825-26) GERGONNE enunciò, sotto forma indipendente dalla teoria delle coniche, quella legge, che trovò la sua piena giustificazione nelle opere di MÖBIUS (1827) e PLÜCKER (1828).

205. Rette coniugate rispetto ad una conica. — Volendo tradurre per dualità anche i procedimenti analitici dei paragrafi precedenti, conviene partire da una equazione di secondo grado in coordinate di rette, per es. omogenee,

$$(10)\qquad F(u,\, v,\, w) \equiv \alpha_{11} u^2 + \alpha_{22} v^2 + \alpha_{33} w^2 + 2\alpha_{12} uv + 2\alpha_{13} uw + 2\alpha_{23} vw = 0,$$

la quale rappresenta un inviluppo di seconda classe, ad es. quello formato dalle tangenti ad una conica; (sarà la conica (1) del n.° 197, ove si supponga la (10) equivalente alla (9) del n.° 203, e quindi le α_{hk} uguali o proporzionali alle A_{hk}). Allora il problema di condurre da un punto P le tangenti alla conica porta a risolvere, rispetto alle incognite $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, il sistema formato dalla $F(u, v, w) = 0$ colla equazione lineare del punto $lu + mv + nw = 0$.

Il concetto di punti coniugati rispetto ad una conica, di cui abbiamo dato due definizioni equivalenti (v. n.° 202), conduce, per dualità, al concetto di *rette coniugate,* o *reciproche, rispetto ad una conica,* del quale pure daremo due definizioni equivalenti: *due rette sono coniugate quando dividono armonicamente le tangenti alla conica condotte dalla loro intersezione, ossia quando l'una passa per il polo dell' altra.* Dalla prima definizione segue che: *per ogni punto del piano passano infinite coppie di rette coniugate rispetto ad una conica, le quali formano una involuzione avente, come rette doppie, le tangenti condotte dal punto alla curva;* la involuzione sarà dunque iperbolica, ellittica o parabolica secondo che il punto sarà esterno, interno o sulla curva.

La condizione analitica perchè le due rette (u, v, w), (u', v', w') siano coniugate, si forma, partendo dal polinomio

$F(u, v, w)$, come la condizione di coniugio di due punti fu ottenuta partendo dal polinomio $f(x, y, z)$; potremo adunque scriverla concisamente sotto la forma

(11) $$F\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ u', & v' & w' \end{pmatrix} = 0,$$

dove il simbolo a primo membro ha un significato chiaro, quando si badi alla (3) del n.° 197.

Partendo dall' equazione (10) di un inviluppo di seconda classe, possiamo chiedere la equazione (in coordinate di punti) del luogo dei punti di contatto dell' inviluppo. Basterà seguire la stessa via che ha servito per il passaggio inverso (duale). Si scriva il discriminante $\mathbf{A}$ della (10), determinante del terzo ordine formato colle α_{hk}, che supporremo diverso da zero; poi si sostituiscano nella (10), al posto delle u, v, w, le x, y, z, ed al posto dei coefficienti, i rispettivi complementi algebrici estratti da $\mathbf{A}$; si troverà così l'equazione di una *conica*, che è il luogo richiesto. Applichiamo ad es. questo procedimento all' equazione (9) del n.° 203; in questa ipotesi il discriminante è

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A^2,$$

ed ha come minori (in virtù di un noto teorema):

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = Aa_{11}, \ldots, - \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = Aa_{12}, \ldots;$$

dunque la conica luogo dei punti di contatto dell' inviluppo (9) sarà

$$A(a_{11}x^2 + \cdots + 2a_{12}xy + \cdots) = 0,$$

ossia la $f(x, y, z) = 0$ primitiva (poichè $A \neq 0$); risultato facilmente prevedibile.

In base a queste ultime considerazioni, noi potremo riguardare una conica (non degenere) sia come luogo degli infiniti suoi punti, sia come inviluppo delle infinite sue tangenti; nel primo caso la conica è rappresentata da una equazione di secondo grado in coordinate di punti (equazione *puntuale*), nel secondo caso da una equazione di secondo grado in coordinate di rette (equazione *tangenziale*). Il passaggio dall'una all'altra equazione è regolato dal procedimento sopra esposto. Questa considerazione non si estende però alle coniche degeneri (a discriminante nullo), come poi si dirà.

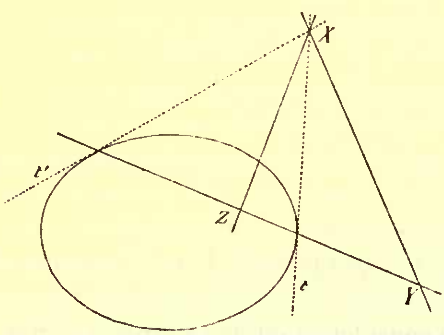
206. Triangoli autopolari. — La nozione di triangolo autopolare in una polarità (n.° 188, Oss.) si trasporta senz'altro nella teoria delle coniche. Si dirà *autopolare* (od *autoconiugato*, *autoreciproco*) *rispetto ad una conica* un triangolo, di cui ciascun vertice sia polo del lato opposto; i vertici saranno dunque coniugati a due a due, e così pure i lati. *Esistono infiniti triangoli autopolari*; per costruirne uno si prenda ad arbitrio un vertice X, che non stia sulla conica, si tracci la polare di X, e su questa si prendano gli altri due vertici Y, Z, in modo che siano distinti e coniugati rispetto alla conica; ciò è possibile in infiniti modi, potendosi ad es. Y assumere ad arbitrio sulla detta polare, purchè non sulla conica.

Ora è facile vedere che:

In un triangolo autopolare rispetto ad una conica reale

un vertice è interno e due sono esterni.	*un lato è esterno e due lati sono secanti.*

Se infatti il vertice X da cui si parte è, ad es., esterno, sarà il lato YZ secante (n.° 204); ed i due punti Y, Z, dovendo separare armonicamente le intersezioni colla curva, saranno uno, ad es. Y, esterno, l'altro Z interno. Mentre, se si parte da un vertice Z interno, il lato opposto XY risulta esterno (n.° 204), e quindi esterni saranno i punti X, Y.



Osservazione. — Si osservi però che in questo ragionamento si è fatto tacitamente uso delle due seguenti proposizioni di sinistra, le quali, sebbene suggerite dall'intuizione, devono esser dimostrate rigorosamente:

a) *Ogni punto giacente sopra una retta esterna ad una conica, è esterno alla curva.*	a') *Ogni retta passante per un punto interno ad una conica, è secante.*

b) *Le intersezioni di una conica con una retta secante determinano su questa due segmenti proiettivi, di cui uno è composto di punti interni, l'altro di punti esterni.*

b') *Le tangenti condotte ad una conica da un punto esterno determinano nel fascio avente ivi il centro due angoli completi, di cui uno è composto di rette esterne, l'altro di rette secanti.*

Queste proposizioni valgono per coniche reali, non degeneri.

Ora nel n.° seguente dimostreremo per via analitica le dette proposizioni. Ma possiamo anche giustificarle, osservando anzitutto che esse valgono certamente pel cerchio, in secondo luogo che esse sono di natura proiettiva, e quindi si trasportano ad ogni curva che possa dedursi dal cerchio mediante una proiezione. Vedremo d'altronde che ogni conica reale, non degenere, può riguardarsi come proiezione di un cerchio; quindi quelle proposizioni valgono per ogni conica siffatta.

* **207. Equazione di una conica riferita ad un triangolo autopolare.** — È interessante esaminare come si presenti la equazione di una conica, quando essa venga riferita ad un sistema di coordinate proiettive (x, y, z), avente come fondamentale un triangolo autopolare XYZ. Posto che sia

$$(1)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

l'equazione della curva, osserviamo che i punti fondamentali $X(1, 0, 0)$, $Y(0, 1, 0)$, $Z(0, 0, 1)$ hanno, rispetto alla (1), le rette polari

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0. \end{aligned}$$

Ora queste rette devono coincidere ordinatamente colle rette fondamentali

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Perciò deve aversi $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Con ciò la (1) si riduce alla forma

$$(1)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0,$$

che si suol dire *equazione normale*, o *canonica*, della conica.

L'equazione puntuale di una conica, riferita ad un triangolo autopolare come fondamentale, contiene solo i quadrati delle coordinate.

Un analogo risultato vale per l'equazione tangenziale della curva riferita ad un triangolo autopolare; si trova infatti una equazione del tipo

$$\alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 + \alpha_{33}w^2 = 0.$$

E si riconosce facilmente, in base alle considerazioni del n.° 205, che le due equazioni ora scritte rappresentano una stessa conica, riferita allo stesso triangolo fondamentale, quando si abbia

$$a_{11} : a_{22} : a_{33} = \frac{1}{\alpha_{11}} : \frac{1}{\alpha_{22}} : \frac{1}{\alpha_{33}}.$$

Ritorniamo alla (1), ed esaminiamo i casi che essa può presentare. Supponiamo diversi da zero i tre coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{33}; (nella ipotesi opposta, se ad es. fosse $a_{11} = 0$, si annullerebbe il discriminante $A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ della (1), e la curva si spezzerebbe nelle due rette $\sqrt{a_{22}}\, y \pm \sqrt{-a_{33}}\, z = 0$, armoniche rispetto ai lati XY, XZ del triangolo fondamentale). I tre coefficienti della (1) avranno lo stesso segno, oppure due avranno un segno ed il rimanente il segno opposto. Ma nella prima ipotesi la conica non ha nessun punto reale, è completamente *immaginaria*, giacchè allora il primo membro della (1) non può annullarsi che per $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, terna di valori a cui non corrisponde alcun punto del piano.

Supponiamo invece che due coefficienti della (1), ad es. a_{11}, a_{22}, abbiano lo stesso segno, che potremo supporre positivo (cambiando segno ove occorra al primo membro della equazione), e sia a_{33} negativo. Per tener presenti queste ipotesi poniamo

$$a_{11} = \alpha^2, \quad a_{22} = \beta^2, \quad a_{33} = -\gamma^2,$$

dove α, β, γ sono quantità reali positive, e scriviamo la (1) sotto la forma

$$(2) \qquad \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 - \gamma^2z^2 = 0.$$

La conica ha certo punti reali, potendosi assegnare valori arbitrari (non entrambi nulli) ad x, y, pur di calcolare convenientemente z. La conica (2) sega il lato $x = 0$ del triangolo autopolare in due punti reali e distinti dati da

$$\beta^2y^2 - \gamma^2z^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{y}{z} = \pm\frac{\gamma}{\beta};$$

e sega pure il secondo lato $y = 0$ in punti reali e distinti dati da $\frac{x}{z} = \pm \frac{\gamma}{\alpha}$; ma non ha punti reali comuni col terzo lato $z = 0$ $\left(\text{perchè si avrebbe } \frac{x}{y} = \pm i \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Dunque dei tre lati del triangolo autopolare XYZ, due ZX, ZY sono secanti e il terzo XY esterno; e (per polarità) dei tre vertici, due X, Y sono esterni ed uno Z interno. Ciò conferma il risultato del n.° precedente relativo alla posizione di un triangolo autopolare rispetto ad una conica reale.

Per il vertice Z, che è poi un punto qualsiasi interno alla nostra conica (2), conduciamo una retta ad arbitrio $y = kx$. Questa sega la curva (2) in due punti (x, kx, z), tali che

$$(\alpha^2 + \beta^2 k^2) x^2 - \gamma^2 z^2 = 0,$$

donde

$$\frac{x}{z} = \frac{\gamma}{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 k^2}},$$

valori certamente *reali*. La retta è adunque secante; e ciò dimostra il lemma a') della Oss. del n.° precedente.

Se invece consideriamo un punto esterno alla curva, qual'è il punto fondamentale X (v. la fig. di pag. 348), e per esso conduciamo una retta $z = ky$, le intersezioni (x, y, ky) di questa colla conica (2) sono date da

$$\alpha^2 x^2 + (\beta^2 - \gamma^2 k^2) y^2 = 0,$$

ossia da

$$\frac{x}{y} = \frac{\pm \sqrt{\gamma^2 k^2 - \beta^2}}{\alpha};$$

esse sono reali e distinte, reali e coincidenti o immaginarie coniugate, secondo che

$$|k| \gtreqless \frac{\beta}{\gamma}.$$

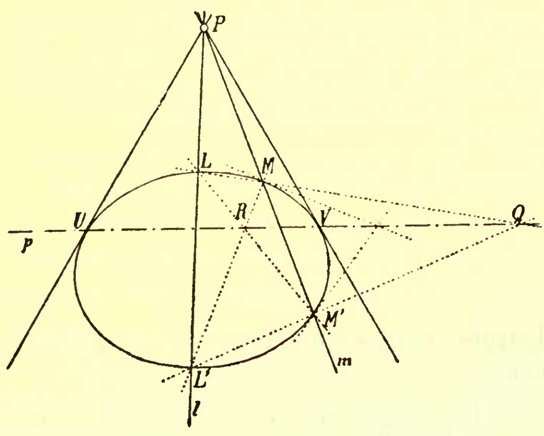
Ai valori $k = \pm \frac{\beta}{\gamma}$ corrispondono dunque le due *tangenti* t, t' (di equazioni $\beta y \mp \gamma z = 0$) uscenti da X; ai valori di k compresi fra $-\frac{\beta}{\gamma}$ e $+\frac{\beta}{\gamma}$ corrispondono le rette del fascio X che appartengono ad uno degli angoli completi $\widehat{tt'}$ (precisamente a quello in cui sta il lato XY per cui $k = 0$), rette che, in virtù della nostra disuguaglianza, sono *esterne* rispetto alla conica; finalmente ai valori rimanenti di k corrispondono le rette dell'altro angolo completo $\widehat{tt'}$, le quali sono *secanti* della conica. E con ciò rimane giustificato anche il lemma b') del n.° 206. (Le proposizioni a), b) seguono per dualità).

208. Costruzione della polare di un punto e del polo di una retta. — Ritorniamo alla definizione di polare di un punto (n.° 201); da essa segue subito la costruzione della detta polare rispetto ad una conica reale, interamente tracciata.

Si conducano infatti per il polo P (che supporremo non stia sulla curva) più trasversali l, m, ..., che seghino la curva nelle coppie di punti LL', MM', ...; si determinino i punti

$$Q \equiv LM \cdot L'M', \quad R \equiv LM' \cdot L'M, \ldots;$$

la retta $p \equiv QR\ldots$, contenendo i coniugati armonici di P rispetto alle coppie di punti LL', MM', ..., sarà la polare richiesta. *La polare di un punto rispetto ad una conica contiene adunque due punti diagonali* (Q, R) *di ogni quadrangolo completo* (LL'MM') *iscritto nella conica, il cui terzo punto diagonale cada nel polo; contiene inoltre i punti di contatto* (U, V) *delle tangenti alla curva condotte dal polo, quando questo sia*

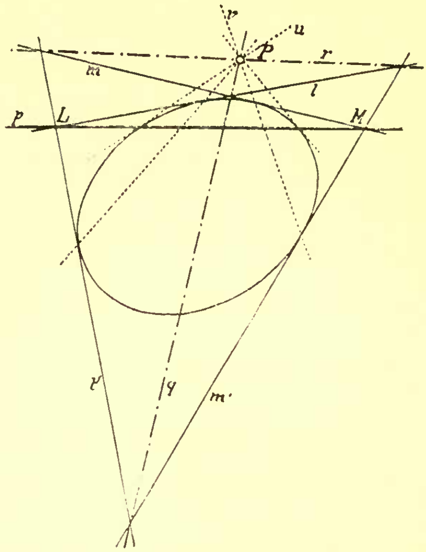


esterno (n.° 204); *contiene finalmente le intersezioni delle tangenti alla conica nelle coppie di punti* (LL', MM', ...) *allineati col polo.* L'ultima parte dell'enunciato segue dal fatto che le rette LL', MM', ... passanti per P, devono avere i loro poli sulla polare p (n.° 188).

Dualmente, volendo costruire di una retta p il polo rispetto ad una conica, si assumano su p più punti (esterni) L, M, ..., dai quali si conducano le coppie di tangenti ll', mm', ... alla conica; si costruiscano le rette

$$q \equiv lm \cdot l'm', \quad r \equiv lm' \cdot l'm, \ldots ;$$

il punto $P \equiv qr \ldots$, giacendo sulle rette LP, $MP \ldots$ coniugate armoniche di p rispetto alle coppie di tangenti ll', mm', ..., sarà il polo richiesto di p. Dunque: *per il polo di una retta rispetto ad una conica passano due rette diagonali* (q, r) *di ogni quadrilatero completo* (ll′mm′) *circoscritto alla conica, la cui terza retta diagonale coincida colla polare; passano inoltre le tangenti* (u, v) *alla curva nelle intersezioni colla polare, quando questa sia secante* (n.° 204); *passano finalmente le congiungenti i punti di contatto delle coppie di tangenti* (ll′, mm′, ...) *secantisi sulla polare.*

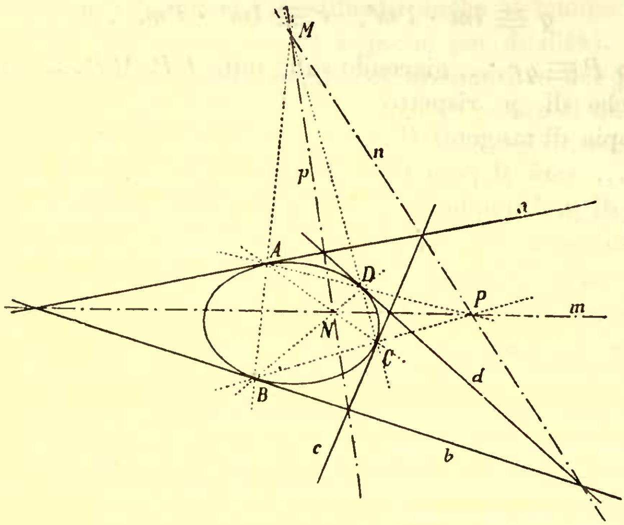


209. Un teorema sui triangoli autopolari. — Gli ultimi teoremi (ove si considerino il quadrangolo iscritto $LL'MM'$ col suo triangolo diagonale PQR, e la figura duale) ci conducono subito ai seguenti:

Il triangolo diagonale di ogni quadrangolo iscritto in una conica è autopolare.

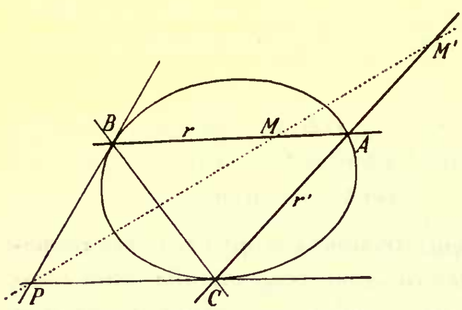
Il trilatero diagonale di ogni quadrilatero circoscritto ad una conica è autopolare.

E si può aggiungere: *quel triangolo e quel trilatero coincidono, se i lati del quadrilatero sono tangenti alla conica nei vertici del quadrangolo.* Infatti la polarità determinata da una conica trasforma un quadrangolo iscritto $ABCD$, ed il suo triangolo diagonale PQR, nel quadrilatero $abcd$ formato dalle tangenti in A, B, C, D, e nel suo trilatero diagonale pqr; d'altra parte il triangolo PQR è autopolare, vale a dire è trasformato in sè stesso dalla polarità; quindi esso coincide con pqr.



* **210. Un teorema di Staudt sulle coniche.** — In certe questioni sulle coniche, ad es. nella trattazione di queste curve secondo la via seguita dallo Staudt, giova il teorema a cui conducono le considerazioni seguenti.

Siano r, r' due rette qualisivogliano, non coniugate rispetto alla curva. Mentre un punto M descrive una punteggiata su r, la polare m descrive un fascio proiettivo a quella intorno al polo di r,



che, per ipotesi, non cade su r'; quindi il punto $M' \equiv mr'$ descrive sopra r' una punteggiata proiettiva alla prima; punti corrispondenti, come M, M', sono coniugati rispetto alla conica. Le due punteggiate sono anzi prospettive se il punto $A \equiv rr'$ è autoconiugato, cioè se cade sulla conica. Per trovare, in tal caso, il centro di prospettiva P, si considerino le due ulteriori intersezioni B e C delle rette r, r' colla conica, e si noti che, quando M cade in B, deve M' appartenere alla polare di B, ossia alla tangente in B, sicchè questa tangente passa per P; similmente passa per P la tangente alla conica in C. Il centro di prospettiva P è adunque il polo del terzo lato BC del triangolo iscritto ABC. Viceversa, ogni retta passante per P, e quindi coniugata col lato BC, sega gli altri due lati $r \equiv AB$, $r' \equiv AC$ in due punti M, M' corrispondenti nella prospettività nominata, e quindi coniugati rispetto alla curva. Segue di qua il teorema di sinistra:

Se un triangolo è iscritto in una conica, ogni retta coniugata ad un lato sega gli altri due in due punti coniugati rispetto alla curva; e viceversa.

Se un triangolo è circoscritto ad una conica, ogni punto coniugato ad un vertice proietta gli altri due mediante due rette coniugate rispetto alla curva; e viceversa.

Ed è pur chiaro che, se in un triangolo ABC, di cui due vertici A, B appartengono ad una conica, i lati AC, BC segano una retta coniugata al terzo lato in punti coniugati rispetto alla curva, anche il terzo vertice C apparterrà alla curva; e dualmente.

Osservazione. — Se nella figura si immagina che sia fissa la trasversale PMM', e vari il punto A sulla conica, le due rette BA, CA varieranno, segando sempre sulla trasversale coppie di punti MM' coniugati rispetto alla conica, e quindi coniugati in una proiettività involutoria. Quelle due rette BA, CA descriveranno adunque due fasci proiettivi di centri B e C; donde segue un importantissimo teorema, che ritroveremo per altra via (insieme al duale) nel Capitolo seguente: *le rette che proiettano da due punti fissi di una conica un punto variabile lungo la curva, descrivono due fasci proiettivi.*

211. Coniche degeneri. — Nello studiare la polarità determinata da una conica abbiamo lasciato da parte il caso che sia nullo il discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Vogliamo ora esaminare quale particolarità presenti la curva

$$(1) \qquad f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

quando è verificata la relazione

$$(2) \qquad A = 0.$$

È noto che la (2) è condizione necessaria e sufficiente, affinchè esistano tre numeri non tutti nulli x_0, y_0, z_0, tali da soddisfare alle tre equazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0, \end{cases}$$

ottenute annullando le tre semiderivate parziali del polinomio (1); precisamente si ha, quando non siano nulli tutti i minori del secondo ordine di A,

$$x_0 : y_0 : z_0 = A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{21} : A_{22} : A_{23} = A_{31} : A_{32} : A_{33}.$$

Consideriano ora quel punto V che ha le coordinate (x_0, y_0, z_0). Esso intanto sta sulla curva (1), perchè se, dopo aver sostituito nelle (3), al posto delle variabili, le x_0, y_0, z_0, moltiplichiamo le tre identità così ottenute per x_0, y_0, z_0, e sommiamo, risulta

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Se invece moltiplichiamo le stesse identità rispettivamente per x, y, z, coordinate di un punto arbitrario P, e sommiamo, avremo

$$f\begin{pmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ x, & y, & z \end{pmatrix} = 0.$$

Approfittando di queste uguaglianze, cerchiamo le intersezioni della curva (1) colla retta VP. Se

$$Q(kx + x_0,\ ky + y_0,\ kz + z_0)$$

è una tra queste, il parametro k deve soddisfare all'equazione (cfr. n.° 197)

$$(4) \quad k^2 f(x, y, z) + 2kf\begin{pmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ x, & y, & z \end{pmatrix} + f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

la quale, avendo nulli il termine noto e il coefficiente di $2k$, fornirà per k due valori uguali a zero. Segue che le intersezioni della retta VP colla curva (1) coincidono in V; a meno che il punto $P(x, y, z)$ stesso non appartenga alla curva, nel qual caso, avendosi pure $f(x, y, z) = 0$, la (4) diviene una identità, ed è soddisfatta da ogni valore di k, sicchè la retta VP appartiene allora alla curva. Tutto ciò dimostra che la curva (1) è costituita da due rette; queste si ottengono, ad es., proiettando da V le intersezioni della curva stessa con una trasversale qualsiasi non passante per V. Viceversa, se una equazione (1) rappresenta una coppia di rette, invertendo il ragionamento ora fatto, si trova che deve esser nullo il discriminante. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una equazione di secondo grado, in coordinate di punti, rappresenti una coppia di rette, è che sia zero il discriminante; le coordinate omogenee della intersezione delle due rette (*punto doppio* della conica degenere) *sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una stessa linea nel discriminante* ([1]).

Le due rette componenti la coppia possono esser reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie coniugate. Il caso intermedio va però considerato in modo speciale, come risulta da ciò che segue.

Noi abbiamo supposto, nella discussione precedente, che non siano tutti nulli i minori del secondo ordine di A. Esaminiamo ora la ipotesi opposta. Allora le equazioni (3) vengono verificate da ogni terna di valori (x_0, y_0, z_0) soddisfacenti una di esse, che non sia una identità. Sarà questa, ad es., la prima delle (3), quando non siano tutti nulli i coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{13}. Questa equazione rappresenta una retta, di cui ogni punto (x_0, y_0, z_0) ha le proprietà che prima spettavano al punto V. Perciò la (1) rappresenta la retta stessa contata due volte (*retta doppia*). Ciò d'altronde risulta subito dall'identità che segue, o da una delle analoghe, facilmente dimostrabili nelle ipotesi $A_{hk} = 0$ in cui ci siamo posti:

$$a_{11} f(x, y, z) \equiv (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z)^2.$$

([1]) In linguaggio algebrico, l'annullarsi del discriminante della (1) è la condizione perchè il polinomio (1) sia il prodotto di due funzioni lineari ed omogenee di x, y, z.

Concludiamo che: *una equazione di secondo grado, in coordinate di punti, il cui discriminante abbia nulli tutti i minori di secondo ordine, rappresenta una retta doppia*; *e viceversa* (¹).

La coppia di rette distinte e la retta doppia sono varietà di luoghi del secondo ordine.

212. Ricerca delle rette componenti una conica degenere. — Verificato che la equazione di secondo grado (1), o in coordinate cartesiane ordinarie

$$(1') \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

rappresenta una coppia di rette, si possono chiedere le equazioni staccate delle due rette costituenti la coppia. A tal fine si ordini la (1′) rispetto ad una delle variabili, ad es. rispetto ad x, e si risolva come se x fosse la sola incognita; si troverà, quando $a_{11} \neq 0$,

$$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{(a_{12}y + a_{13})^2 - a_{11}(a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33})}}{a_{11}},$$

ossia

$$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{-A_{33}y^2 + 2A_{23}y - A_{22}}}{a_{11}}.$$

Ora il trinomio sotto al radicale è il quadrato esatto di un binomio lineare in y (del tipo $\alpha y + \beta$, dove $\alpha = \sqrt{-A_{33}}$, $\beta = \frac{A_{23}}{\alpha}$), perchè si ha

$$A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = a_{11}A = 0.$$

L'espressione di x può dunque scriversi sotto la forma

$$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm (\alpha y + \beta)}{a_{11}},$$

che rappresenta, prendendo l'uno o l'altro segno, le due rette richieste. Queste sono reali o immaginarie, secondo che α e β sono reali o immaginarie.

Il procedimento ora indicato cade in difetto se $a_{11} = a_{22} = 0$; (se fosse $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, si potrebbe risolvere la (1′) rispetto ad y); ma allora, ricordando la ipotesi $A \equiv a_{12}(2a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) = 0$, e supponendo $a_{12} \neq 0$ perchè il polinomio (1′) non si abbassi

---

(¹) In altri termini, le relazioni $A_{hk} = 0$ danno le condizioni (tre indipendenti) perchè il polinomio (1) sia il quadrato di una funzione lineare ed omogenea di x, y, z.

a primo grado, si riconosce direttamente che la (1') può scriversi sotto la forma

$$2a_{12}\left(x+\frac{a_{23}}{a_{12}}\right)\left(y+\frac{a_{13}}{a_{12}}\right)=0,$$

e quindi rappresenta le due rette

$$a_{12}x+a_{23}=0, \quad a_{12}y+a_{13}=0.$$

213. Particolari coppie di rette. — Talvolta il semplice aspetto dell'equazione di una conica lascia vedere che la curva si spezza in due rette. Così ad es., un'equazione di secondo grado ed omogenea, in coordinate cartesiane ordinarie,

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$$

rappresenta due rette uscenti dall'origine (n.° 139), di equazioni

$$\frac{x}{y}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Ed una equazione quadratica del tipo

$$a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2=0,$$

dove x_0, y_0 sono costanti, rappresenta due rette uscenti dal punto (x_0, y_0), delle quali si ottengono le equazioni staccate scrivendo nella penultima formola $\frac{x-x_0}{y-y_0}$ al posto di $\frac{x}{y}$; le due nuove rette sono parallele alle antiche.

214. Polarità rispetto ad una coppia di rette. — Rispetto ad una conica $f(x, y, z)=0$ spezzata in due rette uscenti da un punto $V(x_0, y_0, z_0)$, ogni punto $P'(x', y', z')$ del piano, distinto da V, ha ancora una determinata retta polare che si definisce nel solito modo (n.° 201), ed ha l'equazione

$$f\begin{pmatrix}x, & y, & z\\ x', & y' & z'\end{pmatrix}=0.$$

Questa retta passa sempre per il punto V, come risulta da considerazioni sia geometriche, sia analitiche (n.° 211). La detta polare è coniugata armonica della retta VP', rispetto alle due rette componenti la coppia, e coincide colla *polare* nominata al n.° 70, Oss. I. Mentre il punto P' descrive una retta uscente da V, la polare non varia; manca qui adunque la corrispondenza biunivoca fra polo e polare, che sussiste per le coniche a discriminante non nullo. E la polare di V è indeterminata, perchè il polinomio $f\begin{pmatrix}x, & y, & z\\ x_0, & y_0, & z_0\end{pmatrix}$ è identicamente nullo (n.° 211). Viceversa, una retta non passante per V ha sempre come polo, rispetto ad una coppia di rette, il punto V, mentre una retta uscente da V ha infiniti poli appartenenti alla coniugata armonica di essa rispetto alle due rette della coppia.

215. Inviluppi degeneri. — I risultati sulle coniche degeneri possono subito trasformarsi per dualità. Così si ottiene il teorema:

Un' equazione di secondo grado in coordinate di rette, il cui discriminante sia nullo, rappresenta un inviluppo che si scinde in due punti (o meglio, *in due fasci*); *i due punti coincidono, se sono nulli inoltre tutti i minori di secondo ordine estratti dal discriminante.*

La *coppia di punti distinti* e il *punto doppio* sono varietà di inviluppi della seconda classe.

Conviene qui ricordare (n.° 203) che se il discriminante A di una curva del secondo ordine

$$(1)\qquad f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

non è zero, alla curva è legato un inviluppo di seconda classe costituito dalle infinite tangenti, il quale ha l'equazione

$$(\mathrm{I})\qquad F(u, v, w) \equiv A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0.$$

Ora se $A = 0$, che cosa rappresenta quest'equazione? Si osservi che, nella ipotesi attuale, il discriminante della (I)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

ha nulli tutti i minori di secondo ordine; quindi la (I) *rappresenta un inviluppo che degenera nel punto*

$$A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w = 0,$$

ossia nel punto (A_{11}, A_{12}, A_{13}), *da contarsi due volte* (1); questo punto è, come sappiamo, il punto doppio della coppia. Ciò del resto si poteva prevedere, perchè una coppia di rette è segata

(1) Se A_{11}, A_{12}, A_{13} fossero tutti nulli, si ricorrerebbe alla semiderivata del polinomio F rispetto a v od a w.

in punti coincidenti dalle sole rette che passano per il punto doppio.

Se però la curva (1) degenera in due rette coincidenti, sono nulli tutti i coefficienti dell'equazione (I), e l'equazione stessa diviene una identità. *Al luogo non è più legato un inviluppo di seconda classe* (come, del resto, risulta dal fatto che ogni retta del piano sega una retta doppia in due punti coincidenti).

Per dualità: *Ad un inviluppo di seconda classe che degenera in due punti, si può considerare collegato il luogo costituito dalla retta congiungente i due punti, contata due volte. Ma se i due punti coincidono, all'inviluppo non è più collegato un determinato luogo di secondo ordine.*

Esercizi I. — 1) Scrivere le equazioni delle tangenti alla conica $x^2 + 2xy - y^2 - 2x - 4y = 0$ nell'origine e nei punti in cui essa sega ulteriormente gli assi coordinati.

2) Equazione della tangente alla curva $2x^2 - xy + y^2 - 3x - 1 = 0$ nel punto $(1, 2)$.

3) La curva $2xy + 4x - 2y + 5 = 0$ passa per i punti all'infinito degli assi; determinare le tangenti in quei punti (asintoti). La stessa questione per la curva $2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

4) Scrivere la equazione di una parabola che passi per l'origine, toccando ivi la retta $3x - y = 0$, e passi per il punto $(1, 2)$, toccando ivi la retta $4x - y - 2 = 0$; il problema ha due soluzioni, delle quali però una è degenere.

5) Scrivere la equazione di una iperbole che passi per i punti all'infinito degli assi, toccando ivi le rette $y + 1 = 0$, $x - 2 = 0$ rispettivamente, e passi inoltre per il punto $(3, 5)$.

6) Determinare l'equazione complessiva delle tangenti condotte alla conica $a_{11}x^2 + \cdots = 0$ dall'origine, o dal punto all'infinito di uno degli assi. Si deduca che l'origine è esterna, od interna alla conica, secondo che $a_{33}A < 0$, oppure > 0.

7) Si determinino, ad es., per la conica dell'es. 2) le tangenti uscenti dall'origine, o le tangenti parallele all'asse delle x; si trovino di queste i punti di contatto, e si verifichi che la congiungente i punti di contatto, in ciascuna coppia di tangenti, è la polare del punto da cui escono le tangenti.

8) Tangenti condotte dal punto $(2, 3)$ alla conica dell'es. 1) e polare del punto stesso.

9) Quante tangenti parallele ad una data retta si possono condurre ad una conica, in generale; o ad una parabola, in particolare? Determinare le tangenti alla conica $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ che sono parallele alla retta $2x + 3y = 0$.

10) Assegnare due punti (o rette) coniugati rispetto ad una conica luogo (o inviluppo), equivale ad imporre *una* condizione traducentesi in

una equazione lineare tra i coefficienti. Si esprima ad es. la condizione affinchè i punti ciclici siano coniugati rispetto alla conica $a_{11}x^2 + \cdots = 0$, vale a dire affinchè i punti all'infinito di questa definiscano direzioni ortogonali (e la conica sia una iperbole equilatera). Supposti gli assi ortogonali, si troverà $a_{11} + a_{22} = 0$.

11) Una conica è determinata, in generale, quando siano date cinque coppie di punti coniugati rispetto ad essa, od $n < 5$ coppie siffatte e $5 - n$ punti della curva. Ed è pure determinata se di un punto del piano si conosce la polare, e inoltre sono dati tre punti della curva; ecc. Si scriva ad es. l'equazione di una conica, sapendo che l'origine ha rispetto ad essa la polare $x - y + 1 = 0$, e che la curva passa per i punti all'infinito degli assi e per il punto (2, 1).

12) Scrivere la equazione tangenziale del cerchio (in assi ortogonali) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, sia per la via generale (n.° 203), sia determinando centro e raggio, e ricordando la proprietà geometrica delle tangenti.

13) Scrivere le equazioni tangenziali delle coniche $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, $\lambda yz + \mu zx + \nu xy = 0$, $z^2 - 2kxy = 0$; se le coordinate sono proiettive, dalla seconda equazione richiesta si deduca per dualità l'equazione puntuale di una conica tangente ai lati del triangolo fondamentale (n.° 196, es. 12), 13)).

14) Verificare che le equazioni $3x^2 - 5xy - 2y^2 + x + 5y - 2 = 0$, $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ rappresentano coppie di rette, e scrivere le equazioni staccate delle rette stesse.

15) Quale speciale inviluppo rappresenta la equazione tangenziale $u^2 + v^2 = 0$, supposti gli assi ortogonali? Qual'è la condizione affinchè due rette $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ siano coniugate rispetto a quell'inviluppo?

16) Quale angolo formano (in assi ortogonali) le rette costituenti la coppia $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$? qual'è la condizione di perpendicolarità? Ricordando che esse vanno ai punti all'infinito della conica $a_{11}x^2 + \cdots + a_{33} = 0$ (n.° 196), si deduca nuovamente (cfr. es. 10)) la condizione affinchè essa sia una iperbole equilatera.

II. — 17) La polarità rispetto ad una conica presenta notevoli particolarità metriche quando la conica sia un cerchio (*polarità circolare*). Infatti: la polare di un punto qualsiasi è normale alla retta congiungente il punto col centro O del cerchio; ed il prodotto delle distanze di O dal polo e dalla polare è costante; l'angolo di due rette arbitrarie è uguale all'angolo sotto cui da O sono visti i relativi poli; ogni triangolo antopolare ha l'ortocentro in O (PONCELET). Queste proprietà si verificano anche analiticamente, osservando che, preso come fondamentale il cerchio $x^2 + y^2 - 1 = 0$, la polarità è rappresentata dalle equazioni $x = -u$, $y = -v$ (cfr. n.° 190, es. 6)).

18) La polarità circolare permette di dedurre da note proprietà metriche di una figura, nuove proprietà della figura polare. Come si trasformano ad es. i teoremi: le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto;

gli ortocentri dei quattro triangoli formati prendendo, tre a tre, quattro rette date, sono allineati?

19) Mentre un punto descrive una conica K, la polare di esso, rispetto ad una seconda conica Ω (*direttrice*), inviluppa una terza conica K', *polare di* K, e le tangenti di K hanno come poli i punti di K'. Data la equazione cartesiana (o plückeriana) di K, e supposto che Ω sia il cerchio $x^2 + y^2 - 1 = 0$, si scriva l'equazione plückeriana (o cartesiana) di K'.

20) Supposto che anche la conica K dell'es. precedente sia un cerchio $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, di centro C, si troverà che K' è la conica $x^2 + y^2 = \frac{1}{r^2}(\alpha x + \beta y - 1)^2$, luogo di un punto (x, y) le cui distanze dall'origine O e dalla retta $\alpha x + \beta y - 1 = 0$ hanno un rapporto costante $\frac{OC}{r}$; la conica ha (n.° 162, b)) come fuoco O e come direttrice la polare di C rispetto al cerchio fondamentale Ω. Dunque « la polare di un cerchio rispetto ad un altro cerchio è una conica, che ha un fuoco nel centro di questo; e viceversa ». (L'Hospital, Poncelet).

III. — 21) Data una conica $f(x, y, z) = 0$ e due punti $P(x, y, z)$, $P'(x', y' z)$, la cui congiungente seghi la curva in Q_1, Q_2, l'equazione (2) del n.° 197 ci fornisce subito il doppio rapporto $\varrho = (PP' Q_1 Q_2)$. Qual'è il luogo di P, quando P' sta fisso e ϱ rimane costante? Si troverà una conica, la quale passa per le intersezioni di f colla polare di P, ed ha ivi le stesse tangenti di f. Per $\varrho = -1$ si ha la detta polare contata due volte, per $\varrho = 1$ la coppia delle tangenti nominate.

22) Data una conica $f(x, y, 1)$, in coordinate cartesiane ordinarie, e due punti $P(x, y, 1)$, $P'(x', y', 1)$, la cui congiungente seghi la curva nei punti Q_1, Q_2, si dimostri che il prodotto dei rapporti semplici $(PP'Q_1) \cdot (PP'Q_2)$ è espresso dal quoziente $f(x, y, 1) : f(x', y', 1)$; (si ricorra alla (2) del n.° 197).

23) Un risultato analogo si ottiene, procedendo dualmente, se, come coordinate u, v, w di una retta, si assumono i coefficienti della equazione normale (n.° 115) della retta. Infatti, se $F(u, v, w) = 0$ è la equazione tangenziale di una conica e $p(u, v, w)$, $p'(u', v', w')$ sono due rette, dalla cui intersezione escano le tangenti q_1, q_2 alla curva, si ha $(pp'q_1) \cdot (pp'q_2) = F(u, v, w) : F(u', v', w')$.

24) Dall'es. 22) segue il teorema di Carnot (cfr. n.° 37, es. 9)): « il prodotto dei $2n$ rapporti semplici determinati sui lati di un n.gono semplice dalle intersezioni con una conica è uguale a $+1$ ». Ed un teorema, che può riguardarsi come duale di questo (relativo a rapporti semplici formati da coppie di lati con tangenti alla conica), si ottiene dall'es. 23), oppure valendosi dell'es. 5) del n.° 190.

25) Il teorema di Carnot e il suo duale sono invertibili per $n = 3$. Segue che le coppie di tangenti condotte ad una conica dai vertici di un triangolo segano i lati opposti in sei punti di una conica; e viceversa. In particolare: le rette congiungenti i vertici di un triangolo con due punti del piano segano i lati opposti in sei punti di una conica; e dualmente.

26) Dal teorema di Carnot può dedursi il teorema di Pascal (cfr.

n.° 37, es. 10)): «se un esagono è iscritto in una conica, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno in linea retta». E dualmente (o trasformando questo teorema mediante la polarità definita dalla conica) si ottiene il teorema di Brianchon sul seilatero semplice circoscritto ad una conica.

27) Se un triangolo è circoscritto ad una conica, le congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati opposti passano per uno stesso punto (Ceva) (es. 24); cfr. n.° 37, es. 11)). E dualmente: se un triangolo è iscritto in una conica, le intersezioni dei lati colle tangenti nei vertici opposti stanno sopra una stessa retta (Carnot).

28) Se due n.goni semplici $ABC\ldots K$, $A'B'C'\ldots K'$ sono iscritti in una conica, e si indicano con $M, N, \ldots R$ le intersezioni dei lati corrispondenti $AB \cdot A'B'$, $BC \cdot B'C', \ldots KA \cdot K'A'$, sussiste la relazione

$$(\alpha) \qquad (ABM)(A'B'M')(BCN)(B'C'N')\ldots(KAR)(K'A'R') = 1;$$

viceversa, se questa relazione si verifica per due n.goni, dei quali $2n - 1$ vertici complessivamente appartengano ad una conica, anche l'ultimo vertice appartiene alla conica. (Si applichi il teorema di Carnot all'n.gono di cui son lati successivi AA', $BB', \ldots, KK'$, ricordando il n.° 36).

Dualmente: se due n.lateri semplici $ab\ldots$, $a'b'\ldots$ sono circoscritti ad una conica, sussiste la relazione

$$(\beta) \qquad (abm)(a'b'm)\ldots = 1,$$

dove $m \equiv ab \cdot a'b'$, ecc; e viceversa, nel senso sopra spiegato.

29) Ora si ricordi che la relazione (α) trae con sè la (β), se $a, b, \ldots, a', b'$ indicano i lati $AB, BC, \ldots, A'B', B'C', \ldots$ dei due n.goni (n.° 37, es. 16)). Segue l'importante teorema di Poncelet [1]: «Se due coniche sono così situate, che esista un n.gono semplice iscritto nella prima e circoscritto alla seconda, esisteranno allora infiniti n.goni iscritti nella prima conica e circoscritti alla seconda», ogni punto della prima potendosi assumere come primo vertice A' di un cosiffatto n.gono.

IV. — 30) I due teoremi dell'es. 27) possono riunirsi dicendo che «un triangolo iscritto in una conica, ed il triangolo circoscritto formato dalle tangenti nei vertici del primo, sono omologici, ed il centro di omologia è polo dell'asse di omologia». Ora questo teorema si dimostra facilmente per via analitica, adoperando la equazione della conica in coordinate proiettive, rispetto al triangolo iscritto scelto come fondamentale (n.° 196, es. 12)).

31) Il teorema precedente è caso particolare di questo: «Due triangoli polari l'uno dell'altro rispetto ad una conica sono omologici; il centro e l'asse di omologia sono mutuamente polari» (Chasles); si intende che si corrispondono nella omologia due vertici, dei quali ciascuno abbia come lato opposto la retta polare dell'altro. Viceversa: «se due triangoli sono omologici, esiste una conica rispetto alla quale i triangoli sono polari l'uno dell'altro». (Anche qui si assuma uno dei triangoli come fondamentale di un sistema di coordinate proiettive).

---

(1) La dimostrazione qui accennata è dovuta a P. Serret.

32) Dal teorema dell'es. 31) segue direttamente che «se due coppie di lati opposti di un quadrangolo completo si compongono di rette coniugate rispetto ad una conica, anche la terza coppia si comporrà di rette coniugate rispetto a quella curva» (Staudt, Hesse). Ora questo teorema può anche dimostrarsi direttamente per via sintetica (considerando la polare di un vertice e le coppie di lati opposti del quadrangolo...); e dal teorema stesso si può risalire a quello dell'es. 31). Teorema duale sul quadrilatero. Queste proposizioni fanno vedere che, in casi particolari, tre coppie di punti, o di rette, coniugati rispetto ad una conica, luogo od inviluppo, possono imporre alla conica due sole condizioni indipendenti.

33) Assunto un triangolo XYZ come fondamentale per un sistema di coordinate proiettive, si esprimano le condizioni: *a*) perchè un secondo triangolo $P_1P_2P_3$ (i cui vertici abbiano date coordinate) sia iscritto in una conica passante per XYZ (n.° 196, es. 12)); *b*) perchè $P_1P_2P_3$ sia autopolare rispetto ad una conica avente come autopolare anche XYZ (n.° 207). Dal paragone delle due condizioni risulta il teorema:

34) « Due triangoli antopolari rispetto ad una stessa conica, sono iscritti in una seconda conica, e (per dualità) circoscritti ad una terza ». E viceversa: « due triangoli che siano iscritti in (o circoscritti ad) una conica, sono autopolari rispetto ad un'altra conica ». (Steiner).

35) Segue che « date due coniche, non esiste in generale nessun triangolo che sia iscritto nella (o circoscritto alla) prima e autopolare rispetto alla seconda; ma se, per posizioni particolari delle due curve, esiste un triangolo siffatto, ne esistono infiniti altri godenti la stessa proprietà ».

36) Segue inoltre: « due triangoli iscritti in una stessa conica sono circoscritti ad un'altra, e viceversa » (Brianchon). « Date due coniche, non esiste in generale un triangolo che sia iscritto nell'una e circoscritto all'altra; ma se, per una particolare posizione delle due coniche, esiste un triangolo siffatto, ne esistono infiniti altri » (caso particolare del teorema di Poncelet, contenuto nell'es. 29)).

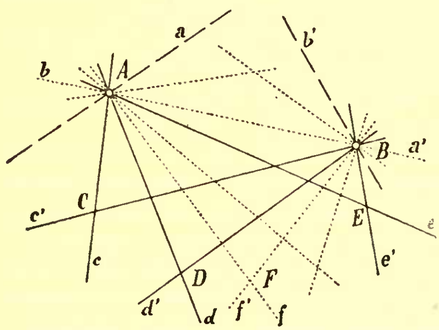
Capitolo II.

Costruzione di coniche.

Teoremi di Pascal, Brianchon, Desargues.

216. Generazione di una conica mediante fasci proiettivi. — Abbiamo visto al n.° 194 che una conica è pienamente determinata quando si conoscano cinque dei suoi punti, purchè quattro di essi non siano allineati. Si presenta ora il problema grafico di costruire tanti altri punti, quanti si vogliano, della detta curva; in breve: *costruire per punti una conica di cui si* *conoscano cinque punti* A, B, C, D, E. Supporremo che si tratti di punti reali, e che mai tre di essi siano allineati, per evitare casi di degenerazione. Serve allo scopo il teorema (n.° 148) il quale afferma che il luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in due fasci proiettivi, giacenti in un piano, è una conica passante per i centri dei fasci; infatti i due fasci si possono sempre disporre in guisa che la conica passi per i punti dati.

Perciò da due dei cinque punti, ad es. da A e B, proiettiamo gli altri tre C, D, E, mediante le due terne di rette c, d, e, c', d, $'e'$; e riferiamo proiettivamente i due fasci A, B in guisa che queste terne si corrispondano (n.° 68). *Il luogo della intersezione* F *di rette corrispondenti* f, f' *dei due fasci è una conica che* (venendo a passare per i cinque punti dati) *risolve il problema.*



Facendo variare le rette corrispondenti f, f', si ottengono quanti punti si vogliono della nostra curva. La costruzione di ciascun punto F porta dunque a determinare la ulteriore intersezione della curva con una retta f uscente da uno, A ad es., dei cinque punti dati; un siffatto problema si risolve colla sola riga.

La seconda intersezione F della retta f colla curva è, in generale, distinta dalla prima intersezione A. Ma se la retta f, descrivendo il fascio A, assume quella posizione a che corrisponde alla retta $BA \equiv a'$ del fascio B, le sue intersezioni colla curva vengono a coincidere in A; dunque a è *tangente* alla conica in A. *Se una conica è generata mediante fasci proiettivi, alla congiungente i centri dei due fasci, considerata in uno di essi, corrisponde nell' altro fascio la tangente alla conica nel centro di questo.*

Segue di qua il modo di costruire la tangente in uno, A, dei punti dati. Ma segue pure che: *una conica è pienamente determinata, e può costruirsi mediante fasci proiettivi, quando di essa si conoscano quattro punti e la tangente in uno di essi, o tre punti e le tangenti in due di essi.* Infatti, dette

a, b' le tangenti in A e B, e detta $a' \equiv b$ la retta AB considerata rispettivamente nei fasci B, A, ricorreremo, per il primo problema, alla proiettività $\binom{a\,c\,d}{a'c'd'}$, e, per il secondo, alla proiettività $\binom{a\,b\,c}{a'b'c'}$ tra i fasci nominati [1].

217. Generazione di una conica mediante punteggiate proiettive. — I risultati precedenti possono trasformarsi per dualità piana. Anzitutto si osservi che un inviluppo di seconda classe è individuato da cinque delle sue rette, eccettuato il caso che quattro almeno di queste passino per uno stesso punto (teorema duale del n.° 194); in altri termini (n.° 205): *una conica è pienamente determinata quando si conoscano cinque delle sue tangenti.*

Si osservi in secondo luogo che *le rette congiungenti punti omologhi di due punteggiate proiettive, situate in un piano, ma non sovrapposte, formano un inviluppo di seconda classe, a cui appartengono i sostegni delle due punteggiate,* vale a dire (escludendo il caso di punteggiate prospettive): *quelle congiungenti toccano una determinata conica, che riesce pure tangente ai detti sostegni*; teorema duale del n.° 148.

Ciò premesso, proponiamoci il problema: *date cinque tangenti di una conica, costruire quante altre tangenti si vogliano alla curva;* brevemente, *costruire la conica per tangenti.*

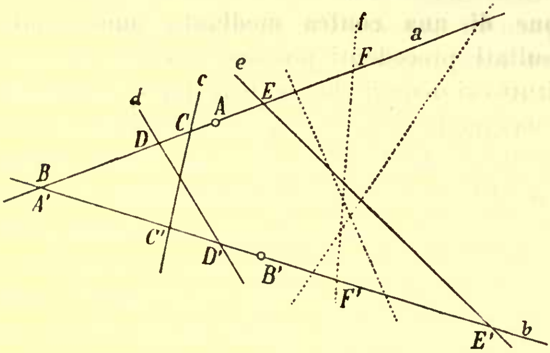
Siano a, b, c, d, e le cinque rette date (proprie o improprie, ma reali), di cui supporremo che mai tre passino per uno stesso punto. Assunte due tra quelle, ad es. a e b come sostegni di punteggiate, si seghino con esse le tre rette c, d, e; si otterranno le terne di punti CDE, $C'D'E'$. Si costruisca ora la proiettività $\binom{C\,D\,E}{C'D'E'}$ tra le due punteggiate: ogni nuova coppia di punti F, F' corrispondenti in essa, darà una nuova tangente $f \equiv FF'$ alla conica richiesta. Ciascuna costruzione porta dunque a condurre, per un punto F di una tangente a assegnata, l'ulteriore tangente f alla conica; la costruzione si eseguisce colla sola riga.

Quella tangente f differisce, in generale, dalla tangente data a uscente dallo stesso punto F; la f viene però a coincidere

---

[1] In quest'ultima costruzione si osservi che la intersezione ab' delle due tangenti è il centro di proiettività dei due fasci (n.° 70).

colla a, se il punto F, descrivendo a, si porta in quel punto A, che ha per corrispondente su b la intersezione $A' \equiv ab$ dei due sostegni. Dunque A è il punto di contatto della conica con a. Similmente al punto $B \equiv ab$, considerato in a, corrisponde su b il punto di contatto B'. Segue di qua che *una conica è determinata, e può costruirsi per tangenti, quando di essa siano date quattro tangenti e il punto di contatto sopra una di esse, o tre tangenti e i punti di contatto sopra due di esse;* basta infatti valersi delle proiettività $\begin{pmatrix} A\,C\,D \\ A'C'D' \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$, rispettivamente.



Osservazione. — Riassumendo i risultati dell'ultimo n.° e del precedente, possiamo dire di saper costruire una conica, di cui si conoscano *cinque* elementi fra punti e tangenti, purchè ciascuna tangente data passi per uno dei punti dati, se prevale il numero di questi, o dualmente; nel primo caso la conica si costruirà per punti, valendosi di due fasci proiettivi, nel caso duale si costruirà per tangenti, valendosi di due punteggiate proiettive.

218. Corollari della generazione mediante forme proiettive. — Poichè una conica è definita da cinque qualisivogliano dei suoi punti, e, dati questi, la curva può costruirsi mediante fasci proiettivi, si conclude col teorema di sinistra:

Una curva di secondo ordine (reale) può sempre riguardarsi come luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in due fasci proiettivi, i cui centri siano due punti generici della curva.

Un inviluppo di seconda classe (reale) può sempre riguardarsi come inviluppo delle congiungenti punti corrispondenti in due punteggiate proiettive, i cui sostegni siano due rette generiche dell'inviluppo.

Queste proposizioni, di cui sono pur vere le inverse (v. n.° 148), possono fornire una definizione sintetica delle coniche (reali) luoghi ed inviluppi, come fu già accennato al n.° 191.

Giova talora enunciare gli ultimi teoremi sotto la forma seguente:

Le rette che proiettano un punto mobile lungo una conica da due punti fissi di questa, descrivono due fasci proiettivi.

I punti in cui una tangente mobile di una conica sega due tangenti fisse di questa, descrivono due punteggiate proiettive.

Ora il teorema di sinistra fu già dimostrato per il cerchio (n.° 76), che è una conica particolare. Le conseguenze che ne deducemmo allora (indipendenti, come fu notato, dal fatto che i due fasci risultavano non solo proiettivi, ma uguali), si possono trasportare senz'altro alle coniche. Colle stesse parole ivi adoperate si possono dunque definire il doppio rapporto di quattro punti di una conica, la proiettività fra una punteggiata tracciata sopra una conica ed una forma di prima specie, o tra due punteggiate sopra una stessa conica, e la involuzione sulla conica. E nella costruzione di Steiner (n.° 77) degli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte, si può servirsi di una conica, in luogo di un cerchio, senza modificare il procedimento ivi indicato.

Ma ora possiamo, valendoci del teorema di destra, enunciare tutte le proposizioni duali. Intenderemo, ad es., per doppio rapporto di quattro tangenti a, b, c, d di una conica, il doppio rapporto dei punti in cui queste segano una quinta tangente arbitraria alla curva. Potremo poi estendere la definizione di proiettività tra due forme di prima specie al caso che, in luogo di una delle forme (od anche di tutte due), si abbia un sistema di tangenti ad una conica; e potremo finalmente, valendoci delle tangenti ad una conica, assegnare una costruzione duale di quella di Steiner per gli elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte di prima specie.

Lo stretto legame che passa fra i due concetti duali, è messo in rilievo dal fatto che: *un gruppo di quantisivogliano punti di una conica è proiettivo al gruppo delle relative tangenti.* Siano infatti A, B, C, D . . . più punti di una conica, a, b, c, d . . . le relative tangenti. Fissato un punto S arbitrario della curva, e detta s la tangente ivi, ricordiamo che il gruppo di punti $A, B, C, D\ldots$ è proiettivo, per definizione, al fascio $S(A, B, C, D\ldots)$; mentre il gruppo di tangenti $a, b, c, d\ldots$ è similmente proiettivo alla punteggiata $s(a, b, c, d\ldots)$. Ora quel fascio e questa punteggiata sono proiettivi tra loro, perchè la polarità determinata dalla conica muta ogni retta (ad es. SA) del fascio nel punto corrispondente (sa) della punteggiata; quindi, ecc.

219. Teoremi di Pascal e Brianchon. — Dalla generazione del cerchio mediante due fasci proiettivi (uguali) abbiamo dedotto (n.° 78) il teorema di Pascal sull'esagono iscritto in un cerchio. Lo stesso teorema e la stessa dimostrazione si trasportano alle coniche. Ma per queste curve il teorema è invertibile, e dà quindi la condizione necessaria e sufficiente perchè sei punti appartengano ad una conica. Per metter ciò in luce riproduciamo qui la dimostrazione. Trasformando poi questa per dualità piana, si perviene al teorema di destra, che il Brianchon dedusse dal teorema di Pascal, mutando l'esagono iscritto in un seilatero circoscritto mediante la polarità determinata dalla conica.

Teorema di Pascal (1640):	Teorema di Brianchon (1806):
Se un esagono semplice è iscritto in una conica, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno sopra una stessa retta (detta di Pascal); e viceversa, *se in un esagono semplice si verifica l'ultima proprietà, i vertici di esso appartengono ad una stessa conica,* che può anche degenerare in due rette (n.° 70).	*Se un seilatero semplice è circoscritto ad una conica, le congiungenti le tre coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto* (detto di Brianchon); e viceversa, *se in un seilatero semplice si verifica l'ultima proprietà, i lati di esso toccano una stessa conica* (inviluppo), che può anche degenerare in due punti (n.° 70).

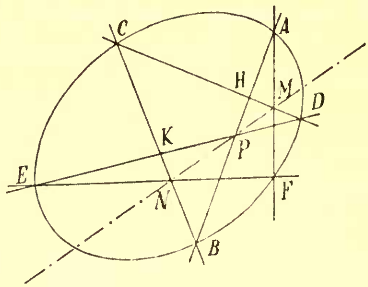
Dimostreremo il teorema di sinistra. Consideriamo sei punti A, B, C, D, E, F, dei quali supporremo (lasciando da parte i casi di degenerazione) che mai tre siano allineati. Da due di questi, A, E, proiettiamo gli altri quattro; sappiamo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè i sei punti appartengano ad una conica, è

1) $$A(CBDF) \barwedge E(CBDF).$$

Segando il primo fascio colla retta CD, il secondo colla CB, la condizione si traduce nell'altra

2) $$CHDM \barwedge CBKN,$$

dove H, M, K, N indicano punti sezioni delle rette cui corrispondono. Le due punteggiate riescono anzi prospettive, perchè C è punto unito; quindi la condizione 2) esprime che le congiungenti punti omologhi HB, DK, MN passano per uno stesso punto P; od in altre parole, che il punto P, intersezione delle due prime rette, si trova allineato coi punti M ed N. Ora i punti



$$P \equiv AB \cdot DE, \quad N \equiv BC \cdot EF, \quad M \equiv CD \cdot FA$$

sono le intersezioni delle coppie di lati opposti (1^0 e 4^0, 2^0 e 5^0, 3^0 e 6^0) dell'esagono semplice $ABCDEF$. Si conclude che la condizione primitiva equivale a quella espressa dal verificarsi del teorema di Pascal.

220. Corollari dei teoremi di Pascal e Brianchon. — La dimostrazione del teorema di Pascal continua a sussistere se il vertice B coincide con A, purchè per retta AB si intenda la tangente in A alla conica; ed anche se inoltre il vertice D coincide con E, facendo un'analoga convenzione per la retta DE. L'esagono si riduce allora ad un pentagono, o quadrangolo semplice, di cui si considerano i lati e certe tangenti nei vertici. Si hanno così i seguenti corollari:

Se un pentagono semplice è iscritto in una conica, la intersezione di due lati non consecutivi, la intersezione di altri due lati non consecutivi, e la intersezione del quinto lato colla tangente nel vertice opposto, stanno sopra una stessa retta.

Se un quadrangolo semplice è iscritto in una conica, le intersezioni delle due coppie di lati opposti, e le intersezioni delle due coppie di tangenti nei vertici opposti, stanno sopra una stessa retta. (Si osservi che questo è contenuto nell'ultimo teorema del n.° 209).

L'analogia porta finalmente a supporre che, dei sei vertici dell'esagono, A coincida con B, C con D, E con F. Si giunge con questa ipotesi ad un teorema pur vero, la cui dimostrazione però non si riconduce immediatamente alla dimostrazione del teorema generale, ma sarà dedotta presto da altri risultati:

Se un triangolo è iscritto in una conica, le tangenti nei vertici di esso segano i lati opposti in tre punti di una retta.

Tutti i corollari qui esposti possono esser tradotti per dualità; ad es. l'ultimo dà:

Se un trilatero è circoscritto ad una conica, i punti di contatto dei suoi lati, congiunti coi vertici opposti, danno tre rette passanti per un punto (1).

Avvertiamo però che, nelle applicazioni, è inutile tener presenti questi corollari; giova meglio ricorrere sempre al teorema generale di Pascal (o Brianchon), supponendo, ove occorra, che siano verificate una o più coincidenze di coppie di vertici (o lati) consecutivi, ed intendendo per congiungente due tali vertici (od intersezione di due tali lati) la tangente (o il punto di contatto) in uno di essi. Ciò risulterà chiaro dalla seconda costruzione del n.° seguente.

221. Costruzioni di coniche mediante i teoremi di Pascal e Brianchon. — I teoremi di Pascal e Brianchon offrono un'altra via per risolvere gli stessi problemi, che abbiamo trattato nei n.i 216, 217 col mezzo dei fasci o, rispettivamente, delle punteggiate proiettive. Portiamo qualche esempio.

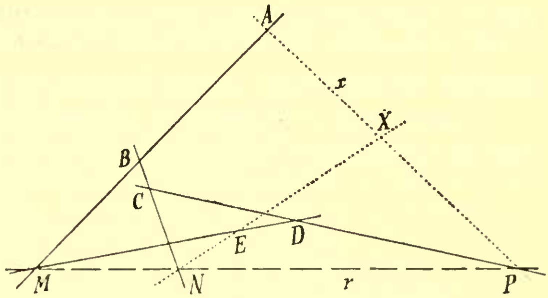
1) *Costruire per punti una conica di cui son dati cinque punti* A, B, C, D, E. — Si conduca per uno A di questi una retta x ad arbitrio, di cui si cerca la ulteriore intersezione X colla conica. Questo punto, coi primi cinque, fornisce un *esagono di* Pascal $ABCDEX$, vale a dire un esagono in cui le tre intersezioni di lati opposti

$$AB \cdot DE \equiv M, \quad BC \cdot EX \equiv N, \quad CD \cdot XA \equiv P$$

stanno sopra una stessa retta r; questa può tracciarsi, essen-

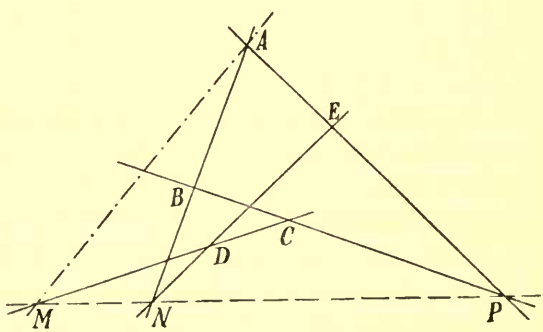
(1) Il teorema diretto e il duale possono riunirsi nel seguente enunciato: *un triangolo iscritto in una conica, ed il triangolo circoscritto formato dalle tangenti nei vertici del primo, sono omologici.*

done noti due punti: M e $P \equiv CD \cdot x$. Risulta dunque determinato il punto rimanente $N \equiv BC \cdot r$, quindi la retta $EX \equiv EN$, e finalmente il punto X, intersezione dell'ultima retta colla x. Facendo ruotare la x intorno ad A, si ottengono quanti si vogliano punti della curva ([1]).



2) *Determinata una conica mediante cinque punti* A, B, C, D, E, *costruire la tangente in uno* A *di questi.* Si consideri l'esagono di Pascal $AABCDE$, di cui due vertici coincidono in A; la loro congiungente AA sarà la tangente richiesta. Per costruirla si traccerà la retta di Pascal congiungente i tre punti

$$M \equiv AA \cdot CD,$$
$$N \equiv AB \cdot DE,$$
$$P \equiv BC \cdot EA,$$



di cui gli ultimi due son noti; sarà quindi determinato il primo, che, congiunto con A, fornirà la tangente richiesta.

222. Costruzione delle intersezioni di una conica con una retta. — Il problema di costruire le intersezioni di una conica con una retta è lineare, quando questa passi per un punto già

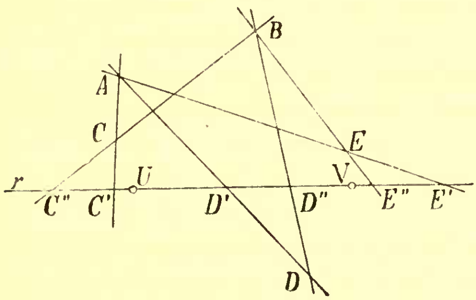
([1]) Dalle posizioni che assume la r intorno ad M, è facile dedurre che la nuova costruzione della conica differisce solo in apparenza da quella del n.° 216.

noto della curva (n.° 216); è invece di secondo grado nel caso generale seguente:

Determinata una conica mediante cinque punti [1], *costruire le sue intersezioni con una retta generica del piano.*

Determinata una conica mediante cinque tangenti, condurre ad essa le tangenti da un punto generico del piano.

Limitandoci al problema di sinistra, da due A, B dei punti dati si proiettino i rimanenti tre C, D, E sulla retta data r; si otterranno due terne di punti $C'D'E'$, $C''D''E''$, le quali determinano una proiettività; siano U e V i punti uniti di questa, se esistono. Allora le rette AU, BU, e così pure le due AV, BV saranno omologhe nei due fasci proiettivi



$$A(CDE\ldots) \barwedge B(CDE\ldots),$$

e quindi i punti U, V apparterranno alla nostra conica. Il problema ammette due soluzioni, una o nessuna (reale).

Come caso particolare metrico del problema a sinistra, quando r è all'infinito, abbiamo:

Verificare se la curva di secondo ordine, determinata da cinque punti dati, è una ellisse, una parabola o una iperbole.

Esercizi [2] I. — 1) Corollari della costruzione delle coniche mediante fasci proiettivi sono i seguenti:

a) è costante l'area del parallelogramma che ha due lati sopra gli asintoti di una iperbole ed un vertice variabile sulla curva;

b) se da due punti fissi di una iperbole si proietta sopra un asintoto un punto mobile lungo la curva, la distanza delle due proiezioni è costante;

c) una iperbole ed i suoi asintoti determinano sopra ogni trasversale due segmenti aventi lo stesso punto medio; in particolare, il tratto di tan-

---

[1] Con una costruzione analoga si tratta il caso che la conica sia determinata mediante quattro punti e la tangente in uno di essi, o tre punti e le tangenti in due di essi. Dualmente per il problema di destra.

[2] Per le costruzioni di coniche definite da cinque elementi, v. gli esercizi in fine di questo Capitolo.

gente ad una iperbole compreso fra gli asintoti è diviso per metà dal punto di contatto.

2) Corollari della costruzione delle coniche mediante punteggiate proiettive sono i seguenti:

a) una tangente variabile ad una parabola sega sopra due tangenti fisse punteggiate simili;

b) è costante l'area del triangolo formato dagli asintoti di una iperbole con una tangente variabile.

3) Mentre due fasci direttamente uguali (nè sovrapposti, nè prospettivi) generano un cerchio, due fasci inversamente uguali (soddisfacenti alle stesse condizioni) generano una iperbole equilatera, le cui tangenti nei centri dei fasci sono parallele tra loro. Viceversa, i punti di una iperbole equilatera sono proiettati da due suoi punti, le cui tangenti siano parallele, mediante due fasci inversamente uguali.

4) Il luogo di un punto, da cui le due coppie di vertici opposti di un parallelogramma sono proiettate mediante coppie di rette appartenenti ad una involuzione simmetrica, è una iperbole equilatera circoscritta al parallelogramma.

5) Se un angolo di data grandezza si muove in un piano in guisa che il vertice descriva una retta fissa ed un lato passi per un punto fisso, l'altro lato inviluppa una parabola che tocca pure la retta fissa.

6) Se due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ di data grandezza ruotano intorno ai loro vertici fissi S, S', in modo che il punto aa' percorra una retta, il punto bb' descriverà una conica passante per S, S'; (*descrizione organica* delle coniche di Newton).

7) Il luogo di un punto dal quale i vertici di un quadrangolo vengono proiettati mediante quattro rette formanti un doppio rapporto assegnato, è una conica circoscritta al quadrangolo; come si costruisce la tangente in un vertice di questo, ed in conseguenza la curva?

8) Questione duale. In particolare: le rette sulle quali due angoli di un triangolo determinano due segmenti di dato rapporto, inviluppano una parabola iscritta nel triangolo; per un punto del piano passano dunque al più due rette siffatte, ed una sola se il punto è improprio.

9) Dato un triangolo, condurre una retta sulla quale due angoli di quello intercettino due segmenti di lunghezza assegnata (n.° 70, es. 9)).

10) Due triangoli iscritti in una conica sono circoscritti ad un'altra; e viceversa (cfr. n.° 215, es. 36)); (detti ABC, DEF i due triangoli, si considerino i due fasci proiettanti da A e D gli altri quattro punti, e si seghino con BC, EF, rispettiv.; ecc.).

11) Due triangoli autopolari rispetto ad una conica sono iscritti in una seconda conica, e circoscritti ad una terza (cfr. n.° 215, es. 34)); (si consideri il fascio $A(BCEF)$ e la punteggiata dei poli, ...).

II. — 12) Le coppie di punti segate sopra una conica dalle coppie di una involuzione in un fascio avente il vertice sulla curva, stanno su rette passanti per uno stesso punto, *polo* della involuzione (cfr. n.° 87, Oss.).

13) In particolare: le corde di una conica che sono viste da un punto fisso della curva sotto un angolo retto, passano per uno stesso punto (detto *punto di* Frégier) situato sulla normale alla curva nel punto primitivo. Se la conica è una iperbole equilatera, il punto di Frégier è improprio, e tutte quelle corde sono parallele alla normale.

14) Si trasformi per dualità l'es. 12). Si deduca, in particolare, che « il luogo di un punto dal quale si possono condurre tangenti perpendicolari fra loro ad una parabola, è una retta (*direttrice*) ».

223. Teorema di Desargues sulle coniche. — Per costruire una conica determinata da cinque condizioni, conviene spesso ricorrere al seguente teorema, dovuto a Desargues (1639), di cui sussiste pure il teorema duale:

Una trasversale sega una conica e le coppie di lati opposti di un quadrangolo iscritto, in coppie di una stessa involuzione.

Sia $ABCD$ il quadrangolo iscritto, ed r una trasversale che seghi la curva nei punti Q, Q' reali e distinti, e le tre coppie di lati opposti del quadrangolo (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC) nelle tre coppie di punti MM', NN', PP'. Da due vertici del quadrangolo, ad es. da A e B, proiettiamo gli altri due vertici ed i punti Q, Q'; otterremo

$$A(CDQQ') \barwedge B(CDQQ'),$$

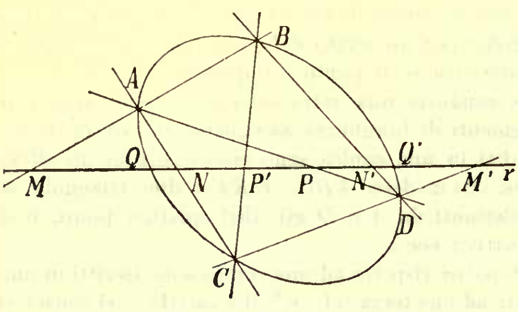
e, segando con r,

$$NPQQ' \barwedge P'N'QQ',$$

donde (n.° 46, I)

$$NPQQ' \barwedge N'P'Q'Q.$$

Questa ci dice che NN', PP', QQ' sono tre coppie di una involuzione (n.° 80). Alla quale appartiene pure la coppia MM', come risulta, sia dal teorema del n.° 84, sia dal ragionamento ora fatto applicato ad altri due centri di proiezione, A e C, ad es.



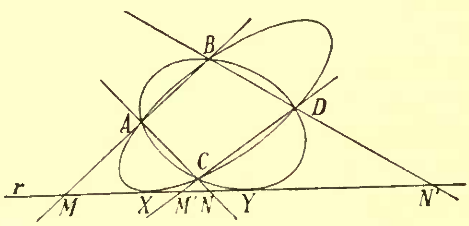
Per i quattro punti A, B, C, D passano infinite coniche, ciascuna delle quali sega sulla retta r (ove la incontri) una coppia della involuzione determinata dalle coppie MM', NN', PP'. Possiamo dunque enunciare il teorema di sinistra:

Le infinite coniche circoscritte ad un quadrangolo segano sopra una trasversale coppie di una involuzione, a cui appartengono le coppie segate sulla trasversale dalle tre coppie di lati opposti del quadrangolo (le quali sono coniche degeneri circoscritte al quadrangolo).

Le coppie di tangenti che da un punto si possono condurre alle infinite coniche iscritte in un quadrilatero [1], *formano una involuzione, a cui appartengono le coppie proiettanti dal punto le tre coppie di vertici opposti del quadrilatero* (le quali sono coniche-inviluppi degeneri iscritte nel quadrilatero).

I teoremi di Desargues sulla involuzione (n.° 84) sono evidentemente inclusi in questi.

224. Costruzione di una conica che passi per quattro punti e tocchi una retta; problema duale. — La involuzione sopra la trasversale r, di cui parla il teorema di sinistra, può essere iperbolica, od ellittica (parabolica, solo nel caso che la trasversale passi per un vertice del quadrangolo). Supposta iperbolica, e detti X, Y i punti doppi reali, la conica determinata dai cinque punti A, B, C, D ed X, sega la trasversale r in un secondo punto, che non può differire dal primo X; dunque, tra le coniche passanti per A, B, C, D, ve n'è una tangente alla r in X, ed una seconda tangente in Y. Si ha così il modo di risolvere il problema di sinistra, determinando i punti doppi X, Y di una certa involuzione (problema questo di secondo grado), e poi riducendosi a costruzioni note, (n.° 216):



Costruire una conica che passi per quattro punti, e tocchi una retta non contenente alcuno di quelli.

Costruire una conica che tocchi quattro rette, e passi per un punto non appartenente ad alcuna di quelle.

Il problema ammette due soluzioni, o nessuna.

[1] Una conica dicesi *iscritta* in un n.latero quando ne tocca i lati.

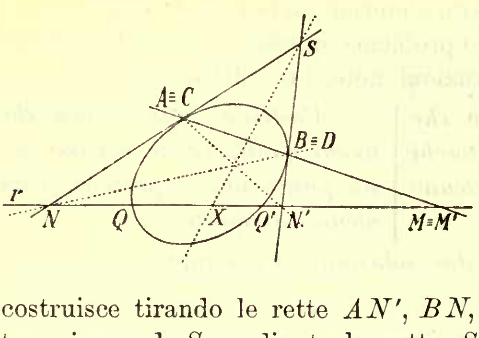
Caso particolare metrico del problema di sinistra (supponendo la retta all'infinito) è il seguente: *costruire una parabola che passi per quattro punti assegnati.*

225. Corollari del teorema di Desargues. — La dimostrazione del teorema di Desargues, e le conseguenze che ne abbiamo dedotte, continuano a sussistere se il vertice C del quadrangolo viene a coincidere con A, purchè per retta AC si intenda la tangente alla conica in A; si può inoltre far coincidere D con B, intendendo per retta BD la tangente in B. In quest'ultimo caso, invece di infinite coniche circoscritte ad un quadrangolo, avremo infinite coniche tangenti a due rette fisse AS, BS in due punti fissi A, B; e la involuzione segata da quelle sopra una trasversale r, sarà determinata dalla coppia NN', traccia delle tangenti fisse AS, BS (costituenti una prima conica degenere), e dal punto doppio $M \equiv M'$, traccia della retta $AB \equiv CD$ (la quale, contata due volte, dà una seconda conica degenere). Abbiamo così il teorema di sinistra:

Le infinite coniche che toccano due lati di un triangolo nei vertici situati sopra il terzo lato, segano sopra una trasversale coppie di una involuzione, cui appartengono la coppia segata dai primi due lati del triangolo, ed un punto doppio segato dal terzo lato.

Le coppie di tangenti condotte da un punto alle infinite coniche che toccano due lati di un triangolo nei vertici situati sul terzo lato, formano una involuzione, cui appartengono la coppia di rette proiettanti quei due vertici, ed una retta doppia proiettante il terzo vertice.

Fra le coniche nominate nel teorema di sinistra ve n'è una sola (oltre alla retta doppia AB) che tocchi la trasversale r. Il punto di contatto X, doppio per la involuzione, è coniugato armonico dell'altro punto doppio M, rispetto alla coppia NN'; esso dunque si costruisce tirando le rette AN', BN, e congiungendone la intersezione ad S mediante la retta SX. Segue di qua che, se



una conica è iscritta nel triangolo SNN', le congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati opposti concorrono in un punto. Con ciò rimane giustificato l'ultimo corollario del teorema di Brianchon (insieme al duale) (n.° 220), che non avevamo sinora dimostrato.

226. Intersezioni di due coniche. — I risultati degli ultimi numeri (n.i 223-225) possono confermarsi ed estendersi per via analitica. A tal fine conviene premettere alcune considerazioni sul sistema di due coniche.

Date le equazioni di due coniche

$$(1)\quad f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$(2)\quad \varphi(x, y) \equiv b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0,$$

proponiamoci di determinare i punti ad esse comuni.

Dovremo risolvere il sistema delle due equazioni nelle incognite x, y; perciò immaginiamole ordinate rispetto ad una delle incognite, ad es. rispetto ad y, ed eliminiamo y tra quelle. Otterremo una equazione *risultante* contenente la sola x, la quale vi comparirà a grado $2 \cdot 2 = 4$, in virtù del teorema di Bézout (1). L'equazione risolta fornirà dunque quattro valori per la x; siano x_1, x_2, x_3, x_4. Sostituendo nelle (1), (2), al posto di x, uno di questi valori, ad es. x_1, si ottengono due equazioni quadratiche nella sola y, le quali hanno una radice comune y_1 (e in generale una sola), che si determina razionalmente (ad es. con una operazione di massimo comun divisore tra i due primi membri). Così si sarà ottenuta una prima intersezione (x_1, y_1) delle due coniche; e similmente si troveranno altre tre intersezioni (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). Concludiamo che *due coniche si segano in quattro punti*; a meno che le coniche non coincidano, o non si spezzino in due coppie di rette aventi una retta comune.

---

(1) In generale, quel teorema dice che, se le due equazioni primitive sono dei gradi m, n, l'equazione risultante sarà di grado mn; donde segue che *due curve algebriche di ordini* m, n, *hanno* mn *intersezioni*. V. a questo proposito Capelli, *Istituzioni di Analisi algebrica* (1902), pag. 573, dove il caso che a noi interessa è trattato in tutti i particolari.

La determinazione analitica dei quattro punti dipende dunque dalla risoluzione di una equazione di quarto grado ad una incognita, equazione i cui coefficienti sono reali, se tali sono, come supporremo, i coefficienti della (1) e (2). Le particolarità che possono presentare le radici di una siffatta equazione (radici reali, o immaginarie coniugate, distinte o coincidenti), si traducono in particolarità relative ai quattro punti nominati. Ci limitiamo ad enumerarle qui, riservandoci di esaminar più accuratamente qualche caso nel seguito.

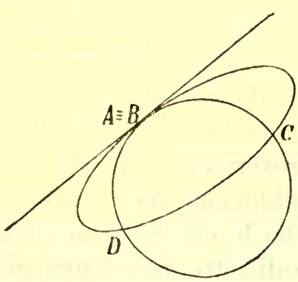
a) Le quattro intersezioni A, B, C, D di due coniche possono esser tutte distinte (caso generale), e precisamente:

1) tutte reali; è il caso di due coniche circoscritte ad un quadrangolo;

2) due A, B reali, e due C, D immaginarie coniugate; tale caso si presenta ad es. per due cerchi intersecantisi in due punti A, B (allora C, D cadono nei punti ciclici);

3) tutte immaginarie, A ad es. coniugata con B, e C con D; si considerino ad es. due cerchi non secantisi.

b) Delle quattro intersezioni alcune possono coincidere. Se due o più coincidono in A, si dice che le due coniche *si toccano* in A, e si dimostra che hanno ivi la stessa tangente; vanno qui distinti i casi seguenti:



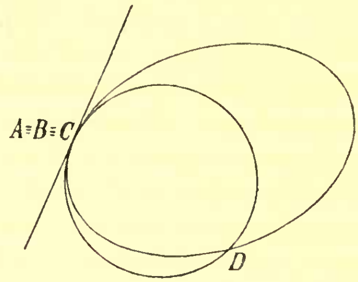
4) due intersezioni $A \equiv B$ coincidono in un punto reale, dove si ha un *contatto semplice* (o *del primo ordine*, o *bipunto*), e le altre due intersezioni C, D sono reali e distinte, come nella fig. qui tracciata;

5) oppure, oltre al contatto semplice $A \equiv B$, si hanno due intersezioni immaginarie coniugate, come ad es. nel caso di due cerchi tangenti;

6) tre intersezioni $A \equiv B \equiv C$ coincidono in un punto reale, dove le coniche hanno un *contatto del secondo ordine* (o *tripunto*, o *punto di osculazione*), e la quarta intersezione D è

reale e distinta da quelle; si dimostra poi che nel punto A le coniche, oltre a toccarsi, si attraversano, come nella figura qui accanto;

7) le quattro intersezioni $A \equiv B \equiv C \equiv D$ coincidono in un punto reale, dove si ha un *contatto del terzo ordine* (o *quadripunto*);



8) possono finalmente due intersezioni $A \equiv B$ coincidere in un primo punto, e le altre due $C \equiv D$ in un secondo punto, nel qual caso le coniche diconsi *bitangenti*; ma i due punti di contatto A e C possono essere: o reali e distinti, come nelle coniche di cui parla il teorema del n.° 225;

9) oppure immaginari e coniugati, come ad es. accade per due cerchi concentrici, i quali si toccano nei punti ciclici (n.° 156).

227. Fascio di coniche. — Qualunque sia il caso in cui si trovino le due coniche (1) e (2), è facile scrivere la equazione di ogni altra conica passante per le loro intersezioni. Si formi infatti una combinazione lineare delle (1) e (2), adoperando due parametri λ, μ, non entrambi nulli. Si otterrà una equazione

$$\lambda f(x, y) + \mu \varphi(x, y) = 0, \tag{3}$$

di secondo grado in x, y, la quale rappresenta dunque una conica. Al variare di λ e μ, o meglio del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, si hanno infinite coniche, tra le quali la (1) ($\lambda \neq 0$, $\mu = 0$) e la (2) ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$); esse formano un sistema detto *fascio di coniche* (cfr. n.° 144) [1].

Proprietà fondamentali del fascio sono le seguenti:

a) *Ogni punto (reale o immaginario) comune alle coniche* (1) *e* (2), *appartiene pure a tutte le coniche del fascio;*

b) *Per ogni altro punto del piano passa una, ed una sola conica del fascio.*

Infatti, se le coordinate (x', y') di un punto P annullano insieme i polinomi (1) e (2), esse annulleranno pure il polino-

[1] Il caso particolare del fascio di cerchi fu già studiato al n.° 158.

mio (3), donde il teorema a). Se invece i valori $f(x', y')$, $\varphi(x', y')$ non sono entrambi nulli, allora dalla relazione

$$\lambda f(x', y') + \mu\varphi(x', y') = 0$$

si potrà ricavare, in modo perfettamente determinato, il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}\left(\text{o } \frac{\mu}{\lambda}\right)$; sostituendo il valore trovato nella (3), divisa per μ (o per λ), si avrà l'equazione di quella conica del fascio che passa per P; donde segue il teorema b).

I quattro punti comuni alle curve (1), (2), e quindi alle infinite coniche del fascio, si chiamano *punti base* del fascio. Se questi sono reali e distinti, vertici di un quadrangolo, il fascio è costituito da tutte le coniche circoscritte al quadrangolo.

Le coniche di un fascio segano sopra una retta del piano infinite coppie di punti. Se tale retta è, ad es., l'asse delle x (come può sempre supporsi, eseguendo, ove occorra, una trasformazione di coordinate, che muta la (3) in una equazione dello stesso tipo), la coppia segata dalla (3) sarà data (per $y = 0$) da

$$\lambda f(x, 0) + \mu\varphi(x, 0) = 0,$$

ossia

$$\lambda(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) + \mu(b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}) = 0.$$

Ma, al variare di $\frac{\lambda}{\mu}$, questa coppia di punti descrive sull'asse x una involuzione (n.° 83). Concludiamo dunque col seguente enunciato, che presenta sotto la forma più generale (dovuta a Sturm) il teorema di Desargues (n.° 223):

Le infinite coniche di un fascio segano sopra una trasversale le coppie di una involuzione.

228. Coniche degeneri in un fascio. — La conica

$$f(x, y) + k\varphi(x, y) = 0 \tag{3'}$$

$\left(\text{dove } k = \frac{\mu}{\lambda}\right)$ è degenere se si annulla il suo discriminante, se è dunque

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kb_{11}, & a_{12} + kb_{12}, & a_{13} + kb_{13} \\ a_{21} + kb_{21}, & a_{22} + kb_{22}, & a_{23} + kb_{23} \\ a_{31} + kb_{31}, & a_{32} + kb_{32}, & a_{33} + kb_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Ora questa è una equazione di terzo grado in k, la quale fornisce per k tre valori. Perciò *in un fascio di coniche si trovano* *tre coniche degeneri* (a meno che tutte le coniche del fascio non siano degeneri).

Se i punti base del fascio A, B, C, D sono tutti distinti, vertici di un quadrangolo, le tre coniche degeneri son date dalle tre coppie di lati opposti del quadrangolo

(5) $$AB,\ CD\ ;\ AC,\ BD\ ;\ AD,\ BC.$$

E sono tutte reali, se quei punti sono reali; oppure una sola reale (ad es. la prima), e le altre due immaginarie, se due soli di quei punti (ad es. A, B) sono reali, o se sono tutti immaginari (ad es. A coniugato con B, e C con D); nell'ultimo caso però sono reali i tre punti doppi delle coniche degeneri

$$M \equiv AB \cdot CD, \quad N \equiv AC \cdot BD, \quad P \equiv AD \cdot BC,$$

mentre nel penultimo caso è reale solo il punto M. Il triangolo diagonale MNP del quadrangolo $ABCD$, iscritto in tutte le coniche del fascio, è autopolare (n.° 209) rispetto alle dette coniche; e si dimostra, nel caso di punti base distinti, che è l'unico triangolo godente siffatta proprietà.

Nel caso di punti base non tutti distinti, le tre coniche degeneri del fascio vengono in parte, o tutte, a coincidere. Qui basterà notare (v. n.° 229) che le dette coniche sono ancora fornite dallo schema (5), purchè si intenda, al solito, per retta congiungente due punti base coincidenti, la tangente comune ivi alle coniche del fascio; (sicchè, ad es., se $A \equiv B$, delle tre coniche degeneri una è formata dalla tangente in A presa colla retta CD, e le altre due coincidono nella coppia $AC \cdot BD \equiv AD \cdot BC$). Il triangolo autopolare comune degenera, o diviene indeterminato; quest'ultimo caso si presenta, ad es., se le coniche del fascio si toccano in due punti $A \equiv B$, $C \equiv D$; perchè allora il punto $M \equiv AB \cdot CD$, insieme con due punti qualisivogliano di AC che siano coniugati armonici rispetto ad A e C, fornisce un siffatto triangolo.

* **Osservazione** I. — Se si indicano con $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ le polarità definite da due coniche $f = 0$, $\varphi = 0$, la collineazione $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q}$ (n.° 166) ha come unito un triangolo, che è autopolare rispetto alle due coniche, e quindi (come si dimostra facilmente) rispetto ad ogni conica del fascio $f + k\varphi = 0$. La ricerca di un siffatto triangolo non differisce dunque, in generale, dalla ricerca degli elementi uniti di una collineazione tra piani sovrapposti. Se questa è una omologia, vi sono infiniti di quei triangoli, che possono però esser degeneri.

* **Osservazione** II. — Per determinare i punti A, B, C, D comuni alle due coniche $f = 0$, $\varphi = 0$, si può (anzichè seguire la via indicata al n.° 226) risolvere l'equazione cubica (4), sostituirne una radice k_1 nella (3'), e scrivere le equazioni staccate delle due rette, ad es. AB, CD, componenti la corrispondente conica degenere del fascio, il che si ottiene risolvendo una equazione di secondo grado ad una incognita (n.° 212). Le intersezioni A, B e C, D di quelle rette colla conica $f = 0$ (o $\varphi = 0$), le cui coordinate si ricavano risolvendo altre due equazioni quadratiche ad una incognita, sono i punti cercati. Oppure possiamo valerci di due radici distinte k_1, k_2 (se esistono) della (4), scrivere le equazioni staccate delle rette AB, CD e AC, BD componenti le relative coniche degeneri (per il che basta risolvere due equazioni quadratiche), e determinare le intersezioni delle rette di una coppia colle rette dell'altra. In ogni caso: *la risoluzione della equazione di 4° grado a cui conduce il detto problema trattato direttamente* (n.° 226), *può farsi dipendere dalla risoluzione di una equazione di 3° grado e di due o tre equazioni quadratiche;* ciò d'accordo colla teoria delle equazioni di quarto grado ad una incognita.

* **229. Contatti di due coniche.** — Per giustificare alcune affermazioni contenute negli ultimi numeri, esaminiamo i vari contatti che due coniche possono avere in un punto. Assumiamo il punto, supposto reale, come origine, e la tangente alla prima conica in esso come asse y. Allora risulta facilmente che l'equazione di questa conica è del tipo

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \tag{1}$$

dove si suppone $a_{22} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$, per evitare casi di spezzamento. Si abbia poi una seconda conica, la quale passi per l'origine,

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y = 0. \tag{2}$$

Per trovare le tre rimanenti intersezioni delle due curve, qui conviene ridurre omogenee le equazioni (1), (2); fatto ciò, la terza coordinata z comparirà come fattore nell'ultimo termine della (1) e negli ultimi due termini della (2). Eliminiamo poi z fra le due equazioni; troveremo come risultante

$$\begin{aligned}(b_{13}x + b_{23}y)(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\\ - a_{13}x\,(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Questa equazione, omogenea e di terzo grado in x, y, fornisce per il rapporto $\frac{x}{y}$ tre valori k_1, k_2, k_3, e quindi rappresenta tre rette $\frac{x}{y} = k_1, k_2, k_3$, uscenti dall'origine e passanti per le tre intersezioni richieste A, B, C. Queste si otterranno dunque determinando i punti in cui quelle tre rette segano (oltre che in O) una delle due coniche date, ad es. la (1).

Se ora si suppone che delle tre intersezioni A, B, C una, ad es. A, coincida con O, vuol dire che una OA delle tre rette nominate non incontra la (1) fuori di O, e viene quindi a coincidere coll'asse y, tangente alla (1) in O. Allora la (3) deve esser soddisfatta ponendo $x = 0$, y qualsiasi; deve esser cioè $b_{23}a_{22} = 0$; e siccome è per ipotesi $a_{22} \neq 0$, dobbiamo ritenere $b_{23} = 0$. Questa ci dice che la seconda conica, la cui equazione diviene

$$(2') \qquad b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x = 0,$$

(con $b_{22} \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, per evitare casi di spezzamento) ha in O la stessa tangente $x = 0$ della prima conica: la riunione in O di due intersezioni delle due curve (*contatto di* 1° *ordine*) porta dunque, come si era affermato (n.° 226, b)), che queste abbiano ivi la stessa tangente.

Riprendiamo la (3) che, nella ipotesi $b_{23} = 0$, sopprimendo il fattor comune x, assume la forma

$$(3') \qquad \begin{aligned}(a_{11}b_{13} - a_{13}b_{11})x^2 &+ 2(a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12})xy \\ &+ (a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22})y^2 = 0,\end{aligned}$$

e rappresenta due rette OB, OC, congiungenti O colle altre due intersezioni delle due curve. Se una B di queste viene ancora a coincidere con O, la (3') deve fornire una radice $\frac{x}{y} = 0$; donde segue $a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22} = 0$, ossia

$$(4) \qquad \frac{a_{22}}{b_{22}} = \frac{a_{13}}{b_{13}}.$$

Se finalmente anche l'ultima intersezione C viene a coincidere con O, i due valori di $\frac{x}{y}$ forniti dalla (3') saranno nulli, e si verificherà, oltre la condizione già scritta, anche la $a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12} = 0$; si avranno insomma le due condizioni

$$(5) \qquad \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{a_{22}}{b_{22}} = \frac{a_{13}}{b_{13}},$$

(dove a_{12}, b_{12} devono ritenersi o entrambi diversi da zero, o entrambi nulli). *La* (4) *e le* (5) *danno le condizioni affinchè le due coniche* (non degeneri) (1) *e* (2') *abbiano in* O *un contatto di secondo ordine* (*punto d'osculazione*), *o di terzo ordine, rispettivamente.*

Se moltiplichiamo i due membri della (2') per il fattore non nullo, nè infinito, $\frac{a_{13}}{b_{13}}$, possiamo anche presentare i risultati ottenuti dicendo che: *la equazione di una conica non degenere avente nell'origine un contatto di primo, secondo, o terzo ordine colla* (1), *si può scrivere sotto la prima, la seconda, o la terza forma, rispettivamente*:

(6) $$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$

(7) $$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$

(8) $$a'_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$

dove le a' hanno valori arbitrari.

Se formiamo una combinazione lineare, mediante un parametro k, della (1) colla (6), o colla (7), o colla (8), riconosciamo anzitutto che due coniche generiche del fascio hanno tra loro un contatto del 1°, 2° o 3° ordine, rispettivamente. Uguagliando poi a zero il discriminante della combinazione lineare, troviamo, nel primo caso, la relazione

$$(1 + k)^2(a_{22} + ka'_{22}) = 0,$$

e, negli altri due,

$$(1 + k)^3 = 0.$$

Ricaviamo di qua che, nel fascio delle coniche aventi un semplice contatto in O, e secantisi ulteriormente in B, C, due delle tre coniche degeneri coincidono nella coppia di rette OB, OC (corrispondente alla radice doppia $k = -1$), e la terza è formata dalla tangente in O e dalla retta BC (e corrisponde a $k = -\frac{a_{22}}{a'_{22}}$). Invece nel fascio delle coniche che hanno in O un contatto del secondo, o del terzo ordine, le tre coniche degeneri ($k = -1$) coincidono nella coppia formata dalla tangente in O e dalla retta congiungente O colla ulteriore intersezione C, distinta o coincidente con O. Tutto ciò è d'accordo colle affermazioni fatte nel n.° 228.

Osservazione. — Per fare un' applicazione metrica delle cose dette, notiamo che, tra le coniche osculatrici alla (1) in un punto O di essa, vi è *un* cerchio, *cerchio osculatore*. L'equazione di questo si ottiene, nella ipotesi di *coordinate ortogonali*, ponendo nella (7) $a'_{11} = a_{22}$, $a'_{12} = 0$, e può scriversi sotto la forma

(7') $$x^2 + y^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{22}}x = 0,$$

la quale mostra che il cerchio osculatore ha il centro nel punto $\left(-\frac{a_{13}}{a_{22}}, 0\right)$ dell'asse x, *normale* alla curva in O (cioè perpendicolare alla tangente), ed ha il raggio uguale al valore assoluto di $\frac{a_{13}}{a_{22}}$.

230. Equazione di una conica soggetta a date condizioni. — La considerazione dei fasci di coniche permette spesso di scrivere, nel modo più rapido, l'equazione di una conica che debba soddisfare a cinque condizioni assegnate. Se infatti quattro di queste son tali, che le infinite coniche soddisfacenti ad esse formino un fascio (il che accade quando le condizioni siano lineari, cioè traducentisi in equazioni lineari tra i coefficienti della conica richiesta), si scriverà l'equazione della conica generica del fascio, valendosi ad es. delle equazioni di due coniche degeneri di esso, e poi si calcolerà il parametro ancora disponibile, in guisa da soddisfare alla quinta condizione.

Così, se le prime quattro condizioni importano il passaggio della conica per quattro punti dati A, B, C, D, si potranno scrivere anzitutto le equazioni delle rette AB, CD, AC, BD; siano, in forma abbreviata, $l = 0$, $l' = 0$, $m = 0$, $m' = 0$, ordinatamente. Allora ogni conica passante per i detti punti avrà una equazione del tipo

$$ll' + \mu m m' = 0,$$

dove μ è un parametro di cui si dispone.

Similmente, una conica che debba toccare i lati $l = 0$, $l' = 0$ di un triangolo nei vertici situati sul terzo lato $m = 0$, ha un'equazione del tipo

$$ll' + \mu m^2 = 0.$$

231. Schiera di coniche. — Le considerazioni degli ultimi numeri (n.i 226-230) si traducono subito per dualità. Limitiamoci qui a rilevare che due coniche (inviluppi), rappresentate dalle equazioni in coordinate di rette

$$f(u, v) = 0, \quad \varphi(u, v) = 0,$$

hanno quattro tangenti comuni (fra reali, immaginarie, distinte e coincidenti); queste son pure tangenti alle infinite coniche date dall'equazione

$$\lambda f(u, v) + \mu\varphi(u, v) = 0,$$

al variare dei parametri λ, μ. Le coniche che così si ottengono formano una *schiera* (sistema duale del fascio), di cui le quattro tangenti nominate si chiamano *rette basi*. *Ogni altra retta del piano è tangente ad una, e ad una sola conica della schiera*;

(mentre per un punto del piano passano due coniche della schiera, reali od immaginarie). Una schiera è costituita, ad es., da tutte le coniche iscritte in un quadrilatero (n.° 223).

Le coppie di tangenti condotte da un punto del piano alle infinite coniche di una schiera, formano una involuzione. Questo teorema corrisponde per dualità a quello di Desargues, sotto la forma generale del n° 227.

Osservazione. — Le coniche di un fascio generalmente non formano una schiera, giacchè, tra quelle, *due* toccano in generale una stessa retta del piano. Però è fascio e schiera ad un tempo il sistema delle coniche che hanno due contatti semplici in due punti fissi (*fascio-schiera delle coniche bitangenti*, cfr. n.° 225), ed il sistema delle coniche che hanno un contatto quadripunto in un punto fisso.

Esercizi. I. — 1) Costruire mediante fasci proiettivi, o mediante il teorema di Pascal:

a) una parabola, dati tre punti propri e il punto all'infinito;

b) una iperbole, dati tre punti propri e le direzioni degli asintoti (costruendo in particolare gli asintoti);

c) una iperbole, di cui siano dati tre punti propri ed un asintoto (cfr. n.° 222, es. 1, *b*)), od un punto proprio e i due asintoti (cfr. n.° 222, es. 1, *c*)).

2) Costruire mediante punteggiate proiettive, o mediante il teorema di Brianchon:

a) una parabola, di cui siano date quattro tangenti (costruendo in particolare il punto all'infinito della curva, la tangente parallela ad una retta assegnata ...);

b) una iperbole, di cui siano date tre tangenti ed un asintoto, od una tangente e i due asintoti.

3) Costruire una conica essendo dati tre punti di essa, e di un punto del piano conoscendosi la polare; (ciascuno dei punti dati quanti altri punti fornisce? è sempre determinato il problema?). Problema duale.

4) Costruire una conica conoscendone un triangolo autopolare, ed inoltre due punti di essa, o due tangenti, od un punto colla relativa tangente; (quanti altri elementi della curva possono subito costruirsi? in qual caso il problema è indeterminato?).

5) Determinata una conica mediante cinque punti (o 4, 3 punti e le tangenti in 1, 2 di essi), costruire linearmente di un punto arbitrario la polare rispetto alla curva. Problema duale.

6) Rispetto alla conica dell'es. precedente costruire il polo di una retta data; (si costruiranno le polari di due punti scelti convenientemente sulla retta). Problema duale.

7) Determinata una conica mediante cinque tangenti, costruire le tangenti parallele ad una retta assegnata.

8) Come applicazione del teorema di Desargues, o del duale, costruire:

a) una parabola, di cui sono dati quattro punti propri, o tre punti propri e la tangente in uno di essi;

b) una iperbole, di cui son dati due punti propri, un asintoto e una tangente;

c) una parabola, di cui son date tre tangenti ed un punto.

9) Costruire una conica che passi per tre punti A, B, C, e tocchi due rette r, s non appartenenti ad alcuno di quelli. Il problema ammette *quattro* soluzioni reali, o nessuna, secondo che A, B, C appartengono, o no, ad uno stesso dei due angoli completi rs. (Detti R, S i punti di contatto incogniti con r, s, si osservi che le infinite coniche tangenti a queste rette in quei punti segano sopra AB una involuzione nota (n.° 225), di cui la retta RS contiene un punto doppio... Ragionando analogamente sopra AC, si riesce a costruire RS in quattro modi diversi).

10) Problema duale del precedente.

II. — 11) Parecchi dei problemi grafici risolti nel testo, o in qualcuno dei precedenti esercizi, possono pure risolversi senza difficoltà anche quando, in luogo di una o più coppie di punti (o rette) reali, si assegnino una o più coppie di punti (o rette) immaginari, (sottinteso *coniugati*, in senso algebrico), ciascuna coppia essendo definita mediante una involuzione ellittica sopra una retta (o in un fascio) reale, come al n.° 94. Così si può « costruire la conica che passa per tre punti reali A, B, C, e per due punti immaginari appartenenti ad una retta r ». (Dei punti $AB \cdot r$, $AC \cdot r$ si costruiscano le polari rispetto alla curva; poi es. 3); la costruzione cade in difetto se A e B coincidono, ed è AC la polare di $AB \cdot r$, ma allora serve il teorema del n.° 210). Caso particolare: « costruire colla sola riga, dato un quadrato, quanti punti si vogliano del cerchio determinato da tre punti A, B, C » (cfr. n.° 89, es. 29)).

12) Problema duale. In particolare: costruire la conica che tocca tre rette reali a, b, c, e tocca inoltre le direzioni assolute uscenti da un punto F; vale a dire: « costruire la conica dato un fuoco F e tre tangenti » (¹).

13) Costruire la conica che passa per un punto reale A e per due coppie di punti immaginari appartenenti a due rette reali r, s. (Del punto $P \equiv rs$ si conosce intanto la polare p, e quindi dal punto reale A si ricava un secondo punto reale B della conica; per determinare le intersezioni reali X, Y di p colla curva — problema di 2° grado — si applichi al triangolo AXY ed alle trasversali r, s il teorema del n.° 210; oppure, senza costruire X, Y, si determini la involuzione che ha per punti doppi X, Y — problema

(¹) Dicesi *fuoco* di una conica, come vedremo nel Cap. V, un punto F tale, che le tangenti da esso condotte alla curva passino per i punti ciclici. Sebbene alcuni di questi problemi sui fuochi vengano riproposti in quel Cap. e risolti con mezzi speciali, stimiamo utile far vedere qui come essi rientrino, quali casi particolari metrici, in problemi proiettivi.

di 1° grado; n.° 95 es. 3) — ed a questa ed ai punti A, B si applichi nuovamente il teorema del n.° 210. Un'altra costruzione di secondo grado consiste nel determinare il triangolo diagonale, reale, del quadrangolo avente per vertici i quattro punti immaginari dati (n.° 95, es. 2)); poi es. 4) del presente n.°).

14) Casi particolari metrici del problema precedente e del duale sono: « costruire il cerchio passante per un punto reale e per una coppia di punti immaginari »; « costruire la conica dati i due fuochi ed una tangente reale ».

15) Costruire una conica che tocchi una retta t, e passi per due punti reali e per una coppia di punti immaginari, o per due coppie di punti immaginari. Si troveranno due soluzioni al più (cfr. n.° 224). (Si determini la involuzione che sopra t segano le coniche per i quattro punti dati, delle quali coniche una degenere è già nota, ed un'altra può costruirsi mediante l'es. 11) o 13), prendendo ad arbitrio un punto su t; ecc.).

16) In particolare: « costruire un cerchio che passi per due punti (reali) e tocchi una retta (reale) »; « costruire una conica conoscendone un fuoco, un punto (reale) e due tangenti (reali) »; ecc.

17) Costruire una conica che passi per tre punti reali, e tocchi una coppia di rette immaginarie; quattro soluzioni; (si applichi il procedimento dell'es. 9); poi es. 11)).

18) In particolare: « costruire una conica dato un fuoco e tre punti (reali) »; « costruire un cerchio tangente a tre rette (reali) assegnate (cerchio iscritto od ex-iscritto a un triangolo) ».

19) Costruire una conica che passi per un punto reale, per una coppia di punti immaginari, e tocchi due rette reali; quattro soluzioni. (Della corda di contatto si determina facilmente un punto reale e la polare di esso rispetto alla conica, della quale si costruirà quindi un secondo punto reale, es. 3); poi es. 15)).

20) In particolare: « costruire un cerchio che passi per un punto (reale) e tocchi due rette (reali) »; « costruire una conica che abbia un dato fuoco, una data tangente (reale), e passi per due dati punti (reali) ».

21) Costruire una conica che passi per tre punti (ad es. reali), e riesca bitangente ad una conica data; quattro soluzioni (Il ragionamento dall'es. 9) si applica anche a questo caso). Problema duale.

III. — 22) I problemi precedenti si risolvono pure per via analitica, facendo uso ad es. del procedimento indicato al n.° 230; dati numerici potranno trovarsi negli es. 1), 4), 7), 8) del n.° 196.

In particolare: « si scriva la equazione di una conica che passi per tre punti e tocchi due rette date ». (Supposto anzitutto che le due rette siano gli assi coordinati, e che $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ sia la congiungente i punti di contatto, si osserverà che l'equazione della conica può scriversi sotto la forma (n.° 230): $\pm \sqrt{xy} = \alpha x + \beta y + \gamma$, nella quale i coefficienti α, β, γ si calcoleranno tenendo conto dei tre punti $P_i(x_i, y_i)$ per cui la curva deve passare. In generale, se le due tangenti date, reali o immaginarie, hanno le equazioni $l = 0$, $m = 0$, sotto al radicale comparirà il prodotto

lm; sicchè $\pm \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha x + \beta y + \gamma$ rappresenterà, in assi ortogonali, una conica avente il fuoco nell'origine, ecc. Si dimostri che tutti questi problemi hanno quattro soluzioni).

23) Equazione della conica che passa per tre punti dati, ed è bitangente ad una conica data $f(x, y) = 0$. (L'equazione sarà del tipo $\pm \sqrt{f(x, y)} = \alpha x + \beta y + \gamma$).

IV. — 24) Due coniche $ABCDE$, $ABCHK$, determinate ciascuna mediante cinque punti, di cui tre comuni, si segano in un quarto punto; costruirlo linearmente. (Si consideri la involuzione che le due coniche determinano sulla retta DH, ecc.). Problema duale.

25) Il problema si risolve in modo analogo (tenendo presente l'es. 11)) anche se i due punti B, C sono immaginari; in particolare: « costruire linearmente (dato un quadrato) la seconda intersezione dei due cerchi ADE, AHK ».

26) Come applicazione dell'es. 24): dati cinque punti $MNPQR$, di cui mai tre allineati, costruire il punto dal quale essi vengono proiettati mediante un gruppo di rette proiettivo ad un gruppo di cinque elementi assegnati di una forma di prima specie (cfr. n° 222, es. 7)). In particolare, se Q, R cadono nei punti ciclici: « costruire linearmente (dato un quadrato) il punto da cui due segmenti MN, MP, aventi un estremo comune, sono visti sotto angoli assegnati (in valore e segno) ».

27) Date quattro rette $mnpq$, lati di un quadrilatero, costruire linearmente una retta, sopra cui quelle seghino una quaterna di punti simile ad una quaterna di punti assegnata.

28) Due coniche $ABCDE$, $ABHKL$, determinate ciascuna mediante cinque punti, di cui due comuni, si segano in altri due punti X, Y; costruire linearmente la retta XY, e poi (risolvendo un problema di secondo grado) i punti stessi. (Si costruisca l'involuzione determinata dalle due coniche sulla retta CH, ecc.) In particolare: « costruire linearmente, dato un quadrato, l'asse radicale di due cerchi CDE, HKL ». La risoluzione del problema generale può anche fondarsi sul teorema seguente.

29) Le coniche di un fascio segano sopra una conica fissa, passante per due punti base del fascio, coppie di punti le cui congiungenti concorrono in uno stesso punto, allineato cogli altri due punti base. Od anche: « se tre coniche hanno due punti comuni, le tre coppie di intersezioni residue delle curve a due a due, stanno su rette passanti per uno stesso punto ». Il teorema sussiste anche se le intersezioni delle coniche sono in parte, o tutte, coincidenti, o immaginarie, come si dimostra, ad es., per via analitica. Come si enuncia il teorema se i due punti comuni alle tre coniche sono i punti ciclici? (cfr. n.° 160).

30) Il problema di determinare le *quattro* intersezioni di due coniche K, K' può risolversi con riga e compasso nei seguenti due casi:

a) Se è dato il triangolo autopolare comune alle due curve (n.° 228), ciascuna conica essendo ulteriormente determinata mediante due punti o tangenti; (si osservi infatti che una conica degenere del fascio KK' sega sopra ogni trasversale una coppia che, oltre ad appartenere alla involuzione segata dal fascio, è divisa armonicamente da due lati del triangolo dato . . .).

b) Quando siano note due tangenti comuni alle due coniche, ciascuna di queste essendo inoltre determinata, ad es., mediante la polare del punto comune alle tangenti ed un punto ulteriore; (si osservi infatti che una conica degenere del fascio KK' si compone di due rette, le quali dividono armonicamente le dette polari, e segano sopra una trasversale qualsiasi una coppia appartenente ad una involuzione nota).

Si trattino questi due casi anche per via analitica (con una opportuna scelta del sistema di coordinate), dimostrando che le coordinate delle quattro intersezioni possono calcolarsi, partendo dai coefficienti delle equazioni delle coniche, mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate.

Caso particolare del problema *b*) è il seguente: « costruire le intersezioni di due coniche aventi un fuoco comune, di ciascuna curva essendo data inoltre la polare del fuoco (direttrice) ed un punto ». Caso particolare del problema duale: « determinare le tangenti comuni a due cerchi (ed i centri di similitudine per cui quelle passano) ».

V. — 31) Le tangenti condotte ad una parabola dall'ortocentro di un triangolo ad essa circoscritto, sono perpendicolari tra loro (n.° 223). Di qua e dall'es. 14) del n.° 222 segue che « gli ortocentri degli infiniti triangoli circoscritti ad una parabola stanno sopra una stessa retta (direttrice) », ed in particolare « gli ortocentri dei quattro triangoli formati coi lati di un quadrilatero presi tre a tre, sono per diritto » (Steiner; v. anche n.° 70 es. 5)).

32) Del teorema di Desargues (n.° 223) sussiste pure l'inverso, che può enunciarsi così: « le coniche condotte per tre punti fissi e per le coppie di una involuzione giacente sopra una retta, passano per un quarto punto fisso, che si può costruire linearmente ». Il teorema serve a costruire una conica determinata mediante quattro o tre dei suoi punti, ed una o due coppie di punti coniugati rispetto ad essa. Proposizioni duali.

33) Corollario del teorema precedente: « le iperboli equilatere circoscritte ad un triangolo, passano per l'ortocentro di questo » (Brianchon e Poncelet); e viceversa, ogni conica passante per i vertici e per l'ortocentro di un triangolo è una iperbole equilatera.

34) La proposizione precedente si dimostra facilmente per via analitica, ricordando la condizione perchè una iperbole di data equazione sia equilatera (n.° 215, es. 10)), e dimostrando in conseguenza che in un fascio di coniche vi è, generalmente, una sola iperbole equilatera; ma se ve ne sono due, ogni conica del fascio è una iperbole equilatera, ed allora le coniche degeneri si compongono di rette ortogonali, ecc.

VI. — 35) Se $ABC \ldots$, $A'B'C' \ldots$ sono due punteggiate proiettive situate sopra una conica K, le rette AA', BB', $CC' \ldots$ inviluppano una seconda conica K_0, bitangente alla data nelle intersezioni di questa coll'asse di proiettività (od avente con K un contatto quadripunto, se il detto asse è tangente a K) [1]. (Infatti le punteggiate segate da BB', CC' ... su AA', e da AB', AC' ... sull'asse di proiettività risultano proiettive ...; dove sta il punto di contatto di K_0 con AA'?). Teorema duale.

36) Viceversa: se due coniche K, K_0 sono bitangenti (od hanno un contatto quadripunto), le tangenti a K_0 determinano su K, ove la incontrino, coppie AA', BB' ... di punti corrispondentisi in una proiettività. Teorema duale.

37) Dall'es. 35) seguono i corollari: « Le corde di una conica, che sono viste da un punto O di questa sotto angolo costante, inviluppano una seconda conica bitangente alla data in due punti (immaginari), le cui tangenti si segano nel punto di Frégier relativo ad O » (n.° 222, es. 13)). « Il luogo del vertice di un angolo di grandezza costante circoscritto ad una parabola è una conica, e precisamente una iperbole, i cui asintoti formano un angolo doppio del dato » (Poncelet); si dimostra poi che il fuoco e la direttrice (polare di esso) relativi alla parabola, sono pure fuoco e direttrice della iperbole.

38) Le corde di una conica K, i cui estremi sono proiettati da un punto O, non appartenente a K, mediante coppie di una involuzione, inviluppano una seconda conica K_0, la quale tocca le rette doppie della involuzione nei punti ove queste segano la polare di O rispetto a K. (Siano infatti OMN, $OM'N'$ due secanti di K coniugate nella involuzione; una retta t, che seghi K in due punti proiettati da O mediante una seconda coppia della involuzione, incontra pure le rette MM', NN' in due punti godenti la stessa proprietà (n.° 223), i quali al variare di t descrivono due punteggiate proiettive, ecc.).

39) Segue il corollario: « Le corde di una conica K che sono viste sotto angolo retto da un punto O, non appartenente a quella, inviluppano una seconda conica K_0, che ha un fuoco in O, e come polare di O (direttrice) la polare di O rispetto a K ». La conica K_0 è un cerchio col centro in O, se O è centro (polo della retta all'infinito) per la prima conica; è una parabola, se la prima conica è una iperbole equilatera; degenera, se i due casi si presentano insieme.

40) Dal duale del teorema 38) si deduca: « il luogo del vertice di un angolo retto circoscritto ad una ellisse, od iperbole, è un cerchio (concentrico alla curva), detto *cerchio principale* » (De La Hire). Per la parabola il luogo è una retta (n.° 222, es. 14)).

VII. — 41) « Le polari di un punto P rispetto alle coniche di un fascio formano un fascio intorno ad un punto P' (*polo coniugato* di P) (cfr. n.° 89, es. 9)); e le polari di P' passano per P », sicchè tra i punti P e P' viene a stabilirsi una corrispondenza (non proiettiva) biunivoca e involutoria [2]. Le coniche del fascio che passano per P, o P', toccano ivi la retta PP'. Fa eccezione solo il caso che il punto P sia vertice del triangolo autopolare

---

[1] L'inviluppo si riduce ad un fascio, se la proiettività è involutoria (n.° 222, es. 12)).

[2] Come degenera la corrispondenza se si tratta di un fascio-schiera (n.° 231)?

comune a due, e quindi a tutte le coniche del fascio (n.° 228), chè allora tutte le polari di P coincidono col lato opposto del detto triangolo. Dualmente: «i poli di una retta rispetto alle coniche di una schiera appartengono ad una retta»; ecc. (Poncelet).

42) Se il punto P varia, il fascio delle polari varia, mantenendosi però proiettivo a sè stesso. Segue che «il luogo dei poli di una retta rispetto alle coniche di un fascio è una conica, la quale passa per i tre punti diagonali del quadrangolo base, e per i sei poli della retta rispetto alle coppie di vertici del detto quadrangolo». La conica sega la retta nei punti ove questa è toccata da una curva del fascio. Teorema duale.

43) In altre parole: «la corrispondenza (*quadratica*) fra P e P' è tale che, se P descrive una retta, P' descrive una conica; alle infinite rette corrispondono le infinite coniche circoscritte ad un triangolo (autopolare del fascio), ed alla intersezione P di due rette, corrisponde la ulteriore intersezione P' delle due coniche corrispondenti». Se il triangolo autopolare ha un vertice proprio, e gli altri due nei punti ciclici del piano (come accade quando il fascio si compone di iperboli equilatere concentriche), la corrispondenza quadratica rientra nelle affinità circolari considerate al n.° 185, es. 29).

44) L'equazione $\lambda l l' + \mu m m' = 0$ di ogni conica circoscritta al quadrangolo avente per lati le rette $l = 0$, ecc. (n.° 230), interpretata geometricamente, conduce al teorema (di Pappo): «se una conica è circoscritta ad un quadrangolo semplice, il prodotto delle distanze di un punto variabile sulla curva da due lati opposti di quello, serba un rapporto costante al prodotto delle distanze dagli altri due lati». E dualmente. Caso particolare che $m = 0$ ed $m' = 0$ coincidano.

45) Nella ipotesi che $l = 0, \ldots$ siano equazioni normali, si cerchi la condizione perchè al quadrangolo si possa circoscrivere un cerchio; si deduca che: «se un quadrangolo completo è iscritto in un cerchio, le bisettrici dell'angolo formato da due lati opposti, sono parallele alle bisettrici relative alle altre due coppie di lati opposti».

46) Scritte le equazioni dei lati di due trilateri omologici sotto la forma adottata nel n.° 131, si vedrà che la equazione

$$(r + \lambda l)(r + \mu m)(r + \nu n) + \varrho l m n = 0$$

rappresenta, per ogni valore del parametro ϱ, una curva (del 3° ordine) passante per le nove intersezioni dei due trilateri. Ora se $\varrho = -\lambda\mu\nu$, quella curva si spezza nella retta r, asse di omologia, ed in una conica; donde il teorema: «se due triangoli sono omologici, le sei intersezioni delle coppie di lati non omologhi appartengono ad una conica, e (dualmente) le sei congiungenti delle coppie di vertici non omologhi toccano una conica». Questo riassume gli inversi dei teoremi di Pascal e Brianchon; da esso i teoremi diretti seguono per assurdo.

VIII. — 47) Se $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ sono tre coniche non appartenenti ad un fascio, le infinite coniche rappresentate dall'equazione

$$\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0,$$

dove λ, μ, ν sono parametri, formano un sistema (∞^2) detto *rete*. Per un punto generico del piano passano infinite coniche della rete, costituenti un fascio che ha come base quel punto ed altri tre; per due punti generici del piano passa *una* conica della rete. Procedendo dualmente, si definisce un sistema di coniche-inviluppi detto *rete tangenziale* o *falange*.

48) Se un punto è comune alle tre coniche $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, esso è comune a tutte le coniche della rete. Una particolare rete è costituita dalle coniche circoscritte ad un triangolo. Se $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ sono le equazioni dei lati di questo, la rete può rappresentarsi mediante l'equazione

$$\lambda mn + \mu nl + \nu lm = 0.$$

Quali sono le coniche degeneri di questa rete?

49) Supposto che $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ siano equazioni normali (in coordinate ortogonali), si determinino λ, μ, ν in guisa che la conica precedente sia un cerchio. L'equazione cui si arriva, interpretata geometricamente, conduce al teorema di Simson sul cerchio circoscritto al triangolo (cfr. n.° 151, es. 15)).

50) Un'altra rete particolare (*puntuale* e *tangenziale* ad un tempo) è costituita dalle coniche che hanno un dato triangolo come autopolare. Se $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ sono i lati del triangolo, la rete è rappresentata dall'equazione (n.° 207)

$$\lambda l^2 + \mu m^2 + \nu n^2 = 0.$$

Quali sono le coniche, luoghi od inviluppi, degeneri della rete?

51) Le coniche dell'ultima rete che passano per un punto generico P del piano, passano per gli altri tre vertici del quadrangolo, che ha un vertice in P e il triangolo dato come diagonale; e se P appartiene ad un lato del detto triangolo? Teorema duale.

52) Segue: «se due quadrangoli (o quadrilateri) completi hanno lo stesso triangolo diagonale, i loro otto vertici (o lati) appartengono ad (o toccano) una stessa conica».

53) E come corollario: «gli otto punti di contatto delle quattro tangenti comuni a due coniche, appartengono ad una stessa conica»; «le otto tangenti nei punti comuni a due coniche, toccano una stessa conica» (Staudt).

54) In particolare: due rette secanti di una conica e le quattro tangenti nelle intersezioni colla curva, toccano una stessa conica; e dualmente.

55) Nella rete delle coniche aventi uno stesso triangolo autopolare, vi è generalmente un solo cerchio; quale ne è il centro, quale il raggio? Quale la equazione (in assi ortogonali), supposto che $l = 0, \ldots$ siano equazioni normali? Quando è reale? Quale particolarità deve presentare il triangolo, perchè esistano infiniti cerchi siffatti?

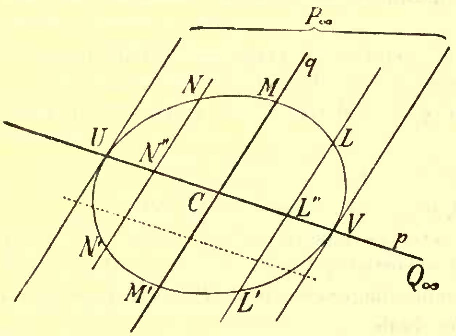
56) Nella detta rete esistono infinite parabole formanti una schiera; quali ne sono le rette basi? Si deduca che «i punti medi dei lati di un triangolo autopolare rispetto ad una parabola, sono vertici di un triangolo circoscritto alla curva».

57) Nella rete stessa esistono infinite iperboli equilatere formanti un fascio, che ha per punti base i centri dei cerchi iscritto ed ex-iscritti nel triangolo primitivo; segue che «i centri dei cerchi iscritto ed ex-iscritti in un triangolo autopolare di una iperbole equilatera stanno sulla curva».

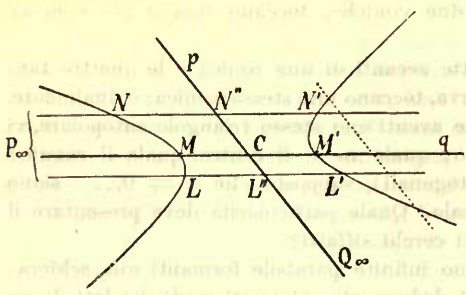
Capitolo III.

Proprietà diametrali.

232. Diametri di una conica. — Dalle proprietà proiettive delle coniche che abbiamo studiato sinora, possiamo dedurre facilmente proprietà metriche, attribuendo agli elementi delle nostre figure relazioni speciali colla retta all'infinito. Applichiamo questa considerazione alla teoria della polarità.



Scelto nel piano di una conica un punto all'infinito P_∞, la polare p di esso rispetto alla curva conterrà tutti i punti medi delle corde LL', MM', NN', ... appartenenti alle rette parallele uscenti da P_∞, e segherà la curva (ove la incontri) nei punti U, V di contatto delle tangenti condotte da P_∞. Dunque:



I punti medi delle corde di una conica aventi una stessa direzione stanno sopra una retta; questa dicesi *diametro* della conica, e precisamente diametro *coniugato* con ciascuna di quelle corde, d'accordo col n.° 205. La costruzione di un diametro risulta senz'altro dalla definizione.

Partendo dall'equazione della curva in coordinate *cartesiane* omogenee

(1) $$f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

ossia, in coordinate *cartesiane ordinarie*,

(1') $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

e dette $(m, n, 0)$ le coordinate di P_x, punto all'infinito della retta

(2) $$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$$

e delle parallele (n.° 124), l'equazione del diametro coniugato con queste è (n.° 201)

$$f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ m, & n, & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia

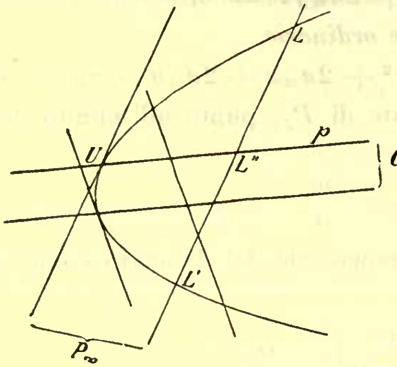
(3) $$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)m + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)n = 0.$$

Per enunciare il risultato, si osservi che, in coordinate cartesiane ordinarie (cioè per $z = 1$), *i diametri coniugati coll'asse* x ($m \neq 0$, $n = 0$), *o coll'asse* y ($m = 0$, $n \neq 0$), *hanno rispettivamente le equazioni*

(4) $$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

ottenute annullando le semiderivate parziali, rispetto ad x *e rispetto ad* y, *del primo membro dell'equazione della conica; mentre l'equazione di ogni altro diametro è una combinazione lineare di quelle due.*

233. Centro. — Dall'ultima osservazione risulta che gli infiniti diametri formano un fascio; ed anzi, notando che i loro poli appartengono alla retta all'infinito, si conclude: *tutti i diametri di una conica passano per uno stesso punto, che è il polo della retta all'infinito.* Questo punto C è improprio per la parabola che tocca la retta all'infinito, e coincide col punto di contatto; *i diametri di una parabola sono tutti paralleli tra loro.* Il punto C è invece proprio per la ellisse e per la iperbole, interno alla prima curva, esterno alla seconda (n.° 204). Ogni retta condotta per C sega una di queste due curve in due punti, ad es. M, M', che separano armonicamente C dal punto all'infinito della retta, e sono adunque simmetrici rispetto a C. *Il punto* C *è centro di simmetria per la ellisse e per la iperbole*, e dicesi *centro* della curva (1).



La parabola non ha centro di simmetria, tuttavia, per estensione di linguaggio, si chiama talvolta *centro* della parabola il punto all'infinito C_∞ della curva.

Il centro di una conica si costruisce conducendo due diametri. E le coordinate di esso si ottengono risolvendo le equazioni di due diametri, ad es. le (4) del n.° 232 (o scrivendo le coordinate del polo della retta all'infinito secondo le formole del n.° 202). Così troviamo l'ascissa e l'ordinata del centro

$$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}}, \tag{5}$$

dove le A_{ik} sono i soliti minori del discriminante. Il centro è improprio quando $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$, quando cioè (n.° 196) la conica è una parabola, ed allora ha le coordinate omogenee $(A_{13}, A_{23}, 0)$. È indeterminato quando $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$, nel qual caso risulta pure $A = 0$, e la conica si scinde in due rette aventi un unico punto all'infinito, cioè in due rette parallele; una tal figura ha effettivamente infiniti centri di simmetria.

234. Asintoti. — Limitiamoci pel momento alle *coniche a centro*, che sono ellissi od iperboli. Fra le rette passanti per il centro (diametri), ve ne sono due che toccano la conica, ed hanno i punti di contatto sulla polare del centro, cioè nei punti all'infinito della curva. Queste tangenti diconsi *asintoti* (2). *L'iperbole ha due asintoti reali, l'ellisse due asintoti immaginari.*

---

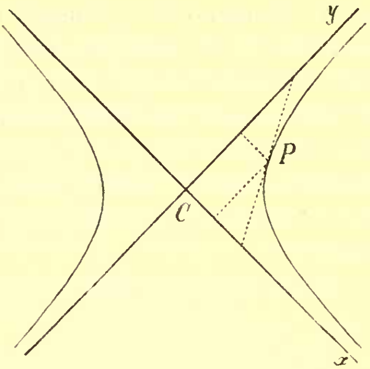
(1) Che una ellisse ed una iperbole abbiano un unico centro di simmetria, risulta dal fatto che un tal centro deve aver come polare la retta all'infinito.

(2) In generale, dicesi *asintoto* ad una curva qualsiasi una retta che tocchi la curva in un punto all'infinito.

La costruzione degli asintoti si riduce alla determinazione dei punti all'infinito della conica (n.° 222), e al tracciamento della tangente ad una conica in un punto noto.

Volendo poi l'equazione complessiva degli asintoti per la curva (1′) del n.° 232, basta ricordare che la coppia di rette proiettanti dall'origine i punti all'infinito della curva è rappresentata dall'equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$



ricavata dalla (1) col porre $z = 0$ (n.° 196); sicchè la coppia degli asintoti, parallele condotte dal centro (x_0, y_0) alle rette nominate, sarà data (n.° 213) da

$$(6) \quad a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0.$$

Osservazione. — Un altro procedimento per ottenere (sotto una forma diversa) l'equazione complessiva degli asintoti, consiste nell'osservare che le infinite coniche rappresentate dall'equazione

$$f(x, y, z) + kz^2 = 0,$$

dove k è un parametro variabile, hanno tutte le stesse tangenti nei punti situati sulla retta all'infinito $z = 0$, hanno dunque gli stessi asintoti (n.° 228). Ora in quel fascio si trovano due coniche degeneri, una (corrispondente a $k = \pm \infty$) formata dalla retta all'infinito contata due volte, $z^2 = 0$, l'altra composta degli asintoti. Quest'ultima corrisponde al valore di k che annulla il discriminante della equazione scritta, valore che si riconosce esser $k = -\frac{A}{A_{33}}$. Sostituendo a k questo valore, o, ciò che fa lo stesso, *aggiungendo al termine noto* (a_{33}) *dell'equazione cartesiana* (1′) *di una conica la quantità* $-\frac{A}{A_{33}}$, *si ottiene la equazione complessiva degli asintoti.*

235. Diametri coniugati. — Due diametri p, q di una conica a centro diconsi *coniugati* (n.° 205), se uno, e quindi ciascuno, contiene il polo dell'altro (che sarà il punto all'infinito di quello); od anche se ciascuno biseca le corde parallele all'altro. Le tangenti negli estremi di un diametro (punti d'incontro colla curva) sono parallele al diametro coniugato; (v. fig. di pag. 396).

Una conica a centro possiede infinite coppie di diametri coniugati formanti una involuzione, le cui rette doppie sono gli *asintoti;* la involuzione è ellittica od iperbolica, secondo che la conica è una ellisse od una iperbole (¹). Tutto ciò segue subito da un teorema del n.° 205, applicato al centro della curva.

Due diametri coniugati e la retta all'infinito, polare del centro, formano un triangolo autopolare rispetto alla conica; e viceversa, se un triangolo autopolare ha un lato all'infinito, gli altri due sono diametri coniugati. Di qua, e da un teorema del n.° 206, segue che due diametri coniugati di una ellisse reale sono entrambi secanti (com'è del resto ogni diametro della ellisse), mentre di due diametri coniugati distinti di una iperbole, uno è secante (o *trasverso*), e l'altro non secante (o *non trasverso*).

Sotto l'aspetto analitico si osservi che i due diametri

$$m(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + n(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) = 0,$$
$$m'(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + n'(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) = 0,$$

della conica (1) (n.° 232) sono coniugati, se il polo $(m, n, 0)$ del primo appartiene al secondo, cioè se

$$a_{11}mm' + a_{12}(mn' + m'n) + a_{22}nn' = 0,$$

od anche

$$a_{11}\frac{m}{n}\frac{m'}{n'} + a_{12}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) + a_{22} = 0,$$

donde si ricava nuovamente (n.° 81) che i diametri coniugati formano una involuzione, le cui rette doppie (asintoti) si ottengono ponendo $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$. Di qui sarebbe facile ritrovare l'equazione complessiva (6) degli asintoti.

La definizione permette, dato un diametro, di costruire il coniugato. D'altra parte, nella costruzione di coppie di diametri coniugati, giovano talora le seguenti proposizioni, che discendono dai teoremi del n° 209 sul quadrangolo iscritto o sul quadrilatero circoscritto ad una conica, quando si introduca la ipotesi che un lato del triangolo, o trilatero diagonale sia all'infinito:

Le linee mediane di un parallelogramma iscritto in una conica sono diametri coniugati. Le diagonali di un parallelogramma circoscritto sono pure diametri coniugati.

(¹) Si ha qui la ragione dell'aggettivo *ellittica* o *iperbolica*, attribuito ad una involuzione.

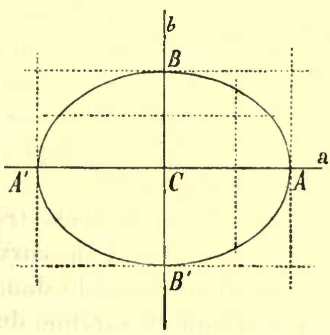
La prima proposizione si enuncia pure così:

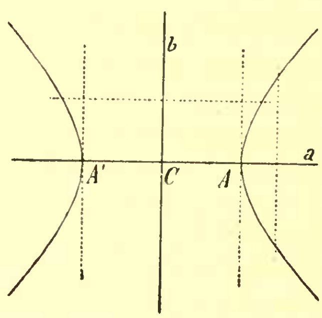
Le corde congiungenti un punto di una conica cogli estremi di un diametro (corde *supplementari*) *sono parallele a due diametri coniugati.*

236. Assi di una conica. — Riprendiamo le tre specie di coniche. Sappiamo che un diametro qualsiasi biseca un sistema di corde parallele tra loro, le quali, generalmente, riusciranno oblique rispetto al diametro. Sorge ora la questione se vi sia *qualche diametro particolare, il quale bisechi le corde perpendicolari ad esso.* Un tal diametro (se esiste) è asse di simmetria ortogonale per la curva, e dicesi *asse* (o *diametro principale*) della conica; i punti in cui esso incontra la curva, chiamansi *vertici.* La tangente in un vertice è perpendicolare al relativo asse.

Nella ricerca degli assi per via sintetica, conviene trattare separatamente le coniche a centro e la parabola.

Per le prime si osservi che, se la retta a è un asse, il diametro b, perpendicolare ad a, è coniugato con a (n.° 235); quindi anche b biseca le corde parallele ad a, ossia perpendicolari a b, anche b è un asse. Viceversa, se a e b sono due diametri con-

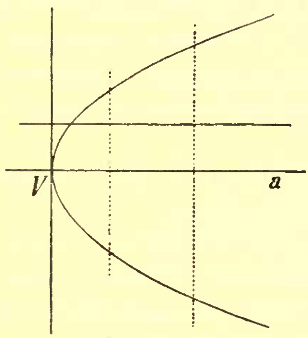




iugati e perpendicolari, ciascuno di essi è asse della conica. Sappiamo d'altra parte che in una involuzione nel fascio, com'è quella dei diametri coniugati, esiste sempre una coppia reale, e generalmente una sola (n.° 92), di rette coniugate e perpendicolari; concludiamo perciò che:

Una conica a centro possiede sempre due assi, e generalmente due soli. Per la *iperbole* questi coincidono colle bisettrici degli angoli degli asintoti, e sono l'uno secante (*trasverso*), l'altro non secante (*non trasverso*), sicchè la curva ha *due vertici reali e due immaginari*; per la *ellisse* i due assi sono secanti, ed *i quattro vertici reali.*

Fa eccezione al teorema precedente il solo caso, in cui l'involuzione dei diametri coniugati è *circolare*, chè allora ogni diametro è asse di simmetria della curva, la quale (come risulta da semplici considerazioni geometriche, e come presto dimostreremo analiticamente) è un *cerchio.*



Quanto alla parabola, se ricordiamo che tutti i diametri sono paralleli, per determinare un asse basterà condurre il sistema di corde perpendicolari agli infiniti diametri; i punti medi di queste staranno appunto sopra un *asse, a*, della parabola. E sarà questo, come è chiaro, l'unico asse. L'asse sega la parabola nel punto all'infinito della curva ed in un punto proprio *V*, *vertice* della parabola. *La parabola ha un solo asse ed un sol vertice.*

Osservazione. — Le considerazioni precedenti permettono di costruire gli assi di una data conica; per es., se si tratta di una conica a centro, basterà conoscere due coppie di diametri coniugati, e costruire, nella involuzione determinata da queste, la coppia di rette coniugate e ortogonali (n.° 92).

Ma se la conica è interamente descritta, si può anche tracciare il cerchio che ha per diametro un diametro della curva; esso sega ancora la curva negli estremi di un secondo diametro, simmetrico del primo rispetto agli assi; questi saranno dunque le mediane del rettangolo avente per diagonali i due diametri nominati.

237. Determinazione analitica degli assi. — Data l'equazione di una conica qualsiasi

$$(1') \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

in coordinate cartesiane che, per semplicità, supporremo *orto-*

gonali, proponiamoci di scrivere le equazioni degli assi. Ricordiamo a tal fine che il diametro coniugato alla retta

(2) $$y = kx,$$

ed alle parallele, ha l'equazione (n.° 232, ponendovi $k = \frac{n}{m}$)

(3) $$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0,$$

ossia

(3') $$(a_{11} + ka_{21})x + (a_{12} + ka_{22})y + (a_{13} + ka_{23}) = 0.$$

Il diametro è un asse, se riesce perpendicolare alla retta (2), se è verificata dunque la condizione

$$k(a_{11} + ka_{21}) - (a_{12} + ka_{22}) = 0,$$

ossia

(4) $$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0.$$

Questa equazione di secondo grado ha sempre due radici reali e distinte, k_1, k_2, perchè il prodotto $k_1 k_2 = -1$ è negativo. Sostituendo nella (3), o (3'), a k i valori k_1, k_2, successivamente, si ottengono le equazioni dei due assi della conica, i quali dunque risultano sempre reali.

Va notato però che, se la (1') rappresenta una parabola, avendosi allora $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$, una radice della (4) è, come si verifica, $k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$. In corrispondenza a questa radice si annullano i coefficienti di x ed y nella (3'), la quale (ridotta omogenea) rappresenta la retta all'infinito del piano. Lasciando da parte questa soluzione, che non soddisfa pienamente al problema, rimane per la parabola un solo asse, la cui equazione è data dalla (3'), quando per k si ponga la seconda radice della (4), $k = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$; con facili calcoli si può porre tale equazione, ad es., sotto la forma seguente:

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0.$$

Se invece la (1') è una conica a centro, osserveremo che le due rette $y = k_1x$, $y = k_2x$, perpendicolari rispettivamente ai due assi dalla conica, sono inoltre perpendicolari tra loro, essendo $k_1k_2 = -1$. Dunque ciascuna di quelle rette è parallela ad uno degli assi; e le equazioni di questi possono scriversi anche sotto la forma

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k,$$

dove (x_0, y_0) sono le coordinate del centro, e $k = k_1, k_2$ è una radice della (4). Sostituendo nella (4), al posto di k, la frazione, e mandando via i denominatori, otteniamo l'equazione complessiva degli assi:

$$a_{12}(x - x_0)^2 - (a_{11} - a_{22})(x - x_0)(y - y_0) - a_{12}(y - y_0)^2 = 0.$$

238. Caso particolare del cerchio. — Va considerata a parte la ipotesi che siano nulli coefficienti e termine noto della (4), che sia dunque

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0;$$

allora la (4) è soddisfatta da ogni valore di k. Ed ogni diametro della conica è un asse. D'altronde la curva in tal caso è un cerchio, giacchè le condizioni scritte sono precisamente quelle che distinguono il cerchio dalle altre coniche (n.° 143). Concludiamo che *per il cerchio* (*e per questa sola conica*) *ogni diametro è asse,* è dunque perpendicolare al diametro coniugato; *la involuzione dei diametri coniugati è circolare;* e *gli asintoti di un cerchio* (rette doppie di tale involuzione, n.° 234) *sono le direzioni assolute uscenti dal centro* (n.° 89). Ritroviamo così il risultato già noto: *tutti i cerchi segano la retta all'infinito nei punti ciclici del piano* (n.° 155). E vediamo inoltre, ad es., che due cerchi concentrici hanno gli stessi asintoti, cioè si toccano nei punti ciclici.

Esercizi I — 1) Determinare le coordinate del centro, e le equazioni staccate degli asintoti e degli assi per le coniche (in coordinate ortogonali)

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 3 = 0,$$
$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 3y + 5 = 0.$$

2) Determinare l'equazione dell'asse e le coordinate del vertice della parabola (in coordinate ortogonali)

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

3) Costruire il centro, la involuzione dei diametri coniugati, gli asintoti e gli assi di una conica data mediante cinque punti $ABCDE$; (si costruiscano ad es. le corde DF, DG parallele alle corde AB, AC, ecc.; cfr. n.° 231, es. 6)).

4) Lo stesso problema, quando la conica è definita mediante cinque delle sue tangenti. (Si costruiscano due parallelogrammi circoscritti alla curva, n.° 235).

5) Nelle coniche degli es. 3), 4) si cerchi una coppia di diametri formanti un angolo assegnato.

6) Costruire l'asse e il vertice di una parabola determinata da quattro tangenti, o da tre punti propri e dal punto improprio.

7) Dati in grandezza e posizione due diametri coniugati di una conica a centro, costruire gli asintoti e gli assi (n.° 235).

8) Le rette che proiettano dagli estremi A, A' di un diametro trasverso di una conica a centro, un punto variabile lungo la curva, segano sopra il diametro coniugato BB' una involuzione, che ha per centro il centro della curva, e per punti doppi (nella ellisse), o punti coniugati (nella iperbole) gli estremi di questo diametro. Ed una tangente variabile alla curva sega sopra le due tangenti in A, A' una coppia di punti proiettati dal centro mediante due diametri coniugati della curva (n.° 210).

9) L'esercizio precedente permette di costruire per punti e tangenti una conica a centro, di cui siano noti in grandezza e direzione due diametri coniugati. (Infatti ogni coppia MM' della involuzione nominata sul diametro BB' fornisce due punti della curva, le cui tangenti sono le diagonali del parallelogramma formato dalle parallele a BB' condotte per A, A', e dalle parallele ad AA' condotte per M, M').

10) Costruire una conica di cui siano dati il centro, le direzioni di due diametri coniugati, ed inoltre due punti o due tangenti (cfr. n.° 231, es. 4); oppure si determinino le lunghezze dei due diametri, cercando una coppia di punti coniugati su ciascuno di essi; poi es. 9)).

11) Costruire una conica conoscendone in posizione due coppie di diametri coniugati ed un punto; (del diametro che passa per il punto si determini ad es. il coniugato in posizione e grandezza; poi es. 9)).

12) In un triangolo iscritto in una conica, di cui ciascun lato sia parallelo alla tangente nel vertice opposto, il baricentro coincide col centro della curva; e viceversa. Segue l'esistenza di infiniti triangoli siffatti nella ellisse, potendosi un vertice assumere ad arbitrio sulla curva, con che il triangolo è determinato; invece ogni triangolo di tal natura è parzialmente immaginario nella iperbole, o degenere nella parabola.

II. — 13) Il luogo dei centri delle coniche di una schiera è una retta, la quale biseca le tre diagonali del quadrilatero base, e passa per il punto all'infinito dell'unica parabola appartenente alla schiera (Newton) (cfr. n.° 231, es. 41)). Segue che i punti medi delle tre diagonali suddette appartengono ad una retta, *mediana* del quadrilatero (cfr. n.° 89, es. 10)), e che le cinque mediane relative ai quadrilateri determinati da cinque rette, prese a quattro a quattro, concorrono in un punto. Si ha qui un nuovo modo per costruire il centro di una conica determinata da cinque tangenti.

14) Il luogo dei centri delle coniche di un fascio è una conica (detta dei *nove punti*) (cfr. n.° 231, es. 42)), la quale passa per i punti diagonali del quadrangolo base e per i punti medi dei sei lati del detto quadrangolo; i punti all'infinito di questa conica sono i centri delle due parabole appartenenti al fascio, ed il suo centro cade nel baricentro del quadrangolo base (Pfaff).

15) Cercando la condizione perchè la conica dei nove punti sia un cerchio non degenere, si vede che il fascio deve comporsi di iperboli equilatere. Dunque: « il luogo dei centri delle iperboli equilatere di un fascio è un cerchio » (Brianchon e Poncelet). Se i punti base del fascio sono reali,

si ricava di qua, e dall'es. 33) del n.° 231, che « in un triangolo i piedi delle altezze, i punti medi dei lati, ed i punti medi dei segmenti compresi fra i vertici e l'ortocentro, appartengono ad uno stesso cerchio » detto *cerchio dei nove punti*, o *cerchio di* FEUERBACH.

16) Segue pure che il luogo dei centri delle iperboli equilatere aventi un dato triangolo come autopolare (n.° 231, es. 57)), è il cerchio circoscritto al triangolo; ossia: « il cerchio circoscritto ad un triangolo autopolare rispetto ad una iperbole equilatera passa per il centro della curva ». (BRIANCHON e PONCELET).

17) La conica dei nove punti è una iperbole equilatera, se fra le coniche del fascio vi è un cerchio, e viceversa.

18) Se tra le coniche di un fascio vi è un cerchio, gli assi di quelle hanno direzioni costanti (DE LA HIRE e HUYGENS), e sono paralleli alle bisettrici delle coppie di lati opposti del quadrangolo base (PONCELET) ed agli asintoti della iperbole equilatera dell'es. 17)

19) Segue una costruzione delle direzioni degli assi di una conica determinata da cinque punti; si conduca infatti un cerchio per tre di essi e si determini (n.° 231, es. 28)) la quarta intersezione del cerchio colla conica, ecc.

20) I cerchi passanti per due punti fissi di una conica, segano ulteriormente la curva in due punti, la cui congiungente ha una direzione costante, che si costruisce subito quando siano noti gli assi.

21) Segue che i cerchi bitangenti ad una conica hanno i centri sopra l'uno o l'altro degli assi; e se un cerchio ha un contatto quadripunto colla curva, il punto di contatto cade in un vertice.

22) Segue ancora che se un cerchio oscula una conica in un punto P, e la sega ulteriormente in Q, la tangente in P e la retta PQ formano angoli uguali, ma opposti, con ciascun asse. E di qua si deduce una costruzione del cerchio osculatore ad una conica in un dato punto. La costruzione cade in difetto soltanto se P sta in un vertice, e quindi il cerchio ha un contatto quadripunto; questo caso sarà trattato in seguito.

23) Se $PP'P''$ è un triangolo iscritto in una ellisse, avente i lati paralleli alle tangenti nei vertici opposti (es. 12)), i cerchi osculatori in P, P', P'' passano per uno stesso punto Q della curva, che appartiene pure al cerchio $PP'P''$. E poichè il ragionamento può invertirsi, si conclude: « Per un punto di una ellisse passano tre cerchi che osculano altrove la curva; i tre punti di osculazione stanno in un cerchio col punto primitivo, e formano un triangolo che ha per baricentro il centro della curva » (STEINER). Per la iperbole, o parabola, dei tre punti di osculazione due sono immaginari, o cadono nel centro all'infinito della curva.

24) Il luogo dei centri delle iperboli equilatere iscritte in un triangolo è il cerchio rispetto a cui è autopolare il triangolo (SEYDEWITZ). (Infatti la costruzione dell'es. 10) del n.° 231, applicata ad una iperbole di cui siano date tre tangenti ed i due punti impropri in direzioni ortogonali, fa vedere che i centri delle quattro soluzioni appartengono ad un cerchio; ecc.)

25) Ad una schiera di coniche appartengono due iperboli equilatere; i loro centri stanno sui quattro cerchi, rispetto a cui sono autopolari, ordinatamente, i triangoli formati colle quattro rette basi prese a tre a tre, sul cerchio circoscritto al triangolo diagonale del quadrilatero base (es. 16)) e sulla retta mediana del quadrilatero (es. 13)). Segue che in un qualsiasi quadrilatero i cinque cerchi nominati appartengono ad un fascio, di cui l'asse radicale è la retta mediana, e l'asse centrale contiene gli ortocentri dei quattro triangoli suddetti.

Capitolo IV.

Forme ridotte delle equazioni delle coniche.

239. Coniche riferite a particolari sistemi cartesiani. — Riprendiamo la equazione cartesiana di una conica

$$(1)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Sinora gli assi coordinati x, y potevano esser rette arbitrarie del piano. Supporremo in questo capitolo che essi abbiano speciali relazioni metriche colla curva, ed esamineremo in corrispondenza come l'equazione di questa si semplifichi. A tal fine ci converrà tener presenti le equazioni

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

rappresentanti i diametri della conica (1) coniugati coll'asse x, e coll'asse y, rispettivamente.

a) Esclusa per ora la parabola, si supponga che l'origine delle coordinate cada nel centro della conica (1); allora i due diametri (2) devono passare per l'origine, quindi $a_{13} = a_{23} = 0$, e la (1) si riduce al tipo

$$(a)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

Viceversa da questa forma di equazione si risale alla ipotesi, sicchè:

L'equazione di una conica, riferita ad un sistema di coordinate di cui l'origine cade nel centro, manca dei termini a primo grado; *e viceversa.*

b) Si supponga inoltre che x, y siano diametri coniugati della conica; allora le equazioni (2) devono rappresentare, rispettivamente, l'asse y e l'asse x, quindi alle condizioni sopra trovate va aggiunta l'altra $a_{12} = 0$; e l'equazione (a) assume la forma

$$(b) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0;$$

e viceversa da questa si risale all'ipotesi.

L'equazione di una conica, riferita a due diametri coniugati come assi coordinati, contiene solo i quadrati delle variabili e il termine noto; e viceversa.

In particolare, se come assi coordinati si scelgono gli assi della conica, l'equazione conserva la forma (b), ma si ha il vantaggio derivante dall'ortogonalità del sistema coordinato.

L'equazione di ogni conica a centro può sempre ridursi alle forme (a) e (b).

c) Per la *iperbole* si può, alla ipotesi a), aggiungere l'altra che gli assi coordinati coincidano cogli asintoti (ciascuno dei quali è diametro coniugato di sè stesso). Allora le equazioni (2) devono rappresentare, rispettivamente, l'asse x e l'asse y, e perciò si deve avere $a_{11} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = 0$. L'equazione (1) si riduce alla forma

$$(c) \qquad 2a_{12}xy + a_{33} = 0,$$

ossia

$$(c') \qquad xy = k \quad \text{(costante)}.$$

L'equazione di una iperbole, riferita ai suoi asintoti come assi coordinati, contiene solo il prodotto delle variabili e il termine noto; e viceversa.

d) Allo scopo di procurarci una forma ridotta valida per tutte le tre specie di coniche, ed in particolare per la parabola, assumiamo ora come origine un punto (proprio) O qualsiasi della conica, come asse x il diametro passante per O, come asse y la tangente in O. Allora, data la posizione dell'origine, dovrà porsi nella (1) $a_{33} = 0$; e pel fatto che il diametro coniugato alla retta y, rappresentato dalla seconda delle (2), coincide coll'asse x, sarà inoltre $a_{12} = a_{23} = 0$. In conseguenza la (1) diviene

$$(d) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

Se poi supponiamo che la curva sia una parabola, e che quindi l'asse x seghi quella nell'origine e nel punto all'infinito, dovrà la (d) mancare del termine in x^2 (n.° 195) e ridursi quindi al tipo

$$(e)\qquad a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$

ossia

$$(e')\qquad y^2 = 2px \qquad (p \text{ costante}).$$

L'equazione di una parabola, riferita ad un diametro come asse x *e alla tangente nell'estremo proprio di questo come asse* y, *contiene solo il quadrato della* y *ed un termine di primo grado in* x; *e viceversa.*

La stessa equazione (e') vale se x è *l'asse* della parabola, O è il *vertice*, y la tangente nel vertice; allora il sistema di coordinate è ortogonale.

Osservazione. — La equazione (d), risolta rispetto ad y^2, si presenta sotto la forma

$$(d')\qquad y^2 = 2px + mx^2,$$

dove $p = -\frac{a_{13}}{a_{22}}$ è una quantità (detta *parametro* relativo al diametro assunto come asse x) che può supporsi positiva, pur di fissare opportunamente il verso positivo sull'asse x; ed $m = -\frac{a_{11}}{a_{22}}$ è positivo, nullo, o negativo secondo che si tratta di una iperbole, parabola, od ellisse, rispettivamente, come risulta applicando alla (d') la condizione del n.° 196. Ne viene che, per le tre specie di coniche, il quadrato dell'ordinata (y^2) supera, uguaglia, od è inferiore al rettangolo dell'ascissa e del doppio parametro ($2px$), ordinatamente. Da questa proprietà, nota ai greci, provengono (secondo Pappo) i nomi di *iperbole*, *parabola*, *ellisse*.

240. Discussione dell'equazione normale di una conica a centro. — Le equazioni ridotte delle coniche si prestano allo studio della forma e delle proprietà metriche di quelle curve.

Volendoci occupar anzitutto delle coniche a centro, partiamo dalla equazione

$$(1)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

che la curva assume quando venga riferita ai due assi (o in generale a due diametri coniugati), equazione detta *normale*, o *canonica* (in senso metrico), perchè il triangolo fondamentale, costituito dai due assi coordinati e dalla retta all'infinito, è autopolare (cfr. n.° 207).

Possiamo lasciar da parte la ipotesi che uno (o più) tra i coefficienti della (1) sia nullo, giacchè si cadrebbe in evidenti casi di degenerazione, privi di interesse. Dividendo i due membri della (1) per $-a_{33}$, l'equazione assume la forma

$$(2)\qquad mx^2 + ny^2 = 1,$$

dove m, n sono quantità reali, non nulle. Ora sui segni di queste si possono fare le seguenti ipotesi:

	m	n	
I.	$+$	$+$	$\Big\}\ mn > 0$. Ellisse.
II.	$-$	$-$	
III.	$+$	$-$	$\Big\}\ mn < 0$. Iperbole.
IV.	$-$	$+$	

Le prime due ipotesi conducono ad una ellisse, le ultime due ad una iperbole (n.° 196).

241. Ellisse. — I) Se nella (2) si suppongono $m > 0$, $n > 0$, la curva sega l'asse x in due punti reali A, A', di ascisse

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{m}} = \pm a,$$

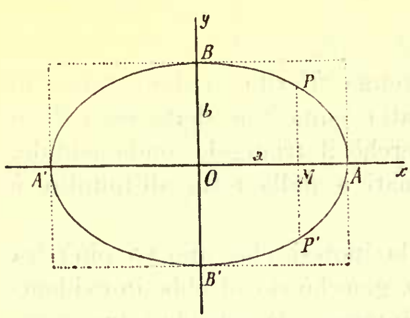
e l'asse y in due punti reali B, B', di ordinate

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{n}} = \pm b,$$

dove a, b indicano i valori assoluti dei radicali. I punti A, A', B e B' sono, se $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, *vertici* della ellisse, ed $a = OA$, $b = OB$ sono le lunghezze dei semiassi. Esprimendo m, n in funzione di a e b, e sostituendo nella (2), si ottiene la *equazione della ellisse riferita ai propri assi, di lunghezze* $2a$, $2b$:

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(La stessa equazione, se $\widehat{xy}$ non fosse retto, rappresenterebbe una ellisse riferita a due diametri coniugati di lunghezza $2a$, $2b$).



Ora la (I), nella ipotesi $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, fu già discussa al n.° 161; vedemmo allora che la ellisse è una curva chiusa, contenuta nel rettangolo che ha per mediane i segmenti AA', BB', i lati del quale toccano la curva nei vertici.

Se $a = b$, $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, la ellisse si riduce ad un cerchio con centro nell'origine e raggio a.

II) Se nella (2) facciamo la ipotesi II $m < 0$, $n < 0$, il primo membro della (2) ha valor negativo per ogni coppia di valori reali di x, y, mentre il secondo membro è positivo; la conica, la cui equazione potrebbe porsi sotto la forma

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

non ha punti reali, e dicesi ellisse *immaginaria*.

242. Iperbole. — III) Veniamo alla ipotesi III: $m > 0$, $n < 0$. Allora la curva (2) sega l'asse x in due punti *reali* A, A', di ascisse

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{m}} = \pm a,$$

e l'asse y in due punti *immaginari* di ascisse

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{n}} = \pm bi,$$

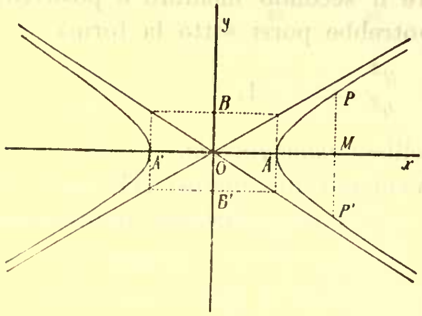
dove si è posto $b = \sqrt{\frac{1}{-n}}$, $i = \sqrt{-1}$. Giova tuttavia nelle costruzioni portare sopra y due segmenti OB, OB' uguali a $\pm b$. I punti A, A' diconsi, se $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, *estremi dell'asse trasverso*, e sono effettivi *vertici* della iperbole, mentre B, B' diconsi *estremi dell'asse non trasverso*, sebbene la curva non passi per essi. Esprimendo m ed n mediante a e b, otteniamo *l'equazione di una iperbole riferita all'asse trasverso* x *di lunghezza* $2a$, *e all'asse non trasverso* y *di lunghezza* $2b$:

$$\text{(III)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(La stessa equazione, in assi obliqui, rappresenterebbe una iperbole riferita a due diametri coniugati, uno x *trasverso* di lunghezza $2a$, l'altro y *non trasverso* di lunghezza $2b$, estendendosi ai diametri definizioni analoghe a quelle date sopra per gli assi).

La equazione (III) (nella ipotesi $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$) fu discussa al n.° 161; vedemmo allora che la iperbole si compone di due rami staccati prolungantisi all'infinito, ed esterni alla striscia formata dalle parallele ad y condotte per A, A', che sono tangenti alla iperbole nei vertici.

Gli asintoti della iperbole (III) hanno la equazione complessiva (n.° 234)



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

e quindi le equazioni separate

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Il secondo di essi passa per i vertici (a, b), $(-a, -b)$ del parallelogramma che ha per mediane AA', BB'; mentre il primo passa per gli altri due vertici $(-a, b)$, $(a, -b)$. E poichè questa osservazione vale qualunque sia l'angolo $\widehat{xy}$, si conclude:

Gli asintoti di una iperbole sono le diagonali di ogni parallelogramma avente come mediane (in grandezza e posizione) due diametri coniugati, uno trasverso, l'altro non trasverso.

Resterebbe ora da discutere la ipotesi IV: $m < 0$, $n > 0$; ma questa evidentemente conduce ad una iperbole avente come asse (o diametro) trasverso la retta y, e come asse (o diametro) non trasverso la retta x, e non dà quindi nulla di nuovo.

243. Iperbole equilatera. — Un caso particolare notevole d'iperbole si presenta quando gli asintoti sono perpendicolari tra loro; la iperbole si dice allora *equilatera*. L'ultimo teorema del n.° precedente ci dice che, in tale ipotesi, il parallelogramma avente per mediane due diametri coniugati (o i due assi) è equilatero $(a = b)$, perchè le diagonali sono perpendicolari. Segue dunque che *in una iperbole equilatera ogni diametro è uguale al coniugato*; e inoltre che *la equazione di una iperbole equilatera riferita ai due assi, o a due diametri coniugati, si presenta sotto la forma*

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Si riconosce poi facilmente che gli asintoti di una iperbole equilatera bisecano gli angoli formati dalle coppie di diametri coniugati (n.° 235).

244. Alcune formole relative all'equazione normale di una conica a centro. — Giova ricordare alcune formole relative ad una conica, nel caso che questa sia rappresentata mediante l'equazione normale.

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

rappresenta una *ellisse*, od una *iperbole* riferita agli assi $\left(\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}\right)$, secondo che si prende il segno superiore, o l'inferiore. Mantenendo la stessa convenzione per le formule seguenti, noteremo che la *tangente alla curva nel punto* (x', y') ha l'equazione (n.° 198)

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1, \tag{2}$$

la quale rappresenta pure la polare di un punto (x', y') qualsiasi del piano.

La normale alla curva in (x', y'), cioè la perpendicolare alla tangente nel punto di contatto, è rappresentata dall'equazione

$$\frac{a^2(x - x')}{x'} = \pm \frac{b^2(y - y')}{y'}; \tag{3}$$

e questa rappresenta pure la perpendicolare condotta da un punto qualsiasi (x', y') alla propria polare.

L'equazione tangenziale della (1) si riconosce essere (n.° 203)

$$a^2u^2 \pm b^2v^2 = 1, \tag{4}$$

o in coordinate omogenee di rette

$$a^2u^2 \pm b^2v^2 = w^2. \tag{4'}$$

Questa è dunque la condizione affinchè la retta $ux + vy + w = 0$ tocchi la (1). Ora, ricavando dalla (4') w mediante u, v, e sostituendo nell'equazione della retta, risulta che *l'equazione cartesiana di una tangente alla conica* (1) può porsi sotto la forma

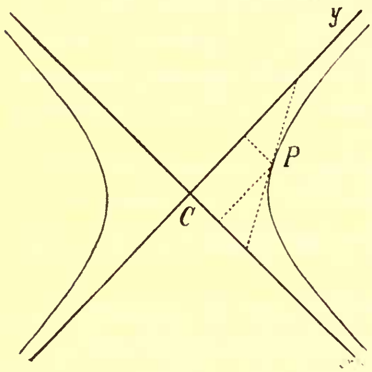
$$ux + vy = \sqrt{a^2u^2 \pm b^2v^2}; \tag{5}$$

al radicale si intende premesso il doppio segno, qualunque sia la conica. Le quantità u, v sono costanti arbitrarie; se si considerano come date, *la* (5) (col doppio segno premesso al radicale) *rappresenta le due tangenti alla* (1) *parallele alla retta* $ux + vy = 0$.

245. Iperbole riferita agli asintoti. — Alcune proprietà dell'iperbole scaturiscono facilmente dall'equazione che assume la curva, quando si prendano come assi coordinati gli asintoti:

(1) $$xy = k,$$

dove k è una costante, che può ritenersi positiva pur di scegliere convenientemente i versi positivi sugli assi. In tale ipotesi, dei due rami dell'iperbole, uno cade nell'angolo delle semirette positive x, y, l'altro nell'angolo opposto al vertice.



La (1) riceve una immediata interpretazione: *il parallelogramma avente due lati sugli asintoti di una iperbole, ed un vertice mobile lungo la curva, ha l'area costante* ($= k \operatorname{sen} xy$).

Se nella (1) una delle coordinate, ad es. la y, va crescendo senza limite in valore assoluto, l'altra x tende a zero; segue che un punto, il quale descriva un ramo di iperbole allontanandosi da un vertice, si avvicina sempre più ad uno degli asintoti.

La tangente alla curva (1) nel punto (x', y') ha l'equazione

$$xy' + yx' = 2k,$$

e stacca sugli asintoti i segmenti $2k : y' = 2x'$, e $2k : x' = 2y'$. Segue facilmente che *il segmento di una tangente ad una iperbole compreso fra gli asintoti è diviso per metà dal punto di contatto*; ed inoltre che *una tangente variabile all'iperbole forma cogli asintoti un triangolo di area costante* ($= 2k \operatorname{sen} xy$).

Ciò risulta pure dall'equazione tangenziale della iperbole

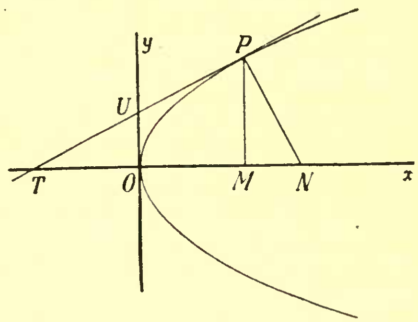
$$uv = \frac{1}{4k}.$$

246. Parabola. Proprietà della tangente e della normale. — Sappiamo già che l'equazione di una parabola, riferita all'asse e alla tangente nel vertice come rette x, y, rispettivamente, $\left(\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}\right)$, ha la forma

(1) $$y^2 = 2px,$$

dove p è una costante detta *parametro* [1], che può sempre riguardarsi come positiva, pur di fissare convenientemente il verso positivo sull'asse x.

Lo studio dell'equazione (1) fatto al n.° 161, ci ha già indicato che la parabola si compone di un sol ramo estendentesi all'infinito, e giacente tutto da una banda dell'asse y.



La tangente alla parabola (1) nel punto $P(x', y')$ ha l'equazione

(2) $\quad yy' = p(x + x')$,

che rappresenta pure la polare di un punto (x', y') qualsiasi. E *la normale alla curva* in P, o, in generale, la perpendicolare calata dal polo sulla polare, è data da

$$\text{(3)} \qquad \frac{x - x'}{p} + \frac{y - y'}{y'} = 0.$$

La tangente e la normale segano l'asse x in due punti T, N, le cui ascisse sono

$$OT = -x', \quad ON = x' + p.$$

Se si indica con M la proiezione ortogonale di P sopra l'asse x, queste formule ci dicono che

$$OT = -OM, \qquad MN = p.$$

Ora i due segmenti TM, MN, proiezioni ortogonali sull'asse x dei tratti di tangente e normale compresi fra il punto della curva a cui si riferiscono e l'asse, vengono detti, rispettivamente, *sottotangente* e *sottonormale*. Concludiamo che:

In una parabola la sottotangente di un punto qualsiasi è divisa per metà dal vertice; *e la sottonormale è costante ed uguale al parametro.*

Si può anche dire che *la tangente in un punto qualsiasi* (cioè il tratto PT di una tangente compreso fra il punto di contatto e l'asse x) *è divisa per metà dalla tangente nel vertice.*

---

[1] Alcuni autori chiamano (con Desargues) parametro la quantità $2p$ (*latus rectum* per gli antichi geometri).

L' equazione tangenziale della parabola (1) si presenta sotto la forma

(4) $$v^2 = \frac{2}{p} u.$$

Rendendo questa omogenea e ricavando il valore di w, si trova, col procedimento indicato nel n.° precedente, che l' *equazione della* (unica) *tangente alla parabola parallela ad una retta data* $ux + vy = 0$, può porsi sotto la forma

(5) $$ux + vy + \frac{pv^2}{2u} = 0.$$

247. Metodi per ridurre a forma semplice l'equazione di una conica. — Negli ultimi n.[i] abbiamo visto quali termini formino parte dell' equazione di una conica riferita a particolari rette, scelte come assi cartesiani. Se però si suppone data inizialmente la curva mediante una equazione generale

(1) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

riferita ad assi x, y comunque fissati nel piano, sorge il problema di *calcolare* i coefficienti che entreranno nell' equazione ridotta della curva, quando questa venga riferita a particolari assi X, Y. Si tratta insomma di applicare realmente al polinomio (1) la trasformazione di coordinate, con cui si passa dagli assi x, y agli assi X, Y.

Ragioniamo, per fissar le idee, sopra un esempio particolare. Supponiamo che la (1) sia una conica a centro, riferita ad assi *ortogonali* qualisivogliano x, y; e che si voglia scrivere la equazione normale della conica stessa, riferita ai propri *assi* (di simmetria) X, Y.

Trattandosi di passare da uno ad un altro sistema ortogonale, le formole per la trasformazione saranno del tipo (n.° 122)

(a) $$\begin{cases} x = \alpha + X\cos\varphi - Y\text{sen}\varphi, \\ y = \beta + X\text{sen}\varphi + Y\cos\varphi, \end{cases}$$

dove (α, β) sono le coordinate antiche della nuova origine, ed è $\varphi = \widehat{xX}$.

Ora noi sappiamo calcolare, mediante i coefficienti della (1), sia α e β coordinate del centro della conica (n.° 233), sia φ angolo che uno degli *assi* X di questa forma coll' asse coordinato x (n.° 237). Determinate così le costanti che compariscono nelle (a), basterà far le sostituzioni (a) nella (1), ed eseguire i calcoli, per giungere all'equazione normale richiesta.

Si può anche, senza premettere la determinazione di α, β, φ, sostituire subito le (a) nella (1), considerando queste tre quantità come indeterminate; si ricorderà poi che nella equazione finale in X, Y, devono annullarsi i coefficienti di XY, X, Y (n.° 139); e si approfitterà delle tre equazioni di condizione esprimenti questo fatto, per calcolare effettivamente α, β e φ.

Comunque si proceda, le operazioni qui indicate, semplici come concetto, conducono a calcoli alquanto lunghi; questi possono evitarsi seguendo il procedimento indiretto che ora passiamo ad esporre. Premetteremo alcuni lemmi relativi a particolari trasformazioni di coordinate.

248. Modo di comportarsi di una conica rispetto a particolari trasformazioni di coordinate. — Ricordiamo che le formole per la trasformazione di coordinate cartesiane sono del tipo

$$(2) \qquad x = \alpha + \alpha' X + \alpha'' Y, \qquad y = \beta + \beta' X + \beta'' Y,$$

dove le sei quantità α, $\beta \ldots$ sono costanti (n.° 122); se muta l'origine ma non le direzioni degli assi, quelle formole divengono

$$(2') \qquad x = \alpha + X, \qquad y = \beta + Y,$$

essendo (α, β) le coordinate antiche della nuova origine; se invece l'origine rimane fissa, si ha

$$(2'') \qquad x = \alpha' X + \alpha'' Y, \qquad y = \beta' X + \beta'' Y.$$

Ciò posto, dimostriamo che:

I. *Una trasformazione di coordinate, nella quale muti l'origine ma non le direzioni degli assi, lascia inalterati i coefficienti dei termini a secondo grado nell'equazione di una conica.*

Infatti la

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

mediante le formole (2'), diviene

$$a_{11}(X+\alpha)^2 + 2a_{12}(X+\alpha)(Y+\beta) + a_{22}(Y+\beta)^2 + \ldots + a_{33} = 0,$$

ossia

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 \\ + 2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13})X + 2(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23})Y \\ + (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33}) = 0, \end{array} \right.$$

dove i coefficienti dei termini a secondo grado sono ancora a_{11}, $2a_{12}$, a_{22}.

II. *Una trasformazione di coordinate, che lasci ferma l'origine, non altera il termine noto dell'equazione di una conica.*

Infatti la (1), mediante le formole (2''), diviene

$$a_{11}(\alpha' X + \alpha'' Y)^2 + 2a_{12}(\alpha' X + \alpha'' Y)(\beta' X + \beta'' Y) + \dots$$
$$+ 2a_{13}(\alpha' X + \alpha'' Y) + \dots + a_{33} = 0,$$

dalla quale apparisce che i termini a secondo e primo grado del polinomio (1) danno, rispettivamente, termini di secondo e primo grado del polinomio trasformato; il termine noto di questo è dunque a_{33}, come nel polinomio (1).

Ci servirà pure il lemma seguente relativo ad un particolare trinomio di secondo grado:

III. *Una trasformazione di coordinate, che lasci ferma l'origine, muta il trinomio di secondo grado* $x^2 + 2xy \cos xy + y^2$ (formato colle antiche coordinate di un punto e col coseno dell'angolo degli antichi assi) *nel trinomio analogo* $X^2 + 2XY \cos XY + Y^2$ (formato colle nuove coordinate dello stesso punto e col coseno dell'angolo dei nuovi assi).

Infatti entrambi i trinomi esprimono il quadrato della distanza del punto, che ha le antiche coordinate (x, y) e le nuove (X, Y), dalla origine comune dei due sistemi (n.° 112).

249. Invarianti di una conica relativamente ad una trasformazione di coordinate. — Premessi questi lemmi, ritorniamo al nostro problema. È data l'equazione di una conica riferita a certi assi x, y,

(1) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Eseguiamo una trasformazione di coordinate, adoperando le formole (2) del n.° 248; giungeremo così ad una equazione

(3) $$a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 + 2a'_{13}X + 2a'_{23}Y + a'_{33} = 0,$$

della quale ci interessa conoscere i coefficienti. A tal fine cerchiamo di stabilire *a priori* qualche relazione tra i coefficienti della (1) e della (3).

Supponiamo perciò di eseguire sui coefficienti della (1) una certa serie di operazioni algebriche, il cui risultato potrà indicarsi con $\varphi(a_{11}, \dots, a_{33})$. Se le stesse operazioni, nello stesso ordine, si eseguiscono sui coefficienti della (3), si otterrà un nuovo risultato $\varphi(a'_{11}, \dots, a'_{33})$. I due risultati differiranno, se il complesso di operazioni indicato simbolicamente con φ è scelto a caso. Ma si può chiedere se esista qualche funzione φ tale, che risulti sempre (qualunque sia la equazione quadratica (1) e la trasformazione di coordinate (2) adoperata)

(4) $$\varphi(a_{11}, \dots, a_{33}) = \varphi(a'_{11}, \dots, a'_{33}).$$

Se la (4) è soddisfatta, si dirà che l'espressione φ è un *invariante* (1) *della* (1) *rispetto alle trasformazioni di coordinate,* vale a dire una espressione che ha lo stesso valore, quando essa venga formata coi coefficienti dell'equazione primitiva, o con quelli della trasformata.

La esistenza di siffatti invarianti può prevedersi *a priori*, poichè tale proprietà gode ogni espressione composta coi coefficienti della (1), la quale ci dia il valore di una grandezza geometrica appartenente alla curva (1), ma indipendente dal sistema di coordinate a cui la curva vien riferita (ad es. la lunghezza di un asse, l'angolo degli asintoti, ecc.). Ora si tratta di vedere come si possano formare effettivamente alcuni di questi invarianti. Ma è chiaro sin d'ora che, ogniqualvolta se ne conoscerà uno, si potrà scrivere una relazione del tipo (4), in cui il primo membro sarà noto, poichè formato coi coefficienti della (1), mentre il secondo membro dipenderà dai coefficienti incogniti dell'equazione (3). Questi potranno calcolarsi, quando si abbia un numero sufficiente di relazioni analoghe alla (4).

Allo scopo di procurarci alcuni invarianti, supponiamo anzitutto che la trasformazione di coordinate, con cui si passa dell'equazione (1) alla (3), lasci ferma l'origine, e sia quindi rappresentate dalle formole (2″) (n.° 248). Tenuto conto di quelle formole e del lemma III (n.° 248), possiamo scrivere le seguenti identità:

(5) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots + a_{33} \equiv a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 + \dots + a'_{33},$$

(6) $$x^2 + 2xy\cos xy + y^2 \equiv X^2 + 2XY\cos XY + Y^2,$$

(1) La nozione di *invariante* è sorta dalla considerazione di trasformazioni lineari generali di variabili; noi dunque adottiamo questo nome in un senso molto particolare. Il lettore potrà vedere i fondamenti della teoria degli invarianti nei trattati di Algebra del CAPELLI, CESARO, ...

nella prima delle quali è anzi $a'_{33} = a_{33}$ (lemma II, n.° 248). Insieme a quelle sussisterà pure la identità che si ottiene aggiungendo ai due membri della (5), i due membri della (6) moltiplicati per uno stesso parametro arbitrario λ:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_{11}+\lambda)x^2+2(a_{12}+\lambda\cos xy)xy+(a_{22}+\lambda)y^2\\ &+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}\\ \equiv\ &(a'_{11}+\lambda)X^2+2(a'_{12}+\lambda\cos XY)XY+(a'_{22}+\lambda)Y^2\\ &+2a'_{13}X+2a'_{23}Y+a'_{33}.\end{aligned}\right.$$

I due membri della (7), uguagliati a zero, rappresentano una stessa conica K, riferita una prima volta agli assi antichi x, y, una seconda volta agli assi nuovi X, Y. La conica K varierà però al variare di λ, descrivendo un fascio. Ora se vogliamo determinare, ad es., i valori di λ a cui corrispondono *parabole*, possiamo servirci, sia della equazione di K in x, y, sia di quella in X, Y. Dalla prima ricaviamo che il parametro λ deve soddisfare alla condizione (n.° 196)

$$(a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda)-(a_{12}+\lambda\cos xy)^2=0,$$

ossia

$$(8)\quad \lambda^2\operatorname{sen}^2 xy+\lambda(a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos xy)+a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0;$$

mentre, valendoci della equazione di K in X, Y, troviamo analogamente la condizione

$$(8')\quad \begin{aligned}\lambda^2\operatorname{sen}^2 XY+\lambda(a'_{11}+a'_{22}-2a'_{12}\cos XY)\\ +a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=0.\end{aligned}$$

Ora le due equazioni di condizione (8) ed (8′) devono fornire per λ gli stessi valori; dunque esse avranno i coefficienti proporzionali; sussisteranno cioè le uguaglianze

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos xy}{\operatorname{sen}^2 xy}&=\frac{a'_{11}+a'_{22}-2a'_{12}\cos XY}{\operatorname{sen}^2 XY},\\ \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\operatorname{sen}^2 xy}&=\frac{a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}}{\operatorname{sen}^2 XY}.\end{aligned}\right.$$

Queste ci dicono che le espressioni a primo membro non mutano valore se vengono formate (anzichè coi coefficienti della (1) e coll'angolo degli antichi assi) coi coefficienti della (3) e coll'angolo dei nuovi assi; quelle espressioni sono *invarianti* relativi ad una trasformazione di coordinate che non muti l'origine.

Un terzo invariante si ottiene in modo analogo, determinando λ in guisa che la conica corrispondente K si scinda in due rette. Se infatti si ricorre all'equazione di K in x, y, si trova la condizione (n.° 211)

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda\cos xy & a_{13} \\ a_{21}+\lambda\cos xy & a_{22}+\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia, sviluppando e indicando con C il coefficiente della prima potenza di λ che poco interessa,

$$(10) \qquad a_{33}\,\mathrm{sen}^2 xy \cdot \lambda^2 + C\lambda + A = 0,$$

dove A è il discriminante della (1). Similmente, partendo dall'equazione di K in X, Y, si ottiene

$$(10') \qquad a'_{33}\,\mathrm{sen}^2 XY \cdot \lambda^2 + C'\lambda + A' = 0,$$

dove A' è il discriminante della (3). Esprimendo la proporzionalità tra i coefficienti della (10) e (10'), ricordando che $a_{33} = a'_{33}$, e notando che questa quantità può sempre supporsi diversa da zero (visto che, in caso opposto, è lecito aggiungere una stessa costante non nulla ai due membri della identità (7)), si ottiene un terzo *invariante* [1]

$$(11) \qquad \frac{A}{\mathrm{sen}^2 xy} = \frac{A'}{\mathrm{sen}^2 XY}.$$

Vediamo così che le tre espressioni

$$(12) \qquad \frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos xy}{\mathrm{sen}^2 xy}, \quad \frac{a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2}{\mathrm{sen}^2 xy}, \quad \frac{A}{\mathrm{sen}^2 xy}$$

non variano quando mutano gli assi, restando ferma l'origine. Vogliamo ora dimostrare che esse rimangono immutate anche per una traslazione di assi. Fatto ciò, la stessa conclusione varrà per ogni trasformazione di coordinate cartesiane, la quale può sempre decomporsi in una trasformazione coll'origine fissa, seguita da una traslazione. Ora, che le prime due espressioni (12) non si alterino per una traslazione di assi, segue dal fatto che i

---

[1] Si potrebbe anche scrivere l'uguaglianza $\frac{C}{\mathrm{sen}^2 xy} = \frac{C'}{\mathrm{sen}^2 XY}$; ma questa ha poco interesse, giacchè l'espressione a primo membro si altera per una traslazione di assi, mentre, come vedremo, le tre espressioni (9) e (11) sono invarianti rispetto alle traslazioni.

coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{12}, mediante cui son composte, non mutano nella traslazione (n.° 248, lemma I), ed è inoltre $\widehat{xy} = \widehat{XY}$. Quanto alla terza espressione, si osservi che, essendo la traslazione rappresentata dalle formole (2') del n.° 248, il discriminante della equazione trasformata (1') del n.° 248, è

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

dove

$$a'_{13} = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}, \qquad a'_{23} = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23},$$
$$a'_{33} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33}$$
$$= a'_{13}\alpha + a'_{23}\beta + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}).$$

Se ora dalla terza verticale del determinante A' sottragghiamo la prima moltiplicata per α e la seconda moltiplicata per β, e nel determinante così ottenuto ripetiamo le stesse operazioni sulle orizzontali, anzichè sulle verticali, giungiamo infine alla uguaglianza $A' = A$, che volevamo giustificare.

Concludiamo con ciò che

Le tre espressioni (12), *formate coi coefficienti dell'equazione di una conica* (*e coll'angolo degli assi coordinati*), *conservano gli stessi valori quando vengano formate coi coefficienti dell'equazione trasformata* (*e coll'angolo di nuovi assi*), qualunque sia la trasformazione di coordinate che l'equazione primitiva subisce. Quelle tre espressioni sono *invarianti* rispetto alla detta trasformazione.

Ponendo per brevità

$$I = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos xy,$$

e ricordando che $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ è un minore del discriminante, i tre invarianti possono indicarsi con

$$(12') \qquad \frac{I}{\operatorname{sen}^2 xy}, \quad \frac{A_{33}}{\operatorname{sen}^2 xy}, \quad \frac{A}{\operatorname{sen}^2 xy}.$$

Tenuto conto dei gradi con cui compariscono in essi i coefficienti della (1), li chiameremo ordinatamente: invariante *lineare*, *quadratico*, *cubico*.

È utile ricordare che, in assi ortogonali, le espressioni degli invarianti si semplificano e divengono

$$(12'') \qquad I = a_{11} + a_{22}, \quad A_{33}, \quad A;$$

dunque: *nel passaggio da assi ortogonali ad assi ortogonali, rimangono inalterati il discriminante dell'equazione di una conica, il complemento algebrico del termine noto, e la somma dei coefficienti dei quadrati delle coordinate.*

Osservazione. — Occorre tener presente che le uguaglianze (9) ed (11), a cui gli invarianti danno luogo, sussistono quando si confrontano due equazioni, come la (1) e la (3), una delle quali sia ottenuta dall'altra colla semplice applicazione delle formole per la trasformazione delle coordinate, *avendo cura di non introdurre nè togliere fattori.* È infatti evidente che, se tutti i coefficienti dell'equazione di una conica vengono moltiplicati per uno stesso fattore t, i tre invarianti, lineare, quadratico e cubico, non rimangono inalterati, ma vengono moltiplicati per t, t^2 e t^3, rispettivamente.

250. Formazione della equazione ridotta di una conica col mezzo degli invarianti. — Mostriamo, sopra alcuni esempi, l'applicazione degli invarianti al calcolo effettivo dei coefficienti dell'equazione ridotta di una conica, della quale si conosce l'equazione generale. Sia questa

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

dove le a_{ik} sono quantità note, e le x, y coordinate cartesiane, che per semplicità supporremo *ortogonali* (avvertendo che, ove all'incontro fossero oblique, basterebbe adoperare le espressioni (12') del n.° 249, in luogo delle (12") qui riportate). Calcoliamo anzitutto gli invarianti della (1)

$$I = a_{11} + a_{22}, \qquad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \qquad A,$$

che sono *quantità note.*

Trattiamo ora i seguenti casi.

a) *Riduzione agli assi dell'equazione di una conica a centro.* — Qui i nuovi assi coordinati X, Y (assi di simmetria della (1)) sono pure *ortogonali*; rispetto ad essi la conica ha una equazione del tipo (n.° 239, *b*))

$$(2) \qquad a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33} = 0,$$

i cui coefficienti sono incogniti. Per calcolarli, formiamoci gli invarianti della (2)

$$I' = a'_{11} + a'_{22}, \quad A'_{33} = a'_{11}a'_{22}, \quad A' = a'_{11}a'_{22}a'_{33}.$$

Paragonandoli cogli invarianti della (1), abbiamo (n.° 249) le relazioni

(3) $a'_{11} + a'_{22} = I, \quad a'_{11}a'_{22} = A_{33}, \quad a'_{11}a'_{22}a'_{33} = A,$

le quali ci dicono che

(4) $$a'_{33} = \frac{A}{A_{33}},$$

e che a'_{11}, a'_{22} sono le radici dell'equazione quadratica

(5) $$t^2 - It + A_{33} = 0.$$

È indifferente assumere per coefficiente di X^2(o di Y^2) nella (2) l'una o l'altra delle due radici, essendo in arbitrio la scelta dell'uno o dell'altro asse della conica, come asse delle X (o delle Y).

β) Riduzione dell'equazione di una conica a centro a due diametri coniugati. — Se come nuovi assi coordinati X, Y si assumono due diametri coniugati, si dovrà dare l'angolo $\widehat{XY}$ che essi formano, per distinguere la coppia di diametri X, Y dalle infinite altre coppie di diametri coniugati.

L'equazione ridotta ha ancora il tipo (2); ma per calcolarne i coefficienti, qui bisogna adoperare, in luogo delle (3), le equazioni (n.° 249)

(3') $$\frac{a'_{11} + a'_{22}}{\operatorname{sen}^2 XY} = I, \quad \frac{a'_{11}a'_{22}}{\operatorname{sen}^2 XY} = A_{33}, \quad \frac{a'_{11}a'_{22}a'_{33}}{\operatorname{sen}^2 XY} = A,$$

a cui si perviene tenendo conto della obliquità dei nuovi assi. Queste ci danno ancora

(4') $$a'_{33} = \frac{A}{A_{33}};$$

ma ora a'_{11}, a'_{22} sono radici della equazione

(5') $$t^2 - I \operatorname{sen}^2 XY \cdot t + A_{33} \operatorname{sen}^2 XY = 0.$$

γ) Riduzione dell'equazione di una iperbole agli asintoti. — La nostra conica (1), supposta iperbole, quando venga riferita agli asintoti, assume una equazione del tipo (n.° 239, *c*))

(2'') $$2a'_{12}XY + a'_{33} = 0.$$

Formiamo gli invarianti di questa (tenendo conto che gli asintoti in generale sono obliqui), ed uguagliamoli agli invarianti noti della (1); troveremo le equazioni

(3'') $$\frac{-2a'_{12}\cos XY}{\operatorname{sen}^2 XY} = I, \quad \frac{-a'^2_{12}}{\operatorname{sen}^2 XY} = A_{33}, \quad \frac{-a'^2_{12}a'_{33}}{\operatorname{sen}^2 XY} = A,$$

nelle quali le incognite sono i coefficienti a'_{12}, a'_{33} della (2″) e l'angolo $\widehat{XY}$ degli asintoti. Dalle ultime due equazioni, mediante divisione, si ottiene intanto il solito valore del termine noto (come era previdibile, n.° 248, II)

$$(4'') \qquad a'_{33} = \frac{A}{A_{33}}.$$

Dividendo poi membro a membro la seconda delle (3″) per la prima innalzata a quadrato, si trova

$$-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 XY = \frac{A_{33}}{I^2},$$

donde

$$(5'') \qquad \operatorname{tg} XY = \frac{\pm 2\sqrt{-A_{33}}}{I},$$

che ci dà l'angolo degli asintoti. Ricavando di qua

$$\operatorname{sen}^2 XY = \frac{\operatorname{tg}^2 XY}{1+\operatorname{tg}^2 XY} = \frac{-4A_{33}}{I^2 - 4A_{33}},$$

e sostituendo nella seconda delle (3″), si ha in fine

$$a'_{12} = \frac{2A_{33}}{\pm\sqrt{I^2 - 4A_{33}}},$$

dove il doppio segno dipende dal verso che si assume come positivo sugli asintoti.

δ) *Riduzione dell'equazione di una parabola all'asse e alla tangente nel vertice.* — Se come assi coordinati X, Y si assumono l'asse della curva e la tangente nel vertice $\left(\widehat{XY} = \frac{\pi}{2}\right)$, l'equazione della parabola assume la forma (n.° 239, (e))

$$(2''') \qquad a'_{22}Y^2 + 2a'_{13}X = 0.$$

Paragonando gli invarianti di questa agli invarianti della (1), nell'ipotesi che la (1) rappresenti una parabola, e sia dunque $A_{33} = 0$, troviamo le relazioni

$$(3''') \qquad a'_{22} = I, \qquad -a'^2_{13}a'_{22} = A,$$

(oltre all'identità $0 = 0$ offerta dagli invarianti quadratici). Le (3‴) ci danno a'_{22}, ed il valore dell'altro coefficiente incognito

$$a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{A}{I}},$$

il doppio segno dipendendo dal verso che si assume come positivo sull'asse X.

251. Significato geometrico dell' annullarsi di un invariante. — Poichè il valore di un invariante non si altera per una trasformazione di coordinate (e si altera per un fattore t, t^2 o t^3, quando tutto il primo membro dell' equazione della curva venga moltiplicato per una quantità arbitraria t), si prevede che l'annullarsi di un invariante debba corrispondere ad una particolarità della conica indipendente dalla posizione degli assi coordinati.

Ed infatti sappiamo già che l' annullarsi dell' invariante cubico, ossia la condizione $A = 0$, significa che la conica si spezza in due rette (n.° 211); e l' annullarsi dell' invariante quadratico, $A_{33} = 0$, esprime che la conica è una parabola (n.° 196).

Supponiamo ora nullo l'invariante lineare, $I = 0$. Riferita la conica ad assi ortogonali x, y arbitrari, e scrittane l' equazione sotto la forma consueta

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \ldots = 0$$

sarà $a_{11} + a_{22} = 0$; donde segue che a_{11} e a_{22} hanno segni opposti, e che $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ è negativo; la conica è dunque una iperbole (n.° 196). D'altra parte l'angolo $\widehat{XY}$ degli asintoti di una iperbole è dato da (n.° 250, (5″))

$$\operatorname{tg} XY = \frac{\pm 2\sqrt{-A_{33}}}{I}.$$

Se $I = 0$, quell' angolo è retto, la iperbole è *equilatera*; e viceversa. Dunque: *la condizione perchè una iperbole sia equilatera è espressa dall' annullarsi dell' invariante lineare*:

$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad \text{in assi ortogonali}$$
$$a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos xy = 0, \quad \text{in assi qualsiansi.}$$

Osservazione. — Cumulando due delle condizioni sopra nominate, si trovano ulteriori particolarità. Così, se $A = A_{33} = 0$, la conica si spezza in due rette parallele; se $A = I = 0$, la conica si spezza in due rette perpendicolari. Le condizioni $A_{33} = 0$, $I = 0$ sono incompatibili (per coniche rappresentate da equazioni a coefficienti reali), a meno che la retta all' infinito non formi parte della curva, nella quale ipotesi l' equazione cartesiana si abbassa a primo grado.

252. Teoremi di Apollonio. — Possiamo inoltre, per le coniche a centro, procurarci i significati geometrici degli invarianti stessi, o più esattamente di certi rapporti formati con quelli, mediante le seguenti considerazioni, che ci condurranno a stabilire due teoremi, dovuti ad Apollonio, sui diametri coniugati di una conica a centro.

Partendo dall'equazione di una conica a centro, riferita a due assi coordinati x, y arbitrari, che supporremo ad es. ortogonali, calcoliamoci i valori degli invarianti I, A_{33}, A. Riferiamo poi la curva a due diametri coniugati X, Y; troveremo una equazione del tipo

$$(1) \qquad a'_{11} X^2 + a'_{22} Y^2 + a'_{33} = 0,$$

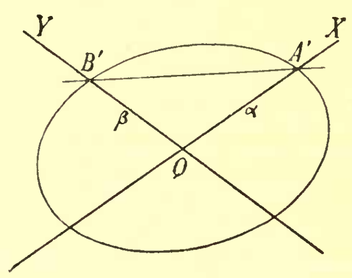
dove (n.° 250, β))

$$(2) \qquad a'_{33} = \frac{A}{A_{33}},$$

ed a'_{11}, a'_{22} soddisfano alle condizioni

$$(3) \quad a'_{11} + a'_{22} = I \operatorname{sen}^2 XY, \quad a'_{11} a'_{22} = A_{33} \operatorname{sen}^2 XY.$$

D'altra parte, se indichiamo con α, β i valori dei semidiametri della conica (1) situati rispettivamente sulla retta X e sulla retta Y (dei quali semidiametri supporremo ad es. il secondo non trasverso, nel caso della iperbole), ricaviamo dalla (1), ponendo successivamente $Y = 0$ ed $X = 0$,



$$(4) \quad \begin{cases} \alpha^2 = -\dfrac{a'_{33}}{a'_{11}}, \\ \pm \beta^2 = -\dfrac{a'_{33}}{a'_{22}}, \end{cases}$$

nella seconda delle quali il segno superiore si riferisce alla ellisse, l'inferiore alla iperbole. Sommando o moltiplicando membro a membro le (4), otteniamo

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = -a'_{33} \frac{a'_{11} + a'_{22}}{a'_{11} a'_{22}}, \qquad \pm \alpha^2 \beta^2 = \frac{a'^2_{33}}{a'_{11} a'_{22}},$$

e, tenendo conto delle (2), (3),

$$(5) \qquad \alpha^2 \pm \beta^2 = -\frac{AI}{A_{33}^2},$$

$$\pm \alpha^2 \beta^2 = \frac{A^2}{A_{33}^3 \operatorname{sen}^2 XY},$$

la seconda delle quali può scriversi così (purchè si premetta un segno conveniente al radicale)

$$(6) \qquad \alpha\beta \operatorname{sen} XY = \frac{A}{\sqrt{\pm A_{33}{}^3}}.$$

Ora i secondi membri delle (5) e (6) non dipendono evidentemente dagli assi coordinati X, Y; segue che anche i primi membri conservano valori inalterati, quando alla coppia X, Y di diametri coniugati si sostituisca un'altra coppia di diametri siffatti. Questa osservazione dà luogo ai teoremi:

I. *In una ellisse è costante la somma dei quadrati di due semidiametri coniugati; in una iperbole è costante la differenza dei quadrati di due semidiametri coniugati.* E questa somma o differenza uguaglia, in particolare, la somma o differenza dei quadrati dei semiassi.

II. *In una conica a centro è costante l'area del triangolo avente per lati due semidiametri coniugati*, ed è uguale all'area del triangolo costruito sopra i due semiassi.

Osservazione I. — Le formole (5), (6) ci danno la interpretazione geometrica di certi rapporti di invarianti. Era da prevedersi che una siffata interpretazione non appartenesse agli invarianti stessi I, A_{33}, A, i quali si alterano per un fattore, t, t^2, t^3, quando i coefficienti della equazione della curva vengono moltiplicati per t (mentre la curva resta inalterata); quel fattore sparisce evidentemente dai rapporti suddetti, pel modo come sono formati.

Osservazione II. — Se la conica è una ellisse reale, $\alpha^2 + \beta^2$ è certo positivo, e quindi, in virtù della (5), il prodotto AI è negativo; e viceversa. Dunque le condizioni perchè una conica sia una ellisse reale sono (n.° 196) $A_{33} > 0$, $AI < 0$; e le condizioni per una conica immaginaria: $A_{33} > 0$, $AI > 0$.

Esercizi. I. — 1) Scrivere le equazioni riferite agli assi delle coniche rappresentate in coordinate ortogonali da:

a) $4x^2 - 4xy + 4y^2 + 16x - 8y + 7 = 0,$

b) $3x^2 - 8xy + 3y^2 - 6x - 3 = 0,$

c) $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x = 0,$

d) $5x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 5 = 0.$

2) Equazioni riferite agli asintoti, ed angolo degli asintoti, per le iperboli *b*), *c*) dell'es. precedente.

3) Scrivere l'equazione riferita all'asse e alla tangente nel vertice della parabola

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 6 = 0.$$

4) Qual'è il parametro, quale l'equazione ridotta della parabola

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)^2 - \frac{2x}{\alpha} - \frac{2y}{\beta} + 1 = 0,$$

se x, y sono coordinate ortogonali? E se $\widehat{xy}$ ha un valore arbitrario ω?

II. — 5) Partendo dall'equazione di una iperbole riferita agli asintoti, si dimostri che « una iperbole e la coppia dei suoi asintoti determinano sopra ogni trasversale due segmenti, che hanno lo stesso punto medio » (cfr. n.° 222, es. 1, *c*)).

6) Dalla stessa equazione si deduca che « le rette proiettanti un punto mobile di una iperbole da due punti fissi della curva, intercettano sopra un asintoto un segmento di lunghezza costante » (cfr. n.° 222, es. 1, *b*)).

7) Le tangenti alla parabola $y^2 = 2px$ nei punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) si incontrano nel punto di coordinate $\left(\frac{y_1 y_2}{2p}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Mediante queste formole si dimostri che « l'area di un triangolo circoscritto ad una parabola è la metà dell'area del triangolo formato dai punti di contatto » (GREGORY).

III. — 8) Date le coordinate (x', y') di un punto P di una conica a centro riferita agli assi, si scriva l'equazione del diametro QOQ' coniugato al diametro POP', si determinino le coordinate di Q e Q', le lunghezze a', b' dei due semidiametri coniugati OP, OQ (si troverà $b'^2 = \frac{b^2}{a^2}x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2$), e si dimostrino direttamente i teoremi di APOLLONIO del n.° 252.

9) Si dimostri che la distanza del centro dalla tangente nel punto P dell'es. precedente vale $ab : b'$ (dove a, b sono i semiassi); da questa formola segue nuovamente il teorema di APOLLONIO relativo alle aree.

10) Mediante i teoremi di APOLLONIO, si calcolino, in funzione dei semiassi a, b, le lunghezze a', b' di due semidiametri coniugati formanti un angolo ω assegnato. Si dimostri che ω può avere un valore qualsiasi nella iperbole, mentre per la ellisse, il minimo angolo acuto ω incluso da due semidiametri coniugati è tale, che $\operatorname{tg}\omega = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$; i relativi diametri risultano uguali fra loro $\left(= \sqrt{2(a^2 + b^2)}\right)$, e giacciono sulle diagonali del rettangolo formato dalle tangenti nei vertici. È questa l'unica coppia di diametri coniugati uguali di una ellisse; assumendoli come assi coordinati, la equazione della ellisse assume la forma $X^2 + Y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

11) Accanto ai teoremi di APOLLONIO va considerato il seguente: « in una conica a centro è costante la somma dei quadrati delle inverse di due semidiametri perpendicolari » (BOBILLIER), cioè $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \text{cost.}$, dove α, β vanno presi algebricamente, e quindi nella iperbole possono esser reali o immaginari. Si dimostri il teorema, sia ricorrendo agli invarianti, per la qual via si vedrà che quella costante vale $- IA_{33} : A$ (nelle ipotesi del n.° 252), sia adoperando l'equazione polare della curva, preso per polo il centro.

12) Detto *parametro relativo ad un diametro* di una parabola la costante p', che figura nell'equazione $Y^2 = 2p'X$ della curva riferita a quel diametro e alla tangente nell'estremo di esso, si dimostri col mezzo degli invarianti che « in una parabola è costante il prodotto del parametro p' relativo a un diametro per il quadrato del seno dell'angolo che quel diametro forma colla relativa tangente, ed è uguale al parametro principale p (relativo all'asse) ». Si ha dunque $p' \geqq p$, e la differenza $p' - p$ è uguale al doppio della distanza dell'estremo del diametro dalla tangente nel vertice.

13) Ogni coppia di diametri coniugati di una conica determina sopra una tangente due punti, le cui distanze dal punto di contatto hanno un prodotto costante ed uguale al quadrato del semidiametro parallelo alla tangente. (Si dimostri sia sinteticamente, sia analiticamente, riferendo la curva al diametro che passa per il punto di contatto ed al coniugato).

14) Partendo dall'es. precedente, si giustifichi la seguente costruzione (di Chasles) degli assi di una ellisse, di cui son noti in grandezza e posizione due semidiametri coniugati OP, OQ. « Si conducano per P la parallela e la perpendicolare ad OQ, le quali risultano tangente e normale alla conica in P; sulla normale si prendano due segmenti $PH = PK = OQ$; il cerchio che passa per H, K ed O, sega la tangente nominata in due punti M, N che, congiunti con O, danno, in posizione, gli assi (i quali sono altresì bisettrici dell'angolo HOK). Per ottenere le grandezze $2a$, $2b$ di questi, si osserverà che uno dei due segmenti OH, OK vale $a + b$, e l'altro $a - b$ (n.° 252), donde segue una immediata costruzione.

IV. — 15) Nel punto $P(x', y')$ della conica $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, riferita agli assi, si conduca la normale, la quale seghi in N, N' gli assi x, y. Si dimostrino le uguaglianze $PN = bb' : a$, $PN' = ab' : b$, dove b' è la lunghezza del semidiametro coniugato ad OP (es. 8)),; segue che « in una, conica a centro i due segmenti di una qualsiasi normale, compresi fra il *piede* (P) e gli assi, hanno un rapporto costante $= b^2 : a^2$, ed un prodotto uguale al quadrato del semidiametro perpendicolare alla normale ».

16) La ricerca dei piedi $P(x, y)$ delle normali ad una conica a centro K uscenti da un dato punto S del piano, conduce a risolvere due equazioni quadratiche in x, y, delle quali una rappresenta la K, e l'altra una iperbole equilatera passante per S, per il centro O di K, ed avente gli asintoti paralleli agli assi di K. Segue che « da un punto del piano si possono condurre ad una conica quattro normali (di cui due almeno reali); i piedi di esse sono le intersezioni della conica data con una certa iperbole equilatera » (Apollonio). Questa iperbole può generarsi come luogo della intersezione di una retta variabile uscente da S, col diametro di K coniugato alla direzione normale a quella retta. Essa è inoltre il luogo dei centri delle coniche di ogni fascio determinato da K insieme ad un cerchio qualsiasi di centro S (Chasles) (cfr. n.° 238, es. 17)); quindi è luogo dei punti medi delle corde comuni a K ed ai singoli cerchi di centro S. Come degenera la iperbole se S appartiene ad uno degli assi di K?

17) Dati sulla conica K dell'es. precedente due punti P_1, P_2, si possono costruire, risolvendo un problema di secondo grado, due nuovi punti P_3, P_4 di K, tali che le normali a K in P_1, P_2, P_3, P_4 formino fascio; anzi la retta $P_3 P_4$ si determina linearmente partendo dalla retta $P_1 P_2$ (n.° 231, es. 28)). Dalla costruzione segue che « dei quattro piedi delle normali condotte ad una conica da un punto, tre qualisivogliano determinano un cerchio, che sega inoltre la conica nel punto diametralmente opposto al quarto piede » (JOACHIMSTHAL).

18) Da un punto generico S del piano si possono condurre tre normali ad una parabola; i loro piedi sono le intersezioni della curva con una iperbole equilatera che passa per S, ed ha uno degli asintoti sopra l'asse della parabola. L'iperbole può generarsi in modi analoghi a quelli dell'es. 16). « Il cerchio determinato dai tre piedi delle normali alla parabola uscenti da un punto, passa per il vertice della curva; e viceversa, ogni cerchio passante pel vertice, sega la parabola in tre punti, le cui normali concorrono in un punto ». Quest'ultimo teorema può dimostrarsi ricorrendo all'osservazione seguente.

V. — 19) Un cerchio sega una parabola in quattro punti, le cui ordinate (rispetto all'asse) danno una somma nulla, e viceversa; in altri termini « la condizione affinchè un quadrangolo iscritto in una parabola sia pure iscrittibile in un cerchio, è che il suo baricentro cada sull'asse ». Per i vertici di un quadrangolo iscrittibile in un cerchio passano due parabole, i cui assi si segano ad angolo retto (n.° 238, es. 18)) nel baricentro del quadrangolo.

20) Un cerchio sega la iperbole equilatera $xy = k$ in quattro punti, le cui ascisse e le cui ordinate danno prodotti uguali a k^2; e viceversa. La iperbole stessa è segata da un'altra iperbole equilatera qualsiasi in quattro punti, le cui ascisse e le cui ordinate danno prodotti uguali $a - k^2$; e viceversa. Dall'ultima proprietà segue che, delle quattro intersezioni, tre determinano la quarta nel modo noto (n.° 231, es. 33)); e ricordando la prima proprietà, si ha: « Se di quattro punti di una iperbole equilatera, ciascuno è ortocentro nel triangolo degli altri tre, allora ciascuno ha come diametralmente opposto un punto, che appartiene al cerchio passante per gli altri tre; e viceversa ».

VI. — 21) Si dimostri analiticamente che « il luogo di un punto da cui si possono condurre tangenti perpendicolari tra loro ad una ellisse od iperbole, è un cerchio, detto *cerchio principale*, concentrico alla conica e di raggio $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ » (cfr. n.° 231, es. 40)). Nella ellisse il cerchio è circoscritto al rettangolo formato dalle tangenti nei vertici; per la iperbole, è reale o immaginario, secondo che l'angolo degli asintoti in cui è contenuta la curva è acuto od ottuso, e si riduce al solo centro se la iperbole è equilatera. « Nella parabola $y^2 = 2px$ il luogo dei punti da cui escono tangenti perpendicolari, è la retta $x + \frac{p}{2} = 0$, detta *direttrice* » (cfr. n.° 222, es. 14)). (Si approfitti della (5) del n.° 199; o si scrivano le equazioni di due tangenti ortogonali, di cui una sia la (5) del n.° 244, o la (5) del n.° 246).

22) Il luogo di un punto da cui si possono condurre ad una parabola tangenti formanti un angolo ω assegnato, è una iperbole, i cui asintoti includono l'angolo 2ω; essa ha uno degli assi sopra l'asse della parabola, e tocca questa curva in due punti (immaginari) situati sulla direttrice; (cfr. n.° 231, es. 37)). Il luogo analogo per una conica a centro è una curva del quarto ordine.

23) Un punto generico P del piano di una conica K è vertice di infiniti triangoli autopolari rispetto a K, nei quali gli altri due vertici P', P'' sono coniugati in una involuzione sulla polare p di P. I cerchi circoscritti ai detti triangoli formano un fascio (n.° 231, es. 32)), il cui asse radicale passa per il centro O di K. Di qua segue che gli infiniti cerchi, ciascuno dei quali è circoscritto ad uno, e quindi (n.° 215, es. 35)) ad infiniti triangoli autopolari rispetto a K, hanno a due a due un asse radicale passante per il punto O, e formano una rete di cui O è il centro radicale (n.° 160, es. 11)). Il centro O, se è proprio, ha la stessa potenza rispetto a quei cerchi; questa si può calcolare, riferendosi ad es. al cerchio circoscritto ad un triangolo $PP'P''$ formato da un punto P di un asse e da P' e P'' coincidenti in uno dei punti Kp, e si riconosce uguale ad $a^2 \pm b^2$. Risulta di qua il teorema di Faure: «I cerchi circoscritti ai triangoli autopolari rispetto ad una conica a centro, segano ortogonalmente il cerchio principale della conica; e viceversa. I cerchi analoghi relativi alla parabola segano ortogonalmente la direttrice, che è il luogo dei loro centri; e viceversa». Nella iperbole equilatera, ad es., quei cerchi passano per il centro della curva (cfr. n.° 238, es. 16)).

VII. — 24) Si scriva l'equazione del cerchio osculatore ad una conica in un punto P, assumendo come assi coordinati il diametro passante pel punto e la tangente ivi (cfr. n.° 229); si dimostri che il raggio del detto cerchio, per una conica a centro (*raggio di curvatura* della conica in P), è espresso da $\varrho = \dfrac{b'^2}{a' \operatorname{sen} \omega}$, dove a' è il semidiametro passante per P, b' e il semidiametro coniugato, ed ω è l'angolo dei due semidiametri. Si può anche scrivere $\varrho = \frac{b'^3}{ab}$, ed esprimere ϱ mediante le coordinate x', y' di P (es. 8)). Se P ad es. è un vertice della curva, estremo del semiasse a, si ha $\varrho = \frac{b^2}{a}$, raggio del cerchio che ha ivi un contatto quadripunto colla conica.

25) Mediante il valore trovato per ϱ, si giustifichi la seguente costruzione del centro del cerchio osculatore (*centro di curvatura*) in un punto P di una conica a centro: condotta la normale in P, la quale seghi in N, N' gli assi della curva, si tiri nel centro O la perpendicolare al diametro OP fino a segare in H la normale, e si porti su questa il segmento $N'C = -NH$; C è il centro richiesto.

26) Un'altra costruzione del cerchio osculatore in P, nella quale si adoperano soltanto il semidiametro OP ed il semidiametro coniugato OQ, è la seguente: sui due semidiametri OP, OQ si costruisca il parallogramma $OPRQ$, e dal vertice R si conducano le perpendicolari al lato PO e alla

diagonale PQ; queste perpendicolari intercettano sulla normale in P (perpendicolare a PR) un segmento uguale al raggio di curvatura in P. In particolare, se OP e OQ sono semiassi, la perpendicolare calata da R su PQ incontra gli assi nei centri dei cerchi osculatori relativi ai vertici P e Q.

27) Il centro del cerchio osculatore nel punto (x', y') di una conica a centro riferita agli assi ha le coordinate

$$X = -\frac{c^2}{a^4}x'^3, \quad Y = -\frac{c^2}{b^4}y'^3,$$

dove si è posto $c^2 = a^2 \mp b^2$ per la ellisse od iperbole, rispettivamente. Mentre il punto (x', y') descrive la conica, il punto (X, Y) decrive la curva del sesto ordine

$$\left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

dove $\alpha = c^2 : a$, $\beta = c^2 : b$; questa curva, luogo dei centri di curvatura, dicesi *evoluta* della conica data; (essa possiede quattro cuspidi nei centri di curvatura relativi ai vertici, ed ha come tangente in ogni suo punto (X, Y) la normale alla conica nel punto corrispondente (x', y')).

28) Il procedimento dell'es. 24), applicato alla parabola, dà il raggio di curvatura nel punto $P(x', y')$ sotto la forma $\varrho = \frac{p'}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{p}{\operatorname{sen}^3\omega}$, dove p' è il parametro relativo al diametro uscente da P(es. 12)), p è il parametro principale, ω è l'angolo della tangente in P con un diametro qualsiasi. In particolare, il raggio di curvatura nel vertice è uguale al parametro. Per costruire il centro del cerchio osculatore (o di curvatura) in P, si conduca ivi la normale che seghi l'asse in N, e si porti sull'asse, da banda opposta al vertice, un segmento NH uguale al doppio dell'ascissa di P (cioè alla sottotangente di P); la perpendicolare all'asse in H sega PN nel centro richiesto.

29) Le coordinate del centro di curvatura della parabola nel punto (x', y') sono

$$X = p + 3x', \quad Y = -y'^3 : p^2,$$

e l'equazione dell'*evoluta*, luogo del detto centro, è

$$27pY^2 = 8(X - p)^3;$$

si tratta di una curva del terzo ordine, detta *parabola semicubica* (cfr. n.° 163, es. 1)), avente una cuspide nel punto $(p, 0)$.

VIII. — 30) Le coordinate di un punto P che descriva una ellisse riferita agli assi, possono esprimersi in funzione di un angolo variabile φ, detto *anomalia eccentrica* (Keplero), mediante le seguenti *equazioni parametriche*

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\operatorname{sen}\varphi;$$

φ è l'angolo formato dall'asse x col raggio del cerchio $x^2 + y^2 = a^2$ passante pel punto di esso, che ha la stessa ascissa di P.

31) Due punti P e Q della ellisse che siano estremi di due semidiametri coniugati, corrispondono a due valori del parametro φ differenti per $\frac{\pi}{2}$; di qua seguono nuovamente i teoremi di Apollonio (n° 252).

32) Se due punti P_1, P_2 di una ellisse si muovono in modo che la retta P_1P_2 si mantenga parallela a sè stessa, la somma $\varphi_1 + \varphi_2$ delle loro anomalie eccentriche rimane costante. E se le due corde P_1P_2, P_3P_4 di una ellisse formano angoli uguali, ma opposti, con ciascun asse, tra le anomalie eccentriche dei quattro punti passa la relazione $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \equiv 0$ (mod. 2π). Segue (n° 238, es. 18)) che « la condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro punti di una ellisse appartengano ad un cerchio, è che la somma delle loro anomalie eccentriche sia nulla (a meno di multipli di 2π) » (Joachimsthal).

31) Segue ancora che il cerchio osculatore alla ellisse nel punto (di anomalia) α sega ulteriormente la curva nel punto $\beta = -3\alpha$. E che per il punto β passano tre cerchi, osculanti la curva nei punti

$$-\frac{\beta}{3}, \quad -\frac{\beta + 2\pi}{3}, \quad -\frac{\beta + 4\pi}{3},$$

i quali punti, col punto primitivo, stanno in un cerchio (n.° 238, es. 23)).

33) Per la iperbole si possono assumere le seguenti equazioni parametriche:

$$x = a \sec \varphi, \qquad y = b \operatorname{tg} \varphi.$$

Il diametro trasverso che ha un estremo nel punto (x, y) ha come coniugato il diametro non trasverso, di cui un estremo è il punto $x' = a \operatorname{tg} \varphi$, $y' = b \sec \varphi$.

IX. — 34) Per un punto O del piano di una conica si conducano due trasversali arbitrarie a segar la curva, la prima in M, M', la seconda in N, N'; si dimostri che « il rapporto $\frac{OM \cdot OM'}{ON \cdot ON'}$ non varia se il punto O si sposta comunque, purchè le due trasversali conservino inalterate le loro direzioni » (Apollonio). (Si assumano ad es. le trasversali come assi coordinati; n.° 248, I)).

35) In conseguenza: se due rette ruotano intorno a due punti fissi O, o, restando parallele tra loro, i prodotti dei segmenti che la conica segna su quelle serbano un rapporto costante $\frac{OM \cdot OM'}{om \cdot om'}$.

36) Seguono i corollari: Il prodotto dei segmenti di una secante che ruoti intorno ad un punto fisso, è proporzionale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa. I due tratti di tangenti compresi fra un punto esterno ad una conica ed i punti di contatto, sono proporzionali ai semidiametri ad essi paralleli.

37) Dalla proposizione dell'es. 34) segue facilmente il teorema di Carnot sul poligono segato da una conica (n.° 215, es. 24)); (basta condurre per un punto arbitrario O trasversali parallele ai lati del poligono, ecc.). Viceversa, quella proposizione può dedursi come caso limite dal teorema di Carnot relativo ad un triangolo, un cui vertice si faccia allontanare all'infinito.

CAPITOLO V.

Proprietà focali delle coniche.

253. Definizione di fuoco. — Noi sappiamo (n.° 205) che da un punto qualsiasi del piano di una conica escono infinite coppie di rette coniugate rispetto alla curva, formanti una involuzione che ha per rette doppie le tangenti dal punto alla conica. Tra quelle coppie ve ne sarà dunque una, e in generale una sola (n.° 92), composta di rette (reali) perpendicolari fra loro. Siamo ora condotti a chiedere se vi sia qualche punto particolare, tale che per esso passino più di una, e quindi infinite coppie di rette coniugate rispetto alla conica e perpendicolari fra loro. Un punto siffatto si dirà *fuoco*; per noi dunque (adottando la definizione di PONCELET):

Fuoco di una conica è un punto tale, che la involuzione delle rette uscenti da esso e coniugate rispetto alla curva, sia circolare. Se ricordiamo che le rette doppie (immaginarie) di una involuzione circolare passano per i punti ciclici del piano, possiamo anche definire il fuoco come un punto tale, che le tangenti da esso condotte alla curva passino per i punti ciclici del piano.

Poichè le dette tangenti sono immaginarie, deve intanto ogni fuoco esser *interno* alla conica. Esso coincide col centro (supposto proprio) di questa solo quando la involuzione dei diametri coniugati sia circolare, cioè nel cerchio (n.° 238). Ed è sempre un punto proprio, eccettuato al più il caso della parabola, il cui punto all'infinito può, sotto alcuni rispetti, esser riguardato come fuoco, sebbene ciò non si soglia fare.

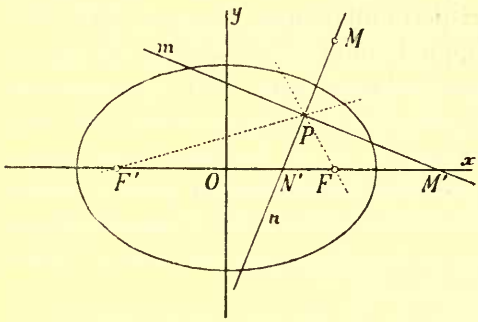
Escluso il cerchio, congiungiamo un fuoco F (supposto proprio) col centro O della conica. Fra le corde, parallele tra loro, coniugate col diametro OF, quella passante per F deve esser perpendicolare ad OF (per definizione di fuoco); dunque OF è un *asse* della conica (n.° 236), dunque ogni fuoco appartiene ad un asse.

Volendo proseguire per via analitica la ricerca dei fuochi, ci conviene staccare le coniche a centro dalla parabola.

254. Ricerca dei fuochi della ellisse e della iperbole. — Partiamo dall'equazione della curva riferita agli assi (n.° 244)

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

dove, in questa e nelle formole successive, il segno superiore si riferisce all'ellisse, l'inferiore alla iperbole. Nel caso della ellisse supporremo $a \geqq b$; sopra x si trova dunque l'asse maggiore della ellisse, trasverso della iperbole.



Scriviamo anzitutto le equazioni di due rette m, n coniugate rispetto alla conica e perpendicolari tra loro. Una di esse, ad es. la m, sarà arbitraria, mentre n sarà la perpendicolare calata su m dal polo M di m (n.° 205). Se chiamiamo ad es. (x', y') le coordinate di M, le equazioni delle due rette saranno (n.° 244).

$$m) \qquad \frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

$$n) \qquad \frac{a^2(x - x')}{x'} = \pm \frac{b^2(y - y')}{y'}.$$

Seghiamo le due rette con uno degli assi della conica, ad es. coll'asse x; troveremo due punti M', N' aventi come ascisse

$$OM' = \frac{a^2}{x'}, \qquad ON' = \frac{x'}{a^2}(a^2 \mp b^2).$$

I due punti M', N' variano col mutare delle due rette m, n, coniugate e perpendicolari; ma il prodotto

$$OM' \cdot ON' = a^2 \mp b^2$$

rimane costante; ciò dimostra che M', N' si mantengono coniugati in una involuzione avente il centro O e la potenza $a^2 \mp b^2$ (n.° 88, a)). Nella ipotesi fatta, la potenza è positiva, e si suole indicare con c^2, ponendo

$$(2) \quad \begin{cases} \text{per la ellisse} & c^2 = a^2 - b^2, \qquad (a > b) \\ \text{per la iperbole} & c^2 = a^2 + b^2; \end{cases}$$

la involuzione dunque è iperbolica, ed ha due punti doppi F, F' di ascisse c, $-c$, sull'asse x. Segue poi dalle cose dette che, se per uno di essi, ad es. per F, si conduce una retta m ad arbitrio, la retta n, coniugata e perpendicolare, passerà pure per F. Ciò prova che F ed F' sono *fuochi* della conica, sono anzi i soli fuochi situati sull'asse x.

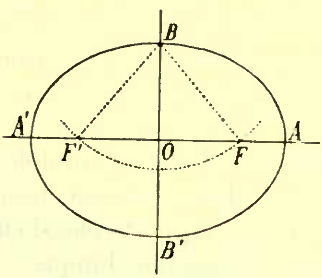
Se lo stesso procedimento si ripete per l'asse y, si trova che la involuzione, cui appartengono le coppie di intersezioni di y con m ed n, è ellittica, di potenza $-c^2$; si conclude che sull'asse y stanno due fuochi *immaginari* di ordinate $+ci$, $-ci$.

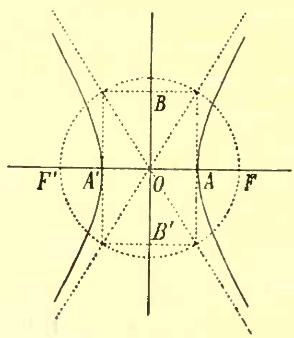
Limitandoci a considerare i fuochi reali, che soli hanno interesse, concludiamo:

Una conica a centro possiede due fuochi, situati sopra uno degli assi (asse focale o principale), che è l'asse maggiore per l'ellisse e l'asse trasverso per la iperbole. I fuochi sono simmetrici rispetto al centro, e la loro distanza da questo punto (distanza focale) è $c = \sqrt{a^2 \mp b^2}$.

Il valore della distanza focale giustifica senz'altro le seguenti costruzioni dei fuochi.

Se la curva è una *ellisse*, si descriva il cerchio che ha per centro un vertice dell'asse minore e per raggio il semiasse maggiore; questo cerchio sega l'asse maggiore nei fuochi.





Se la curva è una *iperbole*, si circoscriva un cerchio al rettangolo che ha per mediane gli assi AA', BB' della curva; quel cerchio sega l'asse trasverso nei fuochi.

255. Alcune proprietà angolari dei fuochi. — Risulta dalle considerazioni precedenti che:

a) *Le coppie di rette coniugate rispetto ad una conica e perpendicolari tra loro, segano sull'asse focale coppie di punti separati armonicamente dai fuochi.*

Considerando il gruppo armonico che due rette siffatte m, n formano colle congiungenti il punto $P \equiv mn$ ai fuochi, si vede subito (n.° 51) che m, n bisecano l'angolo $\widehat{FPF'}$.

Ora due rette coniugate e perpendicolari sono, ad es., la tangente e la normale in un punto P della curva; quindi:

b) *La tangente e la normale in un punto di una conica a centro sono le bisettrici dell'angolo, sotto cui i fuochi sono visti dal punto.* La tangente è bisettrice esterna del detto angolo nella ellisse, e bisettrice interna nella iperbole; infatti la tangente sega la retta FF' in un punto esterno alla conica, il quale si troverà dunque fuori del segmento finito FF' nella ellisse, dentro nella iperbole.

È conseguenza del precedente teorema il noto fenomeno, secondo cui i raggi luminosi, o termici..., emessi da un fuoco, vengono riflessi dal perimetro della ellisse in raggi passanti per l'altro fuoco; donde il nome di *fuochi* dato da Keplero a questi punti, le cui principali proprietà erano già note ad Apollonio.

In generale, se il punto P sopra nominato è esterno alla curva, si dimostra mediante analoghe considerazioni il seguente teorema:

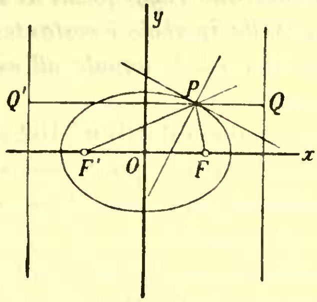
c) *I due angoli formati, l'uno dalle tangenti ad una conica a centro condotte da un punto esterno, l'altro dalle rette congiungenti quel punto ai fuochi, hanno le stesse bisettrici* (che sono le rette m, n uscenti da P).

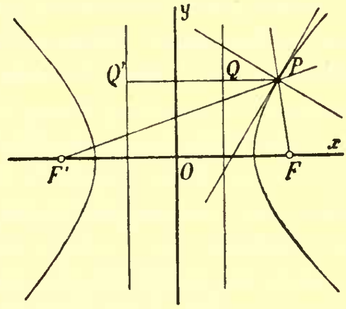
256. Proprietà dei raggi focali. — In varie formole relative ai fuochi comparisce il rapporto della distanza focale al semiasse focale (maggiore o trasverso), rapporto che si chiama *eccentricità,* e si suole indicare con e, ponendo dunque

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}}. \tag{3}$$

L'eccentricità è nulla per il cerchio, inferiore ad 1 per la ellisse (ma tanto maggiore quanto più la ellisse differisce da un cerchio), superiore ad 1 per la iperbole.

Ciò premesso, assumiamo un punto $P(x, y)$ qualsiasi sulla conica, e proponiamoci di calcolare le distanze del punto P dai fuochi, o, come brevemente diremo, i *raggi focali* (o *vettori*) del





punto P. Ricordando che le coordinate di P soddisfano all'equazione (1) della conica, ossia che

$$y^2 = \pm\, b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

e tenendo presenti le (2) del n.° 254 e la (3), avremo

$$\overline{PF}^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2\left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right) - 2cx + (c^2 \pm b^2)$$
$$= \frac{c^2}{a^2}\, x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}\, x - a\right)^2 = (ex - a)^2.$$

Concludiamo che la lunghezza PF (presa aritmeticamente) è uguale al valore assoluto del binomio $ex - a$.

Ora per la *ellisse* è $e < 1$, $x \leqq a$, e quindi $ex - a < 0$; sarà dunque

(4) $$PF = a - ex.$$

Analogamente si trova, considerando l'altro fuoco F',

$$PF' = a + ex;$$

donde

$$PF + PF' = 2a.$$

Per la *iperbole* invece $e > 1$ ed $x \geqq a$, se P appartiene al ramo i cui punti hanno ascissa positiva; è poi $x \leqq -a$ per l'altro ramo; sarà dunque

(4′) $$PF = \pm\, (ex - a),$$

dovendosi prendere esternamente il segno che ha x. Similmente

$$PF' = \pm\, (ex + a),$$

e infine

$$PF' - PF = \pm 2a.$$

Si giunge così all'importante teorema:

Nella ellisse è costante la somma dei due raggi focali di un punto, ed è uguale all'asse maggiore. Nella iperbole è costante la differenza dei raggi focali di un punto, ed è uguale all'asse trasverso.

Del teorema è pur vero l'inverso; sappiamo infatti (n.° 162, a)) che il luogo di un punto, le cui distanze da due punti fissi abbiano una data somma o una data differenza, è una ellisse od una iperbole.

257. Direttrici di una conica a centro. — Riprendiamo la espressione del raggio focale PF di un punto $P(x, y)$, cioè, facendo astrazione dal segno,

$$PF = a - ex. \tag{4}$$

Essa contiene linearmente le coordinate del punto P (e ciò qualunque siano gli assi coordinati, a cui la conica venga riferita, n.° 141). Ora questo fatto algebrico (che vale a caratterizzare i fuochi) trova una semplice interpretazione geometrica. Si consideri infatti quella retta, la cui equazione si ottiene uguagliando a zero la espressione nominata; nel nostro caso, la retta

$$a - ex = 0, \tag{5}$$

ossia

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

La distanza PQ del punto $P(x, y)$ dalla retta (5) differisce solo per un fattore dal valore che assume il primo membro della (5), quando al posto delle variabili si pongano le coordinate di P (n.° 116); e precisamente (fatta astrazione dal segno):

$$PQ = \frac{a - ex}{e} = \frac{a}{e} - x,$$

come risulta pure dalle figure di pag. 439. Questa relazione, ricordando la (4), ci dà

$$\frac{PF}{PQ} = e,$$

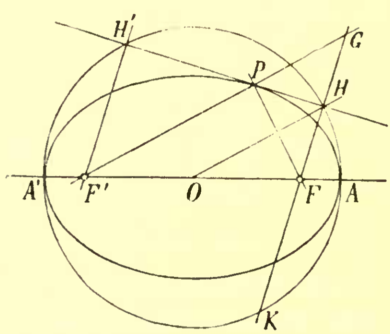
indipendente dalla posizione di P.

Per enunciare il risultato, si osservi che la retta (5) (la cui equazione può anche scriversi sotto la forma $\frac{cx}{a^2} = 1$) è la polare del fuoco $F(c, 0)$ rispetto alla conica. Ora le polari dei fuochi si sogliono chiamare *direttrici.* Una conica a centro ha due direttrici, esterne rispetto alla curva, e normali all'asse focale. Possiamo così affermare che:

Il rapporto delle distanze di un punto qualsiasi di una conica (a centro) da un fuoco e dalla corrispondente direttrice è costante, ed uguale alla eccentricità.

Sappiamo poi, inversamente (n.° 162, *b*)), che il luogo di un punto, le cui distanze da un punto fisso e da una retta fissa abbiano un rapporto costante e, è una conica, e precisamente una ellisse se $e < 1$, una iperbole se $e > 1$ (1).

258. Altre proprietà focali delle coniche a centro. — Dalle proprietà precedenti dedurremo alcuni corollari per via geometrica, lasciando al lettore la cura di ritrovarli analiticamente (2).



Condotta la tangente ad una conica a centro in un punto P di essa, costruiamo il punto G simmetrico di un fuoco F rispetto alla detta tangente. Congiungendo il punto P con F, F' e G, risulta subito, dall'uguaglianza di certi tre angoli col vertice in P (n.° 255, *b*)), che i punti F', P e G sono allineati, e che $PG = PF$, donde segue, in valore assoluto, per la ellisse e per la iperbole,

$$F'G = F'P \pm PG = F'P \pm FP = 2a.$$

---

(1) Risulta dalle cose dette che l'equazione (in coordinate ortogonali)

$$\pm \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = ax + by + c$$

rappresenta una conica avente il fuoco (α, β), la direttrice $ax + by + c = 0$, e l'eccentricità $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(2) Giova a tal fine ricorrere all'equazione della tangente scritta sotto la forma (5) del n.° 244.

Dunque:

a) *Il luogo del punto simmetrico di un fuoco, rispetto ad una tangente variabile di una conica a centro, è il cerchio che ha per centro l'altro fuoco e per raggio l'asse focale.*

Il segmento che congiunge il punto H, medio di FG, col centro O, medio di FF', vale $\frac{1}{2} F'G = a$; e in conseguenza:

b) *Il luogo del piede della perpendicolare calata da un fuoco sopra una tangente variabile ad una conica a centro* (brevemente *la podaria di un fuoco*), *è il cerchio descritto sull'asse focale come diametro.* Questo cerchio è pure (per ragioni di simmetria) luogo del piede H' della perpendicolare calata da F' sulla detta tangente.

Ora se si prolunga la FH fino ad incontrare nuovamente il cerchio in K, sarà (per la simmetria della figura rispetto ad O) $FK = F'H'$; ma d'altra parte

$$FH \cdot FK = FA \cdot FA' = \pm (a - c)(a + c) = b^2.$$

Si conclude:

c) *Il prodotto delle distanze dei fuochi di una conica a centro da una tangente variabile è costante, ed uguale al quadrato del semiasse secondario (non focale).*

259. Fuoco della parabola. — Prendiamo ora in esame la parabola, che supporremo riferita all'asse e alla tangente nel vertice,

$$(1) \qquad y^2 = 2px,$$

e vediamo come a questa curva si adattino le proprietà focali delle coniche a centro. Seguendo lo stesso procedimento tenuto nel n.° 253, scriviamo le equazioni di due rette coniugate e perpendicolari, quali sono la retta polare di un punto qualsiasi $M(x', y')$ (cfr. n.° 246)

$$m) \qquad yy' = p(x + x'),$$

e la normale ad essa condotta da M

$$n) \qquad \frac{x - x'}{p} + \frac{y - y'}{y'} = 0.$$

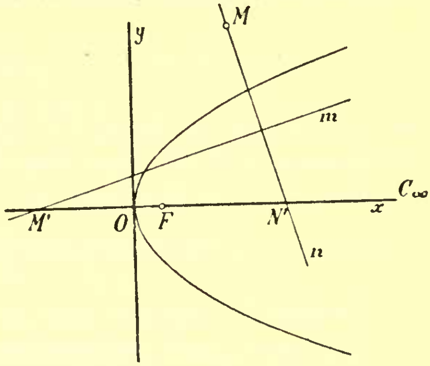
Le due rette m, n segano l'asse della curva ($y = 0$) in due punti M', N' aventi le ascisse

$$OM' = -x', \quad ON' = p + x'.$$

Ora la somma

$$OM' + ON' = p$$

è indipendente dalla coppia di rette m, n, coniugate e perpendicolari, che si considerano. Risulta di qua che i punti M', N' dell'asse x sono coniugati in una involuzione simmetrica, che ha per punti doppi il punto medio F fra M', N', avente l'ascissa



(2) $$OF = \frac{p}{2},$$

ed il punto all'infinito C_∞ (dell'asse ossia) della parabola. Il punto F è *fuoco* della curva, mentre il punto C_∞ possiede solo alcune delle proprietà spettanti ai fuochi. Si suol dire perciò che:

La parabola possiede un solo fuoco, situato sull'asse, interno alla curva, e avente dal vertice una distanza uguale a metà del parametro.

Il fuoco può costruirsi conducendo pel vertice la retta $y = 2x$, la quale sega ulteriormente la curva (1) in un punto di ascissa $\frac{p}{2}$, situato adunque sulla perpendicolare all'asse condotta pel fuoco.

Dalle cose dette risulta che:

a) *Le coppie di rette coniugate rispetto ad una parabola e perpendicolari tra loro, segano sull'asse coppie di punti simmetrici rispetto al fuoco.* E di qua, collo stesso ragionamento fatto per le coniche a centro, si trae che:

b) *La tangente e la normale ad una parabola in un punto sono le bisettrici dell'angolo formato dalla retta congiungente il punto al fuoco e dal diametro uscente dal punto* (retta parallela all'asse).

E vale pure per la parabola un risultato analogo all'ultimo teorema del n.° 255, come il lettore vedrà facilmente.

260. Altre proprietà focali della parabola. — Preso un punto $P(x, y)$ sulla parabola, calcoliamo il *raggio focale PF*. Si ha (tenendo conto dell'equazione della curva)

$$\overline{PF}^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

e quindi

(3) $$PF = x + \frac{p}{2}.$$

Per interpretare questo risultato si consideri la retta

$$x - \frac{p}{2} = 0, \qquad \text{ossia} \qquad x = -\frac{p}{2},$$

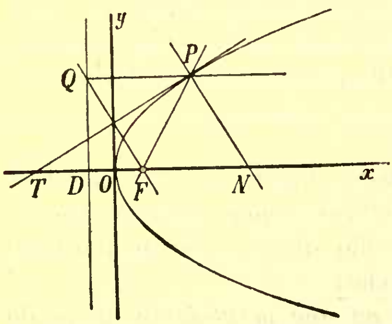
che è la polare del fuoco, e si chiama *direttrice* della parabola. La distanza di P da questa retta ha (come risulta dalla figura) il valore assoluto

$$PQ = x + \frac{p}{2} = PF.$$

Dunque:

a) *I punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice*; e viceversa (n.° 162, *b*)).

Questa proposizione si suole riunire all'analoga enunciata per le coniche a centro (n.° 257), convenendo che l'eccentricità della parabola valga 1. Così, anche sotto questo aspetto, la parabola appare come forma intermedia tra le ellissi e le iperboli.



Se si osserva che il triangolo FPT è isoscele col vertice in F, e che la base è dimezzata dall'asse y (n.° 246), si ha

b) *Il luogo del piede della perpendicolare calata dal fuoco di una parabola sopra una tangente variabile è la tangente nel vertice*; ed il luogo del simmetrico del fuoco rispetto alla detta tangente è la direttrice (cfr. n.° 258).

261. Equazione polare di una conica rispetto al fuoco. — Giova talora (ad es. nell'astronomia, in relazione colla prima legge di Keplero sul movimento ellittico dei pianeti) l'equazione polare di una conica, assumendo il fuoco come polo; come asse polare prenderemo l'asse focale, diretto dal fuoco verso la corrispondente direttrice.

Dette ϱ e φ le coordinate polari di un punto P, per la *ellisse* si ha (n.° 256)

$$\varrho = FP = a - ex = a - e(c + \varrho\cos\varphi) = \frac{b^2}{a} - e\varrho\cos\varphi,$$

e di qua si ricava

(1) $$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

dove si è posto

(2) $$\frac{b^2}{a} = p \quad (\textit{parametro}).$$

Per la *iperbole*, considerando anzitutto il ramo che avvolge il fuoco scelto per polo,

$$\varrho = FP = ex - a = e(c - \varrho\cos\varphi) - a,$$

donde nuovamente, fatta la posizione (2),

(1) $$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Per l'altro ramo d'iperbole si otterrebbe similmente

$$\varrho = \frac{-p}{1 - e\cos\varphi}, \text{ ossia } -\varrho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \pi)},$$

la quale può ritenersi contenuta nella (1), quando si riguardi come negativo un raggio vettore situato sul prolungamento della semiretta relativa a un dato valore di φ.

Finalmente per la *parabola* (n.° 260)

$$\varrho = FP = x + \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2} - \varrho\cos\varphi\right) + \frac{p}{2},$$

ossia

(1′) $$\varrho = \frac{p}{1 + \cos\varphi},$$

che rientra pure nella (1) per $e = 1$.

Le (1) ed (1′), per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, danno $\varrho = p$, donde segue che *il parametro per una qualsiasi conica è l'ordinata relativa al fuoco*, ossia metà della lunghezza della corda condotta pel fuoco normalmente all'asse focale.

262. Coniche confocali. — Si dicono *confocali* (od *omofocali*) due coniche a centro che abbiano gli stessi fuochi, o due parabole che abbiano lo stesso fuoco e lo stesso punto all'infinito.

Due coniche a centro confocali hanno in comune il centro e le direzioni degli assi. Assunti l'asse focale e l'asse secondario come assi coordinati delle x, y rispettivamente, l'equazione di una delle coniche sarà del tipo

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1, \tag{1}$$

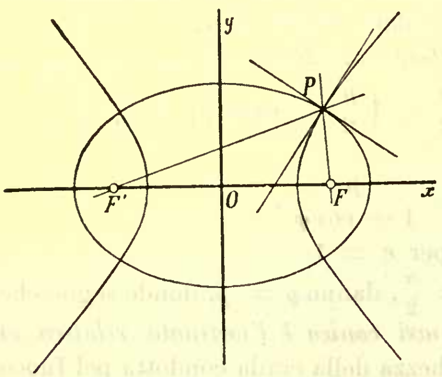
dove potremo supporre $\alpha > \beta$.

Se α e β sono positivi, la (1) rappresenta una ellisse; se $\alpha > 0$, $\beta < 0$, si tratta di una iperbole; in ogni caso è $c = \sqrt{\alpha - \beta}$ la distanza focale. Ne viene che ogni conica confocale alla (1) avrà una equazione del tipo

$$\frac{x^2}{\alpha + k} + \frac{y^2}{\beta + k} = 1, \tag{2}$$

dove k è un parametro variabile da conica a conica. Si ottengono in corrispondenza infinite curve, formanti un sistema di *coniche confocali*; queste sono ellissi reali se $k > -\beta$, iperboli se $-\alpha < k < -\beta$, ellissi immaginarie se $k < -\alpha$ (coniche degeneri se $k = -\alpha$, o $k = -\beta$).

a) *Per un punto generico* P *del piano passano due curve del sistema, e precisamente una ellisse ed una iperbole* (luoghi dei punti i cui raggi focali hanno la somma o la differenza uguale a $PF \pm PF'$); *quelle due coniche si segano ortogonalmente* in P, e negli altri tre punti simmetrici rispetto agli assi od al centro, giacchè hanno per tangenti in P le bisettrici dell'angolo $\widehat{FPF'}$. In generale: *una ellisse (reale) ed una iperbole confocale si segano sempre (ortogonalmente) in quattro punti reali, mentre due coniche confocali dello stesso nome non si segano in punti reali*; segue facilmente dalle relazioni che legano i raggi focali delle due curve in questione.



La prima parte del teorema *a*), interpretata algebricamente, ci dice che la (2), quando ad x ed y si attribuiscano due valori costanti, coordinate di P, e si riguardi k come incognita, fornisce per k due valori reali, radici dell'equazione

$$k^2 + (\alpha + \beta - x^2 - y^2)\, k + \alpha\beta - \beta x^2 - \alpha y^2 = 0,$$

dei quali valori uno k' (corrispondente alla ellisse) è superiore a $-\beta$, l'altro k'' (corrispondente all'iperbole) è compreso fra $-\alpha$ e $-\beta$. Giova in talune ricerche riguardare k', k'' come particolari coordinate, dette *ellittiche*, del punto P; dato il punto, le coordinate sono pienamente determinate, e date queste, entro ai limiti nominati, è determinato un solo punto P in ciascuno dei quattro quadranti limitati dagli assi.

La conica (2) ha, in coordinate di rette, l'equazione (n.° 244)

$$(\alpha + k)u^2 + (\beta + k)v^2 = 1,$$

ossia

$$(3) \qquad (\alpha u^2 + \beta v^2 - 1) + k(u^2 + v^2) = 0.$$

Ora al variare di k, questa rappresenta le coniche (inviluppi) di una *schiera* (n.° 231), alla quale appartengono la conica $\alpha u^2 + \beta v^2 - 1 = 0$, ossia la (1), e la $u^2 + v^2 = 0$ che si spezza nei due punti

$$u + iv = 0, \qquad u - iv = 0,$$

di coordinate cartesiane omogenee (n.° 128)

$$(1, i, 0), \qquad (1, -i, 0).$$

Questi sono i punti ciclici del piano (n.° 124, Oss.), i quali costituiscono dunque una conica degenere della schiera. Le altre due coniche degeneri sono la coppia dei fuochi reali (corrispondenti a $k = -\beta$), e la coppia dei fuochi immaginari (corrispondenti a $k = -\alpha$). E le quattro rette basi della schiera, tangenti alle infinite coniche confocali, sono (come poteva prevedersi per via geometrica (n.° 253)) le rette proiettanti i punti ciclici dai fuochi. Concludiamo:

b) *Le coniche confocali formano una schiera, le cui tre coniche degeneri sono costituite dalla coppia dei punti ciclici, dalla coppia dei fuochi reali, e dalla coppia dei fuochi immaginari. Ogni retta generica del piano è toccata da una, e da una sola conica del sistema.*

c) *Le coppie di tangenti condotte da un punto alle infinite coniche confocali, formano una involuzione simmetrica, cui appartengono le congiungenti il punto coi fuochi* (n.° 231).

Per quanto riguarda le parabole confocali, osserviamo che una parabola riferita a coordinate ortogonali, di cui l'origine cada nel fuoco e l'asse delle x coincida coll'asse della curva, ha una equazione del tipo

$$y^2 = 2px + p^2,$$

e che una equazione siffatta, al variare di p, rappresenta infinite parabole confocali. *Per ogni punto del piano passano due parabole del sistema, le quali si tagliano ortogonalmente in quel punto e nel simmetrico rispetto all'asse; ogni retta del piano è toccata da una sola parabola del sistema.*

Le parabole confocali formano una schiera, di cui una conica degenere (che conta per due) *si compone dei punti ciclici, ed un'altra del fuoco preso insieme col punto all'infinito dell'asse*; fra le rette base della schiera, due coincidono colla retta all'infinito, e le altre sono le direzioni assolute uscenti dal fuoco.

Esercizi I. — 1) Costruire per punti, o per tangenti, una conica a centro di cui siano dati i fuochi e l'asse focale; (nella seconda costruzione si approfitti della podaria dei fuochi).

2) Costruire per punti una conica di cui sian dati un fuoco, la relativa direttrice, e l'eccentricità od un punto.

3) Costruire per tangenti una parabola data mediante il fuoco e la direttrice (n.° 260, *b*)).

4) Dati i fuochi e l'asse focale di una conica a centro, condurre a questa le tangenti da un punto assegnato, o le tangenti parallele ad una retta data; (si costruiscano i simmetrici di un fuoco rispetto alle tangenti richieste, n.° 258, *a*)).

5) Determinata una parabola mediante il fuoco e la direttrice, condurre ad essa le tangenti da un punto dato, o la tangente parallela ad una retta data.

6) Dati i fuochi e l'asse focale di una conica a centro, costruire le intersezioni con una retta r assegnata. (Il simmetrico di un fuoco F rispetto alla tangente in uno dei punti richiesti è punto di contatto di due cerchi, di cui uno è noto (n.° 258, *a*)), mentre l'altro, passante per F e avente il centro su r, può costruirsi, n.° 160, es. 13)).

7) Determinare le intersezioni di una retta data con una parabola, di cui si conoscano il fuoco e la direttrice.

8) Costruire una conica di cui siano dati un fuoco e tre tangenti; (si può determinare l'altro fuoco (n.° 255, *c*)); oppure la podaria dei fuochi).

9) Le intersezioni di due coniche aventi un fuoco comune possono costruirsi mediante riga e compasso (cfr. n.° 231, es. 30, *b*)). Si risolva ad es. il problema supponendo definite le coniche mediante il fuoco comune, le rispettive direttrici e le eccentricità. (Si determineranno anzitutto due

rette formanti fascio colle direttrici, e contenenti, ciascuna, due dei punti incogniti; ecc.).

10) Valendosi della costruzione precedente, e ricordando l'es. 7) del n.° 162, si può risolvere (con NEWTON) il *problema di* APOLLONIO: « descrivere un cerchio che tocchi tre cerchi assegnati ». Il problema ammette al più otto soluzioni.

II. — 11) Il segmento di una tangente variabile di una conica, compreso fra le tangenti negli estremi dell' asse focale, è visto da ciascun fuoco sotto angolo retto (n.° 210). Questa proposizione serve ad APOLLONIO per definire e costruire i fuochi. Essa sussiste pure se all' asse focale si sostituisce una qualsiasi corda passante per quel fuoco, ove sta il centro di vista.

12) Una corda qualsiasi di una conica è vista da un fuoco sotto un angolo, le cui bisettrici passano, l' una per il polo della corda, l' altra per la intersezione della corda colla direttrice relativa a quel fuoco. Caso particolare che la corda passi per il fuoco.

13) Il teorema precedente permette di: « costruire una conica di cui siano noti un fuoco e tre punti ». Si può infatti costruire la direttrice relativa al fuoco. Nel caso generale esistono quattro coniche reali soddisfacenti al problema, delle quali tre sono iperboli, e la rimanente è una ellisse, parabola od iperbole, secondo la posizione dei dati; (ciò risulta osservando che i punti di una ellisse, o parabola, stanno tutti da una stessa banda di una direttrice). Si confronti la risoluzione qui indicata del problema con quella suggerita nell'es. 18) del n.° 231. Si riprenda pure la risoluzione analitica del problema indicata nell'es. 22) del n.° 231.

14) Dall' es. 12) segue il teorema (di PONCELET): « il segmento di una tangente variabile ad una conica compreso fra due tangenti fisse, è visto da un fuoco sotto un angolo costante », il quale è la metà dell' angolo formato dalle congiungenti il fuoco coi punti di contatto delle tangenti fisse.

15) Nella parabola l' angolo nominato nel teorema precedente è uguale (o supplementare) all' angolo delle due tangenti fisse; donde il teorema (di LAMBERT): « il cerchio circoscritto al triangolo formato da tre tangenti ad una parabola passa per il fuoco ». Quel cerchio è il luogo dei fuochi delle infinite parabole tangenti alle tre rette (formanti una schiera).

16) Segue la costruzione del fuoco della parabola tangente a quattro rette date, ed incidentalmente si ricava: « i quattro cerchi circoscritti ai triangoli formati prendendo a tre a tre i lati di un quadrilatero, passano per uno stesso punto F; i piedi delle perpendicolari da esso calate sopra i lati del quadrilatero stanno sopra una retta y (tangente alla parabola nel vertice); gli ortocentri dei quattro triangoli nominati stanno sopra una seconda retta d (direttrice della parabola, n.° 231, es. 31)), la quale è parallela ad y, e dista da y, quanto y dista da F ».

17) Dal teorema dell' es. 12) e dal n.° 255, *b*) può pure dedursi il teorema di CHASLES: « le quattro rette proiettanti i due fuochi di una conica da due punti della curva toccano uno stesso cerchio, il cui centro è la intersezione delle tangenti nei detti punti ».

III — 18) Il prodotto dei raggi focali di un punto di una conica a centro è uguale al quadrato del semidiametro b', coniugato a quello passante pel punto (n.° 252, es. 8)).

19) Detti H, H' i piedi delle normali condotte dai fuochi F, F' di una conica a centro sulla tangente in un punto P qualsiasi della curva, si ha $FH = \frac{b}{b'} FP$, $F'H' = \frac{b}{b'} F'P$, dove b è il semiasse secondario, e b' ha il significato dell'es. precedente. Moltiplicando si ritrova la nota proprietà (n.° 258, c)) $FH \cdot F'H' = b^2$; dividendo invece si ha $FH : F'H' = FP : F'P$, donde risulta nuovamente che la tangente in P forma coi raggi focali del punto angoli uguali, il cui seno vale $\frac{b}{b'}$.

20) Tenendo conto di quest'ultimo valore e della espressione del raggio di curvatura in un punto (n.° 252, es. 24)), si giustifichi la seguente costruzione (di Steiner) del centro di curvatura in P: « condotta la normale in P, la quale seghi in N l'asse focale, si conduca la perpendicolare in N a PN fino ad incontrare la FP in M, e poi per M la perpendicolare ad FP; questa sega PN nel centro di curvatura richiesto ».

21) Si dimostri che la stessa costruzione vale anche per la parabola.

22) Nella parabola il raggio di curvatura di un punto è doppio del segmento della normale compreso tra il punto e la direttrice.

IV. — 23) Partendo dall'equazione polare di una conica riferita al fuoco e all'asse focale, e detta *corda focale* una corda passante pel fuoco si dimostri che « la media armonica (n.° 50) tra i segmenti in cui una corda focale è divisa dal fuoco, è costante ed uguale al parametro » (n.° 261). I segmenti vanno presi però collo stesso segno, o con segni opposti, secondo che il fuoco è interno, o esterno alla corda.

24) Le corde focali di una conica a centro sono proporzionali ai quadrati dei diametri paralleli. Segue che « è costante la somma di due corde focali parallele a due diametri coniugati (cfr. n.° 252); ed è pur costante la somma dei valori inversi di due corde focali perpendicolari tra loro (cfr. n.° 252, es. 11)) ».

V. *Sui cerchi focali.* — 25) Un fuoco F di una conica può riguardarsi come un cerchio di raggio nullo (spezzato nelle due direzioni assolute uscenti da F), il quale tocca la conica nelle intersezioni di questa colla direttrice, polare di F. Questa nozione può estendersi (con Bobillier, e Steiner) considerando un cerchio qualsiasi bitangente alla curva; un tale cerchio si dirà *focale*, e la retta congiungente i punti di contatto (reali o immaginari) colla curva sarà la *direttrice relativa a quel cerchio.* Una data conica possiede infiniti cerchi focali; se essa ha centro, i detti cerchi si distribuiscono in due serie, gli uni (*cerchi focali principali*) avendo i centri sull'asse principale e le direttrici parallele all'asse secondario, gli altri (*c. f. secondari*) avendo i centri sull'asse secondario, ecc. (n.° 238, es. 21)). Partendo dall'equazione ridotta della curva, si scrivano le equazioni dei cerchi dell'una e dell'altra serie.

26) Se da un punto P di una conica si conduce la tangente PT ad un cerchio focale e la perpendicolare PQ alla relativa direttrice, il rap-

porto $PT : PQ$ dei segmenti così ottenuti non varia al variare del punto; ed è precisamente uguale all'eccentricità della conica $e = \sqrt{a^2 \mp b^2} : a$ se si tratta di un cerchio principale, o ad $e' = \sqrt{b^2 \mp a^2} : b$ se si tratta di un cerchio secondario; (per la ellisse e' è immaginario).

27) Viceversa: se un punto varia in modo che la tangente [1] da esso condotta ad un cerchio fisso serbi un rapporto costante colla distanza del punto da una retta fissa, quel punto descrive una conica bitangente al cerchio nelle intersezioni colla retta; la conica è una ellisse, una parabola od una iperbole, secondo che il detto rapporto (supposto reale) è inferiore uguale, o superiore ad 1.

28) È costante la somma o differenza delle tangenti PT, PT' condotte da un punto P, variabile sopra una conica, a due cerchi focali di una stessa serie; precisamente, detto k il valore della costante (che dipende dai cerchi considerati), è $PT + PT' = k$ per quei punti P della curva che si trovano nella striscia compresa fra le direttrici relative ai due cerchi; mentre $PT - PT' = \pm k$ per i punti esterni alla detta striscia. In particolare, se le due direttrici sono esterne alla curva, è costante sempre la somma, o sempre la differenza (il primo caso potendosi presentar solo nella ellisse).

29) Viceversa: se un punto si muove in modo che rimanga costante la somma o la differenza delle tangenti da esso condotte a due cerchi fissi, il punto descrive una conica bitangente a ciascuno dei due cerchi.

30) La equazione dei cerchi focali secondari fa vedere che i loro raggi sono proporzionali alle distanze dei rispettivi centri da un fuoco F della conica. Segue che, se al cerchio (compreso tra quelli) avente per diametro l'asse focale della conica si fa subire una rotazione intorno ad F di un angolo arbitrario α, e successivamente una omotetia di centro F e rapporto $\frac{1}{\cos\alpha}$, quel cerchio si trasforma in un altro cerchio focale secondario. Ricordando una proprietà del primo cerchio (n.° 258, *b*)), risulta il teorema (Poncelet, Steiner): « il luogo dei punti di incontro delle tangenti ad una conica a centro colle rette che escono da un fuoco e segano quelle sotto angolo costante, è un cerchio bitangente alla conica ed avente il centro sull'asse secondario ». Viceversa: « se un angolo di grandezza costante si muove in modo che il vertice descriva un cerchio, ed un lato passi per un punto fisso, l'altro lato inviluppa una conica bitangente al cerchio ». Teoremi analoghi valgono per la parabola, sostituendo al cerchio (bitangente) una retta (tangente) alla curva (cfr. n.° 222, es. 5)).

VI. *Sulle coniche confocali.* — 31) Il luogo dei poli di una retta rispetto ad una schiera di coniche confocali è una retta perpendicolare a quella (n.° 231, es. 41)); le due rette dividono armonicamente i fuochi. Se due rette perpendicolari sono coniugate rispetto ad una conica, esse son pure coniugate rispetto ad ogni conica confocale con quella; le due coniche della

---

[1] Qui, e nei seguenti esercizi, per *tangente* si intende il segmento di tangente compreso fra il punto da cui quella esce ed il punto di contatto.

schiera passanti per la intersezione delle due rette, hanno ivi come tangente (e normale) l'una o l'altra delle rette. E se due rette sono coniugate rispetto a due coniche confocali, esse sono coniugate rispetto a tutte le altre coniche confocali, e sono perpendicolari tra loro.

32) Le polari di un punto P rispetto ad una schiera di coniche confocali inviluppano una parabola, che tocca gli assi delle dette coniche, ed ha come direttrice la congiungente P col centro (n.° 231, es. 42)). Le quattro tangenti comuni alla parabola e ad una conica della schiera hanno, come punti di contatto $P_1, \ldots, P_4$ su questa conica, i piedi delle normali condotte da P alla conica stessa (Chasles, Steiner). Per ciascuno P_i di quei punti passa un'altra conica della schiera, che ha ivi come tangente la retta PP_i. Segue che il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da P alle coniche confocali, od anche il luogo dei piedi delle normali uscenti da P alle coniche stesse, è la podaria di P rispetto alla parabola sopra nominata; questo luogo è una curva del terzo ordine.

33) L'inviluppo ed il luogo dell'es. precedente degenerano se P sta sopra un asse, o sulla retta all'infinito. Si dimostri ad es. che « il luogo dei punti di contatto delle tangenti (e dei piedi delle normali) condotte ad una schiera di coniche confocali da un punto P di un asse, è (fatta astrazione dall'asse) un cerchio che passa per P ed ha il centro sul detto asse. Il cerchio divide armonicamente i fuochi, se P sta sull'asse principale, passa invece per i fuochi, se P sta sull'asse secondario ».

34) Se P è improprio, il luogo in questione è una iperbole equilatera che passa per P e per i fuochi, sia reali, sia immaginari delle coniche confocali. Segue ad es. che una conica a centro qualsiasi è segata da ogni iperbole equilatera passante per i suoi fuochi reali e immaginari, in quattro punti le cui tangenti formano un rettangolo circoscritto alla conica.

35) Sopra due ellissi confocali diconsi *corrispondenti* due punti aventi la stessa anomalia eccentrica (n.° 252, es. 30)). Il luogo dei punti corrispondenti ad un punto P assegnato, in una serie di ellissi confocali, è la iperbole confocale che passa per P, anzi quel tratto d'iperbole che sta nel quadrante $\widehat{xy}$ contenente P.

36) Se P e Q sono due punti arbitrari di una ellisse, e P', Q' sono i due punti corrispondenti sopra una ellisse confocale, si ha $PQ' = P'Q$ (Ivory); in altre parole: « in un rettangolo curvilineo formato da due ellissi e da due iperboli confocali, le diagonali (rettilinee) sono uguali tra loro ».

37) I lati di un angolo circoscritto ad una conica segano una conica confocale in quattro punti tali, che le tangenti a questa in due di essi, non appartenenti ad uno stesso lato, si incontrano sopra una bisettrice dell'angolo. Od anche: il quadrilatero formato dalle tangenti alla seconda conica nei detti punti ha come rette diagonali le due bisettrici dell'angolo, e la polare del vertice rispetto alla conica stessa. (Si consideri il triangolo diagonale comune del quadrilatero nominato e del quadrangolo dei quattro punti (n.° 209), e si osservi che due lati del triangolo sono coniugati rispetto alle due coniche; poi es. 31)).

38) Da questo teorema e dal n.° 262, c), segue che « le tangenti condotte ad una conica da due punti di una conica confocale toccano uno stesso cerchio, il cui centro è l'interzione delle tangenti alla seconda conica nei punti nominati » (CHASLES; cfr. es. 17)).

39) Se P_1 e P_2 sono due punti di una ellisse, dai quali si conducano le tangenti P_1T_1, P_1U_1 e P_2T_2, P_2U_2 ad una ellisse interna, confocale alla prima, e si pone $P_1T_1 \cdot P_2T_2 \equiv M_1$, $P_1U_1 \cdot P_2U_2 \equiv N_1$, segue dal teorema precedente la relazione

$$P_1M_1 + P_1N_1 = P_2M_1 + P_2N_1,$$

od anche

$$P_1T_1 + P_1U_1 - (T_1M_1 + M_1T_2) = P_2T_2 + P_2U_2 - (U_1N_1 + N_1U_2).$$

Siano ora $T_1, T_2, T_3, \ldots T'$ ed $U_1, U_2, U_3, \ldots U'$ due gruppi di punti sulla ellisse interna, tali che le tangenti in punti omologhi dei due gruppi si seghino in punti $P_1, P_2, P_3 \ldots P'$ della ellisse esterna. Quelle tangenti costituiscono due spezzate $T_1M_1M_2M_3 \ldots T'$ ed $U_1N_1N_2N_3 \ldots U'$ circoscritte alla ellisse interna, ed aventi perimetri le cui lunghezze indicheremo brevemente con (T_1T') ed (U_1U'). Applicando più volte l'ultima relazione, si trova

$$P_1T_1 + P_1U_1 - (T_1T') = P'T' + P'U' - (U_1U'),$$

e ciò qualunque sia il numero dei lati di ciascuna spezzata. Ora facendo crescere questo numero, vale a dire intercalando tra P_1 e P', sulla ellisse esterna, un numero sempre crescente di punti $P_2 \ldots$, i perimetri di quelle spezzate hanno per limiti le lunghezze degli archi T_1T' ed U_1U' della ellisse interna: sussiste dunque la relazione

$$P_1T_1 + P_1U_1 - \text{arc. } T_1T' = P'T' + P'U' - \text{arc. } U_1U',$$

e, togliendo dai due membri arc. $T'U'$,

$$P_1T_1 + P_1U_1 - \text{arc } T_1U_1 = P'T' + P'U' - \text{arc. } T'U',$$

la quale esprime il teorema di GRAVES [1]. « La somma delle tangenti condotte ad una ellisse da un punto variabile sopra una ellisse confocale, e l'arco (minore) di quella compreso fra i punti di contatto, hanno una differenza costante ».

40) È dunque costante la somma delle due tangenti nominate e dell'arco maggiore compreso fra i punti di contatto. Segue che « una punta, la quale si muova tendendo un filo chiuso, di lunghezza costante, avvolto parzialmente intorno ad una ellisse, descrive una ellisse confocale ». Questa costruzione, nella ipotesi che la prima ellisse si riduca ad un segmento FF' contato due volte, ha come caso particolare la nota costruzione mediante i fuochi.

41) Da un punto P_1 di una ellisse si conduca una tangente ad una ellisse confocale interna, e sia P_2 la seconda intersezione della tangente colla prima ellisse; da P_2 si conduca la ulteriore tangente P_2P_3 all'ellisse interna, e così si continui. Si otterrà una spezzata $P_1P_2P_3 \ldots$ iscritta nella ellisse esterna, e circoscritta alla ellisse interna. Ora se la spezzata si chiude pel fatto che ad es. il vertice P_{n+1} viene a coincidere con P_1, lo stesso

---

[1] La dimostrazione qui accennata è dovuta a REYE.

fatto accade qualunque sia il punto P_1 della conica esterna da cui si parte. Si hanno allora infiniti n.goni semplici iscritti nella conica esterna, e circoscritti alla interna (cfr. n.° 215, es. 29)). « I perimetri di tutti questi n.goni sono uguali tra loro »; (e si dimostra altresì che quel perimetro è maggiore del perimetro di ogni altro n.gono iscritto nella conica esterna, e minore del perimetro di ogni altro n.gono circoscritto alla conica interna; Chasles).

42) Nella spezzata o nel poligono dell'es. precedente la bisettrice di ciascun angolo è normale alla conica esterna nel relativo vertice (n.° 262, *c*)); se adunque $P_1 P_2$ è un raggio luminoso uscente dal punto P_1, allora $P_2 P_3$, $P_3 P_4$ ecc. sono i successivi raggi riflessi sul contorno della conica esterna. E poichè una retta qualsiasi $P_1 P_2$ tocca una conica confocale colla data, segue: « un raggio luminoso, il quale parta da un punto di una ellisse e venga sempre nuovamente riflesso dal contorno della curva, tocca con tutte le sue successive posizioni una conica confocale alla data »; anche la nuova conica è una ellisse se il raggio primitivo lascia i fuochi da una stessa banda.

Capitolo VI.

Trasformazione di una conica mediante una collineazione.

263. Coniche collineari. — L'argomento a cui quest'ultimo Capitolo è dedicato, mentre ci fornirà alcune proprietà delle coniche utili, ad es., nello studio delle superficie del secondo ordine, ci condurrà d'altra parte a riassumere e riordinare varie nozioni acquistate nei Capitoli precedenti.

Una collineazione stabilita fra due piani π, π' trasforma, come già sappiamo (n.° 171, Oss. I.), una conica K di π in una conica K' di π'; e se la prima curva è reale, non degenere, come supporremo sempre nel seguito, tale sarà pure la seconda. *Ogni proprietà proiettiva di* K *si trasporta inalterata a* K'. Dunque una retta di π che sia secante, tangente od esterna a K, ha per corrispondente in π' una retta che si comporta nello stesso modo rispetto a K'; un punto esterno od interno a K si trasforma in un punto esterno od interno a K'. Un gruppo di quantisivogliano punti o tangenti di K si muta in un gruppo *proiettivo* al primo (n.° 218) di punti o tangenti di K'. A punti o rette coniugate rispetto a K corrispondono punti o rette coniugate rispetto a K'; e tutte le proprietà dei poli e delle polari si conservano nella trasformazione.

Al contrario, le proprietà metriche generalmente si perdono. Così l'esser K' una ellisse, parabola od iperbole non dipende già dalla specie cui K appartiene, ma soltanto dal fatto che la retta limite di π sia esterna, tangente o secante di K, rispettivamente; ed il centro di K' corrisponde al polo della retta limite nominata rispetto a K; ecc.

La questione inversa di quella ora trattata ammette la seguente risposta:

Esistono infinite collineazioni tra due piani π, π' *che trasformano una conica* K *di* π *in una conica* K′ *di* π; *la collineazione è pienamente determinata, quando si esiga che a tre punti (o tangenti) arbitrari di* K *corrispondano in* K′ *tre punti (o tangenti) fissati pure ad arbitrio.*

Infatti una collineazione che muti K in K', ed i punti A, B, C di quella nei punti A', B', C' di questa, deve mutare la intersezione D delle tangenti in A, B nella intersezione D' delle tangenti in A', B'. Viceversa la collineazione determinata (n.° 168) che muta il quadrangolo $ABCD$ nel quadrangolo $A'B'C'D'$, trasforma K in una conica che, dovendo passare per A', B', C' e toccare nei primi due punti le rette $A'D'$, $B'D'$, coincide con K'.

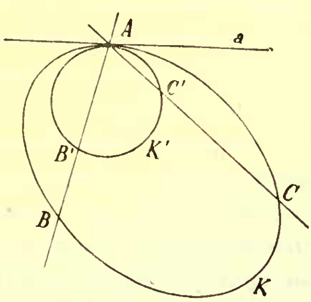
L'ultimo teorema può anche enunciarsi così: *stabilita una proiettività tra le punteggiate sostenute da due coniche* K, K′ *(o tra gli inviluppi delle tangenti a queste), rimane determinata una collineazione che muta* K *in* K′, *ed ogni punto (o tangente) di* K *nel punto (o tangente) corrispondente di* K′.

Osservazione. — Se supponiamo sovrapposti i piani π, π' e le coniche K e K', vediamo che *esistono infinite collineazioni sopra un piano che trasformano in sè una conica del piano; ciascuna di quelle subordina una proiettività nella serie dei punti (e delle tangenti) della curva; e viceversa, ogni proiettività siffatta determina una collineazione che trasforma la conica in sè.* I punti uniti della collineazione sono i punti uniti U, V della proiettività sulla conica, e la intersezione delle tangenti in U e V; le rette unite sono l'asse di proiettività (cfr. n.° 78) e le dette tangenti. Se la proiettività subordinata sulla conica è una involuzione, la collineazione è una omologia involutoria avente come asse e centro, l'asse e il polo di quella involuzione (cfr. n.° 87).

264. Coniche omologiche. — Se due coniche K, K' di uno stesso piano si corrispondono in una omologia, esse ne segano l'asse negli stessi due punti; e se questi sono reali e distinti, quel tratto di asse che è interno a K, è pure interno a K'. Dualmente, le tangenti condotte dal centro di omologia a K e K' sono comuni, e le due coniche appartengono ad uno stesso dei due angoli completi formati dalle dette tangenti, ove siano reali e distinte. Se la conica K passa per il centro di omologia, la K' passerà pure per quel punto, ed avrà ivi la stessa tangente; e se K tocca l'asse di omologia, K' toccherà pure l'asse in quel punto.

L'ultima osservazione si inverte subito: *Se due coniche (di un piano) si toccano in un punto, esistono due omologie, generalmente distinte, che trasformano l'una conica nell'altra;* una delle omologie ha per centro il punto di contatto delle coniche, l'altra ha per asse la tangente comune. Dimostreremo ad es. l'esistenza della prima omologia; il ragionamento duale condurrebbe all'altra.

Detto A il punto di contatto delle coniche K, K', noi possiamo riferire proiettivamente le due curve riguardando come corrispondenti due punti di esse, come B e B', o C e C', ecc. che si trovino sopra rette uscenti da A (n.° 218); in particolare, il punto A risulterà unito nella corrispondenza, in virtù della tangente comune a. Esiste dunque (n.° 263) una collineazione che muta K in K', ed i punti $A, B, C\ldots$ nei punti $A', B', C'\ldots$; ma la collineazione è ora una omologia di centro A, perchè le rette a, ABB', $ACC'\ldots$ risultano unite (n.° 178). Si noti che



l'asse di omologia conterrà le rimanenti due intersezioni di K e K'; si ha così un modo semplice per determinarle, e per riconoscere se le due coniche hanno in A un contatto di primo, secondo o terzo ordine (n.° 226).

Osservazione. I. — Detto u l'asse di una delle omologie che mutano K in K', si faccia ruotare di un diedro arbitrario il piano di K' intorno ad u, in guisa che si stacchi dal piano di K. Nella nuova posizione le due coniche sono prospettive (n.° 176); una di esse, ad es. K, può riguardarsi come proiezione dell'altra K' da un centro S situato fuori dei loro piani, o come sezione piana del *cono* proiettante K' da S. Se, in particolare, K' è un cerchio, risulta che *ogni conica* (*reale*, *non degenere*) *può ottenersi come sezione piana di un cono circolare* (cono proiettante un cerchio). Si vede così che la definizione delle coniche data da Apollonio (n.° 191) conduce agli stessi enti da noi studiati, scartate naturalmente le coniche immaginarie.

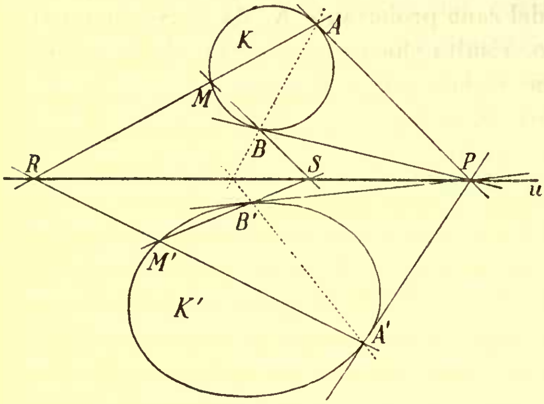
* **Osservazione II.** — Il teorema sopra dimostrato sulle coniche tangenti è contenuto nelle due proposizioni seguenti:

Se due coniche di un piano hanno due punti comuni, reali o immaginari, congiunti da una retta reale, colla condizione (nel primo caso) che il tratto di retta interno all'una conica sia pure interno all'altra, esistono due omologie, generalmente distinte, aventi quella retta come asse, le quali trasformano l'una conica nell'altra.

Se due coniche di un piano hanno due tangenti comuni, reali o immaginarie, uscenti da un punto reale, colla condizione (nel primo caso) che l'angolo completo delle due tangenti contenente l'una conica contenga anche l'altra, esistono due omologie generalmente distinte, aventi quel punto come centro, le quali trasformano l'una conica nell'altra.

Dimostreremo il teorema di sinistra. Siano K, K' le due coniche secanti una retta u negli stessi due punti reali, o immaginari, che possiamo suppor distinti, avendo già trattato la ipotesi del contatto. Osserviamo subito che due punti di u coniugati rispetto a K, saranno pure coniugati rispetto a K'; ed anzi questa condizione traduce in forma reale la ipotesi che le due coniche abbiano le stesse intersezioni colla retta u, quando queste risultino immaginarie. Ciò posto, e preso sopra u un punto P che sia esterno a K, e quindi a K', conduciamo da esso le tangenti alle due coniche; siano A, B i punti di contatto su K, ed A', B' i punti di contatto su K'. Poichè le rette AB, $A'B'$ segano u in uno stesso punto (coniugato a P rispetto a K e K'), esiste una omologia di asse u e centro $AA' \cdot BB'$ che muta i punti A, B in A', B', rispettivamente. In questa si corrispondono due punti M, M' ogniqualvolta le intersezioni $R \equiv AM \cdot A'M'$,

$S \equiv BM \cdot B'M'$ cadono sull'asse u. Ora, se M appartiene a K, i punti R, S, per il teorema del n.° 210, risultano coniugati rispetto a K, quindi anche rispetto a K'. E allora, per il teorema inverso, il punto M' appartiene a K'. Dunque la omologia nominata trasforma K in K'; c. d. d.



L' altra omologia soddisfacente alla stessa condizione ha pure l'asse u, e muta A, B in B', A', rispettivamente.

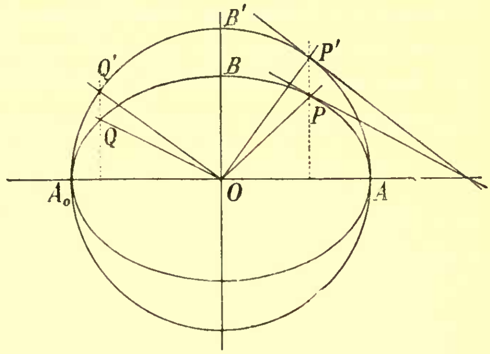
Si noti che, se nell'enunciato di sinistra si toglie la restrizione che le coniche appartengano ad uno stesso piano, le coniche risulteranno prospettive anzichè omologiche, e (in due modi diversi) potranno riguardarsi come sezioni di uno stesso cono (di vertice $AA' \cdot BB'$, o $AB' \cdot A'B$).

265. Coniche affini. — Una affinità la quale trasformi una conica K del piano π in una conica K' di π', conserva non solo tutti i caratteri proiettivi della curva, ma pure una parte dei caratteri metrici, e precisamente tutti quelli che si riattaccano alla retta all'infinito, ma sono indipendenti dai punti ciclici. Così K e K' saranno della stessa specie (cioè ambedue ellissi, o parabole o iperboli); e si corrisponderanno i centri, gli asintoti, le coppie di diametri coniugati delle due curve; però agli assi di K non corrisponderanno generalmente gli assi di K', nè ai fuochi, i fuochi.

Viceversa: *esistono infinite affinità che trasformano l'una nell'altra due coniche di uno stesso nome.*

Infatti, se le due coniche K, K' sono iperboli, o parabole, esse si corrispondono in infinite collineazioni, le quali mutano i punti all'infinito di K nei punti all'infinito di K' (n.° 263), e quindi la retta all'infinito di π nella retta all'infinito di π'. Se poi si tratta di due ellissi, detti OA, OB due semidiametri coniugati di K, ed $O'A'$, $O'B'$ due semidiametri coniugati di K', quella affinità che trasforma il triangolo OAB nel triangolo $O'A'B'$, muta K in una conica che, avendo comune con K' due diametri coniugati (in grandezza e posizione), coincide con essa.

In particolare: *una ellisse può sempre riguardarsi come affine ad un cerchio.* Anzi, se il cerchio ha per diametro un asse AOA_0 della ellisse, l'una curva si trasforma nell'altra mediante una affinità omologica ortogonale di asse AA_0; il rapporto di affinità tra ellisse e cerchio è il rapporto $\frac{OB}{OB'} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}$ dei due semiassi della ellisse. Ogni punto P' del cerchio fornisce un punto P della ellisse, quando l'ordinata di P', rispetto all' asse AA_0, venga diminuita nel rapporto $\frac{b}{a}$. E la ellisse può costruirsi per punti in modo semplice, quando si noti che le rette omologhe $B'P'$ e BP si segano sull' asse di affinità. Su quest'asse si segano pure le tangenti in P, P', donde una costruzione della tangente all'ellisse in P. A diametri perpendicolari del cerchio corrispondono diametri coniugati della ellisse.



Si osservi inoltre che lo stesso rapporto costante $\frac{b}{a}$ passa fra le aree di due figure corrispondenti, l'una appartenente al piano della ellisse, l'altra al piano (sovrapposto) del cerchio (n.° 182, *b*)). Segue ad es. che l'area della ellisse sta all'area del cerchio come b sta ad a, e quindi vale $\pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$; *l'area di una ellisse è uguale all'area del rettangolo dei due semiassi moltiplicata per* π (Archimede). Segue ancora che è costante $\left(= \frac{1}{2} ab\right)$ l'area del triangolo che ha per lati due semidiametri coniugati della ellisse (d'accordo col n.° 252); ed è pure costante $\left(= \frac{\pi}{4} ab\right)$ l'area del settore limitato da due semidiametri coniugati e da un arco di ellisse.

266. Coniche simili. — Se una similitudine muta la conica K nella conica K', allora (accanto alle osservazioni relative all'affinità) va notato che gli assi di K corrispondono agli assi di K', e son proporzionali a questi, quando si tratti di coniche a centro; i fuochi corrispondono ai fuochi, e se K è un cerchio od una iperbole equilatera, tale sarà anche K'. In breve la similitudine conserva tutti i caratteri delle coniche (a parte le lunghezze assolute dei segmenti).

Viceversa: *due coniche a centro dello stesso nome, aventi gli assi omonimi proporzionali, sono simili* (si corrispondono in una similitudine). Infatti la similitudine che trasforma il rettangolo avente per mediane gli assi dell'una conica nel rettangolo analogo dell'altra, trasforma la prima conica nella seconda. Analiticamente, se

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{X^2}{\alpha^2} \pm \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$$

sono le equazioni delle due curve riferite agli assi (dovendosi prendere insieme i segni superiori o gli inferiori), ed è

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = k,$$

la similitudine

$$(2) \qquad x = kX, \quad y = kY$$

trasforma la prima conica nella seconda.

Due parabole qualisivogliano sono simili; infatti la similitudine (2) trasforma l'una nell'altra le parabole

$$(3) \qquad y^2 = 2px, \quad Y^2 = 2PX,$$

quando si prenda $k = \frac{p}{P}$.

267. Coniche omotetiche. — Se la similitudine è una omotetia fra piani sovrapposti o paralleli, coniche corrispondenti K, K' hanno gli stessi punti all'infinito, e gli asintoti, gli assi, le coppie di diametri coniugati dell'una, sono paralleli agli asintoti, agli assi, alle coppie di diametri coniugati dell'altra; due diametri paralleli sono insieme trasversi o non trasversi.

Queste osservazioni invertite conducono al seguente teorema.

Due coniche situate in uno stesso piano, o in piani paralleli, le quali abbiano gli stessi punti all'infinito, reali o immaginari, colla condizione, nel primo caso, che il tratto di retta all'infinito interno all'una conica sia pure interno all'altra, sono omotetiche. Il teorema è caso particolare di quello contenuto nella Oss. II. del n.° 264. E può anche dimostrarsi direttamente così.

Si osservi anzitutto che, in virtù della ipotesi, le due coniche sono della stessa specie, e gli asintoti e gli assi dell'una sono paralleli agli asintoti e agli assi dell'altra, e precisamente sono paralleli tra loro gli assi trasversi quando si tratti di iperboli. Supposto anzitutto che le due coniche abbiano centro, riferendole ai rispettivi assi, x, y per l'una, X, Y, paralleli a quelli, per l'altra, avremo due equazioni come le (1) del n.° precedente. Ora gli asintoti delle due curve sono dati, se si tratta di iperboli, dalle equazioni

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{a}{b}, \quad \frac{X}{Y} = \pm \frac{\alpha}{\beta},$$

mentre, se si tratta di ellissi, nei secondi membri comparisce ancora il fattore $i = \sqrt{-1}$. In ogni caso, per il parallelismo dei primi asintoti coi secondi, occorre che sia $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$. Ma allora, indicando con k il valore comune dei due rapporti, si vede che le due coniche si mutano l'una nell'altra mediante le sostituzioni (2) del n.° precedente, le quali definiscono questa volta una omotetia fra i piani xy ed XY. Se poi si tratta di due parabole come le (3) del n.° precedente, si osserverà che la similitudine ivi considerata, che trasforma l'una parabola nell'altra, è una omotetia quando sono paralleli gli assi x, X delle due curve e quindi le rette y, Y, tangenti nei vertici.

Esercizi I. — 1) Una conica, mediante una omologia il cui centro stia in un fuoco della curva, si muta in una conica avente ancora un fuoco in quel punto.

2) In particolare: una omologia avente il centro nel centro di un cerchio, trasforma questo in una conica avente ivi un fuoco. Viceversa: una conica qualsiasi può esser trasformata in un cerchio, mediante una omologia avente il centro in un fuoco di quella; quale sarà la retta limite nel piano della conica?

3) Mediante questa relazione, dalle proprietà del cerchio possono dedursi varie proprietà focali delle coniche, ad es. il teorema del n.° 262, es. 14); od anche il seguente: « le corde di una conica che son viste da un fuoco sotto un angolo costante, inviluppano una seconda conica che ha comune colla prima quel fuoco e la relativa direttrice.

4) Data una conica ed una retta esterna, trasformare quella in un cerchio, mediante una omologia avente la retta data come retta limite (del piano della conica). (Come si determina il centro di omologia? n.° 89, es. 7)). Il problema può anche enunciarsi così: data una conica ed un punto interno, trasformare mediante una omologia quella in un cerchio ed il punto nel relativo centro.

5) Data una conica ed un punto S su questa, costruire una seconda conica che abbia colla prima un contatto bipunto, tripunto o quadripunto

in S, e passi inoltre per tre, due, od un punto assegnato. (La conica richiesta può riguardarsi come omologica alla data...).

6) Dei punti assegnati fuori di S due possono anche esser immaginari coniugati. Come caso particolare si ha il seguente: « data una conica ed un punto S su questa, costruire il cerchio osculatore alla conica in S, riguardandolo come omologico alla conica rispetto al centro S ». Il centro del cerchio è omologo al punto di FRÉGIER di S rispetto alla conica (n.° 222, es. 13)).

7) Il problema del n.° 231, es. 9): « costruire una conica passante per tre punti e tangente a due rette » può anche risolversi riguardando la conica come omologica di un cerchio tangente alle due rette.

8) Anche il problema del n.° 231, es. 30, *b*): « determinare le intersezioni di due coniche conoscendo due tangenti comuni ad esse » si risolve facilmente riguardando le due coniche come corrispondenti in una omologia (n.° 264, Oss. II).

9) Una conica è trasformata in sè stessa da infinite omologie armoniche, per ciascuna delle quali il centro è polo dell'asse; ogni punto del piano che non appartenga alla conica può esser scelto come centro di una siffatta omologia; e dualmente. Viceversa, una omologia che trasformi una conica in sè, è armonica, ed ha il centro e l'asse nella relazione suddetta.

10) Dati due cerchi K, K' non concentrici, esistono quattro omologie che mutano K in K'; di queste, due sono omotetie ed hanno come centri i centri di similitudine dei due cerchi (n.° 160, es. 14)); le altre due, non omotetiche, hanno ancora quegli stessi centri, ma come asse hanno l'asse radicale dei due cerchi (n.° 156). Segue che, se una trasversale condotta ad arbitrio per un centro di similitudine sega K in A, B e K' in A', B', allora le tangenti in A, B a K saranno parallele, in ordine conveniente, ad es. nell'ordine scritto, alle tangenti in A', B' a K', mentre le due prime tangenti segheranno rispettivamente le tangenti in B', A' al secondo cerchio K' in punti dell'asse radicale; in breve, le quattro tangenti formano un parallelogramma una cui diagonale sta sull'asse radicale. E se da un punto dell'asse radicale si conducono le tangenti ai due cerchi, i quattro punti, di contatto formano un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale ha due vertici nei centri di similitudine ed il terzo vertice sull'asse radicale, nel punto coniugato armonico del primitivo rispetto alle intersezioni dei due cerchi.

II. — 11) Esistono infinite affinità che trasformano in sè stessa una conica a centro; esse o lasciano fissi i punti all'infinito della curva (affinità *dirette*), o li scambiano tra loro (affinità *inverse*). Ogni affinità diretta subordina sulla curva una proiettività avente come asse (n.° 263, Oss.) la retta all'infinito; ogni affinità inversa subordina una involuzione avente come asse un diametro e come polo un punto improprio; le affinità inverse sono dunque le simmetrie oblique determinate dai singoli diametri, e trasformanti la conica in sè stessa. Fissati ad arbitrio sulla conica due punti A, A', esistono due affinità, una diretta e l'altra inversa, che mutano A in A', e trasformano la curva in sè stessa.

12) Il prodotto di due affinità inverse trasformanti una conica in sè, è una affinità diretta godente la stessa proprietà; e viceversa, ognuna di queste affinità dirette può riguardarsi come prodotto di due di quelle affinità inverse, delle quali anzi una può scegliersi ad arbitrio.

13) Ogni affinità trasformante una conica a centro in sè, è *equivalente* (n.° 173); essa lascia inalterati o inverte i segni delle aree, secondo che è diretta od inversa (d'accordo colla locuzione introdotta nell'es. 25) del n.° 185). Da questo teorema sarebbe facile ricavar nuovamente il secondo teorema di Apollonio (n.° 252).

14) Detto *segmento* (AB) l'area compresa fra la corda AB di una curva e l'arco (minimo) di curva che ne congiunge gli estremi, si dimostri (es. 11), 13)) che due segmenti (AB), $(A'B')$, di una stessa ellisse od iperbole, sono (direttamente) equivalenti, se le rette AB', $A'B$ riescono parallele: ed allora sono pure equivalenti i settori AOB, $A'OB'$ limitati dai semidiametri che congiungono il centro O agli estremi degli archi AB, $A'B'$.

15) Nella ipotesi dell'es. precedente, posto che si tratti di una iperbole, si conducano da A, B, A', B' le parallele ad un asintoto, fino ad incontrare in A_0, B_0, A'_0, B'_0 l'altro asintoto; si dimostri che sono uguali le due aree trapezoidali $AA_0\,B_0B$, $A'A'_0\,B'_0B'$, limitate ciascuna da tre lati rettilinei e da un arco AB, o, rispettivamente, $A'B'$. Si può anche dire che le due aree nominate sono equivalenti, se sussiste la proporzione $AA_0 : BB_0 = A'A'_0 : B'B'_0$. Segue che, se in una iperbole riferita agli asintoti si considera una serie di punti le cui ordinate formino una progressione geometrica, le aree trapezoidali racchiuse tra le coppie di ordinate successive sono tutte uguali.

16) Esistono infinite affinità che trasformano una parabola in sè stessa, e per fissarne una si possono dare sulla curva, ad arbitrio, *due* coppie di punti corrispondenti. Segue che in una parabola passa un rapporto costante k fra l'area di un *segmento* (AB), e l'area del triangolo PAB formato dalla corda AB colle tangenti in A e B. Per calcolare k si consideri quel punto C della parabola (situato sul diametro uscente da P), la cui tangente RCS è parallela ad AB. Confrontando i segmenti (AC), (CB) coi corrispondenti triangoli RAC, SCB, si ottiene facilmente una relazione fra aree triangolari, da cui si ricava $k = \frac{2}{3}$. Dunque: «l'area di un segmento parabolico è uguale ai due terzi dell'area del triangolo racchiuso dalla corda limitante il segmento e dalle tangenti negli estremi di essa» (Archimede). Quell'area vale precisamente $\frac{\delta^3}{12p}$, dove δ è la differenza fra le ordinate (rispetto all'asse) degli estremi della corda, e dipende quindi soltanto dalla detta differenza.

17) L'area del settore compreso fra l'asse di una parabola, il raggio focale di un punto P e la curva è uguale ad un terzo dell'area del trapezio formato dall'asse, dal diametro passante per P, dal raggio focale nominato e dalla direttrice.

18) Fra le (∞^2) affinità che mutano una parabola in sè stessa, ve ne sono infinite (∞^1) che lasciano inalterati i valori delle aree. Queste affi-

nità equivalenti si dividono in due famiglie: *affinità dirette*, che subordinano sulla parabola proiettività paraboliche aventi l'unico punto unito all'infinito, e *affinità inverse*, che sono simmetrie oblique rispetto ai singoli diametri della parabola; (cfr. es. 11)).

III. — 19) Data una conica a centro, esistono infinite coniche omotetiche e concentriche con quella; esse appartengono ad un fascio-schiera (n.° 231, Oss.) di coniche bitangenti nei punti all'infinito [1]. Supposta nota l'equazione normale della prima conica, come si scrivono le equazioni delle coniche omotetiche e concentriche?

20) Un fascio-schiera, che ha proprietà analoghe, è pure costituito dalle parabole aventi un contatto quadripunto (n.° 226) nel loro punto comune all'infinito. Queste parabole hanno lo stesso asse, e sono uguali tra loro; due di esse, prese ad arbitrio, possono sovrapporsi mediante una traslazione parallela all'asse comune.

21) Una trasversale qualsiasi intercetta entro le coniche degli es. 19) e 20) corde aventi lo stesso punto medio; in altre parole: se una retta sega una di quelle coniche in M, M', e una seconda conica in N, N', si ha $MN = - M'N'$; e se la retta tocca la seconda conica, il punto di contatto è medio per la corda MM'.

22) I poli di una retta rispetto alle infinite coniche degli es. 19) e 20) stanno sopra una retta, che è il diametro coniugato colla direzione della retta primitiva rispetto a ciascuna di quelle curve (n.° 231, es. 41)). Che cosa formano le polari di un punto rispetto alle coniche stesse?

23) Ogni affinità che trasformi una conica a centro in sè stessa, trasforma pure in sè ogni conica omotetica e concentrica con quella; (si confrontino infatti i diametri sovrapposti delle due coniche; oppure analiticamente). Segue che l'area del *segmento* compreso fra una conica K ed una tangente ad una seconda conica K', omotetica, concentrica ed interna alla prima, non varia al variare della tangente. Le stesse proprietà sussistono per le parabole aventi un contatto quadripunto all'infinito, purchè dopo la parola *affinità* si aggiunga *equivalente* (es. 18)).

24) Date due coniche omotetiche e concentriche K, K' (o due parabole aventi un contatto quadripunto all'infinito), di cui una, ad es. la prima, conterrà nel suo interno la seconda, e scelto su K un punto P_1 qualsiasi, si conduca da P_1 una tangente a K', la quale incontri nuovamente K in P_2; poi da P_2 si conduca la ulteriore tangente P_2P_3 a K', e così si prosegua. Si otterrà una spezzata $P_1P_2P_3\dots$ iscritta in K e circoscritta a K'. Vale ora la proprietà, che la tangente a K in un vertice P_i della spezzata è

---

[1] Se la conica primitiva è una iperbole ($xy = k$), il fascio-schiera contiene, oltre alle iperboli omotetiche con quella ($xy = k'$, dove k' è un numero arbitrario che ha il segno di k), una seconda famiglia di iperboli ($xy = - k'$) omotetiche tra loro, ma non colle precedenti; le iperboli delle due famiglie sono, per dir così, separate dagli asintoti. Varie proprietà contenute negli es. 20) e seguenti si estendono anche alle curve di questa seconda famiglia.

parallela alla retta $P_{i-1} P_{i+1}$ congiungente i due vertici contigui, ed anche alle rette $P_{i-2} P_{i+2}$, ecc.

25) Nella ipotesi che K e K' siano ellissi, può accadere (in relazione a valori particolari del rapporto di omotetia) che la spezzata si chiuda, venendo ad es. a coincidere il vertice P_n col punto di partenza P_1. In tal caso, comunque si scelga il punto P_1 su K_1, la spezzata n.latera avente ivi l'origine si chiude, ed esistono infiniti n.goni semplici iscritti nella conica K e circoscritti alla conica K' (cfr. n.° 215, es. 29)). « Tutti questi n.goni hanno la stessa area »; e, supposto che si tratti di n.goni convessi, si dimostra che quell'area è massima fra le aree degli n.goni iscritti in K, e minima fra le aree degli n.goni circoscritti a K'. I detti n.goni hanno tutti come baricentro il centro delle ellissi K, K'; (per $n = 3$ si riducono a quei triangoli considerati nell'es. 12) del n.° 238).

26) Le ultimi proposizioni possono facilmente dedursi dalla seguente: una affinità che trasformi una ellisse K in un cerchio K_0, trasforma le ellissi omotetiche e concentriche a K in cerchi concentrici a K_0; e muta quindi i poligoni suddetti in poligoni regolari iscritti in K_0.

parallela alla retta P_2 e P_3; conseguentemente i due vertici coincidono ed anche alla retta $P_{...}$ e $P_{...}$ ecc.

25) Nella ipotesi che K e K'' siano ellissi, può accadere (in relazione a valori particolari del rapporto di omotetia) che la spezzata [illegible] quando ad es. a coincidere il vertice P_1 col punto [illegible] caso, comunque si scelga il punto P_1 su K, [illegible] l'aperture si chiude, ed esistono infiniti [illegible] K e concentrici alla conica K'' [illegible] hanno la stessa area [illegible] che quell'area è massima [illegible] le aree delle [illegible] baricentro [illegible] triangoli [illegible]

26) [illegible]

una [illegible] allora [illegible] quindi [illegible]

APPENDICE

I.

Sui problemi geometrici ([1]).

268. Classificazione dei problemi geometrici. — Le brevi considerazioni che abbiamo dedicato (n.° 90) ai problemi di primo e secondo grado, appartengono ad una teoria dedicata allo studio generale dei problemi geometrici e degli strumenti comunemente impiegati a risolverli. Questa teoria costituisce forse la più notevole applicazione dei metodi analitici nel campo della Geometria elementare; val quindi la pena di porne in luce brevemente i concetti generali, rimandando, per i risultati algebrici e per lo studio di particolari problemi, ad opere che il lettore potrà facilmente consultare.

Due questioni noi ci proponiamo. Vogliamo in primo luogo stabilire una classificazione razionale dei problemi geometrici. Ed in secondo luogo vogliamo esaminare quali classi di problemi siano risolubili con determinati strumenti.

Assegnare un problema di geometria piana vuol dire assegnare nel piano su cui si opera un certo numero finito di punti, rette, curve..., e chiedere nuovi punti, nuove rette, nuove curve..., che siano in determinate relazioni cogli enti dati. Possiamo supporre però che gli enti richiesti siano sempre punti; infatti, se fosse domandata una retta, basterebbe costruirne due punti (ad es. le intersezioni con due rette prefisse), giacchè la retta potrebbe poi tracciarsi collo strumento *riga*, di cui riterremo permesso l'uso; ed una osservazione analoga si fa-

([1]) Questo articolo è, salvo alcune modificazioni di forma e qualche ampliamento, una riproduzione di un mio scritto « Sulla risolubilità dei problemi geometrici... », redatto per il volume pubblicato dal Sig. Enriques sopra alcune « Questioni riguardanti la geometria elementare » (Bologna, Zanichelli, 1900).

rebbe quando fosse richiesto un cerchio, e si disponesse del *compasso*. Ma, in generale, se non si possiede uno strumento atto a tracciare d'un tratto continuo una curva che venga richiesta, si intenderà che la curva deve esser costruita *per punti*, e si riguarderanno come altrettanti problemi staccati la determinazione di singoli suoi punti, ad es. dei punti che si trovano sopra rette, cerchi... condotti, sia ad arbitrio, sia in modo prefisso.

Considerazioni analoghe possiamo applicare ai *dati* del problema. Alle rette, ai cerchi e, sotto ipotesi molto larghe, alle curve che comparissero fra i dati, possiamo sostituire un numero finito di punti atti ad individuare quelle linee (1). Limitandoci ai casi in cui ciò è possibile, il nostro problema potrà ridursi ad uno o più problemi del seguente tipo:

Dati in un piano alcuni punti in numero finito, costruire un punto che abbia coi dati relazioni assegnate.

Per tradurre il problema in forma analitica, riferiamo i punti nominati ad un sistema di coordinate proiettive, o casi particolari, ad es. coordinate cartesiane. Nel fissare gli elementi fondamentali del sistema eviteremo tuttavia (per ragioni che poi saranno dette) di introdurre enti, che non abbiano relazione colla natura del problema proposto. Così, se questo ha carattere puramente proiettivo, faremo uso di un sistema di coordinate *proiettive*, di cui i punti fondamentali ed il punto unità si trovino possibilmente fra i dati, od in punti arbitrari che, in tal caso, vanno *aggiunti* (associati) ai dati. Ma se si ritiene conosciuto un parellelogramma, due lati contigui di questo potranno assumersi come assi di un sistema cartesiano, e il vertice opposto all'origine come punto unità; se finalmente si ritiene conosciuto un quadrato (o costruibile coi mezzi di cui si dispone), potremo adoperare un sistema cartesiano ortogonale, con un'unica unità di lunghezza per le ascisse e le ordinate.

---

(1) Si intende che i punti, a cui si allude, possono appartenere alla curva; ma non è necessario che così sia, bastando che la loro conoscenza permetta di determinare la curva. Così, se una curva algebrica fosse riferita ad assi cartesiani, e si conoscessero più punti aventi come coordinate i coefficienti della equazione della curva, si potrebbe dire che quei punti permettono di individuare la curva.

Rispetto al sistema di coordinate prescelto, i punti dati (insieme ai punti fondamentali ed al punto unità) avranno certe coordinate, ad es. non omogenee, che promiscuamente indicheremo con $1, a, b, c \ldots$, e riguarderemo come *quantità note.* Esse, insieme a tutte le quantità che si ottengono da quelle con operazioni razionali (addizione algebrica, moltiplicazione, divisione) eseguite in numero indeterminato, purchè finito, costituiscono, come si suol dire, un *campo di razionalità* [1]

$$K = [1, a, b, c \ldots],$$

la cui considerazione è fondamentale nella discussione che stiamo per fare; lo chiameremo *il campo di razionalità definito dai dati.* Insieme ai dati dobbiamo pur considerare il punto incognito, il quale avrà come coordinate certi *numeri incogniti* x, y. I legami espressi nell'enunciato del problema fra i punti dati ed il punto incognito, si tradurranno in certe relazioni analitiche fra le quantità note e le incognite x, y. Operando su queste relazioni mediante i processi di eliminazione forniti dall'analisi, arriveremo in fine, se il problema è determinato, a due equazioni, una contenente la sola incognita x,

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

l'altra la sola y. Ed il problema si spezzerà in due: uno, *dipendente dalla equazione* (1), per determinare la coordinata x del punto incognito, o, se si vuole, per determinare il punto $(x, 0)$ sopra una retta assegnata $(y = 0)$; l'altro problema per determinare la coordinata y, ossia il punto $(0, y)$, quando sia nota la x.

In seguito a questa osservazione, possiamo limitarci a considerare i problemi dipendenti da una sola equazione con una sola incognita. Essi possono classificarsi a seconda dell'equazione nominata. Precisamente:

Un problema si dice algebrico, se la equazione da cui esso dipende è algebrica, e quindi può porsi sotto la forma (razionale, intera)

$$(2) \qquad x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0,$$

---

(1) Per questo concetto si veda ad es. le *Istituzioni di Analisi algebrica* del CAPELLI (1902), pag. 548.

dove si suppone precisamente che $A_1, A_2 \dots A_n$ *siano quantità appartenenti al campo di razionalità definito dai dati.*

Ogni problema che non rientri in questa categoria dicesi *trascendente.*

Quanto ai problemi algebrici, essi possono suddividersi ulteriormente a seconda del *grado* n della equazione (2), da cui dipendono. Avremo dunque problemi di *primo grado*, dipendenti da una equazione lineare; problemi di *secondo grado*, dipendenti da una equazione quadratica, ecc.

Qui però va fatta un' avvertenza nel caso che la equazione (2) *sia riducibile entro al campo di razionalità* K, vale a dire nel caso che il polinomio (2) sia il prodotto di due o più polinomi $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots$, i cui coefficienti appartengano ancora al campo K (¹). Supponiamo infatti, ad es., che l'equazione (2) possa scriversi sotto la forma

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = 0,$$

dove φ_1, φ_2 sono due polinomi della natura indicata e di grado n_1, n_2 (con $n_1 + n_2 = n$); l'equazione, in tal caso, si scinde nelle due

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0.$$

Allora, o le radici di una di queste due equazioni, ad es. della prima, soddisfano al problema proposto, e forniscono anzi tutte quelle radici della (2) che soddisfano al problema stesso, e in tal caso il problema non è veramente di grado n, ma di grado $n_1 < n$; oppure le radici, sia di $\varphi_1 = 0$, che di $\varphi_2 = 0$, soddisfano al problema, ed in tal caso il problema è riducibile, e si scinde in due problemi uno di grado n_1, l'altro di grado n_2. Perciò, parlando nel seguito di un problema di grado n, supporremo comunemente *irriducibile* la relativa equazione. Gli esempi di problemi che porteremo fra poco renderanno evidenti queste considerazioni.

Osservazione. — Se ai punti *dati*, aventi le coordinate $1, a, b, c \dots$, si aggiungono nuovi punti di coordinate $p, q \dots$, che si riguardano pure come dati, il campo di razionalità $K = [1, a, b, c, \dots]$ si muta nel campo di razionalità

(¹) Per questa nozione si veda Capelli, l. c., pag. 550, 631.

$K' = [1, a, b, c, \ldots, p, q \ldots]$, il quale può differire da K (esser più ampio di K). In questa ultima ipotesi può accadere che una equazione algebrica *irriducibile* nel campo K, sia invece *riducibile* rispetto al nuovo campo K' (1). Può accadere dunque che un problema, il quale sia irriducibile di grado n, quando certi punti si riguardano come dati, si scinda in problemi di grado inferiore, quando il gruppo dei punti dati si ampli coll'introdurne dei nuovi (2).

Va però notato che questo fatto non si presenta, se i nuovi punti che si aggiungono sono *interamente arbitrari*. Se infatti accadesse che una equazione irriducibile nel campo $K = [1, a, b, c \ldots]$, divenisse riducibile nel campo $K' = [1, a, b, c, \ldots, p, q \ldots]$, e ciò *comunque* fossero scelti i numeri $p, q \ldots$ (coordinate dei punti aggiunti), l'equazione sarebbe riducibile anche se a $p, q \ldots$ si attribuissero valori appartenenti al campo K. Ma allora il campo K' verrebbe a coincidere col campo K; l'equazione nominata sarebbe dunque, nel tempo stesso, irriducibile e riducibile in K, il che è assurdo.

Queste considerazioni possono applicarsi a giustificare certe avvertenze, di cui abbiamo parlato, nella scelta del particolare sistema di coordinate proiettive (o cartesiane) a cui il problema vien riferito. Si è gia detto che gli elementi fondamentali di quel sistema vanno aggiunti ai dati primitivi, quando non vi siano già inclusi. Segue che, mutando il sistema delle coordinate proiettive, muterà generalmente il campo di razionalità definito dai dati. L'equazione da cui il problema dipende non muterà grado per questo, giacchè le relazioni fra le antiche coordinate e le nuove sono lineari; ma l'equazione stessa potrà da irriducibile divenir riducibile, o viceversa. Dunque un problema irriducibile, di un certo grado, rispetto ad un primo

(1) Vedi Capelli, l. c. pag. 631.

(2) Così ad es., mentre il problema di bisecare un angolo retto, dati i punti ciclici, è di secondo grado (e consiste nel costruire le rette doppie di una involuzione determinata dai due lati dell'angolo e dalle due direzioni assolute uscenti dal vertice), quel problema si scinde in due problemi di primo grado quando si suppongano dati i vertici di un quadrato (Cfr. n.° 89, es. 28)).

sistema di coordinate proiettive (o cartesiane), può scindersi in problemi di grado inferiore, quando esso venga riferito ad un nuovo sistema di coordinate proiettive (o cartesiane) (1).

Ecco perchè, volendo evitare che la scelta del sistema di riferimento alteri artificialmente le condizioni del problema, converrà scegliere gli elementi fondamentali fra i punti inizialmente dati (con che il campo di razionalità K sarà ristretto, quanto è possibile, rapporto al problema), o, quando ciò non si possa fare, in punti affatto arbitrari del piano, da aggiungersi ai dati (chè questa scelta, pur ampliando il campo K, non rende riducibile un problema, per sua natura irriducibile).

269. Sulle costruzioni che possono eseguirsi colla riga. — Passando ora alla seconda parte della nostra trattazione, vogliamo esaminare quali classi di problemi siano risolubili con determinati strumenti. Dovremo perciò precisare le operazioni grafiche che un dato strumento può eseguire, e trovarne, col mezzo delle coordinate, le equivalenti operazioni analitiche.

Si tratti anzitutto della *riga*. La riga permette di eseguire le seguenti due operazioni:

1) tracciare la retta che passa per due punti assegnati;

2) determinare la intersezione di due rette, che possono esser definite ciascuna da una coppia di punti.

Queste operazioni noi riteniamo sempre eseguibili, anche quando i punti o le rette nominate cadano fuori del foglio del disegno, o siano improprie, purchè quei punti e quelle rette si suppongano allora graficamente definite secondo il modo indicato nel n.° 16.

Ciò posto, supponiamo dati più punti, in numero finito, i quali, rispetto ad un sistema di coordinate proiettive non omogenee (i cui punti fondamentali trovansi fra i dati), abbiano, promiscuamente, le coordinate $1, a, b, c \ldots$, definenti il solito campo di razionalità

$$K = [1, a, b, c \ldots].$$

---

(1) Ad es., d'accordo colla nota precedente, si troverà che il problema di secondo grado della bisezione di un angolo retto, si scinde in due problemi di primo grado, quando si riferisca la figura ad un sistema cartesiano ortogonale *con una solà unità di lunghezza*.

La operazione grafica 1) ci dà una retta, la cui equazione ha coefficienti che si ottengono eseguendo operazioni razionali sulle coordinate dei due punti; quei coefficienti appartengono dunque al campo K. La operazione grafica 2) ci dà un punto, le cui coordinate si ottengono con operazioni razionali eseguite sui coefficienti delle equazioni delle due rette; quelle coordinate appartengono dunque ancora al campo K. Segue di qua che, per quante volte si ripetano costruzioni grafiche della natura indicata, partendo dai punti dati, ai quali vanno aggiunti via via quelli già costruiti, si otterranno sempre punti le cui coordinate apparterranno al campo K; da questo non sarà possibile uscire, finchè si operi colla sola riga nel modo indicato.

Rimane però da esaminare la questione inversa: se ogni punto le cui coordinate appartengano al campo K, possa ottenersi mediante un numero finito di costruzioni eseguibili colla sola riga.

Una questione siffatta ebbe già risposta affermativa nella ipotesi che i punti dati appartenessero ad una stessa retta (n.° 75). Noi potremo sempre ridurci a quel caso mediante la considerazione seguente.

Riprendiamo il triangolo fondamentale XYZ del sistema di coordinate, il punto unità $E(1, 1)$, e gli altri punti dati aventi, promiscuamente, le coordinate a, b, c... Partendo da questi e valendoci di costruzioni eseguibili colla sola riga, possiamo anzitutto procurarci sopra una delle rette fondamentali, ad es. ZX, punti aventi la prima coordinata uguale rispettivamente ad 1, a, b, c... (la seconda coordinata essendo nulla). Infatti uno qualsiasi di questi numeri, a ad es., sarà la prima, o la seconda coordinata di uno, P, fra i punti dati. Nel primo caso la proiezione di P su ZX da Y sarà il punto richiesto $(a, 0)$; nel secondo caso conduciamo la retta XP che ha l'equazione $y = a$, e seghiamola colla retta ZE avente la equazione $x = y$; otterremo il punto (a, a), il quale, proiettato da Y su ZX, ci darà il punto desiderato $(a, 0)$. Ottenuti così i punti $x = 1, a, b, c$... sopra ZX, ed operando su questi e su $Z\,(x = 0)$ ed $X(x = \pm\,\infty)$ mediante costruzioni eseguibili colla sola riga, noi sappiamo costruire (n.° 75) sulla retta stessa ogni punto M, la cui prima coordinata $x = m$ appartenga al campo di razionalità $K = [1\ a, b, c..]$.

In modo perfettamente analogo potremo costruire sulla retta ZY un punto N, la cui seconda coordinata $y = n$ appartenga al campo stesso. E finalmente nella intersezione delle due rette YM, XN avremo un punto, le cui coordinate m, n sono due numeri arbitrari del campo K. In conclusione:

Dati più punti in un piano (riferiti ad un sistema di coordinate proiettive, i cui punti fondamentali ed unità sono compresi fra i dati), *la condizione necessaria e sufficiente perchè un nuovo punto possa ottenersi da quelli mediante un numero finito di costruzioni eseguibili colla sola riga, è che le coordinate di questo punto appartengano al campo di razionalità definito dai dati.*

Il risultato stesso può esser anche presentato sotto la forma seguente, che ne mette in rilievo tutta l'importanza:

« Siano dati in un piano più punti in numero finito; si » congiungano questi a due a due, si determinino le intersezioni » delle rette così ottenute, si estenda il gruppo dei punti pri- » mitivi aggregandovi i nuovi punti trovati, si operi sul nuovo » gruppo come sull'antico, e così si continui all'infinito. Si ot- » terrà in tal guisa una classe di infiniti punti (eccettuato il » caso che i punti primitivi siano tutti, o tutti meno uno, alli- » neati). Si domanda di caratterizzare in qualche modo la classe » dei punti così ottenuti, la quale, come subito si verifica, non » comprende tutti i punti del piano ». La risposta è data dall'ultima proposizione:

« Se tra i punti dati si scelgono quattro, che siano vertici » di un quadrangolo, come punti fondamentali ed unità di un » sistema di coordinate proiettive, e si chiamano a, b, $c \dots$ le coor- » dinate degli altri punti dati, ove esistano, la nostra classe di » punti si compone di tutti quei punti, le cui coordinate appar- » tengono al campo di razionalità $[1, a, b, c \dots]$ ».

Le operazioni geometriche che conducono alla costruzione di una siffatta classe di punti, trovano dunque riscontro nelle operazioni aritmetiche che conducono alla costruzione di un campo di razionalità, partendo da quantità date in numero finito. Il caso più semplice di quattro soli punti, il quale conduce alla classe di tutti i punti aventi le due coordinate razionali, fu considerato la prima volta dal Möbius, che chiamò *rete* quella classe.

270. Sui problemi risolubili colla sola riga. — La proposizione del n.° precedente ci permette di risponder subito ad una delle questioni che ci siamo proposte: quali siano i problemi risolubili colla sola riga.

Supposto al solito (n.° 268) che il problema si riduca alla ricerca di un punto, affinchè questo sia costruibile colla sola riga, dovranno le sue coordinate x, y appartenere al campo di razionalità K definito dai dati. Ma allora le equazioni irriducibili da cui dipendono x, y, saranno per forza di primo grado; e viceversa. Dunque:

Mediante l'uso della sola riga si possono risolvere i problemi di primo grado, e questi soltanto.

Osservazione. — S'intende però che devono esser *dati graficamente* tutti quegli elementi, ad es. punti, che sono necessari perchè il problema sia *determinato* (e possa esser posto in equazione). Ora, se il problema è di natura grafica, i punti in questione saranno generalmente quelli soltanto che compariscono esplicitamente nell'enunciato. Se invece il problema è di natura metrica, converrà aggiungere ai punti esplicitamente nominati, quei punti (ad es. impropri, o in particolare *ciclici*) che occorrono per tradurre graficamente (n.° 89, Oss.) le relazioni metriche contemplate nel problema proposto. Così, se è richiesta la parallela per un punto ad una retta assegnata r, o il punto medio di un segmento giacente su r, . . . , deve esser *dato* graficamente il punto all'infinito di r, ad es. (n.° 16) mediante una retta parallela ad r, tracciata nella figura. E se nel problema figurano due o più direzioni distinte, deve esser compresa fra i dati la retta all'infinito; il che si ottiene, ad es., assegnando un parallelogramma. Per risolvere colla riga problemi in cui compariscano relazioni di ortogonalità, bisognerà che sia data inoltre la involuzione circolare intorno ad un punto coll'assegnarne due coppie; basta perciò supporre dato un quadrato, del quale le direzioni dei lati, e quelle delle diagonali fissano la involuzione circolare sulla retta all'infinito.

Il lettore che volesse veder confermate queste osservazioni generali sopra esempi concreti, riprenda in esame i vari problemi metrici di primo grado che furono trattati, o proposti nel corso; (ad es. n.° 16; n.° 53, es. 4); n.° 89, es. 24) e seg.). Egli comprenderà ora *a priori* la ragione per la quale quei problemi potevano risolversi coi mezzi indicati.

271. Sulle costruzioni eseguibili colla riga e col compasso. — Esaminiamo ora quale contributo porti l'uso del compasso aggiunto alla riga. Il compasso permette di eseguire le seguenti operazioni (da aggiungersi alle 1) e 2), relative alla riga, menzionate nel n.° 269):

3) descrivere il cerchio che ha per centro un punto noto e per raggio la distanza di due punti noti;

4) determinare le intersezioni di un cerchio noto con una retta nota;

5) determinare le intersezioni di due cerchi noti.

Per tradurre analiticamente queste operazioni, riferiamo i punti dati ad un sistema di coordinate, che possiamo supporre ormai sia *cartesiano ortogonale* con un' unica unità di lunghezza, visto che il compasso permette di costruire un angolo retto, e di trasportare un segmento dall'uno all'altro lato dell'angolo. Comprendendo fra i dati anche il punto unità, indichiamo al solito con $1, a, b, c\ldots$ le coordinate dei punti dati, e con K il campo di razionalità che esse determinano.

Ciò posto, il cerchio di cui parla la costruzione 3), applicata ai punti primitivamente dati, ha una equazione del tipo

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

nella quale α, β, r^2, e quindi i coefficienti, sono numeri appartenenti al campo K. Per trovare analiticamente le intersezioni di questo cerchio con una retta congiungente due punti dati (operazione 4)), o con un altro cerchio definito come il primo (operazione 5)), noi dobbiamo eseguire (n.ⁱ 155, 156) la risoluzione di una equazione di secondo grado, i cui coefficienti dipendono razionalmente da quelli delle equazioni delle linee intersecantisi, e quindi appartengono al campo K. Le radici di quella equazione, e, per conseguenza, le coordinate dei punti richiesti, si otterranno adunque eseguendo, oltre ad operazioni razionali, *una* estrazione di radice quadrata sopra un numero del campo K. Queste coordinate appartengono perciò a quel campo di razionalità K', che si ottiene dal campo K, aggiungendovi le radici quadrate di tutti i numeri positivi (se vogliamo limitarci ad enti reali) contenuti in K.

Viceversa, ogni punto le cui coordinate x, y appartengono a K', può ottenersi dai punti dati mediante costruzioni eseguibili con riga e compasso. La ipotesi è infatti che il numero x (od y) possa ottenersi mediante un numero finito di operazioni razionali eseguite sui numeri di K e sulle loro radici quadrate; ma poichè le operazioni razionali si traducono, come già sappiamo, in costruzioni eseguibili colla riga, possiamo supporre che la stessa x sia la radice quadrata di un numero k di K. In tal caso però $x = \sqrt{k \cdot 1}$ è il valore del segmento medio proporzionale fra due segmenti noti, aventi i valori 1 e k; quel segmento è adunque costruibile con riga e compasso, come si era affermato.

Noi finora abbiamo applicato le costruzioni 3), 4) e 5) immediatamente ai punti primitivi, o, ciò che conduce alle stesse conseguenze, a punti le cui coordinate appartengano al campo K. Quelle costruzioni ci hanno fornito nuovi punti, le cui coordinate appartengono ad un campo più esteso K'. Ma sui nuovi punti, che vengono aggiunti ai primitivi, e su questi, possiamo ancora operare mediante le dette costruzioni. Arriveremo così ad ottenere ulteriori punti, le cui coordinate apparterranno a quel campo di razionalità K'' che proviene da K' (coll'aggiunta delle radici quadrate dei numeri di K') come K' proveniva da K. Si può proseguire in tal guisa, ed è chiaro che si giungerà al seguente risultato:

Si parta da un numero finito di punti aventi le coordinate ortogonali 1, a, b, c . . . , *e su questi, e sui punti che via via si ottengono, si operi mediante costruzioni determinate da eseguirsi colla riga e col compasso. Ogni punto a cui si perverrà in tal guisa (dopo un numero finito di costruzioni), avrà coordinate che potranno calcolarsi, partendo dai numeri dati, mediante un numero finito di operazioni razionali e di estrazioni di radici quadrate; e viceversa, ogni punto avente coordinate di tal natura potrà costruirsi mediante la riga ed il compasso.*

Od anche, se chiamiamo *campo euclideo determinato dai numeri dati* 1, a, b, c . . . , l'insieme dei numeri reali che si ottengono da questi, mediante un numero finito di operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate, potremo dire:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè, partendo da certi *punti dati, si possa costruire un nuovo punto mediante riga e compasso, è che le coordinate ortogonali di questo punto appartengano al campo euclideo determinato dalle coordinate dei punti dati.*

Siccome poi la estrazione di radice quadrata è equivalente alla risoluzione di una equazione di secondo grado, un numero generico del campo euclideo sopra nominato può anche definirsi nel modo seguente. Si formi una prima equazione quadratica, i cui coefficienti appartengano al campo di razionalità $K = [1, a, b, c \ldots]$ definito dai numeri dati, e si aggiungano le radici di questa al campo K, ottenendo un campo (generalmente) più ampio K_1; si costruisca poi una seconda equazione quadratica, i cui coefficienti appartengano al campo K_1, e si aggiungano a K_1 le radici di questa equazione, ottenendo un nuovo campo K_2; e così si continui. Tutte le equazioni quadratiche che in tal guisa si possono formare hanno per radici reali numeri del campo euclideo; e viceversa, ogni numero di questo campo è radice di una equazione costruibile nel modo detto.

272. Sui problemi risolubili mediante la riga e il compasso. — Le considerazioni precedenti, quando si ricordino le convenzioni fatte per classificare i problemi geometrici, ci conducono al risultato fondamentale che segue:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un problema geometrico possa risolversi colla riga e col compasso, è che la equazione da cui il problema dipende abbia le radici appartenenti al campo euclideo determinato dai dati; od, in altre parole, *che quella equazione possa risolversi mediante un numero finito di operazioni razionali e di estrazioni di radici quadrate eseguite partendo dai numeri dati.*

Potremo dire ancora:

Sono risolubili colla riga e col compasso tutti i problemi di primo e di secondo grado; e, fra i problemi (algebrici) di grado superiore, quelli soltanto che conducono ad equazioni, la cui risoluzione può farsi dipendere dalla risoluzione di un numero finito di equazioni quadratiche, formate nel modo sopra indicato. Questi ultimi problemi si risolvono mediante la successiva risoluzione di più problemi di secondo grado.

In base a questo teorema, la questione geometrica di decidere se un determinato problema possa risolversi colla riga e col compasso, si riduce (quando si riesca a scrivere la equazione del problema) alla questione algebrica di decidere se una data equazione possa risolversi mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate. Ora l'algebra possiede oggi metodi generali per affrontare questioni siffatte. Essa quindi ha potuto, nel secolo XIX, portare una risposta definitiva a domande che i geometri greci avevano posto, e che per oltre venti secoli erano rimaste insolute.

Non possiamo qui trattenerci sulla teoria algebrica delle equazioni risolubili mediante radicali quadratici. Ci limitiamo ad enunciare un teorema fondamentale in quella teoria, rimandando, per la dimostrazione e per altre nozioni, agli autori che si occuparono in particolare di questo argomento (1):

Condizione necessaria, non sufficiente, affinchè una equazione algebrica irriducibile (in un campo di razionalità cui appartengono i suoi coefficienti) possa risolversi mediante un numero finito di operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate, è che il grado della equazione sia una potenza di 2.

273. Esempi di problemi di secondo grado, o di grado superiore, risolubili con mezzi elementari. — EUCLIDE ha insegnato a risolvere colla riga e col compasso i problemi di secondo grado (2); tali sono, ad es., la costruzione di un segmento medio proporzionale fra due segmenti dati, la bisezione di un dato angolo, la divisione di un segmento in media ed estrema ragione, ecc.

Molti problemi grafici di secondo grado si incontrano, come vedemmo, nella Geometria proiettiva (n.° 90 e seg.); fondamentale, tra questi, la determinazione dei punti uniti in una proiettività od involuzione tra punteggiate sovrapposte, al quale pro-

---

(1) PETERSEN, *Teoria delle equazioni* (trad. ROZZOLINO e SFORZA); KLEIN, *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare* (trad. GIUDICE) pp. 5-11 (Torino, 1896); ENRIQUES, *Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici*... nel volume citato « Questioni riguardanti la Geometria elementare » pp. 357-368.

(2) Tale risoluzione era già nota alla Scuola Pitagorica del V° secolo av. Cr.

blema mostreremo tra poco potersi ricondurre ogni altro problema di secondo grado.

Fra i problemi di grado superiore al secondo, che possono risolversi tuttavia con riga a compasso, citiamo anzitutto la costruzione di un cerchio che tocchi tre rette date, lati di un triangolo, problema di quarto grado, la cui risoluzione dipende dalla bisezione di due angoli del triangolo, cioè da due problemi di secondo grado. Sotto l'aspetto proiettivo quel problema rientra nel seguente, che abbiamo imparato a risolvere (n.° 231, es. 9), 10)): costruire una conica di cui siano date tre tangenti e due punti, o tre punti e due tangenti; qui della curva si domandano tali ulteriori elementi, che si possa applicare una delle note costruzioni lineari per punti o per tangenti.

Pure di quarto grado, ma risolubile con mezzi elementari, è il problema di costruire le quattro tangenti comuni a due cerchi, o, in generale, a due coniche di cui si conoscano già due intersezioni (n.° 231, es. 30)); ed il problema duale di costruire le intersezioni di due coniche conoscendo due tangenti comuni (o il triangolo autopolare comune, ad es. di due coniche aventi un fuoco comune (n.° 262, es. 9)).

Citiamo finalmente un celebre problema di ottavo grado, che Apollonio ha insegnato a risolvere coi mezzi euclidei: la determinazione di un cerchio tangente a tre cerchi assegnati. Delle numerose risoluzioni proposte, una, dovuta a Newton, trovasi accennata nell'es. 10) del n.° 262. Quanto al problema dei poligoni regolari, si veda il n.° 277.

274. Sopra alcuni strumenti atti a sostituire il compasso nelle costruzioni elementari. — La ricerca generale che precede sui problemi risolubili mediante riga e compasso, può estendersi in due direzioni. Si può infatti domandare se esistano strumenti atti a sostituire, in parte o interamente, la riga o il compasso nella risoluzione dei detti problemi. Oppure si può esaminare quali strumenti convenga aggiungere alla riga ed al compasso per risolvere nuove classi di problemi geometrici.

Per quanto riguarda la prima domanda, ricordiamo anzitutto che l'operazione essenziale risoluta dal compasso (quando sia associato alla riga) è la seguente: noto un segmento, la cui lunghezza sia a rispetto ad una data unità di lunghezza, costruire un nuovo segmento la cui lunghezza sia $\sqrt{a}$. Ogni altro strumento che permetta di eseguire la stessa costruzione (qualunque sia $a > 0$), può esser sostituito al compasso.

Notiamo, in secondo luogo, che quella costruzione può compiersi mediante uno strumento il quale permetta, dati i segmenti 1 e $k < 1$, di costruire il segmento di valore $\sqrt{1-k^2}$. Sia infatti a la lunghezza di un dato segmento. Noi possiamo costruire colla sola riga (n.° 269) un segmento avente la lunghezza

$$k = \frac{1-a}{1+a},$$

poi, collo strumento in discorso, il segmento

$$b = \sqrt{1-k^2} = \frac{2}{1+a}\sqrt{a},$$

e finalmente il segmento

$$\sqrt{a} = \frac{1+a}{2}\, b$$

Applichiamo queste considerazioni a due esempi:

I. Sia tracciato (con uno strumento qualsiasi) un *cerchio* in una determinata posizione nel piano; e ne sia noto il centro O. È chiaro intanto che si potranno condurre, colla sola riga, due rette perpendicolari x, y per 0, giacchè basterà iscrivere nel cerchio un rettangolo, di cui due diametri arbitrari possono esser assunti come diagonali, e costruir poi le mediane del rettangolo. Assumendo il raggio del cerchio come unità, abbiamo un sistema di coordinate ortogonali a cui riferiremo i dati. Il cerchio avrà l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad \text{ossia} \qquad y = \pm\sqrt{1-x^2};$$

ora questa ci mostra che, noto il segmento $x < 1$, si può costruire il segmento $\sqrt{1-x^2}$, ordinata del punto che ha l'ascissa x. Ricaviamo, in base alla considerazione precedente, il teorema di Poncelet (1822) e Steiner (1833): *ogni problema risolubile colla riga e col compasso, può pure risolversi colla sola riga, purchè sul foglio del disegno sia segnato un cerchio fisso.* Il centro del cerchio si adopera soltanto nei problemi d'indole metrica (1).

(1) Per la esecuzione effettiva di siffatte costruzioni si veda l'opuscolo di Steiner, *Die Geometrischen Constructionen*..., riprodotto in Steiner 's *Gesammelte Werke*, Vol. I, pag. 461; od anche l'articolo di Giacomini, *Sulla risoluzione dei problemi geometrici*..., nel citato volume di Enriques, pag. 279.

II. Sia data *una riga a due orli paralleli*, vale a dire una riga ordinaria, di cui si adoperino insieme i due orli, in guisa da poter condurre due rette parallele distanti quanto la larghezza (od altezza) della riga, che assumeremo come unità lineare.

Osserviamo subito che questa riga può adoperarsi in due modi diversi. Un primo modo consiste nel far combaciare un orlo di essa con una retta data, e costruire le parallele a questa, distanti da essa dell'unità di lunghezza. Così procedendo, possiamo, dati i due lati di un angolo, costruire un parallelogramma equilatero avente, come uno degli angoli, l'angolo dato; possiamo adunque bisecare l'angolo, ottenendo due rette perpendicolari x, y, sulle quali potremo costruire un quadrato avente per lato l'unità lineare. Possiamo ancora, servendoci di parallele alle nominate bisettrici, costruire sopra un lato dell'angolo un segmento, che sia uguale ad un segmento dato sopra l'altro lato. Ora i due problemi di « bisecare un angolo dato », e « trasportare un dato segmento da una retta ad un'altra » sono di secondo grado; ma non si deve credere che ogni problema di secondo grado possa ricondursi a questi. Ciò fu dimostrato (1) a proposito di uno strumento, detto *trasportatore di segmenti*, il quale permette appunto di risolvere il secondo (e quindi il primo) problema. A questo strumento è equivalente la riga a due orli adoperata nel modo ora esposto; essa adunque non può sostituire interamente il compasso, finchè si limiti la sua azione alle operazioni indicate.

Ma vi è un secondo modo di adoperare la riga a due orli, che consiste nell'adagiar la riga in modo che i suoi due orli passino rispettivamente per due punti, la cui distanza superi od uguagli l'altezza della riga, tracciando le rette così determinate. In tal guisa si riesce a risolvere *ogni* problema che sia risolubile colla riga e col compasso.

Per veder ciò, partiamo da un segmento $OA = p > 1$, posto sopra l'asse delle x, segmento che riguardiamo come noto.

---

(1) Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Cap. VII (Leipzig, 1899); memoria tradotta in francese nel periodico « Annales de l'École Normale Supérieure » (1900). Un cenno sul detto strumento si trova pure nel mio articolo citato, inserito nella Raccolta di Enriques pp. 343-348.

Collocata la riga in guisa che un orlo passi per O, e l'altro per A, tracciamo, seguendo quest'ultimo orlo, la retta AB, che incontrerà in B l'asse y; sia $OB = q$ il segmento che così si costruisce. Per calcolare q, notiamo che la retta indefinita AB ha l'equazione

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

e dista dell'unità dall'origine O; ricaviamo di qua la relazione

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}}} = 1,$$

donde (in valore assoluto)

$$\frac{1}{q} = \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}.$$

Questa ci mostra, che, data la riga a due orli e noto

$$k = \frac{1}{p} < 1,$$

si può costruire l'espressione $\sqrt{1 - k^2}$. E tanto a noi basta per affermare:

Ogni problema risolubile colla riga e col compasso, può anche risolversi usando la sola riga a due orli paralleli (¹).

I risultati precedenti si confermano per via sintetica, purchè si ricordi che il problema di secondo grado consistente nella determinazione dei punti uniti di una proiettività od involuzione fra punteggiate sovrapposte, può risolversi colla sola riga quando sia noto un cerchio (n.ⁱ 77, 87), o colla sola riga a due orli (n.° 78, es. 10), 11)); e si noti inoltre che ogni altro problema di secondo grado può ridursi a quello ora nominato. Quest'ultima affermazione si giustifica osservando che la risoluzione di un qualsiasi problema di secondo grado, vale a dire la determinazione grafica delle radici di una equazione

$$x^2 + px + q = 0,$$

(¹) L'applicazione di questo strumento, in luogo del compasso, fu indicata da ADLER (nei «Sitzungsberichte» dell'Accad. di Vienna, 1890). Si veda in proposito l'articolo di GIACOMINI, *Sulla risoluzione dei problemi geometrici*..., nella raccolta citata di ENRIQUES, pp. 304-309.

dove p, q possono riguardarsi come coordinate proiettive (od anche ascisse) di punti *noti* sopra una retta, su cui sono segnati i punti fondamentali ($x = \pm \infty$, 0, 1), equivale alla costruzione dei punti doppi della involuzione

$$xx' + \frac{p}{2}(x + x') + q = 0,$$

la quale è nota, perchè di essa si possono costruire linearmente quante coppie si vogliano (ad es. la coppia $x = 0$, $x' = -\frac{2q}{p}$, e la coppia $x = \pm \infty$, $x' = -\frac{p}{2}$).

III. Finalmente ricordiamo il risultato ottenuto del MASCHERONI (*Geometria del compasso*, 1797; ediz. francesi del 1798 e 1828), secondo il quale *si può risolvere col solo compasso ogni problema risolubile con riga e compasso* (quando, s'intende, l'elemento richiesto sia un punto od un cerchio). Non ci fermiamo ad esporre qui la dimostrazione di questo fatto, giacchè, essendo fondata sopra concetti diversi da quelli contenuti nelle pagine precedenti, ci porterebbe troppo lontano dai nostri studi [1].

275. Risoluzione dei problemi di 3° e 4° grado mediante una conica fissa. — Veniamo ora alla seconda questione proposta al principio del n°. 274: quali strumenti convenga aggiungere alla riga ed al compasso per la risoluzione dei problemi di grado superiore al secondo. Ci limiteremo a dimostrare il teorema seguente, dovuto ai due fondatori della Geometria analitica FERMAT e DESCARTES (1637):

Ogni problema di 3° o 4° grado può risolversi colla riga e col compasso, purchè sia tracciata inoltre, sul foglio del disegno, una curva del secondo ordine.

Supponiamo ad es. che questa curva sia la parabola

$$x^2 = y, \tag{1}$$

riferita ad assi ortogonali. Osserviamo anzitutto che il problema di determinarne le intersezioni con un dato cerchio

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \tag{2}$$

viene a dipendere dall'equazione di quarto grado

$$x^4 + (1 - 2\beta)x^2 - 2\alpha x + \gamma = 0, \tag{3}$$

---

[1] Il lettore potrà consultare, oltre all'opera originale del MASCHERONI, l'articolo di DANIELE, *Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso*, nella Raccolta citata di ENRIQUES, pag. 247.

che si ottiene eliminando y fra le (1) e (2); le radici reali della (3) possono dunque esser costruite *graficamente*, quando siano *tracciate* la parabola e il cerchio.

Ciò premesso, supponiamo di dover risolvere un problema di quarto grado, il quale dipenda dall'equazione

$$(4) \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

dove a, b, c, d sono quantità appartenenti al campo di razionalità definito dai dati (sono ad es. lunghezze di segmenti noti sull'asse x). Possiamo intanto, senza introdurre restrizioni, limitarci al caso che sia $a = 0$; infatti, nella ipotesi opposta, si assuma come incognita la quantità x_1, legata ad x dalla relazione $x = x_1 - \frac{a}{4}$; fatta la sostituzione nella (4), si riconosce che la nuova equazione in x_1, pur essendo di quarto grado, manca del termine a terzo grado, come desideriamo.

Sia adunque

$$(4') \qquad x^4 + bx^2 + cx + d = 0$$

l'equazione del nostro problema. Paragonandola colla (3), vediamo che, quando si siano determinate α, β, γ in guisa da avere

$$1 - 2\beta = b, \qquad -2\alpha = c, \qquad \gamma = d,$$

ossia

$$(5) \qquad \beta = \frac{1-b}{2}, \qquad \alpha = -\frac{c}{2}, \qquad \gamma = d,$$

allora le radici richieste della (4') sono le ascisse delle intersezioni della parabola (1) col cerchio (2). E poichè la costruzione di questo cerchio (di centro (α, β) e raggio $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$) può farsi con mezzi elementari, in virtù delle (5), concludiamo che la risoluzione di ogni problema di quarto grado si può ricondurre alla determinazione delle intersezioni di una parabola fissa con un cerchio costruibile elementarmente.

La stessa conclusione vale, *a fortiori*, per i problemi di terzo grado, giacchè la equazione cubica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ha le tre radici comuni colla equazione di quarto grado

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0,$$

di cui la quarta radice è nulla. Vorrà dire che il cerchio da adoperarsi segherà la parabola (1) in quattro punti, di cui uno sarà noto a priori (cadrebbe nell'origine se fosse $a = 0$, perchè allora l'ultima delle (5) darebbe $\gamma = d = 0$), e gli altri tre condurranno alle soluzioni del problema.

Lasciamo al lettore l'applicazione di questo metodo alla risoluzione dei due problemi di terzo grado di cui ora parleremo.

276. I problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo. — Portiamo qualche esempio di problemi di grado superiore al secondo.

Due problemi di terzo grado sono celebri per aver fermato l'attenzione dei geometri fin dai tempi più remoti; (per il primo le notizie risalgono al V secolo av. Cr.).

I. Il problema della *duplicazione del cubo* (o *problema di* DELO) consiste nella ricerca di un segmento, il cui cubo sia doppio del cubo costruito sopra un segmento dato. Assunto quest'ultimo come unità lineare, il problema dipende dall'equazione

$$x^3 - 2 = 0,$$

mentre il campo di razionalità definito dai dati è il campo [1] costituito da tutti i numeri razionali. Quella equazione è irriducibile; infatti, se il primo membro fosse il prodotto di due fattori $(x - \alpha)(x^2 + \beta x + \gamma)$ a coefficienti razionali, l'equazione stessa avrebbe una radice razionale α, mentre nessun numero razionale ha per cubo il numero 2. Ricordando il teorema finale del n.° 272, possiamo dunque concludere che *il problema della duplicazione del cubo non è risolubile colla riga e col compasso.*

Eccone una semplice risoluzione, in cui si usa una curva del terzo ordine, la *cissoide* (n.° 163, 1)). Partendo da un cerchio, il cui diametro si assume come unità di lunghezza, si descriva la cissoide (v. la figura di pag. 267), che ha l'equazione

$$(x^2 + y^2)x - y^2 = 0.$$

Preso poi sull'asintoto un segmento arbitrario $AN = m$, si conduca la retta ON, $y = mx$, la quale incontra la curva, oltre che in O, nel punto $P\left(\frac{m^2}{1+m^2}, \frac{m^3}{1+m^2}\right)$. Si tiri finalmente AP, che segherà l' asse y in un punto N' di ordinata $ON' = m^3$, come il lettore verificherà facilmente. Eseguendo la costruzione nell'ordine inverso, si può dunque, quando sia dato un segmento $ON' = m'$, costruire un segmento $ON = \sqrt[3]{m'}$; e se $m' = 2$, si viene a risolvere il problema di DELO.

II. Il problema della *trisezione dell'angolo* consiste nel dividere in tre parti uguali un angolo dato φ. Si assumano il vertice ed un lato come origine ed asse x di un sistema cartesiano ortogonale; l'altro lato sarà noto, quando si conosca ad es. la ordinata $a = \mathrm{tg}\,\varphi$ del punto in cui esso sega la retta $x = 1$. Il campo di razionalità definito dai dati è ora $K = [1, a]$. Come incognita assumiamo

$$y = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{3},$$

ordinata del punto in cui una retta trisettrice sega la retta $x = 1$. Ricordando la formola trigonometrica

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha},$$

e ponendo $\alpha = \frac{\varphi}{3}$, risulta subito che y è radice della equazione cubica

(1) $$y^3 - 3ay^2 - 3y + a = 0.$$

Se noi dimostriamo che questa equazione è irriducibile nel campo K, in corrispondenza ad infiniti valori di a, risulterà (in virtù del teorema algebrico, n.° 272, sopra citato) che la trisezione di un angolo dato è generalmente ineseguibile colla riga e col compasso. Premesso che la riducibilità della equazione (1) porterebbe (come nel problema precedente) l'esistenza di una radice appartenente al campo K, supponiamo ad es. che a sia un numero intero. In tal caso K è l'insieme dei numeri razionali, e quella radice dovrebbe esser razionale, anzi (per un noto teorema sulle equazioni a coefficienti interi) dovrebbe esser un numero intero divisore di a. Ora che un divisore di a non soddisfi all'equazione (1), si verifica subito per $a = 2, 3 \ldots$; e, con un facile calcolo, si verificherebbe lo stesso fatto per *qualunque* valore intero di a, esclusi i tre valori $a = 1, 0, -1$ (ai quali corrispondono le radici razionali $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$). Concludiamo che *per infiniti valori dell'angolo dato la trisezione è inseguibile colla riga e col compasso* [1]. Esistono però

---

[1] Per una dimostrazione più completa si veda il volume citato del Capelli, pag. 648. Si consultino inoltre l'opuscolo citato del Klein, pp. 11-14, e l'articolo di Conti, *Problemi di* 3° *grado* . . . , nel volume citato di Enriques, pag. 415, dove si troveranno altre costruzioni o notizie sui due problemi qui nominati.

angoli particolari che possono esser trisecati coi detti strumenti; tali sono ad es. l'angolo retto ($a = \pm \infty$), l'angolo semiretto ($a = 1$), ecc.

La trisezione di un angolo qualsiasi può ottenersi in modo elegante, ricorrendo ad una curva del 4° ordine, la *concoide di Nicomede* (n.° 163, 2)). Detto $A\widehat{O}M$ l'angolo in questione, da un punto M di un lato si conduca la perpendicolare MA sull'altro lato, e si descriva poi la concoide che ha il vertice O come polo, la retta MA come base, e il doppio del segmento OM come intervallo; di questa concoide basta il ramo che è separato da O mediante la base (cfr. la figura di pag. 269). Condotta per M la parallela ad OA fino ad incontrare in N il detto ramo di curva, si congiunga N con O; dico che l'ultima retta forma con OA un angolo $\varphi = \frac{1}{3} A\widehat{O}M$. Infatti, se indichiamo con S il punto in cui ON sega MA, e con T il punto medio di SN, per una nota proprietà del triangolo rettangolo SMN, si ha $MT = \frac{1}{2} SN = OM$ (metà dell'*intervallo*), quindi $T\widehat{O}M = M\widehat{T}S = 2M\widehat{N}O = 2N\widehat{O}A$, che giustifica la nostra affermazione.

277. Il problema dei poligoni regolari.

I. *La divisione di un dato angolo φ in un numero intero* n *di parti uguali* dipende da una equazione di grado n, quando si consideri come quantità data $\operatorname{tg}\varphi$ e come incognita $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}$. Quella equazione è irriducibile per un valore generico di φ; il problema non può dunque risolversi in generale mediante la riga e il compasso, quando n non sia una potenza di 2.

Ma se $n = 2^k$ (k intero positivo), il problema si risolve coi detti strumenti, qualunque sia φ; giacchè si riduce a k bisezioni successive dell'angolo φ e degli angoli che via via si ottengono. E la risoluzione della equazione di grado 2^k si eseguisce risolvendo k successive equazioni quadratiche.

II. Un esame speciale esigono valori particolari dell'angolo φ. Il caso più interessante si presenta quando $\varphi = 2\pi$, giacchè ad esso corrisponde la *iscrizione di un n.gono regolare in un cerchio*. Qui conviene assumere come incognita il numero complesso

$$z = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n},$$

noto il quale, è pur noto il lato dell'n. gono iscritto nel cerchio di raggio 1. Ora z è radice della equazione binomia

$$z^n - 1 = 0.$$

Questa però è riducibile nel campo $K = [1]$, giacchè

$$z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1).$$

Fatta astrazione dalla radice $z = 1$, priva di interesse, rimane l'equazione

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = 0,$$

la quale, nella ipotesi che n sia un numero primo, GAUSS dimostrò essere irriducibile ([1]). Dunque *la iscrizione di un n.gono regolare in un cerchio, per* n *numero primo, è ineseguibile colla riga e col compasso, a meno che* n — 1 *non sia una potenza di* 2. Di fronte a questo risultato negativo, è notevolissimo il risultato positivo pure dovuto a GAUSS (1796) ([2]):

Si può iscrivere in un cerchio, colla riga e col compasso, un n. gono regolare, ogniqualvolta n *sia un numero primo della forma* n $= 2^k + 1$ (k essendo un numero intero positivo). I più piccoli valori di n che soddisfano a queste condizioni sono

$$n = 3,\ 5,\ 17,\ 257,$$

(corrispondenti a $k = 1, 2, 4, 8$); dei relativi poligoni regolari solo i primi due erano noti agli antichi; dei due successivi furono indicate costruzioni elementari, fondate sulla discussione algebrica della detta equazione di grado $n - 1$ ([3]).

Volendo considerare anche i valori composti di n, si trova il teorema seguente:

Affinchè si possa iscrivere in un cerchio, colla riga e col compasso, un n.gono regolare, è necessario e sufficiente che i fattori primi dispari componenti il numero n *siano tutti della forma* $2^k + 1$, *e tutti compariscano alla prima potenza*; (il fattore 2 può comparire a potenze qualsiasi).

([1]) Si troveranno semplici dimostrazioni nell'opuscolo del KLEIN, pag. 18, nell'articolo citato di ENRIQUES, *Sulle equazioni algebriche*..., pag. 373, nel volume del CAPELLI, pag. 638.

([2]) Per la dimostrazione rinviamo il lettore agli autori sopra citati.

([3]) Si vedano, per $n = 17$, tre costruzioni nell'articolo di DANIELE, *Sulle costruzioni dell'ettadecagono regolare*, inserito nel Volume citato di ENRIQUES, pag. 397.

278. Il problema della rettificazione del cerchio. — Le considerazioni che precedono si riferiscono a problemi algebrici. Per i problemi trascendenti si presentano speciali difficoltà. Può accadere, ad es., che non si riesca a scrivere la equazione da cui dipende il problema, e si debba limitarsi a dimostrare che quella equazione *non* può essere algebrica; e può accadere, d'altra parte, che tra le radici di una equazione trascendente si trovino numeri, i quali soddisfino pure ad equazioni algebriche, nel qual caso sarà da decidere se fra questi numeri siano comprese, o no, le soluzioni del problema.

Accenniamo qui ad un problema notissimo, che si riconobbe esser trascendente: quello della *rettificazione* (*o quadratura*) *di un cerchio.* Dato il raggio del cerchio, che si potrà assumere come unità di lunghezza, si domanda di costruire un segmento, il quale sia lungo quanto la circonferenza del cerchio, cioè 2π (od un quadrato equivalente al cerchio, cioè di area π). Se il problema fosse algebrico, visto che il campo di razionalità definito dall'unico dato (unità di lunghezza) è il campo di tutti i numeri razionali, esisterebbe una equazione algebrica a coefficienti razionali avente, fra le sue radici, π. Ora, in epoca recente (1882), il Lindemann riuscì a dimostrare che una siffatta equazione non esiste, che π è un numero *trascendente* (1). Di qua seguì senz'altro l'impossibilità di rettificare o quadrare un cerchio colla riga e col compasso, o con qualsiasi altro strumento il quale permetta di tracciare soltanto curve algebriche.

(1) Di questo teorema furono date varie dimostrazioni, tutte però troppo complicate per esser qui riprodotte. Il lettore potrà consultare, su questo argomento, l'opuscolo citato del Klein, pag. 57; o l'articolo di Calò, *Sui problemi trascendenti...*, nella citata raccolta di Enriques, pag. 471.

II.

Raccolta di alcune formole di Geometria analitica piana.

(Le coordinate, di cui si fa uso, sono cartesiane, anzi ortogonali quando il numero d'ordine di una formola è seguito dalla lettera *o*. Con P, P', ... si indicano punti di coordinate (x, y), (x', y'), ...; con r, r', ... rette di equazioni $ax + by + c = 0$, $a'x + \ldots = 0, \ldots$).

Punti e rette.

1) Varie forme dell'equazione di una retta r:

$$(1) \qquad ax + by + c = 0;$$

$$(1') \qquad y = mx + p, \quad \text{dove } (1', o) \quad m = \operatorname{tg} xr;$$

$$(1'') \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

dove p, q sono i segmenti staccati dalla retta sugli assi a partire dall'origine.

2) Equazione di una retta uscente dal punto P':

$$(2) \qquad a(x - x') + b(y - y') = 0.$$

3) Equazione della retta $P' P''$:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ oppure } \frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''}.$$

4) Intersezione di due rette r, r':

$$(4) \qquad x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

5) Condizione di parallelismo delle rette r, r':

$$(5) \qquad a : a' = b : b'.$$

6) Retta generica del fascio rr':

(6) $$ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0.$$

7) Condizione perchè tre rette r, r', r'' passino per uno stesso punto:

(7) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c \\ a'' & b'' & c \end{vmatrix} = 0.$$

8) Distanza di due punti P, P':

(8, o) $$PP' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

9) Distanza del punto P' dalla retta r:

(9, o) $$P'r = \frac{ax' + by' + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

10) Angolo di due rette r, r':

(10, o) $$\begin{cases} \cos rr' = \dfrac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}, \\ \operatorname{sen} rr' = \dfrac{ab' - a'b}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}. \end{cases}$$

Se le rette r, r' sono date mediante equazioni del tipo $y = mx + p$, $y = m'x + p'$, si ha pure

(10′, o) $$\operatorname{tg} rr' = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

11) Condizione di perpendicolarità delle rette r, r':

(11, o) $aa' + bb' = 0$, oppure (11′, o) $mm' + 1 = 0$.

12) Equazione della perpendicolare ad r condotta per P':

(12, o) $$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b},$$

oppure

(12′, o) $$y - y' = -\frac{1}{m}(x - x').$$

13) Area del triangolo $PP'P''$:

(13, o) $$PP'P'' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}.$$

Trasformazione delle coordinate.

14) Se i nuovi assi X, Y sono paralleli agli antichi x, y, ed escono dal punto (a, b):

(14) $$x = a + X, \quad y = b + Y.$$

15) Se i due sistemi, hanno la stessa origine, ed è $\widehat{xy} = \widehat{XY} = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \widehat{xX}$:

(15, o) $$x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha, \quad y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha.$$

16) Formole di passaggio dal sistema polare (ϱ, φ) al sistema cartesiano ortogonale (x, y), nella ipotesi che il polo coincida coll'origine e l'asse polare coll'asse x:

(16, o) $$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\operatorname{sen}\varphi,$$
$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Curve di secondo ordine.

17) Equazione del cerchio di centro (α, β) e raggio r:

(17, o) $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

oppure

(17′, o) $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

dove $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\frac{b}{2}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$.

18) Equazione generale di una conica:

(18) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$
$$(a_{ik} = a_{ki}).$$

19) Condizioni perchè la conica (18) sia una ellisse, parabola od iperbole, rispettivamente:

(19) $$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 >, =, < 0.$$

20) Condizione perchè la conica (18) si spezzi in due rette:

(20) $$(A =) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

21) Condizioni perchè la conica (18) sia un cerchio:

(21, o) $$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0.$$

22) Condizione perchè la conica (18) sia una iperbole equilatera:

(22, o) $$a_{11} + a_{22} = 0.$$

23) Equazione della tangente alla conica (18) nel punto (x', y'), o della polare del detto punto:

(23) $$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0.$$

24) Diametro della conica (18) coniugato colla retta $y = kx$:

(24) $$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

25) Coordinate del centro della conica (18):

(25) $$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}},$$

dove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik} entro al discriminante (20).

26) Equazione complessiva degli asintoti della conica a centro (18):

(26) $$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0.$$

27) Equazione complessiva degli assi della conica a centro (18):

(27, o) $$a_{12}(x - x_0)^2 - (a_{11} - a_{22})(x - x_0)(y - y_0) - a_{12}(y - y_0)^2 = 0.$$

28) Equazione dell'asse della conica (18), se è una parabola:

(28, o) $$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0.$$

29) Invarianti della conica (18) relativi ad una trasformazione ortogonale di coordinate:

(29, o) $$a_{11} + a_{22}, \quad (A_{33} =)a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A.$$

30) Equazioni della ellisse reale (segno superiore), od iperbole (segno inferiore), riferite ai relativi assi (o a due diametri coniugati, se $\widehat{xy}$ è qualsiasi):

(30, o) $$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dove a e b sono i semiassi, il primo trasverso e il secondo non trasverso nella iperbole.

31) Tangente nel punto (x', y') alla conica (30, o):

(31, o) $$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

32) Asintoti della iperbole (30, o)

(32, o) $$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

33) Distanza focale per la ellisse od iperbole (30, o):

(33, o) $$c = \sqrt{a^2 \mp b^2},$$

supposto, per la ellisse, $a \geqq b$.

34) Eccentricità per la ellisse od iperbole (30, o):

(34, o) $$e = \frac{c}{a}.$$

35) Equazione di una iperbole riferita agli asintoti:

(35) $$xy = \text{cost.}$$

36) Equazione di una parabola riferita all'asse e alla tangente nel vertice (o ad un diametro e alla tangente nell'estremo di esso, se $\widehat{xy}$ è qualsiasi):

(36, o) $$y^2 = 2px \qquad (p, \text{ parametro})$$

37) Distanza dal vertice al fuoco, ed eccentricità nella parabola (36, o):

(37, o) $$\frac{p}{2}, \quad e = 1.$$

38) Equazione polare di una ellisse, parabola od iperbole, scegliendo come polo il fuoco e come asse polare l'asse focale diretto dal fuoco verso la corrispondente direttrice:

(38) $$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

dove e è la eccentricità (34, o), (37, o), e p, che per la parabola entra nell'equazione (36, o), vale per la ellisse od iperbole (30, o) $p = \frac{b^2}{a}$.

G. CASTELNUOVO

Professore all' Università di Roma

LEZIONI

DI

GEOMETRIA

ANALITICA E PROIETTIVA

Volume II

(Geometria analitica dello spazio — Superficie di secondo ordine).

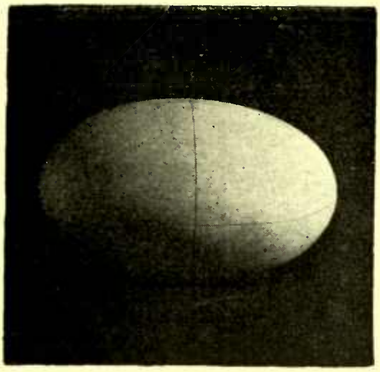
ROMA-MILANO

SOCIETÀ EDITRICE DANTE ALIGHIERI

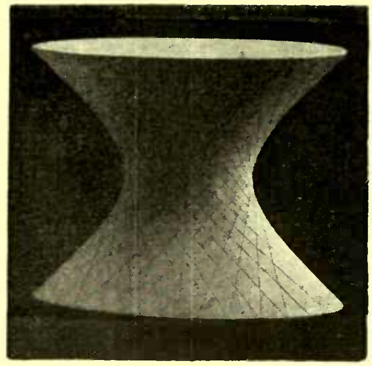
DI

ALBRIGHI, SEGATI & C.

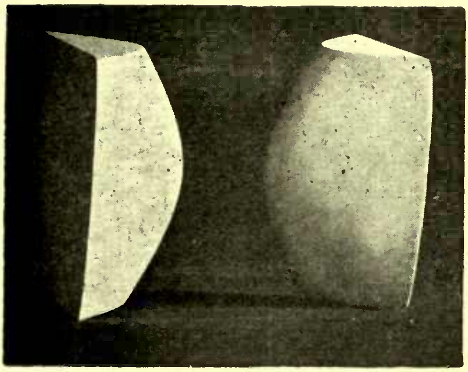
1905



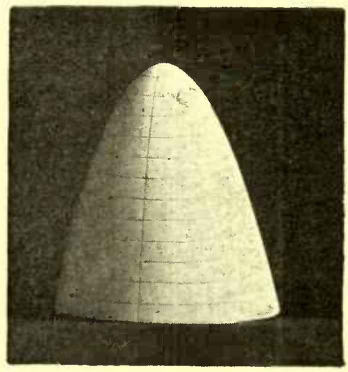
1



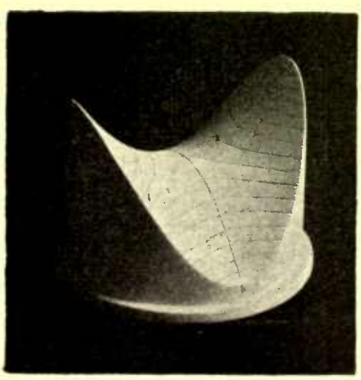
2



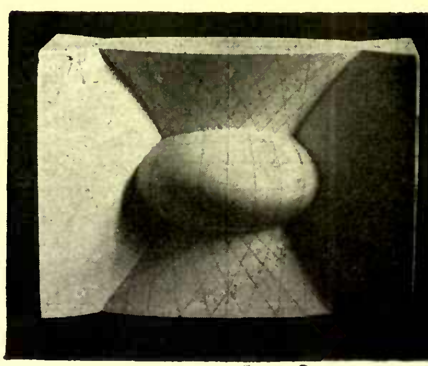
3



4



5



6

Parte Quarta.

Geometria analitica dello spazio.

Capitolo I.

Relazioni di posizione tra punti, rette e piani.

279. Sistema cartesiano di coordinate. — Il procedimento seguito per fissare, mediante coordinate cartesiane, la posizione di un punto in un piano (n.° 97) si estende subito allo spazio.

Per un punto proprio O (*origine*) conduciamo tre rette x, y, z, non giacenti in un piano, che diremo *assi coordinati* (rispettivamente *asse* x, y, z); i piani, che esse determinano a due a due, saranno i *piani coordinati* xy, xz, yz. Fissiamo ad arbitrio sui tre assi i versi positivi, ed assumiamo un segmento come unità di misura (1).

Conduciamo poi per un punto qualunque P dello spazio tre piani paralleli rispettivamente ai piani yz, zx, xy; quei piani segheranno rispettivamente gli assi x, y, z in tre punti

---

(1) Sebbene i versi positivi sui tre assi possano scegliersi ad arbitrio, tuttavia la maggior parte degli autori adotta la scelta indicata nella figura. In parole: un osservatore situato lungo l'asse z coi piedi in O ed il capo dalla banda positiva, il quale guardi la semiretta positiva x, deve avere alla sua destra la semiretta positiva y. Il verso (da sinistra a destra), in cui l'osservatore vedrebbe ruotare la semiretta positiva x, se questa si portasse a coincidere colla semiretta positiva y, descrivendo un angolo inferiore a π, si definisce come *verso positivo delle rotazioni* intorno alla retta orientata z. E questa definizione può estendersi alla rotazione intorno ad una qualsiasi retta orientata dello spazio, purchè si faccia muovere con continuità il triedro degli assi, finchè l'asse z venga a coincidere colla nuova retta.

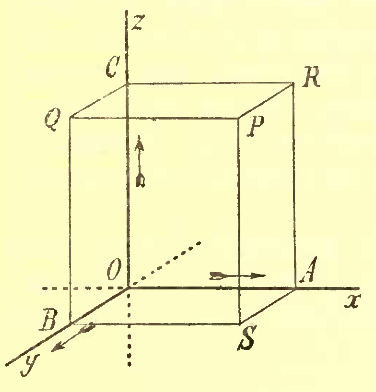
Quanto all'unità di misura, si potrebbero, a dir vero, nei problemi di questo Cap. I, assumere senza inconvenienti tre unità diverse per misurare i segmenti paralleli ad x, y, z rispettivamente. Ma la maggior generalità così ottenuta non avrebbe alcun vantaggio pratico, e perciò vi si rinuncia.

A, B, C, sicchè rimarranno individuati, in valore e segno, tre numeri $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$.

Viceversa, dati i tre numeri a, b, c, restano individuati i punti A, B, C, e quindi il punto P, come intersezione di tre piani paralleli ai piani coordinati.

I tre numeri a, b, c si chiamano *coordinate cartesiane* del punto P (rispettivamente *prima coordinata* od x, *seconda coordinata* od y, *terza coordinata* o z di P); e si scrive: $P(a, b, c)$.

I tre piani passanti per P, e paralleli ai piani coordinati, racchiudono con questi un parallelepipedo, di cui O e P sono due vertici opposti; OA, OB, OC sono i lati uscenti da O, e PQ, PR, PS, rispettivamente ad essi uguali e paralleli, sono i lati uscenti da P. Ne viene che, volendo costruire il punto P di coordinate a, b, c, si può determinare su x il punto A tale che $OA = a$, condurre per A la parallela ad y, e prendere su questa il segmento $AS = b$ (diretto come il semiasse positivo o negativo y, secondo che b è positivo o negativo), e finalmente condurre per S la parallela a z, sulla quale si prenderà $SP = c$ (diretto come il semiasse positivo z, se $c > 0$, ecc.). Così si viene a costruire una spezzata, che comincia nell'origine e termina in P, ed i cui lati successivi (tenuto conto delle loro direzioni) hanno per misura le coordinate di P. Altre spezzate della stessa natura si trovano, considerando i tre assi in ordine diverso.



Gli otto vertici del parallelepipedo prima nominato hanno evidentemente le coordinate

$$P(a, b, c), \quad Q(0, b, c), \quad R(a, 0, c), \quad S(a, b, 0),$$
$$A(a, 0, 0), \quad B(0, b, 0), \quad C(0, 0, c), \quad O(0, 0, 0).$$

In generale, ogni punto del piano yz ha la x nulla, ogni punto del piano zx ha la y nulla, ed ogni punto del piano xy ha la z nulla. Per un punto dell'asse x sono nulle la seconda e la terza coordinata ($y = z = 0$), ecc.; l'origine ha nulle le tre coordinate.

I tre piani. coordinati dividono lo spazio in otto regioni (triedri); a ciascuna regione corrispondono particolari segni per le coordinate. Così un punto, che si trovi nel triedro formato dalle semirette positive x, y, z, ha le tre coordinate positive, mentre un punto del triedro formato dalla semiretta negativa x e dalle semirette positive y, z ha la prima coordinata negativa e le altre due positive, ecc.

Gli otto punti

$$(a,\ b,\ c),\quad (-\ a,\ b,\ c),\quad (a\ -\ b,\ c),\quad (a,\ b,\ -\ c),$$
$$(a,\ -\ b,\ -\ c),\ (-\ a,\ b,\ -\ c),\ (-\ a,\ -\ b,\ c),\ (-\ a,\ -\ b,\ -\ c),$$

le cui coordinate differiscono solo per i segni, sono vertici di un parallelepipedo, che ha le facce parallele ai piani coordinati e le diagonali passanti per l' origine.

Se le coordinate di un punto sono uguali e di segno opposto alle coordinate di un secondo punto, i due punti sono simmetrici rispetto all'origine.

280. — Nel sistema cartesiano i punti dello spazio risultano determinati come intersezioni di terne di piani, i quali descrivono rispettivamente tre fasci impropri, aventi per assi le rette all'infinito dei piani coordinati. Ad un punto *proprio* corrispondono valori finiti e determinati per le tre coordinate cartesiane, e viceversa. Per un punto improprio, in generale, le tre coordinate sono infinite; ed alla terna $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$ corrispondono *tutti* i punti impropri dello spazio. Da questo *difetto* della corrispondenza tra punto e terna di numeri provengono alcuni inconvenienti del sistema di coordinate cartesiane, inconvenienti che, come si vedrà in seguito, possono togliersi colla introduzione di una ulteriore coordinata (cfr., nella geometria piana, il n.° 124).

281. Punto che divide un segmento in un dato rapporto. — Proponiamoci il problema:

Dati due punti $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, *determinare le coordinate di quel punto* P *della retta* $\mathrm{P_1P_2}$, *che forma con essi un dato rapporto semplice* $\frac{\mathrm{P_1P}}{\mathrm{P_2P}} = \mathrm{r}$.

Proiettiamo i tre punti P_1, P_2, P sopra uno degli assi coordinati (ad es. x), mediante piani paralleli al piano coordinato opposto (yz). Ragionando sui punti proiezione come in geometria piana (n.° 99), ricaviamo che le coordinate di P sono

$$(1)\quad x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r},\ y = \frac{y_1 - ry_2}{1 - r},\ z = \frac{z_1 - rz_2}{1 - r}.$$

In particolare, il punto medio di P_1P_2 $(r = -1)$ ha le coordinate

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

282. Retta congiungente due punti. — Ricavando r dalle relazioni (1), risulta

$$r = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2};$$

quindi le equazioni

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

sono certo soddisfatte dalle coordinate (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) di tre punti allineati. Viceversa, se sussistono le ultime relazioni, i tre punti sono in linea retta, perchè, indicando con r il valore comune delle tre frazioni, e ricavando x, y, z, si ritorna alle (1), le quali dicono che (x, y, z) è un punto determinato della retta congiungente (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2).

Le ultime relazioni, o le relazioni equivalenti

$$(2)\qquad \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2},$$

le quali, quando x, y, z si considerino come variabili, sono soddisfatte dalle coordinate di ogni punto della retta P_1P_2, e di nessun altro punto, si dicono le *equazioni* (due indipendenti) *della retta congiungente i due punti* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) [1].

---

[1] Le tre equazioni (due indipendenti), che si ottengono dalle (2) mandando via i denominatori, possono adoperarsi (poichè seguono direttamente dalle (1)) anche nel caso che qualcuno dei denominatori delle (2) si annulli, mentre allora le (2) non hanno più significato.

Le condizioni di allineamento di tre punti si esprimono pure annullando i quattro determinanti di 3° ordine estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix};$$

si ottengono così quattro condizioni, di cui però due sole sono indipendenti.

Indicando i tre denominatori con tre lettere l, m, n, abbiamo le equazioni

$$(3)\qquad \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},$$

le quali servono a rappresentare *una retta generica uscente dal punto* (x_1, y_1, z_1), retta che vien determinata coll' assegnare i valori dei tre denominatori, o almeno dei loro mutui rapporti.

Ad es., una retta qualsiasi uscente dall'origine ha equazioni del tipo

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

esprimenti la proporzionalità delle coordinate di un punto variabile sulla retta.

283. Piano congiungente tre punti. — Trascriviamo le formole (1) (n.° 281) ponendovi $r = -\frac{n}{m}$, dove m, n sono due quantità, di cui interessa solo il rapporto. Vediamo allora che le coordinate di ogni punto P della retta P_1P_2 si presentano sotto la forma

$$(1')\ x = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n},\ y = \frac{my_1 + ny_2}{m + n},\ z = \frac{mz_1 + nz_2}{m + n}.$$

Preso ora un punto $P_3(x_3, y_3, z_3)$ fuori di quella retta, congiungiamolo con P. Un punto generico Q della retta PP_3 avrà similmente coordinate del tipo

$$\frac{\mu x + \nu x_3}{\mu + \nu},\ \frac{\mu y + \nu y_3}{\mu + \nu},\ \frac{\mu z + \nu z_3}{\mu + \nu},$$

dove x, y, z sono date dalle (1′), ed è $(PP_3Q) = -\frac{\nu}{\mu}$. Sostituendo al posto di x, y, z i loro valori, e ponendo per semplicità (visto che di μ e ν interessa solo il rapporto) $\mu = m + n$, $\nu = p$, le coordinate di Q acquistano la forma

$$(4)\ \frac{mx_1 + nx_2 + px_3}{m + n + p},\ \frac{my_1 + ny_2 + py_3}{m + n + p},\ \frac{mz_1 + nz_2 + pz_3}{m + n + p}.$$

Variando m, n, p, o, meglio, i loro mutui rapporti, varia il punto Q sul piano $P_1P_2P_3$; e viceversa, per ogni posizione di Q sul piano, si possono scegliere m, n, p in guisa, che le (4) diano le coordinate del punto stesso. In breve, diremo che le (4) esprimono le coordinate di ogni punto del piano $P_1P_2P_3$.

Di qua è facile ricavare la condizione perchè quattro punti siano in un piano. Infatti, dette ora x, y, z le coordinate (4) del punto Q, e indicato con k il denominatore comune delle (4), abbiamo le uguaglianze

$$\begin{aligned} k &= m + n + p, \\ kx &= mx_1 + nx_2 + px_3, \\ ky &= my_1 + ny_2 + py_3, \\ kz &= mz_1 + nz_2 + pz_3, \end{aligned}$$

le quali devono coesistere per valori non tutti nulli di k, m, n, p, se il punto $Q(x, y, z)$ sta sul piano $P_1 P_2 P_3$; e viceversa. La condizione analitica, perchè ciò accada, è l' annullarsi del determinante formato coi coefficienti di k, m, n, p in quelle equazioni, ossia (scambiando linee e colonne)

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

In parole:

Affinchè quattro punti stiano in un piano, è necessario e sufficiente che si annulli il determinante (5) *formato colle coordinate dei punti e colle unità* (1).

284. **Equazione di un piano.** — Se si considerano come variabili x, y, z, e come costanti gli altri elementi, l'equazione (5) è soddisfatta dalle coordinate di ogni punto del piano, che contiene i punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), e non dalle coordinate di un punto esterno. La (5) dicesi perciò *equazione del piano congiungente i tre punti nominati* (2).

Sviluppando la (5) secondo gli elementi della prima orizzontale, si ottiene una equazione del tipo

$$(6) \qquad ax + by + cz + d = 0.$$

Dunque: *un piano è rappresentato da una equazione di primo grado nelle coordinate cartesiane di un punto variabile, che lo descriva.*

---

(1) Cfr. per l'analoga questione in geometria piana, il n.° 100.
(2) Cfr. il n.° 101.

Viceversa: *ogni equazione di primo grado in coordinate cartesiane* x, y, z *rappresenta un piano;* si dimostra in modo analogo a quello tenuto per le rette in geometria piana (n.° 101).

285. Posizioni particolari di un piano rispetto agli assi. — Consideriamo il piano

(1) $$ax + by + cz + d = 0,$$

e determiniamone le intersezioni cogli assi coordinati. Se ci occupiamo, ad es., dell' asse x, ricorderemo che per ogni punto di esso è $y = 0$, $z = 0$; sostituendo questi valori nella (1), otteniamo

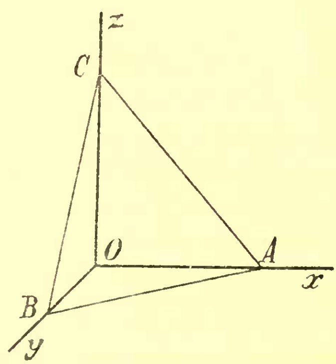
(2) $$ax + d = 0,$$

da cui $$x = -\frac{d}{a};$$

il punto richiesto è dunque $A(-\frac{d}{a}, 0, 0)$.

Vanno considerati però alcuni casi particolari.

Se $d = 0$, la (2) è certo soddisfatta da $x = 0$ (ossia la (1) è soddisfatta da $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$); segue che *un piano passa per l'origine, quando nella sua equazione manca il termine noto.*



Se invece è $d \neq 0$ ed $a = 0$, la (2) non è soddisfatta da valori finiti di x, ed il piano (1), la cui equazione diventa

$$by + cz + d = 0,$$

risulta parallelo all' asse x.

Finalmente, se sono nulli a e d, la (2) è soddisfatta qualunque sia x, ed il piano (1), la cui equazione si riduce a

$$by + cz = 0,$$

passa per l' asse x.

Raccogliendo gli ultimi due casi, diremo: *Se nell'equazione di un piano manca una coordinata, il piano è parallelo al corrispondente asse; se manca inoltre il termine noto, l'asse stesso giace nel piano.*

Se nell'equazione (1) mancassero due variabili, per esempio x, y, e l'equazione si riducesse a

$$cz + d = 0, \qquad \text{ossia} \qquad z = -\frac{d}{c},$$

il piano, dovendo riuscir parallelo agli assi x, y, sarebbe parallelo al piano xy. Se inoltre mancasse il termine noto, e si avesse dunque (per $c \neq 0$)

$$cz = 0, \qquad \text{ossia} \qquad z = 0,$$

l'equazione rappresenterebbe il piano xy. Dunque i *tre piani coordinati* yz, zx, xy *hanno, rispettivamente, le equazioni* x = 0, y = 0, z = 0.

Ritornando all'equazione (1), nell'ipotesi che siano diversi da zero i coefficienti e il termine noto, vediamo che i segmenti OA, OB, OC staccati dal piano (1) sugli assi coordinati, a partire dall'origine, valgono

$$p = -\frac{d}{a}, \qquad q = -\frac{d}{b}, \qquad r = -\frac{d}{c}.$$

Ricavando di qua a, b, c e sostituendo nella (1), si ottiene

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

equazione del piano che stacca i segmenti p, q, r *sugli assi coordinati.*

Se poi si volesse la retta intersezione del piano (1) con uno dei piani coordinati, ad es. col piano $xy (z = 0)$, basterebbe porre $z = 0$ nella (1). Si trova così l'equazione

$$ax + by + d = 0,$$

che, nel piano xy, rappresenta la retta richiesta AB (mentre nello spazio rappresenta il piano condotto per la retta AB parallelamente all'asse z).

286. Piani passanti per un punto dato. — Ragionando come in geometria piana (n° 103), si vede subito che ogni piano passante per un punto assegnato $P(x_1, y_1, z_1)$ ha un'equazione del tipo

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

dove a, b, c sono coefficienti, i cui valori, o, meglio, i cui rapporti determinano la posizione del piano nella stella di centro P.

287. Condizione di parallelismo di due piani. — Occupiamoci ora del sistema di due piani

$$\begin{array}{ll} \pi) & ax + by + cz + d = 0, \\ \pi') & a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{array}$$

ed esaminiamo anzitutto come si possa riconoscere se essi siano paralleli.

È chiaro che, se i due piani sono paralleli, essi devono segare ciascun piano coordinato (a cui non siano paralleli) lungo due rette parallele, e viceversa. Supposto, ad es., che i due piani π, π' non siano paralleli al piano $z = 0$, essi hanno in comune con questo piano le rette

$$ax + by + d = 0, \quad a'x + b'y + d' = 0,$$

le quali risultano parallele (n.° 105) se $a : b = a' : b'$. Ragionando analogamente sugli altri piani coordinati, si conclude: *affinchè due piani di date equazioni siano paralleli, è necessario e sufficiente che i coefficienti delle coordinate nell'una equazione siano proporzionali agli omologhi coefficienti dell'altra;* in simboli:

$$(1) \qquad a : b : c = a' : b' : c'.$$

Si deve intendere, naturalmente, che se una o due delle quantità a primo membro sono nulle, devono annullarsi pure le quantità omologhe a secondo membro, giacchè allora il piano π è parallelo ad uno o a due degli assi coordinati, ed agli stessi assi deve riuscir parallelo il piano π'. Quest'avvertenza è superflua, se in luogo delle (1) si adoperano le relazioni, che da quelle si ottengono riducendo a forma intera, relazioni espresse dall'annullarsi dei minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array} \right\|.$$

Se poi nelle equazioni π), π') sono proporzionali, non solo i coefficienti delle variabili, ma pure i termini noti, i due piani coincidono, e viceversa.

Dalle condizioni (1) di parallelismo segue che il piano parallelo al piano π, condotto per un punto dato $P(x_1, y_1, z_1)$, ha l'equazione

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

e, in particolare, se quel punto è l'origine,

$$ax + by + cz = 0.$$

288. Fascio di piani. — Due piani distinti

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

$$\pi') \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

determinano un fascio di piani; come si potrà scrivere l'equazione di un terzo piano del fascio?

Formiamo una combinazione lineare delle equazioni date, e sia

$$\pi'') \quad \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

ossia

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c')z + (\lambda d + \mu d') = 0,$$

dove λ, μ sono due parametri non entrambi nulli. L'equazione *lineare* $\pi'')$ rappresenta intanto un piano π''. Di più, ogni punto proprio P comune ai due piani π, π' appartiene certo al piano π'', perchè le coordinate di P soddisfano alle equazioni $\pi)$, $\pi')$ ed in conseguenza alla $\pi'')$. Dunque, se i due piani π, π' si segano in una retta propria, questa appartiene pure al piano π''. Se invece i due piani π, π' sono paralleli, le due terne di quantità (a, b, c), (a', b', c') sono proporzionali; ma allora risultano pure proporzionali le due terne (a, b, c), $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')$, sicchè il piano π'' riesce parallelo a π, ed appartiene ancora al fascio $\pi\pi'$.

Al variare di λ e μ, o, meglio, del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, il piano π'' varia nel fascio $\pi\pi'$, e lo descrive interamente, perchè si può sempre calcolare il valore di $\frac{\lambda}{\mu}$ in modo, che il piano π'' passi per un punto assegnato ad arbitrio nello spazio.

Conchiudiamo che: *la equazione di ogni piano formante fascio con due piani assegnati può scriversi come una combinazione lineare delle equazioni di questi.*

A due valori distinti $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$ del rapporto dei due parametri corrispondono due piani π'', π''' del fascio, che formano coi due primi π, π' il doppio rapporto

$$(\pi, \pi', \pi'', \pi''') = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'};$$

ciò si dimostra segando i quattro piani con uno dei piani coordinati, e tenendo presente il n.° 107.

289. Equazioni di una retta nello spazio. — Riprendiamo due equazioni lineari

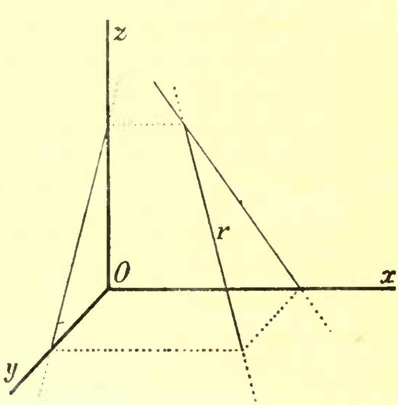
$$(1)\qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases}$$

rappresentanti due piani, che supporremo distinti e non paralleli. Ad ogni soluzione (x, y, z) del sistema (1) corrisponde un punto, che appartiene alla retta r intersezione dei due piani; e, viceversa, ogni punto di r ha coordinate soddisfacenti le (1). Diremo perciò che il sistema (1) rappresenta la retta r; *una retta nello spazio è rappresentata da due equazioni lineari, le quali, prese isolatamente, rappresentano due piani passanti per la retta.*

È chiaro che la stessa retta r potrà rappresentarsi mediante due equazioni, che si ottengano dalle (1) formando due combinazioni lineari distinte (n.° 288). Possiamo disporre dei relativi parametri in guisa da eliminare una volta y, ed una seconda volta x, fra le (1). Otteniamo così le due equazioni

$$(1')\qquad \begin{cases} (ab' - a'b)\,x + (cb' - c'b)\,z + (db' - d'b) = 0, \\ (ba' - b'a)\,y + (ca' - c'a)\,z + (da' - d'a) = 0. \end{cases}$$

È però da notare che le operazioni eseguite non sarebbero lecite, se b e b', oppure a ed a', si annullassero insieme; inoltre, che, se $ab' - a'b$ fosse nullo, le due equazioni ora scritte sarebbero equivalenti, e rappresenterebbero un unico piano passante per la retta r e parallelo al piano xy; la retta stessa sarebbe parallela ad xy (o vi giacerebbe). Supposto dunque che $ab' - a'b \neq 0$, vale a dire, che la retta r non sia parallela al piano xy (nè vi giaccia), noi possiamo porre le equazioni di r sotto la forma (1′). Conviene anzi risolvere le (1′) rispetto ad x, y ordinatamente, e scriverle così:



$$(2)\qquad \begin{cases} x = lz + p, \\ y = mz + q. \end{cases}$$

Le (2) si chiamano talvolta *equazioni ridotte* della retta; esse, isolatamente, rappresentano i piani proiettanti la retta r dai punti all'infinito degli assi y, x rispettivamente, od anche, se si vuole, rappresentano le proiezioni di r da quei punti sui piani xz, yz rispettivamente. Le (2) vengono spesso adoperate, giacchè esse contengono il minimo numero di coefficienti (quattro), che possono comparire nelle equazioni di una retta [1]. Va però notato che le (2) non trattano simmetricamente le tre coordinate; nè si prestano a rappresentare le rette parallele al piano xy, per le quali converrebbe adoperare, ad es., equazioni risolte rispetto ad x e z, ovvero ad y e z.

Le (2), risolte rispetto a z nella ipotesi che non siano nulle l, m, possono scriversi così

$$(2') \qquad \frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z}{1},$$

e rientrano perciò nel tipo

$$(3) \qquad \frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n};$$

sotto questa forma abbiamo già visto (n.° 282) potersi scrivere le equazioni di una retta generica uscente dal punto (x', y', z'). Ed ora possiamo aggiungere che le tre equazioni (due indipendenti), riunite nella (3), rappresentano i tre piani proiettanti la retta dai punti all'infinito degli assi.

Dal confronto fra le (2′) e le (3) risulta che le tre quantità l, m, 1, nelle equazioni ridotte (2) di una retta, hanno lo stesso ufficio che i tre denominatori l, m, n nelle equazioni (3); in altre parole, i due coefficienti l, m che compariscono nelle equazioni (2), hanno lo stesso significato geometrico dei rapporti $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$ tra i denominatori delle equazioni della retta scritte sotto la forma (3). Quale sia questo significato geometrico si vedrà in seguito.

Ritorniamo alle (2). Se poniamo in esse $z = 0$, troviamo $x = p$, $y = q$; dunque p e q *sono le prime due coordinate del punto, ove la retta sega il piano* xy.

In particolare, una retta uscente dall'origine, e non giacente nel piano xy, ha equazioni del tipo

$$x = lz, \quad y = mz;$$

---

(1) Una retta dipende infatti da *quattro costanti*, ad es. dalle coordinate (x_1, y_1), (x_2, z_2) dei punti, ove essa incontra i piani coordinati xy, xz.

se invece sta sopra xy, come equazioni di essa possono prendersi $z = 0$, $y = \lambda x$.

Gli assi coordinati x, y, z hanno ordinatamente le coppie di equazioni

$$y = 0,\ z = 0;\quad z = 0,\ x = 0;\quad x = 0,\ y = 0.$$

290. Parallelismo di due rette. — I due coefficienti l, m, che compariscono nelle equazioni ridotte (2) di una retta, definiscono la *direzione* della retta; ciò risulta dalla osservazione che segue, ed apparirà in modo più preciso, quando determineremo gli angoli che una retta forma cogli assi.

Cerchiamo le condizioni di parallelismo fra la retta (2) e la retta

$$x = l'z + p',$$
$$y = m'z + q'.$$

Poichè i piani proiettanti le due rette dal punto all'infinito dell'asse x, o dell'asse y, devono risultare paralleli, si avrà (n.° 287)

$$l = l',\quad m = m';$$

queste sono le condizioni richieste.

Segue subito che la retta parallela alla (2), condotta per un punto assegnato (x_1, y_1, z_1), avrà le equazioni

$$x - x_1 = l(z - z_1),$$
$$y - y_1 = m(z - z_1).$$

Segue ancora, con analoghe considerazioni, che la retta (3) (n.° 289) e la retta

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

sono parallele, se

$$l : m : n = l_1 : m_1 : n_1 \ (^1).$$

291. Punto di incontro di tre piani; stella di piani. — Date le equazioni di tre piani

$$\begin{array}{ll} \pi) & ax + by + cz + d = 0, \\ \pi') & a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ \pi'') & a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{array}$$

---

(1) In relazione a questi risultati, si può dire che i coefficienti l, m, i quali entrano nelle equazioni ridotte (2) di una retta, sono *le coordinate* (non omogenee) *della direzione della retta*, mentre i denominatori l, m, n delle equazioni (3) sono *le coordinate omogenee della direzione.* Queste locuzioni saranno chiarite meglio in seguito.

la ricerca del punto ad essi comune si riduce alla risoluzione del sistema scritto di tre equazioni lineari con tre incognite. Le soluzioni, *coordinate del punto richiesto*, possono indicarsi brevemente così:

$$(1) \qquad x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D}, \quad z = \frac{C}{D},$$

dove A, B, C, D sono i determinanti del terzo ordine (presi con segni convenienti), che si ottengono dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix},$$

omettendo o la prima, o la seconda, ... o l'ultima colonna.

Se $D \neq 0$, il punto richiesto è proprio e determinato. Ma *se* $D = 0$, *senza che si annullino tutti i numeratori delle* (1), non esiste alcun punto proprio comune a π, π', π'', ed *i tre piani sono paralleli ad una stessa retta* (come le facce di un prisma). Finalmente, *se* $A = B = C = D = 0$, *i tre piani appartengono ad un fascio;* ciò risulta subito, se ad es. i due primi piani si segano in una retta propria, perchè allora ogni soluzione (x, y, z) delle equazioni π), π') è una soluzione della equazione π''), sicchè il terzo piano passa per quella retta; e risulta pure, se i piani π, π' sono paralleli, giacchè allora si riconosce che π'' è parallelo ad essi [1] [2].

Supposto che i tre piani π, π', π'' non appartengano ad un fascio, formiamo una combinazione lineare delle loro equazioni

$$(2) \quad \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') + \nu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0.$$

---

[1] Qui, e nel seguito, occorrerebbe trattare a parte il caso che certi elementi della figura (ad es. la retta $\pi\pi'$) divenissero impropri. Questa distinzione proviene però solo dal fatto, già rilevato (n.° 280), che il sistema cartesiano non si presta a rappresentare gli elementi impropri; e non avrebbe più ragion d'essere, quando si facesse uso di coordinate omogenee. Non crediamo perciò necessario di insistere nell' esame del caso particolare, quando il risultato generale si estenda anche ad esso.

[2] Lo stesso fatto si giustifica osservando che, se $A = B = C = D = 0$, una delle tre equazioni primitive può ottenersi come combinazione lineare delle altre due, sicchè i tre piani formano fascio.

Questa rappresenta un piano, il quale passa per il punto $P \equiv \pi\pi'\pi''$, perchè la (2) è soddisfatta dalla terna di valori (x, y, z), che soddisfano le equazioni $\pi)$, $\pi')$, $\pi'')$. La conclusione vale (come si dimostra direttamente) anche se il punto P è improprio.

Al variare dei parametri λ, μ, ν, o, meglio, dei rapporti $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, il piano (2) varia nella stella di centro P, e la descrive tutta, perchè si possono calcolare i detti rapporti in modo, che il piano (2) passi per due punti assegnati ad arbitrio. Concludiamo: *date le equazioni di tre piani, che determinino una stella, la equazione di ogni altro piano della stella può ottenersi come una combinazione lineare di quelle.*

292. **Intersezione di una retta con un piano; condizione perchè una retta sia parallela ad un piano, o vi giaccia.** — Poichè una retta è rappresentata da due equazioni lineari, il punto d'incontro della retta con un piano si otterrà risolvendo il sistema formato dalle due equazioni della retta colla equazione del piano.

In particolare, se la retta è data mediante le equazioni

$$r) \qquad x = lz + p, \qquad y = mz + q,$$

ed il piano mediante l'equazione

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

sostituiremo in questa, al posto di x ed y, i valori dati dalle $r)$; otteniamo

$$(al + bm + c)z + (ap + bq + d) = 0,$$

donde

$$z = -\frac{ap + bq + d}{al + bm + c}.$$

Le altre due coordinate x, y del punto richiesto si ricavano servendosi delle $r)$.

L'espressione di z ci mostra che *la condizione di parallelismo tra la retta* r *e il piano* π *è*

$$(1) \qquad al + bm + c = 0;$$

mentre, *se, insieme a questa relazione, coesiste la*

$$(2) \qquad ap + bq + d = 0,$$

la retta r *giace per intero nel piano* π.

Se le equazioni della retta r sono date invece sotto la forma

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

per trovare le coordinate, del punto πr, conviene indicare con una nuova variabile ϱ il valor comune delle tre frazioni, esprimere le coordinate (x, y, z) di un punto descrivente la retta in funzione di ϱ,

$$x = x' + l\varrho, \quad y = y' + m\varrho, \quad z = z' + n\varrho,$$

sostituire questi valori nella equazione π) e ricavare ϱ; si ottiene così

$$\varrho = - \frac{ax' + by' + cz' + d}{al + bm + cn}.$$

Conosciuto ϱ, le formole precedenti danno subito le coordinate x, y, z del punto richiesto. Questa volta *la condizione di parallelismo tra retta e piano è*

(1′) $$al + bm + cn = 0;$$

questa, insieme alla

(2′) $$ax' + by' + cz' + d = 0,$$

dà le condizioni perchè la retta stia nel piano (¹).

293. Condizione affinchè quattro piani, o due rette, abbiano un punto comune. — Date le equazioni di quattro piani

(1) $$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0, \end{cases}$$

se questi hanno un punto proprio comune, devono coesistere quelle quattro equazioni a tre incognite, ed è quindi

(2) $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = 0;$$

la stessa condizione sussiste, se i piani sono paralleli ad una medesima retta (n.° 291). Viceversa, sia nullo il determinante (2);

(¹) Le condizioni (1) e (2), oppure (1′) e (2′), si interpretano e si ricordano nel modo più semplice introducendo le coordinate omogenee del punto all' infinito della retta r, come si vedrà in seguito (n.° 310).

allora, od esiste un sistema di valori (x, y, z) soddisfacente tre, e quindi tutte quattro le equazioni (1), ed i quattro piani hanno un punto proprio comune; oppure un tal sistema non esiste, ed i quattro piani sono paralleli ad una stessa retta. Dunque: *condizione necessaria e sufficiente, affinchè quattro piani abbiano un punto (proprio o improprio) comune, è che sia nullo il determinante formato coi coefficienti e termini noti delle relative equazioni.* In tale ipotesi, una delle equazioni (1) può scriversi come combinazione lineare delle rimanenti (n.° 291).

La (2) esprime pure la condizione, perchè si seghino due rette rappresentate, la prima da due delle equazioni (1), la seconda dalle due rimanenti. Se le rette sono date mediante equazioni ridotte

$$r) \qquad x = lz + p, \quad y = mz + q,$$

$$r') \qquad x = l'z + p', \quad y = m'z + q',$$

per trovare la detta condizione conviene eliminare x tra le equazioni della prima colonna, y tra le equazioni della seconda colonna, e z tra le equazioni risultanti:

$$(l - l')\, z + p - p' = 0, \quad (m - m')\, z + q - q' = 0;$$

si trova in fine

$$(l - l')\,(q - q') - (m - m')\,(p - p') = 0,$$

che è *la condizione affinchè si seghino le rette* r, r'.

Se le due rette sono rappresentate invece mediante equazioni del tipo

$$r_1) \qquad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$r_2) \qquad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

per esprimere la condizione di incontro, conviene scegliere due punti (x_1, y_1, z_1), $(x_1 + \varrho_1 l_1, y_1 + \varrho_1 m_1, z_1 + \varrho_1 n_1)$ della prima retta, e due punti (x_2, y_2, z_2), $(x_2 + \varrho_2 l_2, y_2 + \varrho_2 m_2, z_2 + \varrho_2 n_2)$ della seconda, ed imporre ai quattro punti la condizione di trovarsi in un piano (n.° 283). Con facili trasformazioni si può presentare quella condizione così:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

294. Nuova forma della condizione perchè tre piani appartengano ad un fascio, o quattro piani ad una stella. — Conviene talvolta presentare sotto la forma seguente alcune condizioni sopra enunciate [1]:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè tre piani appartengano ad un fascio, o quattro piani ad una stella, è che si possa formare colle equazioni di quei piani, adoperando parametri non tutti nulli, una tale combinazione lineare, che sia verificata identicamente (cioè per valori arbitrari di x, y, z).

Infatti, se indichiamo per brevità con L, M,... dei polinomi lineari in x, y, z, e quindi con $L = 0$, $M = 0$,... le equazioni di certi piani, il verificarsi di una identità del tipo

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0,$$

ossia (supposto ad es. $\lambda \neq 0$) $L = -\frac{\mu}{\lambda} M - \frac{\nu}{\lambda} N$, significa che il polinomio L è una combinazione lineare dei polinomi M, N, e quindi (n.° 288) che il piano $L = 0$ appartiene al fascio dei piani $M = 0$, $N = 0$; e viceversa. Analogamente si procede, quando si tratti di quattro piani di una stella.

Dati quattro piani non appartenenti ad una stella, mediante una conveniente combinazione lineare delle loro equazioni si può rappresentare un piano arbitrariamente assegnato. Si dimostra come l'analogo teorema di geometria piana (n.° 109).

Esercizi I — 1). Segnati sul foglio di disegno le immagini dei tre assi cartesiani, si rappresentino i punti, le cui coordinate sono: (0, 1, 2), (1, 0, — 1), (2, 1, 0), (1, — 1, 1) [2].

2) Trovare l'equazione del piano determinato: *a*) dai tre punti (2, — 1, 1), (1, 1, — 1), (— 1, 0, 1); *b*) dal punto (2, 1, — 1) e dalla retta $x = 2z + 1$, $y = z + 3$.

3) Trovare l'equazione del piano: *a*) passante per i punti (2, — 1, 1), (1, 1, — 1) e parallelo alla retta $x = -y = z$; *b*) passante per il punto (2, — 1, 1) e parallelo al piano $x + 2y + z + 1 = 0$; *c*) passante per il

---

[1] Cfr. Geometria piana, n.° 108.

[2] La figura disegnata può riguardarsi come una proiezione della figura nello spazio da un punto improprio Conoscendo le posizioni, rispetto al foglio, dei tre assi e del centro di proiezione, si potrebbero calcolare i rapporti, secondo cui vengono alterati tre segmenti uguali ad 1 situati sugli assi. Se invece sono arbitrari gli assi obiettivi ed il centro di proiezione, quei rapporti possono (come si dimostra) esser scelti ad arbitrio. Si può dunque, anche nel disegno, assumere un unico segmento come unità di misura sulle proiezioni degli assi x, y, z.

punto $(2, -1, 1)$ e parallelo alle rette $x = -y = z$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = -z$; *d*) passante per la retta $x = z - 1$, $y = 2z + 3$ e parallelo alla retta $x = 2y = z$.

4) Le faccie di un tetraedro hanno le equazioni

$$x - z + 1 = 0, \quad 2x + 3y + z = 0, \quad x + 3y + 2 = 0,$$
$$3x + y - z - 2 = 0;$$

si trovino le coordinate dei vertici.

5) Rappresentare sulla figura le rette $x = z + 2$, $y = 2z + 1$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$; $x = -y = z$; determinare le intersezioni delle due prime coi piani coordinati.

6) Si scriva l'equazione del piano che proietta, parallelamente all'asse z, la retta $x = lz + p$, $y = mz + q$.

7) Equazioni dei piani proiettanti, parallelamente ai singoli assi, la retta

$$2x + 3y - 4z + 1 = 0, \quad 3x - 5y + 2z = 0.$$

8) Presi come vertici di un tetraedro i quattro punti, di cui nell'es. 1) sono date le coordinate, trovare le equazioni degli spigoli.

9) Trovare le equazioni della retta: *a*) passante per il punto $(1, 1, -1)$ e parallela alla retta $x = z - 1$, $y = 3z + 2$; *b*) passante per il punto $(-1, 2, 2)$ e parallela ai due piani $x - z + 1 = 0$, $2x + 3y - 3z = 0$; *c*) che passa per il punto $(0, 1, -1)$ e incontra le rette $x = 3y = 3z - 1$, $\frac{x-1}{2} = y - 2 = -z$; *d*) che passa per il punto $(1, -1, 2)$, incontra la retta $x = 3$, $y = z - 2$, ed è parallela al piano $x - 2y - z = 0$; *e*) che incontra le due rette $x = y = z$, $x - 1 = y + 2 = -z$, ed è parallela ad uno degli assi.

10) Determinare le coordinate del punto d'intersezione del piano $2x + y - 2z + 3 = 0$ colla retta $x = 2z - 1$, $y = z + 1$.

11) Le due rette

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n}, \quad \frac{x-x'}{l'} = \frac{y-y'}{m'} = \frac{z-z'}{n'}$$

passano pel punto (x', y', z'); scrivere l'equazione del piano che le contiene.

12) Trovare l'equazione del piano contenente le due rette parallele

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n}, \quad \frac{x-x''}{l} = \frac{y-y''}{m} = \frac{z-z''}{n}.$$

II — 13) Dati n punti dello spazio e in corrispondenza n numeri, si definisca il baricentro di questi punti, presi coi pesi uguali ai numeri dati, in modo analogo a quello tenuto nel caso di punti allineati o giacenti in un piano (n.° 32, es. 4); n.° 110, es. 6)); si trovino le coordinate di questo punto, e si consideri il caso particolare, in cui i pesi sono tutti uguali.

14) I tre segmenti, che congiungono i punti medi delle coppie di lati opposti di un tetraedro, passano per uno stesso punto, che divide ciascuno di quei segmenti per metà. Quel punto è pure comune ai quattro segmenti, che congiungono i vertici del tetraedro ai baricentri delle faccie opposte, e divide ciascuno di questi segmenti nel rapporto da 3 ad 1. Esso è il baricentro dei vertici del tetraedro presi con pesi uguali, o, come suol dirsi brevemente, il baricentro del tetraedro.

15) Se delle rette intersezioni delle tre faccie di un triedro con un piano condotto per il vertice si costruiscono le coniugate armoniche, rispetto alle coppie di spigoli giacenti sulle faccie stesse, le nuove rette, congiunte cogli spigoli opposti, danno tre piani passanti per una stessa retta. E viceversa. (Cfr. n.° 110, *d*)). Si esamini in particolare il caso che si tratti del triedro degli assi.

16) Se delle intersezioni dei sei spigoli di un tetraedro con un piano qualsiasi si costruiscono i punti coniugati armonici, rispetto alle coppie di vertici esistenti sui relativi spigoli, i nuovi punti congiunti cogli spigoli opposti danno sei piani passanti per uno stesso punto. E viceversa. Il piano primitivo ed il punto ottenuto diconsi *armonici* rispetto al tetraedro.

17) Si dimostri analiticamente il teorema relativo a due triedri omologici collo stesso vertice, teorema che si ottiene da quello di geometria piana (n.i 14, 15) mediante proiezione; (cfr. n.° 131, *a*)).

18) Questione analoga relativa ai tetraedri omologici (n.° 16, es. 12)).

Capitolo II.

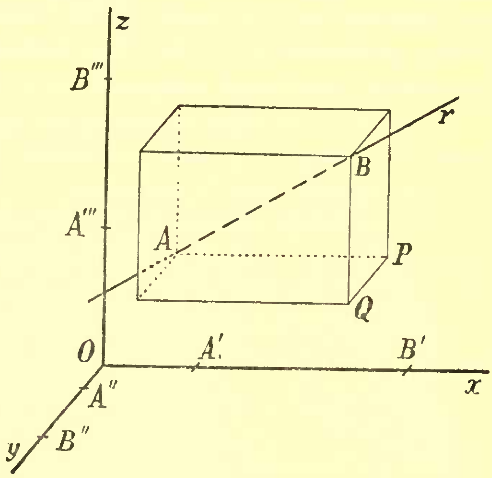
Distanze, angoli, aree, volumi.

295. Proiezioni parallele di segmenti. — Seguendo lo stesso ordine tenuto nella geometria piana (n.° 111), alla ricerca delle formole esprimenti i principali caratteri metrici, premettiamo alcune nozioni relative alle proiezioni parallele.

Nello spazio si possono considerare proiezioni *sopra una retta secondo una data giacitura,* oppure *sopra un piano secondo una data direzione.*

Per definire il primo tipo di proiezioni, supponiamo data una retta x, su cui sia fissato il verso positivo, ed un piano ξ non parallelo ad x. *Proiettare sopra la retta* x *un punto* A, *secondo la giacitura* ξ (o parallelamente al piano ξ), significa costruire il punto A' intersezione della x col piano parallelo a ξ condotto per A. I punti di un segmento AB hanno le proiezioni nei punti di un segmento $A'B'$, il quale, preso col segno che gli spetta, dicesi *proiezione* di AB. I lati di una spezzata $ABCD\ldots$ hanno come proiezioni i segmenti consecutivi $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, . . ., la cui somma (algebrica) dicesi *proiezione della spezzata.* Anche qui *la proiezione di una spezzata è uguale alla proiezione del segmento, che ne congiunge gli estremi,* e *due* *spezzate aventi gli stessi estremi danno proiezioni uguali* (sopra una stessa retta, secondo una stessa giacitura).

a) Si parta dai tre assi coordinati x, y, z, e si considerino le proiezioni $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ di uno stesso segmento AB sopra x parallelamente ad yz, sopra y parallelamente a zx, sopra z parallelamente a xy; quelle proiezioni diconsi *le componenti del segmento* AB, *secondo gli assi* x, y, z. I sei piani condotti per A e B, mediante i quali si eseguiscono le proiezioni nominate, limitano un parallelepipedo, in cui A, B sono vertici opposti, ed i cui lati sono equipollenti alle componenti del segmento.



Con tre segmenti equipollenti alle tre componenti si può (in più modi) formare una spezzata trilatera (ad es. $APQB$) avente come estremi A e B. Se (x, y, z), (x', y', z') sono le coordinate di A, B, le dette componenti valgono ordinatamente

$$x' - x, \; y' - y, \; z' - z,$$

e divengono le coordinate di B, se A cade nell'origine.

b) Useremo di solito proiezioni *ortogonali*, mediante piani normali alla retta sopra cui si proietta.

Fra un segmento AB appartenente ad una retta r, su cui sia fissato il verso positivo, e la sua proiezione ortogonale $A'B'$ sopra una retta x, passa la relazione

$$A'B' = AB \cos xr;$$

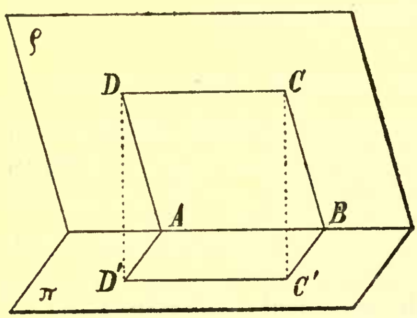
la proiezione ortogonale di un segmento sopra una retta è data (*in valore e segno*) *dal prodotto del segmento obiettivo per il coseno dell'angolo formato dalle rette contenenti il segmento e la proiezione.* Infatti, se il segmento AB si sposta parallelamente a sè stesso, non variano nè in valore, nè in segno, le quantità che entrano nella relazione scritta; ora quella sussiste (n.° 111, c)) se A cade su x, perchè allora la figura è contenuta nel piano xr, quindi sussiste in ogni caso [1].

296. Proiezione di un'area. — Se per i punti A, B, . . . dello spazio si conducono rette parallele ad una retta assegnata r, e si determinano le intersezioni di queste con un piano fisso π, non parallelo ad r, i punti A', B', . . ., che così si ottengono, diconsi *proiezioni* di A, B, . . . *su* π *secondo la direzione* r; o, brevemente, *proiezioni ortogonali su* π, se r è normale a π.

I punti di un'area situata in un piano ϱ si proiettano nei punti di un'area di π, *area proiezione*. Ora, nel caso di proiezioni ortogonali, vale il teorema:

La proiezione ortogonale di un'area, situata in un piano, sopra un secondo piano, è uguale all'area obiettiva moltiplicata per il coseno del diedro dei due piani.

Infatti la proiezione ortogonale dei punti di ϱ su π stabilisce tra i due piani un'*affinità* (prospettiva; n.ⁱ 176, 173); passa dunque un rapporto costante tra le aree di ϱ e le loro proiezioni su π (n.° 173). Per valutare quel rapporto, consideriamo, ad es., su ϱ un quadrato $ABCD$, il cui lato AB, di valore 1, stia sulla retta intersezione dei due piani π, ϱ. La proiezione ortogonale del quadrato su π è un rettangolo $ABC'D'$, che ha un lato $AB = 1$, ed il lato perpendicolare AD' uguale alla proiezione ortogonale di AD, cioè



$$AD' = AD \cos D\widehat{A}D' = \cos \pi\varrho.$$

Dunque il rapporto cercato è

$$\frac{ABCD}{ABC'D'} = \frac{1}{\cos \pi\varrho},$$

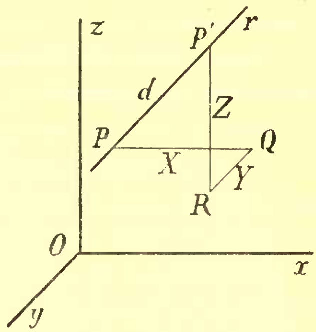
come si doveva dimostrare.

---

(1) I risultati di questo n.° possono enunciarsi col linguaggio della teoria dei *vettori*, estendendo allo spazio l'Oss. che segue il n.° 111.

297. Distanza di due punti. — Riprendiamo i tre assi cartesiani x, y, z, che supporremo *ortogonali*, cioè perpendicolari a due a due, ogniqualvolta dovremo stabilire relazioni metriche; ciò per evitare inutili complicazioni.

Siano $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ due punti appartenenti ad una retta r, su cui sia fissato arbitrariamente il verso positivo. Consideriamo il segmento $PP' = d$ (in valore e segno), e le sue componenti secondo gli assi, che valgono



$$X = x' - x,$$
$$Y = y' - y,$$
$$Z = z' - z.$$

Con tre segmenti equipollenti a queste possiamo formare, come si disse, una spezzata trilatera $PQRP'$, di cui il segmento PP' congiunge gli estremi. Proiettiamo ora una prima volta il segmento PP', una seconda volta la spezzata $PQRP'$, sopra una retta qualunque s dello spazio, ed uguagliamo le proiezioni; si ha così:

(1) $\quad d \cos rs = X \cos xs + Y \cos ys + Z \cos zs.$

Facendo coincidere s successivamente cogli assi x, y, z (e ricordando che, per ipotesi, $\widehat{xy} = \widehat{xz} = \widehat{yz} = \frac{\pi}{2}$), abbiamo

(2) $\quad d \cos xr = X, \quad d \cos yr = Y, \quad d \cos zr = Z;$

finalmente, facendo coincidere s con r,

(3) $\quad d = X \cos xr + Y \cos yr + Z \cos zr.$

Per approfittare di queste formole, moltiplichiamo anzitutto la (3) per d, e sostituiamo nel secondo membro al posto di $d \cos xr, \ldots$ i valori dati dalle (2). Avremo:

$$d^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

ossia

(4) $\quad d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$

Il quadrato della distanza fra due punti è uguale alla somma dei quadrati delle differenze tra le coordinate omonime dei punti stessi (cfr. n.° 212).

298. Relazioni angolari. — Se invece nella (3) sostituiamo al posto di X, Y, Z i valori dati dalle (2), e dividiamo poi per d, abbiamo

$$(5)\qquad \cos^2 xr + \cos^2 yr + \cos^2 zr = 1.$$

I coseni degli angoli, che una retta forma cogli assi coordinati, diconsi brevemente *coseni di direzione della retta*; concludiamo quindi:

La somma dei quadrati dei coseni di direzione di una retta è uguale ad 1.

Eseguendo ora le stesse sostituzioni (2) nella (1), e dividendo per d, avremo

$$(6)\quad \cos rs = \cos xr \cdot \cos xs + \cos yr \cdot \cos ys + \cos zr \cdot \cos zs.$$

Il coseno dell'angolo di due rette è uguale alla somma dei prodotti dei coseni di direzione dell'una retta per i corrispondenti coseni della seconda (cfr. n.° 113).

299. Coseni di direzione di una retta. — Date le equazioni di una retta r sotto la forma

$$(1)\qquad \frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n},$$

si osservi che, se $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ sono due punti della retta, i numeratori delle (1) esprimono le proiezioni ortogonali del segmento $P'P$ sui tre assi coordinati (n.° 295), e possono quindi esser sostituiti da $P'P \cos xr$, $P'P \cos yr$, $P'P \cos zr$. Sopprimendo il fattor comune $P'P$, otteniamo

$$\frac{\cos xr}{l} = \frac{\cos yr}{m} = \frac{\cos zr}{n},$$

ossia, indicando con ϱ il valor comune incognito delle tre frazioni,

$$\cos xr = l\varrho, \quad \cos yr = m\varrho, \quad \cos zr = n\varrho.$$

Per calcolare ϱ, eleviamo a quadrato queste e sommiamo; ricordando la (5) del n.° 298, avremo

$$1 = (l^2 + m^2 + n^2)\varrho^2,$$

da cui

$$\varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

e quindi

$$(2)\quad \begin{cases} \cos xr = \dfrac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos yr = \dfrac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \\ \cos zr = \dfrac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \end{cases}$$

Il radicale va preso collo stesso segno nelle tre frazioni, ma questo è arbitrario, finchè non sia fissato il verso positivo su r. In parole :

I coseni di direzione di una retta, le cui equazioni siano scritte sotto la forma (1), *sono proporzionali ai denominatori, e si ottengono dividendo questi per la radice quadrata della somma dei loro quadrati.*

Se la retta è data invece mediante equazioni ridotte

$$(1') \qquad x = lz + p, \quad y = mz + q,$$

ossia (n.° 289)

$$\frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z}{1},$$

basta porre $n = 1$ nelle formole precedenti; risulta così, che *i coseni di direzione della retta* (1′) *sono proporzionali a* l, m, 1, *e sono dati precisamente da*

$$(2')\quad \begin{cases} \cos xr = \dfrac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+1}}, \quad \cos yr = \dfrac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+1}}, \\ \cos zr = \dfrac{1}{\pm\sqrt{l^2+m^2+1}}. \end{cases}$$

Seguono di qua i significati geometrici dei coefficienti l, m nelle equazioni ridotte (1′):

$$l = \frac{\cos xr}{\cos zr}, \quad m = \frac{\cos yr}{\cos zr}.$$

Ritornando alle (1), risulta che *le equazioni della retta uscente dal punto* (x′, y′, z′), *e formante cogli assi coordinati* x, y, z *gli angoli* α, β, γ *rispettivamente, possono scriversi sotto la forma* (detta *normale*)

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha} = \frac{y-y'}{\cos\beta} = \frac{z-z'}{\cos\gamma}.$$

Queste rappresentano la retta *orientata*; invertendo il verso sopra di essa, mutano segno i tre denominatori. Il valore t comune alle tre frazioni rappresenta la distanza del punto fisso (x', y', z') dal punto variabile (x, y, z). Esprimendo queste ultime coordinate in funzione di t, si possono sostituire alle (3) le equazioni

(4) $x = x' + t\cos\alpha,\ y = y' + t\cos\beta,\ z = z' + t\cos\gamma$

che diconsi *parametriche*, perchè danno, per ogni valore del parametro t, le coordinate di un punto della retta.

300. Angolo di due rette. — Per determinare il coseno dell' angolo formato dalle due rette (incidenti o sghembe)

$$r)\qquad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

$$s)\qquad \frac{x-x'}{l'} = \frac{y-y'}{m'} = \frac{z-z'}{n'},$$

si calcolino i coseni di direzione delle due rette:

$$\cos xr = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\ \text{ecc.},$$

$$\cos xs = \frac{l'}{\pm\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}},\ \text{ecc.},$$

e si sommino i prodotti dei coseni relativi ad r, per gli omologhi coseni relativi ad s (n.° 298, (6)); si giunge così al risultato:

Il coseno dell' angolo delle due rette r, s *è espresso dalla formola*

$$(5)\qquad \cos rs = \frac{ll'+mm'+nn'}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}};$$

il segno è ambiguo, finchè sulle rette non siano fissati i versi positivi.

La condizione di ortogonalità ($\widehat{rs} = \frac{\pi}{2}$, anche se le rette sono sghembe) *è data da* [1]

$$(6)\qquad ll'+mm'+nn' = 0,$$

---

[1] Se la retta s è la *perpendicolare* calata su r dal punto (x', y', z'), oltre la condizione di ortogonalità (5), deve esser pure soddisfatta la condizione di incontro fra r ed s (n.° 293). Si hanno così due relazioni lineari ed omogenee fra l', m', n', le quali determinano i mutui rapporti di queste incognite.

Per calcolare il seno dell' angolo $\widehat{rs}$ si osservi che

$$\operatorname{sen}^2 rs = 1 - \cos^2 rs$$

$$= \frac{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2}{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}^2}{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)},$$

e finalmente (¹)

$$(7)\quad \operatorname{sen}^2 rs = \frac{(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2}{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}.$$

Se le due rette r, s *sono date mediante equazioni ridotte*

$r)\qquad x = lz + p, \quad y = mz + q,$

$s)\qquad y = l'z + p', \quad y = m'z + q',$

nelle formole precedenti si porrà n = n' = 1; si ottiene così, ad es.,

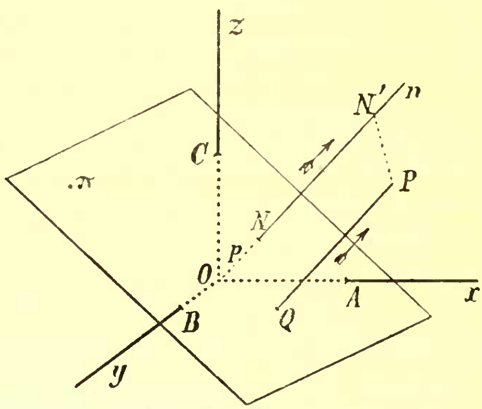
$$(5')\qquad \cos rs = \frac{ll'+mm'+1}{\pm\sqrt{l^2+m^2+1}\sqrt{l'^2+m'^2+1}}.$$

301. Equazione normale di un piano. — Per ottenere formole analoghe relative a piani, conviene anzitutto scrivere sotto una forma particolare l'equazione di un piano (cfr. n.° 115).

Sia dato un piano π mediante l' equazione *generale*

$$(1)\qquad ax + by + cz + d = 0;$$

conduciamo ad esso la normale n dall'origine, la quale incontri il piano in N, e su quella fissiamo ad arbitrio il verso positivo, ad es. da O verso N, se il piano non passa per O. Poniamo $ON = p$ (in valore e segno), e chiamiamo α, β, γ gli angoli, che la nor-



(¹) Il valore di sen rs, che si ottiene estraendo la radice quadrata, può sempre assumersi positivo, purchè si convenga di indicare con $\widehat{rs}$ l' angolo positivo minore di due retti, che r forma con s.

male n forma cogli assi coordinati x, y, z. Osserviamo poi che il segmento $ON = p$ è la proiezione ortogonale, sopra n, di ciascuno dei segmenti OA, OB, OC, che il piano stacca sugli assi a partire dall' origine; ciò almeno nella ipotesi, in cui per ora ci mettiamo, che i punti A, B, C siano propri e diversi da O, vale a dire, che le quantità a, b, c, d siano tutte diverse da zero. Ricordando i valori di quei tre segmenti ($-\frac{d}{a}$, $-\frac{d}{b}$, $-\frac{d}{c}$; n.° 285), otteniamo la relazione $-\frac{d}{a}\cos\alpha = p$ e le analoghe, ossia

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = -\frac{p}{d},$$

od anche, indicando con ϱ il valore comune dei quattro rapporti,

$$(2) \quad \cos\alpha = a\varrho, \quad \cos\beta = b\varrho, \quad \cos\gamma = c\varrho, \quad -p = d\varrho.$$

Le tre prime, quando si tenga conto della relazione fra i coseni di direzione di una retta (n.° 298, (5)), ci permettono di calcolare ϱ; si trova

$$(3) \qquad \varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

e quindi

$$(4) \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\beta = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \end{cases}$$

$$(5) \qquad -p = \frac{d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

l'ultima delle quali permette di decidere il segno del radicale, quando si osservi che p ha un segno determinato, ad es. positivo, in relazione col verso positivo fissato su n.

Moltiplicando la (1) per ϱ, e tenendo conto delle (2), la equazione del piano si presenta sotto la forma *normale*

$$(6) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

la quale, in virtù della (3), coincide termine a termine colla equazione

$$(7) \qquad \frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0,$$

quando in questa si stacchino i termini contenenti le singole variabili ed il termine noto.

Ora questi risultati, ed anche le stesse relazioni (2), valgono, qualunque sia la posizione del piano π rispetto agli assi. Infatti, se, ad es., π è parallelo all'asse x, nella prima delle (2) si ha $a = 0$, $\cos\alpha = 0$, mentre le altre rimangono inalterate; se π passa per O, nell'ultima delle (2) si porrà $d = 0$, $p = 0$, mentre le rimanenti sussistono, come si verificherebbe sostituendo per un momento al piano π un piano parallelo. Concludiamo che:

La equazione di ogni piano può scriversi, assumendo come coefficienti delle variabili x, y, z *i coseni di direzione di una normale al piano, e come termine noto la distanza, cambiata di segno, dell'origine dal piano. La equazione generale* (1) *di un piano si traduce nella forma normale* (6), *dividendone il primo membro per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti delle variabili.*

Giova pure tener presente il risultato contenuto nelle equazioni (4):

I coseni di direzione della normale ad un piano sono proporzionali ai coefficienti delle variabili nella equazione generale del piano, e si ottengono dividendo i detti coefficienti per la radice quadrata della somma dei loro quadrati.

302. Distanza di un punto da un piano. — Sia $P(x', y', z')$ il punto, ed il piano π sia dato mediante la equazione normale

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Si conduca per P il piano parallelo a π, il quale seghi n in N', e si ponga $ON' = p'$ (v. fig. a pag. 523); l'equazione normale di questo nuovo piano

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0,$$

dovrà esser soddisfatta dalle coordinate di P; segue

$$p' = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma.$$

Ora la distanza $\delta = PQ = N'N$ dal piano π è data da (cfr. n.° 116)

(8) $\delta = p - p' = -(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p)$;

dunque:

La distanza di un punto di date coordinate da un piano di data equazione normale è il valore opposto a quello, che assume il primo membro della equazione stessa, quando, al posto delle *variabili, si sostituiscano le coordinate del punto.* Qui la distanza figura con un segno, che è il segno di PQ, quando sulla retta PQ si assuma lo stesso verso positivo di n. Tutti i punti dello spazio, che stanno da una stessa banda di π, ad es. da quella contenente l'origine, hanno dal piano distanze positive; i punti dell'altra regione hanno distanze negative.

Se il piano è dato mediante una equazione generale, si ha (n.° 301):

La distanza del punto P(x′, y′, z′) *dal piano*

$$ax + by + cz + d = 0$$

è espressa da

$$\frac{ax' + by' + cz' + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{9}$$

Il segno del radicale può esser regolato in modo, che la distanza dell' origine dal piano riesca positiva (se $d \neq 0$).

Osservazione. — La (9) ci fa vedere che il valore assunto dal primo membro della equazione generale di un piano, quando al posto delle variabili si pongano le coordinate di un punto dato P, differisce per un fattore costante dalla distanza di P dal piano, ed assume l'uno o l'altro segno, secondo che P si trova dall'una o dall'altra banda rispetto al piano.

303. Retta e piano perpendicolari. — Una retta, uscente dal punto $P(x', y' z')$,

$$r) \qquad \frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}$$

è perpendicolare al piano

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

se i coseni di direzione della retta, che sono proporzionali ad l, m, n (n.° 299), uguagliano i coseni di direzione della normale al piano, che sono proporzionali ad a, b, c (n.° 301), se adunque l, m, n sono proporzionali ad a, b, c. Assumendoli uguali (come è lecito), si ha il risultato:

La retta uscente dal punto (x′, y′, z′), *e perpendicolare al piano* $ax + by + cz + d = 0$, *ha le equazioni*

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}.$$

In particolare, se il punto è l' origine, la retta sarà

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Similmente si vede che il piano perpendicolare alla retta r, condotto per il punto (x_0, y_0, z_0), ha l'equazione

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0).$$

304. Diedro di due piani; angolo di una retta con un piano. — Nei problemi, ove intervengono angoli di piani, o di piani con rette, giova sostituire a ciascun piano una retta normale, per ridursi così a questioni già trattate.

Ad es. il diedro di due piani

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

$$\pi') \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

uguaglia l'angolo (preso convenientemente) delle due rette normali a quei piani condotte dall'origine

$$n) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$n') \qquad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'};$$

dunque (n.° 300):

Il diedro dei due piani π, π' è dato da

$$\cos \pi\pi' = \frac{aa' + bb' + cc'}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

$$\operatorname{sen}^2 \pi\pi' = \frac{(ab' - a'b)^2 + (ac' - a'c)^2 + (bc' - b'c)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

La condizione di ortogonalità fra i due piani è

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Similmente, se è richiesto l'angolo del piano π colla retta

$$r) \qquad \frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

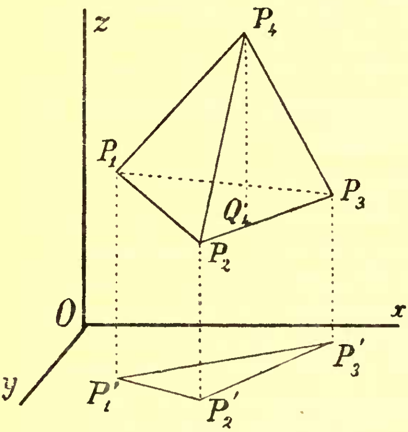
si conduca la normale n al piano π, e si osservi che l'angolo $\widehat{r\pi}$ è il complemento dell'angolo $\widehat{rn}$; dunque

$$\operatorname{sen} r\pi = \cos rn = \frac{al + bm + cn}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

L'annullarsi del numeratore esprime questa volta il parallelismo fra la retta r e il piano π, come, per altra via, si era veduto (n.° 292).

305. Area di un triangolo. — Per calcolare l'area di un triangolo giova il seguente lemma:

Il quadrato di un' area piana è uguale alla somma dei quadrati delle proiezioni ortogonali dell'area, sopra tre piani mutuamente perpendicolari. Sia Δ l' area, n una normale al piano che la contiene; come piani di proiezione si assumano i piani coordinati. Poichè il diedro formato dal piano di Δ col piano yz uguaglia l'angolo $\widehat{nx}$ delle due normali, sarà (n.° 296)



$$\Delta_x = \Delta \cos nx$$

la proiezione ortogonale dell' area sul piano yz; e similmente saranno

$$\Delta_y = \Delta \cos ny, \quad \Delta_z = \Delta \cos nz$$

le proiezioni sui piani zx, xy. Quadrando, sommando, e ricordando la (5) del n.° 298, si ha

$$\Delta^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2,$$

che dimostra il lemma.

Si voglia ora l'area Δ del triangolo $P_1P_2P_3$, i cui vertici hanno le coordinate $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Il triangolo, proiezione ortogonale di Δ sul piano xy, ha i vertici $P_1'(x_1, y_1)$, $P_2'(x_2, y_2)$, $P_3'(x_3, y_3)$, ed ha quindi l' area (n.° 120)

$$\Delta_z = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Con permutazioni circolari di x, y, z si ottengono le aree delle altre due proiezioni Δ_x, Δ_y; quadrando e sommando, in virtù del lemma precedente, si trova

$$(1) \quad \Delta^2 = \frac{1}{4} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\}.$$

306. Volume di un tetraedro. — Il tetraedro sia determinato dal triangolo $P_1P_2P_3$ che precede, e dal vertice $P_4(x_4, y_4, z_4)$. Calcoliamo anzitutto la distanza P_4Q_4 del quarto vertice dalla faccia opposta. Questa faccia ha l'equazione (n.° 283)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

quindi $P_4 Q_4$ è dato (n.° 302) da una frazione, il cui numeratore è il valore assunto dal determinante, quando al posto delle variabili si sostituiscano le coordinate (x_4, y_4, z_4) di P_4; ed il denominatore, essendo la radice quadrata della somma dei quadrati dei complementi algebrici di x, y, z nel determinante scritto, è uguale a $2\varDelta$, in virtù della (1) (n.° 306). Si ha così la relazione

$$P_4 Q_4 = \frac{1}{2\varDelta} \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se poi si ricorda la formola di geometria elementare, che esprime il volume di un tetraedro,

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = \frac{1}{3} \varDelta \cdot P_4 Q_4,$$

si trova in fine, trascurando i segni,

$$(2) \qquad P_1 P_2 P_3 P_4 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il volume di un tetraedro è dato da un sesto del determinante formato colle coordinate dei vertici e colle unità. Si confronti l'analoga formola, che dà l'area di un triangolo in geometria piana (n°. 120).

L'annullarsi del determinante è, come già sappiamo (n°. 283), la condizione, perchè i quattro vertici stiano in un piano.

Osservazione. — Al volume di un tetraedro $P_1 P_2 P_3 P_4$ si può attribuire un segno colla seguente convenzione.

Si immagini un osservatore coi piedi nell'interno del triangolo $P_1 P_2 P_3$ ed il capo dalla banda di P_4. Un punto, che descriva il perimetro del triangolo $P_1 P_2 P_3$ incontrandone i vertici nell'ordine scritto, apparirà ruotare, rispetto all'osservatore, in un verso determinato. Se questo verso è positivo (cioè da sinistra verso destra), si riguarderà come positivo il volume del tetraedro; altrimenti si riterrà negativo [1].

Volendo ora esaminare quali convenzioni debbano farsi, perchè la formola (2) valga anche nel segno, si noti che, se il vertice $P_4(x_4, y_4, z_4)$ varia, mentre P_1, P_2, P_3 restano fissi, il primo membro della (2) cambia segno, ogniqualvolta P_4 attraversa il piano $P_1P_2P_3$, passando dall'una all'altra banda, e solo in questo caso. Ma nel tempo stesso cambia segno anche il determinante a secondo membro, come risulta dalla osservazione del n.° 302. Dunque, per ogni posizione di P_4, i due membri della (2) hanno, o sempre lo stesso segno, o sempre il segno opposto; e lo stesso fatto si verifica variando gli altri vertici. Per decidere quale dei due casi si presenti, si consideri il tetraedro, che ha i vertici (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), il cui volume è positivo per definizione. Poichè il determinante, che si trova nella (2), acquista in corrispondenza il valore — 1, concludiamo che la formola (2) vale anche nei segni, quando a secondo membro si premetta il segno —.

307. Minima distanza fra due rette. — Per fare una applicazione di varie formole precedenti, proponiamoci di determinare la minima distanza fra le due rette

$$r_1) \qquad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$r_2) \qquad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

È noto che per minima distanza si intende la lunghezza del segmento, avente gli estremi su r_1, r_2, e perpendicolare ad entrambe le rette; segmento uguale alla distanza fra un punto qualsiasi di r_2, ad es. (x_2, y_2, z_2), ed il piano π_1 condotto per r_1 parallelamente ad r_2.

L'equazione del piano π_1 sarà del tipo

$$ax + by + cz + d = 0;$$

le condizioni di contenere la retta r_1, e di esser parallelo alla retta r_2, sono espresse (n.° 292) da

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0, \\ al_1 + bm_1 + cn_1 \quad &= 0, \\ al_2 + bm_2 + cn_2 \quad &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando a, b, c, d fra le quattro ultime relazioni, si ottiene l'equazione del piano sotto forma di un determinante di quarto

[1] Si può anche dire che il volume è positivo se ad un osservatore, che abbia i piedi in P_1 e il capo in P_2, il verso da P_3 a P_4 appare procedere da sinistra verso destra.

ordine uguagliato a zero; e questa equazione si riduce subito alla seguente:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora la distanza del punto (x_2, y_2, z_2) da questo piano è espressa dalla formola (n.° 302)

$$(2)\quad \delta = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2}},$$

che dà la *minima distanza richiesta*. Tenendo conto della formola (7) del n.° 300, la (2) può anche trascriversi così:

$$(2')\quad \delta = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}\ \operatorname{sen} r_1 r_2}.$$

L'annullarsi del numeratore esprime che le due rette stanno in un piano; cfr. n.° 293.

Si noterà che, se le due rette r_1, r_2 sono date mediante le loro equazioni normali (n.° 299), se dunque $l_1 \ldots, n_2$ sono proprio i coseni di direzione $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\gamma_2$ delle rette stesse, la (2′) diviene

$$(2'')\qquad \delta = \frac{1}{\operatorname{sen} r_1 r_2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Se invece la retta r_1 è definita come congiungente i punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P'(x', y', z')$, e la r_2 come congiungente $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P''(x'', y'', z'')$, nelle quali ipotesi possiamo porre (n.° 282)

$$l_1 = x' - x_1, \quad m_1 = y' - y_1, \quad n_1 = z' - z_1,$$
$$l_2 = x'' - x_2, \quad m_2 = y'' - y_2, \quad n_2 = z'' - z_2,$$

il determinante, che entra nella (2′), esprime (n.° 306) il sestuplo del volume del tetraedro $P_1 P' P_2 P''$, mentre i radicali danno i segmenti P_1P', P_2P''; e la formola (2') equivale alla seguente

(3) $$6\,P_1P'P_2P'' = P_1P' \cdot P_2P'' \cdot \delta \operatorname{sen} r_1 r_2.$$

Per tradurla in parole, si chiami (con Cayley) *momento di due rette sghembe* il prodotto della loro minima distanza per il seno dell'angolo che esse formano; si avrà allora il teorema di Chasles: *il sestuplo del volume di un tetraedro è espresso dal prodotto di due lati opposti per il momento delle rette, cui essi appartengono.*

Esercizi I. — 1) Una retta forma con tre assi ortogonali angoli uguali; qual'è il comune valore di questi?

2) Un piano stacca sui tre assi coordinati segmenti uguali; si calcoli il diedro formato da esso coi piani coordinati.

3) Si calcolino i coseni di direzione delle seguenti rette: *a*) $x = 2z + 3$, $y = 3z - 1$; *b*) $2x - y + 3z + 1 = 0$, $x - 3y + z - 1 = 0$; *c*) $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$; *d*) normale al piano $3x + 4y - 5z + 1 = 0$.

4) Dato il tetraedro, i cui vertici hanno per coordinate (0, 0, 2), (1, 0, 0), (— 2, 1, 0), (1, 1, 1), determinare le lunghezze dei lati, le aree delle facce e il volume.

5) Trovare l'angolo delle due rette

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z}{\sqrt{2}}; \quad \frac{x}{\sqrt{3}} = y,\ z = 0.$$

6) Gli spigoli di un angolo triedro hanno per equazioni: $x = 2y = z$, $-x = y = z$, $x = -3y = 2z$; si calcolino i valori delle sue facce e dei suoi angoli diedri. Si risolva lo stesso problema per il triedro, i cui spigoli sono le bisettrici delle facce del triedro coordinato.

7) Trovare l'angolo della retta $x = 2z$, $y = z + 1$ col piano $x - 3z + 2 = 0$.

8) Condurre per il punto (x', y', z') il piano perpendicolare alla retta $x = lz + p$, $y = mz + q$, e determinare la intersezione di quello con questa.

9) Determinare la distanza tra il punto e la retta dell'esercizio precedente; in particolare, tra il punto (2, 0, — 1) e la retta $x = 3z + 2$, $y = 2z - 5$. (Un primo metodo è suggerito dall'esercizio 8); si può anche cercare la distanza del punto da un piano generico condotto per la retta, disponendo del piano in guisa da render minima questa distanza; o finalmente determinare l'area del triangolo, che ha un vertice nel punto e gli altri due in due punti scelti sulla retta....).

10) Condurre per il punto (3, 1, — 1) il piano, che è parallelo alla retta $x = 2z + 3$, $y = z$, ed è perpendicolare al piano $2x + 3y - 4z + 5 = 0$.

11) Trovare le equazioni della retta passante pel punto (x', y', z'), e che incontra la retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ sotto un angolo di 60°, ovvero le è

perpendicolare. (Es. numerico: il punto sia l'origine, e la retta abbia le equazioni $x + 2y = 0$, $x - 3z + 1 = 0$).

12) Per la retta $x = lz + p$, $y = mz + q$ condurre un piano, che formi con un piano dato $ax + bx + cz + d = 0$ un diedro dato, e in particolare sia perpendicolare ad esso. (Es. numerico: la retta sia $2x = -y = -2z + 2$, il piano sia uno dei piani coordinati, ovvero il piano $x - y + z + 1 = 0$, e il diedro sia di 60°).

13) Dati due piani paralleli

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad ax + by + cz + d' = 0,$$

calcolare la loro distanza.

14) Date due rette parallele

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}, \qquad \frac{x - x''}{l} = \frac{y - y''}{m} = \frac{z - z''}{n},$$

calcolare la loro distanza.

II. — 15) I sei piani perpendicolari agli spigoli di un tetraedro nei punti medi di questi passano per uno stesso punto.

16) I piani, che passano rispettivamente per i punti medi degli spigoli di un tetraedro, e sono perpendicolari agli spigoli opposti, concorrono in uno stesso punto.

17) Scrivere le equazioni dei piani bisettori del diedro formato da due piani dati.

18) Scrivere le equazioni delle bisettrici dell'angolo delle due rette

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}, \qquad \frac{x - x'}{l'} = \frac{y - y'}{m'} = \frac{z - z'}{n'}.$$

19) I piani, che congiungono gli spigoli di un triedro colle bisettrici delle facce opposte, passano per una stessa retta; così pure i piani congiungenti due spigoli colle bisettrici esterne delle facce opposte, ed il piano congiungente il terzo spigolo colla bisettrice interna della terza faccia. Le bisettrici esterne delle tre facce stanno in un piano; così pure due bisettrici interne e la terza bisettrice esterna. (Come triedro si può assumere quello, supposto obliquo, degli assi coordinati).

20) I tre piani bisettori interni dei diedri di un triedro passano per una stessa retta; e passano pure per una retta due piani bisettori esterni, e il piano bisettore interno relativo al terzo spigolo. I tre piani bisettori esterni segano le facce opposte in tre rette di uno stesso piano; e così pure due piani bisettori interni, e il piano bisettore esterno relativo al terzo spigolo [1].

21) I sei piani bisettori interni dei diedri di un tetraedro passano per uno stesso punto; così pure passano per uno stesso punto i tre piani bisettori esterni relativi ai tre spigoli di una faccia, e i tre piani bisettori in-

[1] In questo, e nel seguente es., per caratterizzare i diedri interni, s'immagini un punto (ad es. l'origine), che cada in una delle regioni, in cui lo spazio è diviso dal triedro o tetraedro; si chiamerà interno ogni diedro contenente quel punto.

terni relativi ai rimanenti spigoli; finalmente passano per uno stesso punto i due piani bisettori interni relativi a due spigoli opposti, e i quattro piani bisettori esterni relativi ai rimanenti spigoli. Si hanno così complessivamente 8 punti, che sono centri di sfere tangenti alle facce del tetraedro.

22) Se in un tetraedro due coppie di spigoli opposti si compongono di rette ortogonali, la stessa proprietà spetta alla terza coppia.

23) Le quattro altezze di un tetraedro sono, in generale, sghembe a due a due; però, se due altezze si segano, allora si segano anche le altre due, e due spigoli opposti del tetraedro sono ortogonali; se, di più, altri due spigoli opposti del tetraedro sono ortogonali, le quattro altezze passano per uno stesso punto.

24) Insieme al triedro formato dai piani $a_i x + b_i y + c_i z = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ si consideri il triedro supplementare (che ha come spigoli le rette normali a quei piani condotte per l'origine). Si dimostri che i due triedri sono omologici, e che la retta, per cui passano i piani congiungenti gli spigoli omologhi, è normale al piano, ove giacciono le intersezioni di facce omologhe.

25) Se in un angoloide quadrispigolo completo (n.° 8) due coppie di facce opposte si compongono di piani perpendicolari, lo stesso fatto si verifica per la terza coppia; (come spigoli si assumano le rette $\frac{x}{a_i} = \frac{y}{b_i} = \frac{z}{c_i}$). Come si trasforma il teorema mediante la polarità ortogonale nella stella (n.° 190)?

III. — 26) Siano r, s due rette orientate, non parallele, e t sia la retta perpendicolare ad entrambe, orientata in guisa, che un osservatore situato lungo t nel solito modo (n.° 279, nota), il quale guardi la semiretta positiva r, abbia alla sua destra la semiretta positiva s. Si dimostri che i coseni di direzione della retta t sono espressi, in valore e segno, dalle formule

$$\cos xt = \frac{1}{\operatorname{sen} rs} \begin{vmatrix} \cos yr & \cos zr \\ \cos ys & \cos zs \end{vmatrix}, \text{ ecc.},$$

dove $\operatorname{sen} rs$ va preso in valore assoluto.

27) La convenzione stabilita nell'esercizio precedente attribuisce un segno alla minima distanza δ fra due rette r, s. Si dimostri che questo segno è opposto a quello, che ha nella formula (2″) (n.° 307), è pure opposto a quello, che δ assume in conseguenza della formula (3) (n.° 307). Il segno della minima distanza risulta positivo o negativo, secondo che, rispetto ad un osservatore disteso nel verso positivo di r (od s), il verso positivo lungo s (od r) procede da destra verso sinistra, o viceversa.

28) Date le equazioni di due rette sotto forma parametrica

$$x = x_0 + t \cos\alpha, \quad y = y_0 + t \cos\beta, \quad z = z_0 + t \cos\gamma,$$
$$x = x' + t' \cos\alpha', \quad y = y' + t' \cos\beta', \quad z = z' + t' \cos\gamma',$$

si determinino le coordinate degli estremi del segmento minima distanza tra le due rette, la lunghezza del segmento stesso, e la equazione della retta cui esso appartiene.

29) Sopra tre rette orientate r, s, t, uscenti da un punto O, si prendano tre segmenti $OR = OS = OT = 1$. Calcolando, secondo la formola

di geometria elementare, il volume del tetraedro $ORST$, nel quale si riguardino successivamente come basi le facce OST, OTR, ORS, si trovano le uguaglianze

$$\operatorname{sen} rr' \operatorname{sen} st = \operatorname{sen} ss' \operatorname{sen} tr = \operatorname{sen} tt' \operatorname{sen} rs,$$

dove r', s', t' indicano le proiezioni ortogonali degli spigoli r, s, t su quelle facce. Il comune valore dei tre prodotti, preso col segno che spetta al volume del tetraedro nominato (n.° 306), si chiama (STAUDT) *seno del triedro* rst, e si indica con $\operatorname{sen} rst$; esso è compreso fra -1 e $+1$, e raggiunge uno di questi estremi, se il triedro è trirettangolo; vale 0, se le tre rette stanno in un piano.

Si dimostri che si ha

$$\operatorname{sen} rst = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos xs & \cos xt \\ \cos yr & \cos ys & \cos yt \\ \cos zr & \cos zs & \cos zt \end{vmatrix},$$

e in conseguenza

$$\operatorname{sen}^2 rst = \begin{vmatrix} 1 & \cos rs & \cos rt \\ \cos sr & 1 & \cos st \\ \cos tr & \cos ts & 1 \end{vmatrix}.$$

30) Il volume di un tetraedro è uguale ad un sesto del prodotto di tre spigoli uscenti da un vertice per il seno del relativo triedro.

IV. — 31) Si estendano ad un sistema di n punti dello spazio, presi con determinati pesi, le relazioni enunciate in geometria piana al n.° 121, es. 16), 17), 18).

32) Se si considerano n punti $P_i(x_i, y_i, z_i)$, di pesi p_i dati, e una retta r, dicesi *momento d'inerzia del sistema dei punti rispetto ad* r la somma dei prodotti dei pesi dei singoli punti per i quadrati delle rispettive distanze da r. Quali sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati?

33) Dimostrare che il momento d'inerzia di un sistema di punti, rispetto ad una retta, è uguale al momento d'inerzia, rispetto alla parallela condotta pel centro di gravità, aumentato del prodotto del quadrato della distanza di queste due rette per la somma dei pesi. (Per semplicità si assuma come asse z la retta passante pel centro di gravità, della quale è parola nel teorema).

34) Il momento d'inerzia di un sistema di punti, rispetto ad una retta passante per l'origine delle coordinate, è

$$a_{11} \cos^2 rx + a_{22} \cos^2 ry + a_{33} \cos^2 rz + 2a_{23} \cos ry \cos rz$$
$$+ 2a_{31} \cos rz \cos rx + 2a_{12} \cos rx \cos ry,$$

dove a_{11}, a_{22}, a_{33} sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati, e

$$a_{23} = -\sum_1^n{}_i\, p_i y_i z_i, \quad a_{31} = -\sum_1^n{}_i\, p_i z_i y_i, \quad a_{12} = -\sum_1^n{}_i\, p_i x_i y_i.$$

In base a questo teorema e a quello dell'es. precedente, è dunque possibile determinare il momento d'inerzia di un sistema, rispetto a una retta qualunque, quando si conoscano il momento d'inerzia, rispetto ad un'altra retta, e la posizione del centro di gravità.

35) Estesi ai vettori nello spazio le definizioni enunciate nell' Oss. al n.° 111, si stabiliscano le formule, che esprimono i coseni di direzione di

un vettore $(R) \equiv AB$ (avente l'origine in A e il termine in B) in funzione delle componenti X, Y, Z del vettore.

36) Date le componenti di due vettori, trovare il coseno dell'angolo che essi formano, e la condizione affinchè sieno ortogonali.

37) La *somma geometrica*, o *risultante*, di un sistema di vettori si definisce come nel piano; essa è un nuovo vettore, che ha per componenti la somma delle componenti omonime dei vettori dati.

38) Dicesi *prodotto interno* di due vettori un numero, che è il prodotto delle loro lunghezze per il coseno dell'angolo che essi formano. Tanto dalla sua definizione, quanto dalla sua espressione $XX' + YY' + ZZ'$ in funzione delle componenti (X, Y, Z), (X', Y', Z') dei due vettori, si rileva che il prodotto interno gode la proprietà commutativa.

39) Dicesi *prodotto esterno* di due vettori (R), (S), aventi la stessa origine, un *nuovo vettore* (P), colla stessa origine, normale al piano dei due dati, avente per lunghezza il prodotto delle lunghezze di questi per il seno dell'angolo compreso, e diretto in modo, che la rotazione di un angolo inferiore a π, mediante cui (R) si sovrappone ad (S), avvenga, rispetto a (P), in verso positivo. La lunghezza di (P) è uguale al valore dell'area del parallelogrammo di cui (R), (S) sono due lati. Le componenti L, M, N di quel vettore sono le componenti (o proiezioni ortogonali sui piani yz, zx, zy) della detta area; precisamente

$$L = \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ ecc.,}$$

dove (x, y, z) sono le coordinate dell'origine comune, e (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) quelle degli estremi liberi dei due vettori. Dalla definizione geometrica e dall'espressione delle componenti si rileva che il prodotto esterno di due vettori muta segno, quando si scambi l'ordine di questi.

40) Per *momento di un vettore* $(R) \equiv AB$ *rispetto a un punto* M intendesi il prodotto esterno dei due vettori MA, MB, vale a dire un vettore uscente da M, normale al piano MAB, uguale al doppio dell'area del triangolo MAB, e diretto nel verso convenuto. Se le componenti di (R) sono X, Y, Z, le coordinate di A sono x_1, y_1, z_1, e quelle di M sono x, y, z, si trova che le componenti L, M, N di (P) sono

$$L = (y - y_1) Z - (z - z_1) Y, \text{ ecc.;}$$

ovvero, introducendo le componenti L_0, M_0, N_0 del momento dello stesso vettore rispetto all'origine delle coordinate:

$$L = L_0 - y_1 Z + z_1 Y,\ M = M_0 - z_1 X + x_1 Z,\ N = N_0 - x_1 Y + y_1 X.$$

41) La componente, secondo una retta r, del momento di un vettore (R), rispetto a un punto qualunque M di r, non dipende dalla posizione di M. (Per vederlo nel modo più semplice si assuma la retta come asse coordinato). La lunghezza di questo nuovo vettore, il quale dicesi *momento di* (R) *rispetto a* r, è data dal valore assoluto del prodotto $R\delta \operatorname{sen}\vartheta$, ove con δ si indichi la minima distanza fra r ed (R) e con ϑ l'angolo delle due rette.

42) Dato un sistema di vettori (R_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dicesi *momento risultante* del sistema, rispetto ad un punto, il vettore (P) somma dei mo-

menti dei vettori dati, rispetto a quel punto (che si dice *centro di riduzione* del sistema). Posto che il centro di riduzione abbia le coordinate x', y', z', e i vettori (R_i) abbiano le componenti X_i, Y_i, Z_i, e sieno applicati ai punti (x_i, y_i, z_i), le componenti di (P) risultano

$$L = \sum_1^n {}_i \left((y_i - y')Z_i - (z_i - z')Y_i \right), \text{ ecc.}$$

Indicando con L_0, M_0, N_0, le componenti del momento risultante, rispetto all'origine, e con X, Y, Z le componenti della risultante, (R), del sistema di vettori, si ha

$$L = L_0 - y'Z + z'Y, \text{ ecc.}$$

Com'è il momento risultante di un sistema, se la risultante è nulla?

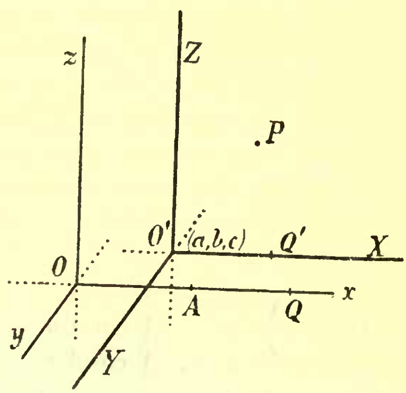
43) Il momento risultante di un sistema di vettori ha sempre la stessa proiezione sulla risultante del sistema, comunque vari il centro di riduzione. Se poi il centro di riduzione varia sopra una retta parallela alla risultante, i momenti corrispondenti sono vettori equipollenti; variano cioè solo da retta a retta. (Per dimostrare queste due proprietà si assuma la retta, di cui si tratta, come asse z).

Capitolo III.

Trasformazione delle coordinate.
Coordinate omogenee di punti e piani. - Coordinate proiettive.

308. Trasformazione delle coordinate cartesiane. — Proponiamoci il problema (cfr. n.° 122):

Fissati due sistemi di assi cartesiani nello spazio, stabilire tra le coordinate (x, y, z), (X, Y, Z) *di uno stesso punto* P *nei due sistemi, tali relazioni, che permettano di esprimere le* x, y, z *in funzione delle* X, Y, Z, *e viceversa.*



Distingueremo tre casi:

I.° Caso. — I nuovi assi (ortogonali o no) X, Y, Z siano paralleli agli antichi x, y, z; ma la nuova origine O' sia distinta dall'antica, e abbia, nell'antico sistema, le coordinate (a, b, c).

Per un punto P qualunque conduciamo il piano parallelo ad yz e YZ, e siano Q, Q' i punti, in cui esso sega gli assi

x, X; sia poi A il punto di incontro di x col piano YZ; si ha

$$OQ = x, \quad O'Q' = AQ = X, \quad OA = a,$$

ed inoltre

$$OQ = OA + AQ;$$

da questa, e dalle analoghe relazioni relative agli altri due assi, si deducono le formole richieste

$$(1) \qquad x = a + X, \quad y = b + Y, \quad z = c + Z.$$

Le formole per il passaggio inverso sono

$$X = x - a, \quad Y = y - b, \quad Z = z - c.$$

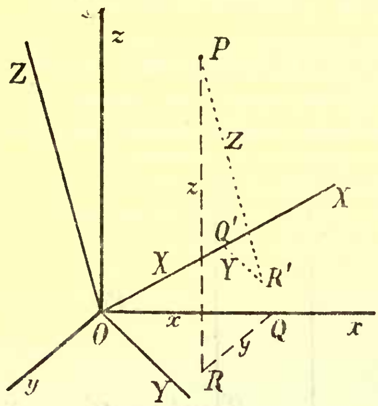
II.° Caso. — L'origine sia comune; ma siano diverse le direzioni degli assi nei due sistemi, che, per semplicità, supporremo *entrambi ortogonali.*

Di uno stesso punto P si costruiscano le antiche coordinate

$$OQ = x, \quad QR = y, \quad RP = z,$$

e le nuove

$$OQ' = X, \quad Q'R' = Y, \quad R'P = Z.$$



Proiettando ortogonalmente le due spezzate $OQRP$, $OQ'R'P$ (i cui lati sono paralleli rispettivamente agli antichi e ai nuovi assi coordinati) sopra una stessa retta, si ottengono proiezioni uguali. Facendo coincidere questa retta ordinatamente cogli assi x, y, z, e ricordando che

$$\widehat{xy} = \widehat{xz} = \widehat{yz} = \frac{\pi}{2},$$

si trovano le formole

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= X \cos Xx + Y \cos Yx + Z \cos Zx, \\ y &= X \cos Xy + Y \cos Yy + Z \cos Zy, \\ z &= X \cos Xz + Y \cos Yz + Z \cos Zz, \end{aligned} \right.$$

esprimenti le antiche coordinate mediante le nuove.

Le formole inverse si ricavano col semplice scambio delle lettere maiuscole e minuscole.

Si osserverà che i nove coefficienti, che entrano nelle formole (2) (coseni di direzione dei nuovi assi rispetto agli antichi), non sono tutti indipendenti fra loro; ma precisamente *sei* di quei coefficienti possono esprimersi in funzione degli altri *tre*. Infatti, per fissare la posizione del triedro XYZ rispetto al triedro xyz, basterebbe conoscere *gli angoli* $\widehat{xX}$, $\widehat{yX}$, che permettono di costruire l'asse X, e *l'angolo* $\widehat{xY}$, che determina Y sul piano normale in O ad X; l'asse Z sarà poi la normale comune ad X e Y. Segue di qua che fra quei nove coefficienti devono passare varie relazioni, di cui *sei* indipendenti. Fra queste relazioni le più importanti si ricordano nel modo seguente.

Si formi il determinante della sostituzione (2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos Xx & \cos Yx & \cos Zx \\ \cos Xy & \cos Yy & \cos Zy \\ \cos Xz & \cos Yz & \cos Zz \end{vmatrix}.$$

a) *La somma dei quadrati degli elementi di una stessa orizzontale, o verticale, del determinante* Δ *è uguale ad* 1; infatti, ad es., gli elementi della prima orizzontale sono i coseni di direzione della retta x rispetto ai tre assi ortogonali X, Y, Z (n.° 298, (5)).

b) *La somma dei prodotti degli elementi di una stessa linea (orizzontale o verticale) per gli elementi di una linea parallela è zero*, giacchè si ha, ad es. (n.° 298, (6)),

$$\cos Xx \cos Xy + \cos Yx \cos Yy + \cos Zx \cos Zy = \cos xy = 0.$$

c) *Il determinante* Δ *vale* ± 1; infatti, eseguendo il quadrato di Δ, secondo la nota regola, si ottiene un determinante, nel quale, in virtù delle relazioni *a*) e *b*), gli elementi principali valgono 1, e gli altri 0; dunque $\Delta^2 = 1$, $\Delta = \pm 1$. L'ambiguità nel segno si spiega nel seguente modo. Si supponga che il triedro trirettangolo XYZ vada ruotando con moto continuo intorno ad O, mentre il triedro xyz resta fisso; il valore di Δ, ove mutasse, dovrebbe variare con continuità; ma poichè Δ non può assumere che i valori $+1$ o -1, esso dovrà, durante il movimento, conservare sempre il valore $+1$, o il valore -1. Ora, con un movimento continuo, si può ottenere che le semirette positive X, Y vengano a sovrapporsi alle semirette positive x, y; allora la semiretta positiva Z verrà a coincidere, o colla semiretta positiva z, o colla semiretta negativa z. Nel primo caso si ha

$$\cos Xx = 1,\ \cos Yy = 1,\ \cos Zz = 1,\ \cos Xy = \ldots = 0,$$
$$\Delta = +1;$$

nel secondo

$$\cos Xx = 1,\ \cos Yy = 1,\ \cos Zz = -1,\ \cos Xy = \ldots = 0,$$
$$\Delta = -1.$$

Dunque il determinante Δ vale $+1$, o -1, secondo che è possibile, o no, sovrapporre il triedro XYZ al triedro xyz, in guisa che le semirette positive X, Y, Z coincidano colle semirette positive x, y, z. Nel primo caso i due triedri diconsi *congruenti*.

III.° Caso. — I due sistemi *ortogonali*, differiscano per l' origine e per la direzione degli assi.

Ragionando come in geometria piana (n.° 122), si perviene alle formole

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= X\cos Xx + Y\cos Yx + Z\cos Zx + a,\\ y &= X\cos Xy + Y\cos Yy + Z\cos Zy + b,\\ z &= X\cos Xz + Y\cos Yz + Z\cos Zz + c,\end{aligned}\right.$$

dove a, b, c sono le coordinate della nuova origine rispetto all' antico sistema.

Osservazione. — Varie volte basta ricordare che le formole per il passaggio da un sistema cartesiano ad un altro, sono del tipo

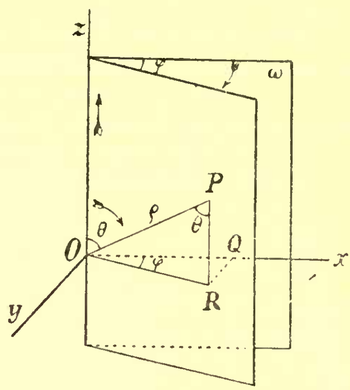
$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a + a'X + a''Y + a'''Z,\\ y &= b + b'X + b''Y + b'''Z,\\ z &= c + c'X + c''Y + c'''Z,\end{aligned}\right.$$

dove le quantità $a, \ldots, c'''$ sono costanti, indipendenti dalla posizione del punto, che si considera.

In questo tipo rientrano anche le formole per il passaggio da un sistema non ortogonale ad un altro sistema non ortogonale; esse infatti si otterrebbero proiettando ortogonalmente le spezzate formate dalle antiche e nuove coordinate (cfr. *Caso II*) sopra una retta normale ad uno dei piani yz, zx, xy, il che porterebbe, è vero, modificazioni nei coefficienti di X, Y, Z nelle formole (2) o (3); ma le formole stesse rimarrebbero lineari. In ogni caso: *nel passaggio da uno ad un altro sistema* *cartesiano, le coordinate antiche si esprimono mediante funzioni lineari delle nuove, e viceversa.*

309. Coordinate polari nello spazio. — In alcune questioni metriche, ed in varie applicazioni della matematica, giova far uso di un sistema di coordinate, che è analogo al sistema delle coordinate polari nel piano (n.° 123).

Fissato un punto O (*polo*), una retta orientata z per esso (*asse polare*), ed un semipiano ω per z (*piano polare*), ad ogni punto P dello spazio corrispondono la distanza $OP = \varrho$ (*raggio vettore*), il diedro φ del semipiano ω col semipiano zP (*azimuth, longitudine*), e l'angolo ϑ della semiretta positiva z colla semiretta OP (*distanza zenitale, colatitudine*). Viceversa, dati ϱ, φ, ϑ, resta pienamente determinato il punto P. Possiamo assumere perciò i valori ϱ, φ, ϑ come coordinate *polari* del punto P.



Per avere tutti i punti dello spazio, basta far variare ϱ fra 0 e $+\infty$, φ fra 0 e 2π, ϑ fra 0 e π. I punti, per cui $\varrho =$ cost., si trovano sopra una sfera di centro O; quelli, per cui $\varphi =$ cost., appartengono ad un semipiano (o piano) per l'asse polare; quelli, per cui ϑ è costante, stanno in un cono rotondo di vertice O ed asse z. Ed ogni punto dello spazio vien riguardato come intersezione di una di quelle sfere, di uno di quei piani e di uno di quei coni.

È facile stabilire le formole per il passaggio dal sistema delle coordinate polari ϱ, φ, ϑ al sistema cartesiano ortogonale x, y, z, che ha l'origine in O, l'asse z coincidente coll'asse polare ed il piano xz coincidente con ω. Se infatti si costruiscono le coordinate cartesiane OQ, QR, RP di P, dall'esame dei triangoli ORP, OQR, rettangoli rispettivamente in R e Q, seguono le formole

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= OQ = OR \cos\varphi = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi, \\ y &= QR = OR \operatorname{sen}\varphi = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, \\ z &= RP = \varrho \cos\vartheta. \end{aligned}\right.$$

Per il passaggio inverso servono le formole

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Esercizi. I — 1) Le formole per il passaggio da un sistema ortogonale ad un nuovo sistema ortogonale divengono

a) $\qquad x = X, \quad y = Y, \quad z = Z + c,$

se l'antico triedro xyz ha subito una traslazione del segmento c lungo l'asse z;

b) $\quad x = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi, \quad y = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi, \quad z = Z,$

se l'antico triedro ha subito una rotazione del diedro φ intorno all'asse z;

c) $\quad x = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi, \quad y = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi, \quad z = Z + c,$

se lo spostamento del triedro risulta da una rotazione intorno a z, seguita da una traslazione lungo z (*movimento elicoidale* intorno a z).

2) Si dimostri che le formole

$$x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z,$$
$$y = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z,$$
$$z = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z$$

definiscono una trasformazione ortogonale di coordinate coll'origine fissa, ogniqualvolta i coefficienti verifichino le sei relazioni

$$\Sigma\,\alpha_i{}^2 = 1, \quad \Sigma\,\beta_i{}^2 = 1, \quad \Sigma\,\gamma_i{}^2 = 1,$$
$$\Sigma\,\beta_i\gamma_i = 0, \quad \Sigma\,\gamma_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma\,\alpha_i\beta_i = 0.$$

Esistono infatti allora tre rette X, Y, Z mutuamente ortogonali, tali che $\cos xX = \alpha_1$, ecc. Da quelle sei relazioni seguono le altre indicate al n.° 308 (II Caso), e segue pure che, nel determinate $\varDelta$ della sostituzione, il complemento algebrico di ciascun elemento uguaglia l'elemento stesso moltiplicato per $\varDelta = \pm 1$.

3) In una trasformazione ortogonale di coordinate coll'origine fissa rimangono invariate le espressioni seguenti, formate colle coordinate di uno o più punti: $x^2 + y^2 + z^2$, $xx_1 + yy_1 + zz_1$, $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$, ed il determinante formato colle coordinate di tre punti. (La dimostrazione può darsi, sia eseguendo la verificazione diretta, sia badando al significato geometrico di quelle espressioni).

4) In una trasformazione ortogonale di coordinate, ove cambi l'origine, restano invariate le espressioni, che si deducono da quelle dell'es. precedente, sostituendo alle coordinate di uno o più punti le componenti di uno o più segmenti.

5) Siano xyz, XYZ due terne congruenti di assi ortogonali colla stessa origine O, ed x_1 sia la retta intersezione dei piani xy, XY, sulla quale si fissi arbitrariamente il verso positivo, ad es. in guisa che sia $\widehat{xx_1} < \pi$. Si può portare la prima terna a coincidere colla seconda mediante le tre rotazioni seguenti, da eseguirsi in verso positivo (n.° 279, nota): una rotazione intorno a z dell'angolo $\varphi = \widehat{xx_1}$, mediante la quale il triedro xyz assume la posizione x_1y_1z; una rotazione intorno a x_1 dell'angolo

$\vartheta = \widehat{zZ}$, mediante la quale il triedro $x_1 y_1 z$ assume la posizione $x_1 y_2 Z$ (ciò è possibile perchè z e Z sono ambedue perpendicolari ad x_1); finalmente una rotazione intorno a Z dell'angolo $\psi = \widehat{x_1 X}$, mediante la quale l'ultimo triedro viene a coincidere con XYZ (ciò è possibile perchè x_1 ed X sono perpendicolari a Z). Indicando con (x, y, z) (x_1, y_1, z), (x_1, y_2, Z), (X, Y, Z) le coordinate di uno stesso punto riferito successivamente alle terne di assi nominati, valgono le formole (es. 1))

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\varphi - y_1 \operatorname{sen}\varphi, & y &= x_1 \operatorname{sen}\varphi + y_1 \cos\varphi, \\ y_1 &= y_2 \cos\vartheta - Z \operatorname{sen}\vartheta, & z &= y_2 \operatorname{sen}\vartheta + Z \cos\vartheta, \\ x_1 &= X \cos\psi - Y \operatorname{sen}\psi, & y_2 &= X \operatorname{sen}\psi + Y \cos\psi. \end{aligned}$$

Eliminando x_1, y_1, y_2 tra queste, si ottengono infine le formole seguenti, dovute ad Eulero:

$$\begin{aligned} x &= X(\cos\varphi \cos\psi - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \cos\vartheta) - Y(\cos\varphi \operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi \cos\psi \operatorname{sen}\vartheta) \\ &\qquad + Z \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ y &= X(\operatorname{sen}\varphi \cos\psi + \cos\varphi \operatorname{sen}\psi \cos\vartheta) - Y(\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta) \\ &\qquad - Z \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ z &= X \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\vartheta + Y \cos\psi \operatorname{sen}\vartheta + Z \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Queste formole hanno il vantaggio di contenere esattamente il numero dei parametri indipendenti (*tre*: φ, ϑ e ψ, detti *angoli di* Eulero), da cui dipende la posizione del nuovo triedro rispetto all'antico.

6) Siano xyz, XYZ due terne congruenti di assi ortogonali, e sia P un punto qualsiasi avente nei due sistemi le coordinate (x, y, z), (X, Y, Z); un movimento, che porti il primo triedro a coincidere col secondo, porta il punto P in un nuovo punto P' avente, rispetto ai nuovi assi, le coordinate (x, y, z). Segue che le formole per la trasformazione delle coordinate ortogonali,

$$x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + a, \text{ ecc.},$$

quando il determinante $\Delta = [\alpha_1 \beta_2 \gamma_3]$ vale $+1$, possono interpretarsi come relazioni fra la posizione iniziale $P(X, Y, Z)$ e la posizione finale $P'(x, y, z)$ di uno stesso punto, riferito ad un *unico* sistema di assi XYZ. Le formole stesse definiscono dunque un movimento nello spazio, in quanto si tien conto solo della posizione iniziale e finale, facendo astrazione dalle posizioni intermedie. In particolare, le formole a), b), c) dell'es. 1) definiscono ordinatamente una traslazione parallela all'asse Z, una rotazione, o un movimento elicoidale intorno a questo asse; le formole (1) del n.° 308 definiscono una traslazione rappresentata dal vettore, che ha le componenti (a, b, c); le formole (2) del n.° 308 definiscono una rotazione intorno al punto fisso O, ecc.

7) Se xyz, XYZ sono due triedri trirettangoli congruenti colla stessa origine O, i piani condotti per le bisettrici interne degli angoli $\widehat{xX}$, $\widehat{yY}$, $\widehat{zZ}$, perpendicolarmente ai piani dei rispettivi angoli, passano per una stessa retta r, tale che $\widehat{rx} = \widehat{rX}$, $\widehat{ry} = \widehat{rY}$, $\widehat{rz} = \widehat{rZ}$. Facendo ruotare intorno ad r, di un angolo conveniente, il primo triedro, esso viene a sovrapporsi al secondo. Di qua, tenuto conto dell'es. precedente, si conclude che « la rotazione di un corpo intorno ad un punto può sempre esser sostituita

dalla rotazione intorno ad una retta uscente dal punto » (EULERO; cfr. n.° 185, es. 28)).

II — 8) Le formole (2) o (3) del n.° 308, quando si faccia astrazione da una parte dei legami tra i coefficienti, valgono pure per passare da un sistema *ortogonale* xyz ad un sistema *non ortogonale* XYZ. In tal caso però il determinante della sostituzione vale $\Delta = \operatorname{sen} XYZ$ (n.° 307, es. 29)). La sostituzione inversa (che si ottiene mediante risoluzione rispetto ad X, Y, Z) ha il determinante $\Delta' = \frac{1}{\operatorname{sen} XYZ}$. Da queste osservazioni segue che il determinante della sostituzione esprimente le coordinate *oblique* X, Y, Z di un punto mediante nuove coordinate *oblique* X_1, Y_1, Z_1, del punto stesso vale $\frac{\operatorname{sen} X_1 Y_1 Z_1}{\operatorname{sen} XYZ}$; (si introduca un sistema ortogonale ausiliare).

9) Si dimostri che, in coordinate oblique XYZ, il volume di un tetraedro è espresso da un sesto del solito determinante (n.° 306) moltiplicato per $\operatorname{sen} XYZ$; (si introduca un sistema ortogonale ausiliare).

III — 10) Nel sistema di coordinate polari, ogni retta orientata uscente dal polo è determinata dalla longitudine φ e dalla colatitudine ϑ di un suo punto qualsiasi. Si scrivano le equazioni della retta (φ, ϑ) riferita al sistema cartesiano fissato come al n.° 309, e si trovino i relativi coseni di direzione.

11) Date due rette (φ, ϑ), (φ_1, ϑ_1) uscenti dal polo di un sistema polare, determinare l'angolo che esse formano. La formola, cui si arriva, coincide colla nota formola di trigonometria sferica

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

dove a, b, c sono i lati ed A, B, C gli angoli di un triangolo sferico. Da questa formola, mediante permutazioni di lettere e passaggio al triangolo polare, si ricavano tutte le altre formole di trigonometria sferica.

12) Come coordinate (*cilindriche*) di un punto P dello spazio si possono adoperare la distanza $z = QP$ di P da un piano fisso Oxy, e le coordinate polari (ϱ, φ) del punto Q del detto piano rispetto al polo O e all'asse polare Ox. Il punto P risulta allora come intersezione di un piano ($z =$ cost.) parallelo al piano fisso, di un cilindro ($\varrho =$ cost.) rotondo intorno all'asse Oz, e di un semipiano ($\varphi =$ cost.) passante per il detto asse. Si trovino le formole per il passaggio dalle coordinate cilindriche alle coordinate cartesiane ortogonali x, y, z. Si dimostri poi che l'equazione di un piano in coordinate cilindriche può porsi sotto la forma

$$\varrho \cos(\varphi - \varphi_0) + cz = p,$$

dove φ_0, c e p sono costanti; quale ne è il significato geometrico?

310. Coordinate omogenee di punti. — Riprendiamo un sistema di assi cartesiani x, y, z, ortogonali o no, rispetto ai quali ogni punto proprio dello spazio ha certe coordinate, che indicheremo, in questo e in alcuni dei paragrafi seguenti, colle lettere maiuscole X, Y, Z. Abbiamo gia rilevato che le dette coordinate non si prestano a individuare i punti impropri dello spazio. Indicheremo ora come questo inconveniente si possa togliere, introducendo una quarta coordinata; basterà imitare ciò che in geometria piana si disse al n.° 124, e seg.

Dati quattro numeri x, y, z, t, di cui supporremo, pel momento, che t almeno non sia nullo, restano individuati i rapporti

$$(1) \qquad X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t},$$

e quindi il punto proprio P, che ha le coordinate cartesiane X, Y, Z. Se t varia, ed x, y, z (supposte ora non tutte nulle) restano fisse, il punto (1), le cui coordinate cartesiane variano proporzionalmente, descrive una retta uscente dall'origine, di equazioni

$$(2) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} \qquad (X, Y, Z \text{ variabili}).$$

E se t tende a zero, il punto (1) va allontanandosi all'infinito su questa retta. Converremo perciò di far corrispondere alla quaterna di numeri $(x, y, z, 0)$ il punto all'infinito della retta (2).

Da queste osservazioni risulta che ad ogni gruppo di quattro numeri (x, y, z, t), non tutti nulli, corrisponde un determinato punto proprio od improprio dello spazio, il quale non varia però, se a quei numeri si sostituiscono numeri proporzionali. Viceversa, ad ogni punto proprio od improprio corrispondono, colle leggi sopra indicate, infinite quaterne di numeri, tutte però composte di numeri proporzionali, e riguardate come equivalenti fra loro. In conclusione:

Ad ogni gruppo di quattro numeri x, y, z, t, *non tutti nulli, corrisponde un determinato punto* P *dello spazio; se* t $\neq$ 0, P *è proprio, ed ha le coordinate cartesiane* (1); *se* t = 0, P *sta all'infinito sulla retta* (2). *Viceversa, ad ogni punto* P *corrispondono infinite quaterne di numeri, tutte però composte di numeri proporzionali. Alla quaterna* (0, 0, 0, 0) *non corrisponde alcun punto dello spazio.*

I quattro numeri x, y, z, t, dei quali interessano solo i mutui rapporti, diconsi *coordinate* (*cartesiane*) *omogenee* del punto P.

Se si considera il tetraedro *fondamentale* costituito dai piani coordinati e dal piano all'infinito, si vedrà subito che ciascun vertice di esso ha tre delle coordinate omogenee nulle, mentre la rimanente può, ad es., prendersi uguale ad 1; così l'origine ha le coordinate (0, 0, 0, 1), il punto all'infinito dell'asse x ha le coordinate (1, 0, 0, 0), ecc.

Per un punto situato sopra uno spigolo del tetraedro due coordinate son nulle; così, per un punto dell'asse x le coordinate sono $(x, 0, 0, t)$, per un punto all'infinito sul piano yz si ha $(0, y, z, 0)$, ecc. Per un punto di una faccia del tetraedro una coordinata è nulla, ed è precisamente $x = 0$, se si tratta del piano yz, oppure $t = 0$, se si tratta del piano all'infinito, ecc. Vi è finalmente un punto *unità*, che ha le quattro coordinate uguali tra loro, ad es. uguali ad 1; è il punto, le cui coordinate cartesiane sono (1, 1, 1).

Per fare una applicazione delle cose dette, si noti che il punto all'infinito della retta

$$(3) \qquad \frac{X - X'}{l} = \frac{Y - Y'}{m} = \frac{Z - Z'}{n}$$

(o della parallela

$$\left. \frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n} \right)$$

ha le coordinate omogenee $(l, m, n, 0)$. Ed il punto all'infinito della retta

$$X = lZ + p, \quad Y = mZ + q$$

ha le coordinate $(l, m, 1, 0)$. Donde l'osservazione, spesso utile, che, *in assi ortogonali, le prime tre coordinate omogenee di un punto all'infinito sono proporzionali ai coseni della direzione che quel punto definisce* (la quarta coordinata essendo nulla) (n.° 299).

Il piano, che in coordinate cartesiane ha l'equazione

$$(4) \qquad aX + bY + cZ + d = 0,$$

in coordinate omogenee è rappresentato da

$$(4') \qquad ax + by + cz + dt = 0,$$

equazione soddisfatta dalle coordinate dei punti propri ed impropri del piano. L'ultima equazione (ma non la precedente) ha significato, anche se $a = b = c = 0$, $d \neq 0$, e rappresenta allora il *piano all'infinito*, $t = 0$.

Osservazione. — Sebbene si preferisca d'ordinario, nella geometria analitica, far uso di coordinate cartesiane non omogenee, giova tuttavia tener presenti le considerazioni che precedono, allo scopo di ritrovare, nel modo più rapido, alcune formole di uso continuo. Infatti le coordinate omogenee permettono di ricondurre alla nozione fondamentale di *appartenenza*, le relazioni di parallelismo fra rette o piani dello spazio. Così la condizione, già trovata (n.° 292, (1')), affinchè la retta (3) sia parallela al piano (4), si ricostruisce subito, esprimendo che le coordinate $(l, m, n, 0)$ del punto all'infinito della retta soddisfano all'equazione omogenea (4') del piano; si ha infatti

$$al + bm + cn = 0.$$

Per fare un' altra applicazione, si voglia scrivere l' equazione del piano passante per la retta (3) e parallelo alla retta

$$\frac{X - X_0}{l_0} = \frac{Y - Y_0}{m_0} = \frac{Z - Z_0}{n_0}.$$

Basterà osservare che il piano è determinato dai due punti $(X', Y', Z', 1)$, $(l, m, n, 0)$ della prima retta, e dal punto $(l_0, m_0, n_0, 0)$ della seconda; adoperando l' equazione, tradotta in coordinate omogenee, del piano determinato da tre punti (n.° 283, (5)), avremo

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X' & Y' & Z' & 1 \\ l & m & n & 0 \\ l_0 & m_0 & n_0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

relazione, che si riduce subito al tipo (1) del n.° 307.

311. Coordinate di piani. — L' equazione omogenea di un piano

$$ax + by + cz + dt = 0,$$

può scriversi, ed il piano è in conseguenza determinato, quando si conoscano i valori dei coefficienti a, b, c, d; ad ogni gruppo di valori di questi, escluso il gruppo $(0, 0, 0, 0)$, corrisponde un piano nello spazio. Viceversa, dato il piano, e scritta un'equazione che lo rappresenti, ad esempio la (1), ogni altra equazione, atta a rappresentare il piano stesso, si otterrà dalla (1), moltiplicandone i coefficienti per uno stesso fattore; sicchè avremo infiniti gruppi di valori (a, b, c, d) in corrispondenza al piano; ma da uno di questi gruppi si potrà dedurre ogni altro, moltiplicando i quattro numeri per uno stesso fattore.

Questa particolare corrispondenza fra l'ente geometrico *piano* ed il gruppo di quattro numeri, ci induce a chiamare a, b, c, d coordinate omogenee del piano (1). Dunque (cfr. n.° 126):

Per coordinate omogence di un piano noi intendiamo quattro numeri a, b, c, *d*, *tali che*

$$ax + by + cz + dt = 0$$

sia l' equazione omogenea del piano (in coordinate di punti); od $aX + bY + cZ + d = 0$ l'equazione del piano in coordinate cartesiane ordinarie.

Le quattro coordinate si indicano di solito colle lettere u, v, w, r. Non esse, ma i loro mutui rapporti hanno significati geometrici. Precisamente *i rapporti*

$$U = \frac{u}{r}, \quad V = \frac{v}{r}, \quad W = \frac{w}{r}$$

(che diconsi *coordinate plückeriane*, o *coordinate non omogenee* del piano) *esprimono i valori inversi, e cambiati di segno, dei segmenti che il piano stacca sugli assi coordinati, a partire dall' origine* (cfr. n.° 127).

Ritornando alle coordinate omogenee di piani, il lettore osserverà che nel *tetraedro fondamentale*, formato dai piani coordinati e dal piano all' infinito, ogni faccia ha nulle tre delle coordinate (ad es. il piano all'infinito ha le coordinate 0, 0, 0, 1), ogni piano passante per uno spigolo ha nulle due delle coordinate, ed ogni piano per un vertice ha nulla una coordinata.

312. Equazione del punto in coordinate di piani. — L'equazione, in coordinate omogenee di punti, del piano $\pi(u, v, w, r)$ è, per definizione,

$$ux + vy + wz + rt = 0; \tag{1}$$

ciò vuol dire che *la* (1) *è la condizione, affinchè il punto* P(x, y, z, t) *ed il piano* π(u, v, w, r) *si appartengano.*

Se nella (1) attribuiamo valori costanti alle u, v, w, r, e lasciamo variare x, y, z, t, il punto P descrive il piano π, per la qual ragione la (1), in questa ipotesi, si chiama appunto *l' equazione* (in coordinate di punti) *del piano punteggiato* π. Ma se invece, nella (1), teniamo fisse x, y, z, t, e facciamo variare u, v, w, r, il piano π si muove, in modo da passare sempre per il punto fisso $P(x, y, z\ t)$, e descrive la stella di piani P; riguardata sotto questo aspetto, *la equazione* (1), in coordinate di piani, *rappresenta una stella di piani*, o, come si suol dire, *il punto P, che ne è centro.* Mentre un punto, in coordinate puntuali, vien definito mediante un gruppo (di tre o quattro) numeri, ed il piano è rappresentato da una equazione lineare, accade, in coordinate di piani, che il piano venga definito mediante un gruppo (di tre o quattro) numeri, ed il punto mediante una equazione lineare (cfr. n.° 128).

Appare così sin d'ora, anche nella trattazione analitica, quella perfetta analogia, *dualità*, fra le relazioni grafiche di punti e le relazioni grafiche di piani nello spazio, che le considerazioni sintetiche ci avevano lasciato prevedere sin dal principio del corso (n.° 6).

Sarebbe facile mettere in rilievo questa dualità analitica, pur di riprendere in esame, coll'aiuto delle une e delle altre coordinate, le principali relazioni grafiche fra punti, rette e piani dello spazio, imitando ciò che, in geometria piana, fu fatto al n.° 129. Ci limiteremo, per brevità, a poche osservazioni.

a) Si abbiano due equazioni lineari in coordinate di piani

$$(2)\qquad \begin{cases} au + bv + cw + dr = 0, \\ a'u + b'v + c'w + d'r = 0, \end{cases}$$

rappresentanti staccatamente due punti $P(a, b, c, d)$, $P'(a', b', c', d')$. Ogni gruppo di coordinate (u, v, w, r), che soddisfi entrambe le equazioni (2), rappresenta un piano, che passa per i punti P, P', e quindi per la retta PP'. *In coordinate di piani, una retta* (riguardata come asse di un fascio di piani) *vien rappresentata da due equazioni lineari, le quali, separatamente, definiscono due punti della retta* (cfr., per la considerazione duale il n.° 289).

Una combinazione lineare delle equazioni (2),

$$\lambda(au + \ldots) + \mu(a'u + \ldots) = 0,$$

rappresenta un punto $P''(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c', \lambda d + \mu d')$ della retta PP'; il rapporto $\frac{\mu}{\lambda}$ è la coordinata proiettiva del punto stesso, rispetto ai punti fondamentali P', P e rispetto al punto per cui $\lambda = \mu$ [1]. Conviene enunciare, sotto

[1] La dimostrazione di questo fatto si dà col procedimento seguito, in geometria piana, nella nota a piè della pag. 211.

la forma seguente, il risultato ottenuto, insieme al duale, che risulta dal n.° 288:

Ogni punto della retta congiungente due punti $P(a, b, c, d)$, $P'(a', b', c', d')$ *ha coordinate del tipo* $(\lambda a + \mu a', \ldots, \lambda d + \mu d')$, *dove* $\frac{\mu}{\lambda}$ *è coordinata proiettiva, sulla retta, di quel punto rispetto a certi punti fondamentali, tra cui* P' *e* P.

Ogni piano per la retta intersezione dei due piani $\pi(a, b, c, d)$, $\pi'(a', b', c', d')$ *ha coordinate del tipo* $(\lambda a + \mu a', \ldots, \lambda d + \mu d')$, *dove* $\frac{\mu}{\lambda}$ *è coordinata proiettiva, nel fascio, di quel piano rispetto a certi piani fondamentali, tra cui* π' *e* π.

b) Date tre equazioni lineari ed omogenee in u, v, w, r,

$$au + \ldots = 0, \quad a'u + \ldots = 0, \quad a''u + \ldots = 0,$$

rappresentanti tre punti, il problema analitico di trovare un sistema di valori non tutti nulli (u, v, w, r) soddisfacente alle tre equazioni, si traduce nel problema geometrico di costruire il piano contenente i tre punti. Ogni combinazione lineare

$$\lambda(au + \ldots) + \mu(a'u + \ldots) + \nu(a''u + \ldots) = 0$$

delle tre equazioni rappresenta un ulteriore punto di quel piano; donde l'enunciato di sinistra (cfr. n.° 291):

Ogni punto del piano congiungente tre punti (a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d'') *ha coordinate del tipo*

Ogni piano per il punto intersezione di tre piani (a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d'') *ha coordinate del tipo*

$$(\lambda a + \mu a' + \nu a'', \ldots, \lambda d + \mu d' + \nu d'') \; (^1)$$

c) In breve, ogni procedimento analitico atto a dimostrare, col mezzo delle coordinate, una proprietà grafica di punti, rette e piani dello spazio, può ricevere una doppia interpretazione, secondo che le coordinate, di cui vien fatto uso, si riguardano come coordinate di punti o coordinate di piani. Le due interpretazioni conducono a due risultati, i cui enunciati si ottengono l'uno dall'altro collo scambio delle parole *punto* e *piano*, lasciando inalterata la parola *retta*.

---

(1) Sarebbe facile dimostrare, ma non occorre per il seguito, che λ, μ, ν possono riguardarsi come coordinate proiettive, entro il piano punteggiato o la stella di piani, del punto o piano variabile, rispetto a quattro elementi fissi, tra cui i tre elementi dati.

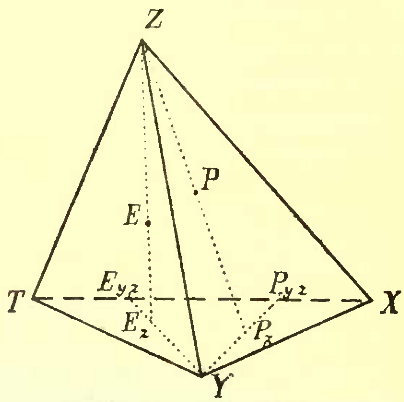
Si ha qui una giustificazione analitica della *legge di dualità nello spazio*, la quale appunto autorizza il suddetto scambio di parole negli enunciati delle proprietà grafiche (cfr. n.° 130).

* **313. Coordinate proiettive di punti.** — La nozione di coordinate cartesiane (omogenee o no) è fondata sopra il concetto metrico di lunghezza, o rapporto di segmenti. Volendo operare con soli concetti proiettivi, ed ottenere un sistema di coordinate particolarmente atto allo studio delle proprietà grafiche, si procederà nel modo seguente, suggerito dall'analogia colle considerazioni svolte in geometria piana al n.° 132 e seg.

Si parta da un tetraedro qualsiasi $XYZT$, e si fissi inoltre ad arbitrio un punto E, che non appartenga ad alcuna faccia del tetraedro. Allora, per ogni punto P dello spazio, restano individuati i tre doppi rapporti

(1) $X = \overline{YZ}(XTEP)$, $Y = \overline{ZX}(YTEP)$, $Z = \overline{XY}(ZTEP)$,

dove il primo simbolo indica il doppio rapporto dei piani proiettanti dallo spigolo YZ i punti X, T, E, P, e similmente gli altri. Viceversa, noti quei doppi rapporti, sono individuati i piani proiettanti il punto P dai tre lati del triangolo XYZ, ed è quindi individuato il punto P, eccettuato solo il caso che questo punto stia nel piano XYZ (nel qual caso quei doppi rapporti valgono, in generale, $\pm\infty$). Chiameremo perciò i valori (1) *coordinate proiettive* (non omogenee) del punto P, rispetto al *tetraedro fondamentale* $XYZT$ ed al *punto unità* E, il quale ha le coordinate $X = Y = Z = 1$. Si osservi subito che, se la faccia XYZ è il piano all'infinito dello spazio, i doppi rapporti (1) si riducono a rapporti semplici, e le coordinate proiettive X, Y, Z divengono le coordinate cartesiane di



P rispetto agli assi cartesiani TX, TY, TZ, quando, come unità lineari (generalmente diverse) per misurare la prima, la seconda e la terza coordinata, si assumano le coordinate omonime del punto E, il quale adunque viene ad avere le coordinate cartesiane 1, 1, 1.

Ritornando ad un tetraedro generale $XYZT$, giova notare che, se i punti P, E vengono proiettati da Z sul piano TXY in P_z, E_z, le prime due coordinate proiettive X, Y del punto P sono, anche nel piano TXY, le coordinate proiettive di P_z rispetto al triangolo TXY e al punto unità E_z (n.° 132); mentre, se P ed E si proiettano dallo spigolo YZ sullo spigolo opposto XT in P_{yz}, E_{yz}, la coordinata X risulta pure coordinata proiettiva di P_{yz} rispetto ai punti fondamentali X, T, E_{yz}. E similmente per le altre facce e spigoli.

Le coordinate proiettive, non omogenee, definite dalle (1), non si prestano, come dicemmo, a rappresentare i punti del piano XYZ. L'inconveniente si toglie introducendo l'omogeneità; definendo, cioè, come *coordinate proiettive omogenee del punto* P, rispetto al tetraedro e al punto unità suddetti, quattro numeri, non tutti nulli, x, y, z, t, tali che siano soddisfatte le sei relazioni seguenti:

$$(2)\begin{cases}\dfrac{x}{t}=\overline{YZ}(XTEP),\ \dfrac{y}{t}=\overline{ZX}(YTEP),\ \dfrac{z}{t}=\overline{XY}(ZTEP),\\[2mm] \dfrac{y}{z}=\overline{TX}(YZEP),\ \dfrac{z}{x}=\overline{TY}(ZXEP),\ \dfrac{x}{y}=\overline{TZ}(XYEP).\end{cases}$$

Ciò è sempre possibile (ed in infiniti modi, potendosi dare un valore arbitrario ad una delle quattro coordinate), perchè tre delle relazioni (2), ad es. le tre dell'ultima orizzontale, sono conseguenze delle tre rimanenti. Si ha infatti, sul piano TXY, per quanto sopra dicemmo,

$$X=\frac{x}{t}=Y(XTE_zP_z),\quad Y=\frac{y}{t}=X(YTE_zP_z),$$

e quindi (n.° 133)

$$\frac{x}{y}=T(XYE_zP_z)=\overline{TZ}(XYEP).$$

I vertici del tetraedro fondamentale hanno le seguenti coordinate proiettive omogenee:

$X(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $Y(0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $Z(0,\ 0,\ 1,\ 0)$, $T(0,\ 0,\ 0,\ 1)$; ogni punto dello spigolo TX ha $y=z=0$, ecc.; ogni punto della faccia TXY ha $z=0$, ecc.; il punto unità ha le coordinate (1, 1, 1, 1). Ben inteso, qui e sempre, le quattro coordinate omogenee di un punto possono moltiplicarsi per uno stesso fattore, non nullo, senza che il punto si alteri.

Dovremmo ora trattare in coordinate proiettive le relazioni fondamentali di posizione fra punti, rette e piani. Ma vale qui, e per gli stessi motivi, l'osservazione analoga a quella fatta in geometria piana (n.° 132). *Tutti i risultati ottenuti in coordinate cartesiane ordinarie nel Cap. I.* (di questa Parte quarta), *e tradotti in coordinate cartesiane omogenee nel* n.° 310 *e seg.*, *valgono senz'altro in coordinate proiettive, non omogenee od omogenee, purchè agli elementi all' infinito, che colà talora esplicitamente o tacitamente intervengono, si sostituiscano ora gli elementi del piano fondamentale* XYZ.

In particolare, un piano è rappresentato sempre da una equazione lineare ed omogenea

$$ax + by + cz + dt = 0,$$

in coordinate proiettive omogenee; equazione che manca di uno, due o tre termini, secondo che il piano passa per uno, due, o tre vertici del tetraedro fondamentale; sicchè, ad es., le faccie di questo, opposte ai vertici X, Y, Z, T, hanno rispettivamente le equazioni $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

Una retta è rappresentata ancora da due equazioni lineari ed omogenee, relative a due piani passanti per essa; ad es. lo spigolo XY del tetraedro ha le equazioni $z = 0$, $t = 0$; ecc.

* **314. Coordinate proiettive di un piano.** — Se un piano π è rappresentato in coordinate proiettive omogenee di punti (x, y, z, t) dall'equazione

(1) $$ux + vy + wz + rt = 0,$$

possiamo chiamare i coefficienti u, v, w, r *coordinate proiettive omogenee* del piano π.

Di siffatte coordinate può anche darsi una definizione diretta, duale a quella adottata per le coordinate proiettive di punti. Si chiamino a tal fine u, v, w, r le faccie del tetraedro fondamentale opposte ad X, Y, Z, T, rispettivamente; e si dica e il piano (*piano unità*), che ha, in coordinate proiettive omogenee di punti, la equazione

(2) $$x + y + z + t = 0.$$

Si dimostra allora, collo stesso ragionamento tenuto in geometria piana (n.° 134), che il rapporto $\frac{u}{v}$ delle due prime coordinate del piano π, rappresentato dalla (1), ha il seguente significato geometrico:

$$\frac{u}{v} = \overline{wr}(u\ v\ e\ \pi),$$

dove il secondo membro indica il doppio rapporto dei punti segati, sullo spigolo $wr \equiv XY$ del tetraedro fondamentale, dai piani u, v, e, π, vale a dire il doppio rapporto formato, sullo spigolo XY, dai punti Y, X e dalle intersezioni con e, π; ed analoghi significati hanno gli altri cinque rapporti delle coordinate u, v, w, r. Quanto al piano unità (2), si riconosce che esso è l'*armonico* del punto unità E, rispetto al tetraedro fondamentale, vale a dire: ciascuno spigolo del tetraedro (ad es. XY) sega il piano e ed il piano, che proietta E dallo spigolo opposto (ZT), in due punti, i quali separano armonicamente i vertici del tetraedro (X, Y) situati sul primo spigolo.

Facendo uso, nel tempo stesso, di coordinate di punti e di coordinate di piani, relative ad un medesimo tetraedro fondamentale, la (1) può riguardarsi come la condizione, perchè un punto (x, y, z, t) ed un piano (u, v, w, r) si appartengano. Se poi nella (1) si fanno variare le prime, o le seconde, coordinate, essa diviene o la equazione del piano (u, v, w, r) in coordinate di punti, o la equazione del punto (x, y, z, t) in coordinate di piani. Dunque: *un punto, in coordinate proiettive omogenee di piani, è rappresentato da un' equazione lineare ed omogenea.* In breve, si trasportano qui i risultati stabiliti al n.° 312, colla solita avvertenza relativa alla sostituzione del piano all'infinito col piano XYZ.

Osservazione. — Quando si voglia far uso sistematico di coordinate proiettive, conviene adottare una notazione più simmetrica, che qui mi limito ad accennare.

Indicando con X_1, X_2, X_3, X_4 i vertici del tetraedro fondamentale, con E il punto unità, con x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate proiettive omogenee di un punto P qualsiasi, valgono le relazioni di definizione

$$\frac{x_i}{x_k} = \overline{X_l X_m}(X_i\ X_k\ E\ P),$$

dove $i\ k\ l\ m$ è una qualsiasi permutazione dei numeri 1, 2, 3, 4. Il vertice X_l ha tutte le coordinate nulle, tranne la x_i; un punto dello spigolo $X_i X_k$ ha $x_l = 0$, $x_m = 0$; un punto della faccia $X_i X_k X_l$ opposta ad X_m ha $x_m = 0$; ecc.

L' equazione di un piano π, in coordinate omogenee di punti, è del tipo

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

dove le u_i sono coefficienti, che chiameremo coordinate proiettive omogenee del piano; queste possono definirsi direttamente mediante le formole

$$\frac{u_i}{u_k} = \overline{u_l u_m}(u_i \; u_k \; e \; \pi),$$

intendendo che u_i sia la faccia del tetraedro opposta al vertice X_i, ed e sia il piano unità di equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

* **315. Trasformazione delle coordinate proiettive.** — Collo stesso ragionamento fatto in geometria piana (n.° 136), si stabiliscono le relazioni, che passano fra le coordinate proiettive omogenee di uno stesso punto (o di uno stesso piano), riferito a due diversi sistemi di dette coordinate. Limitiamoci ad enunciare il risultato:

Stabiliti nello spazio due diversi sistemi di coordinate proiettive ed omogenee, le coordinate di uno stesso punto (o piano) nei due sistemi sono collegate da una sostituzione lineare ed omogenea, a determinante non nullo; e viceversa. In simboli, dette x_i ed x_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate proiettive di uno stesso punto (o piano), riferito ai due sistemi nominati, valgono relazioni del tipo

$$(1) \qquad \varrho x_i' = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

dove le a_{ik} sono sedici costanti, le quali compongono un determinante del quarto ordine diverso da zero, e ϱ è un coefficiente di proporzionalità non nullo, che potrebbe anche supporsi uguale ad 1.

Le formole (1), ove le x_k si riguardino come coordinate *cartesiane omogenee,* forniscono una definizione analitica delle coordinate *proiettive omogenee* (di punti) x_i'.

Capitolo IV.

Rappresentazione analitica delle superficie e delle linee nello spazio.

316. Equazioni di un luogo di punti. — Un punto, che si muova nello spazio con data legge, può descrivere una linea o una superficie. Noi vedremo ora che le linee e le superficie possono rappresentarsi mediante equazioni, contenenti, come variabili, le coordinate del punto mobile.

In linea generale, data una o più equazioni a tre variabili x, y, z (delle quali una o due potrebbero eventualmente mancare), si considerino tutte le terne di valori (x, y, z) soddisfacenti insieme le equazioni proposte. Quando sia fissato nello spazio un sistema qualsiasi di coordinate non omogenee, o cartesiane, o polari, . . . , ad ognuna di quelle terne corrisponde un punto avente le coordinate (x, y, z). Il luogo di questi punti si dirà *rappresentato analiticamente dalle equazioni date.* Il luogo avrà *due dimensioni*, e sarà, nei casi ordinari, una *superficie*, quando di tre valori x, y, z, soddisfacenti alle equazioni date, si possano assegnare ad arbitrio *due*, entro limiti convenienti, rimanendo in conseguenza determinato il terzo, in uno o più modi; il luogo avrà *una dimensione*, e sarà, nei casi ordinari, una *linea,* quando si possa assegnare ad arbitrio il valore di *una* sola coordinata, rimanendo determinate, in uno o più modi, le altre due.

Viceversa, se un punto si muove nello spazio con data legge, le coordinate del punto varieranno, soddisfacendo a certe relazioni traducenti la legge, che regola il movimento; queste relazioni saranno le *equazioni del luogo.*

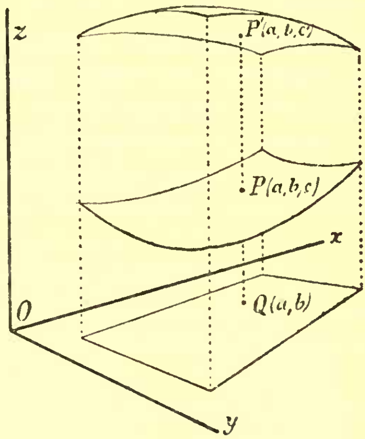
317. Equazione di una superficie. — Per precisare i concetti che precedono, partiamo da una sola equazione a tre variabili x, y, z, che possiamo interpretare come coordinate cartesiane ordinarie di un punto nello spazio; sia

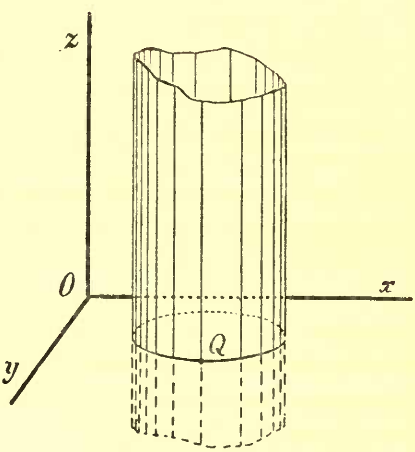
$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Per costruire un punto del luogo rappresentato dalla (1), si attribuiscano alle due prime coordinate valori arbitrari $x = a$, $y = b$; rimarrà una equazione ad una sola incognita z:

$$f(a,\ b,\ z) = 0,$$

la quale, ove i valori attribuiti ad x, y siano scelti in intervalli convenienti, potrà fornire per z uno o più valori $z = c, c', \ldots$ I punti $P(a, b, c)$, $P'(a, b, c'), \ldots$ appartengono al luogo, e si trovano sopra una retta parallela a z, condotta per il punto $Q(a, b)$ del piano xy. Facendo variare il punto Q nel detto piano, entro un' area conveniente, e ripetendo per ogni posizione di Q la considerazione precedente, si otterranno infiniti punti $P, P', \ldots, P_1, P_1', \ldots$, i quali (ove siano soddisfatte per la z, considerata come funzione di x, y, certe condizioni di continuità, che si verificano nei casi ordinari) costituiranno una superficie, composta di una o più falde; la (1) sarà *la equazione della superficie.*





318. — L' equazione di una superficie può presentare varie particolarità, che è opportuno notare. Può nella equazione mancare una coordinata, ad esempio la z, e la equazione ridursi al tipo

$$(2) \qquad f(x,\ y) = 0.$$

Ora l'equazione stessa, nel piano $xy (z = 0)$, rappresenta una certa linea (n°. 137), luogo di un punto $Q(a, b)$, le cui coordinate soddisfano la (2). Ma poichè z non entra nell' equazione (2), l' equazione sarà soddisfatta dalle coordinate

$x = a$, $y = b$, z arbitraria, di ogni punto della retta condotta pel punto Q parallelamente all' asse z; sicchè tutta quella retta sta sulla superficie. Questa è costituita da infinite rette parallele a z, condotte per i singoli punti della linea piana; la superficie è, in tal caso, un *cilindro*, avente come *generatrici* quelle rette. Dunque: *nello spazio, un'equazione contenente due sole coordinate cartesiane, rappresenta un cilindro, le cui generatrici sono parallele all'asse della coordinata rimanente.*

Se poi l' equazione della superficie contenesse una sola coordinata, x, e fosse soddisfatta dai valori $a, a', \ldots$ di x, la superficie sarebbe costituita dai piani (paralleli ad yz)

$$x = a, \quad x = a', \ldots$$

È pur notevole il caso che *l' equazione della superficie contenga omogeneamente lè tre coordinate cartesiane*, in guisa da potersi ridurre alla forma

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \tag{3}$$

in cui solo compariscono i rapporti di due delle tre coordinate alla terza. Allora *la superficie è un cono col vertice nell'origine*, si compone cioè di infinite rette uscenti dall' origine. Infatti, se la equazione (3) è soddisfatta dalle coordinate di un punto $P(x, y, z)$, l' equazione stessa viene evidentemente soddisfatta dalle coordinate (kx, ky, kz) di ogni punto della retta congiungente P coll' origine; questa retta appartiene dunque alla superficie.

319. Equazioni di una linea nello spazio. — Due equazioni nelle coordinate di un punto variabile

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

rappresentano il luogo di quei punti, che, colle loro coordinate, soddisfano insieme le due equazioni, e quindi appartengono alle due superficie rappresentate da quelle equazioni. Questi punti costituiscono la *intersezione* delle due superficie, cioè, in generale, una *linea*, una *curva* (composta di una o più parti), che si dirà rappresentata dalle equazioni (1).

Una linea, nello spazio, si suole rappresentare mediante due equazioni, le equazioni di due superficie passanti per essa.

Ogni equazione

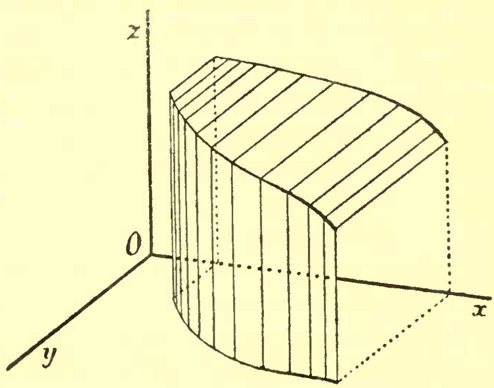
$$\psi(x, y, z) = 0,$$

che si possa dedurre come *conseguenza* delle (1), che sia adunque soddisfatta da ogni soluzione (x, y, z) del sistema (1), rappresenta una superficie passante per la linea (1). E se il sistema (1) è *equivalente* al sistema

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0,$$

per modo che ogni soluzione di ciascuno dei due sistemi sia soluzione anche dell' altro, la stessa linea sarà rappresentata indifferentemente dal sistema (1) o dal sistema (2).

Se, in particolare, dalle equazioni (1) noi deduciamo una terza equazione $F(x, y) = 0$, eliminando una delle variabili, ad es. la z, questa equazione rappresenterà un cilindro (n.° 318) passante per la linea (1), ed avente le generatrici parallele all' asse z, precisamente il cilindro ottenuto proiettando la linea parallelamente all' asse z. Analogamente si formerebbero le equazioni dei cilindri proiettanti la linea parallelamente agli assi x, y. E la linea potrebbe rappresentarsi mediante le equazioni di due di questi cilindri, ad es.



$$(3) \qquad F(x, y) = 0, \quad \Phi(x, z) = 0;$$

però i due cilindri avranno, in generale, altre curve in comune oltre alla linea primitiva, sicchè le equazioni (3) verrebbero a rappresentare questa linea insieme a quelle curve ([1]).

320. Intersezione di tre superficie. — Un sistema di tre equazioni, con tre coordinate,

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0$$

([1]) Queste considerazioni si trovano esposte, in un caso particolare, al n°. 289, quando si trattava di rappresentare una retta mediante le equazioni di due piani per essa.

rappresenta quei punti, che sono comuni alle tre superficie $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$; punti, che possono anche riguardarsi come intersezioni della superficie $\psi = 0$, colla linea $f = 0$, $\varphi = 0$, ecc. In generale, si tratterà di un *gruppo di punti*, in numero finito o infinito; ma, in casi particolari, quei punti potrebbero succedersi con continuità, e costituire una linea o superficie comune alle tre superficie (1).

321. Superficie algebriche; ordine della superficie. — Riprendiamo una sola equazione, in *coordinate cartesiane*, rappresentante una superficie. Questa dicesi *algebrica, d'ordine n*, se la equazione è algebrica, e (ridotta alla forma razionale intera) ha il grado n. In caso contrario, la superficie è *trascendente.*

Le superficie algebriche di primo ordine sono i *piani*. Le superficie di secondo ordine verranno studiate in seguito; fra di esse vedremo subito esservi la sfera.

Che l' ordine di una superficie algebrica sia un carattere della superficie, indipendente dal particolare sistema di assi cartesiani, a cui la superficie vien riferita, si dimostra collo stesso ragionamento tenuto in geometria piana (n.° 141), il quale fa vedere che il grado dell'equazione della superficie non si altera, quando si eseguisca una trasformazione di coordinate cartesiane (n.° 308).

Osservazione. — In coordinate cartesiane omogenee (x, y, z, t), una superficie algebrica d'ordine n è rappresentata da una equazione algebrica, razionale, intera ed *omogenea*, di grado n, tale cioè, che la somma degli esponenti di x, y, z, t in ciascun termine sia n. Il passaggio dall' equazione non omogenea, all'omogenea, o viceversa, si fa tenendo presenti le (1) del n°. 310.

Anche in coordinate proiettive, una superficie d'ordine n è rappresentata da un' equazione di grado n; ciò per il fatto che le formole di trasformazione da coordinate cartesiane omogenee a coordinate proiettive omogenee sono lineari (n.° 315).

322. Significato geometrico dell' ordine di una superficie. — Che l' ordine di una superficie algebrica sia un carattere geometrico di questa, risulta dal seguente teorema:

Una superficie algebrica d'ordine n *è segata da ogni retta, che non vi appartenga, in* n *punti, e da ogni piano, che non vi appartenga, in una curva d' ordine* n.

Il teorema si dimostra nel modo più semplice, assumendo quella retta come asse coordinato, ad es. asse x, o quel piano come piano coordinato, ad es. piano xy, ciò che può sempre ottenersi, pur di eseguire una conveniente trasformazione di coordinate cartesiane, la quale non altera il grado dell' equazione della superficie. Sia

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l' equazione di grado n di questa, nelle nuove coordinate. Per avere le intersezioni della superficie coll' asse x, si pongano $y = 0$, $z = 0$ nella (1); si troverà un' equazione

$$(2) \qquad f(x, 0, 0) = 0,$$

generalmente di grado n in x, la quale fornirà per x certi n valori, ascisse degli n punti d' incontro richiesti. Se invece si richiede la curva intersezione della (1) col piano xy, si porrà $z = 0$ nella (1), ottenendo così l' equazione di grado n

$$(3) \qquad f(x, y, 0) = 0,$$

la quale, nel piano xy, rappresenta una curva d' ordine n (n.° 140). Le apparenti eccezioni, derivanti dal fatto che, in casi particolari, le (2), (3) possono risultare di grado inferiore ad n, spariscono ricorrendo a coordinate omogenee. È chiaro però che occorre tener conto delle intersezioni immaginarie, o coincidenti . . .

Uno studio più minuto dei vari casi, che si possono presentare, sarà fatto in seguito nella ipotesi $n = 2$.

323. Equazione della sfera. — Per mostrare, sopra un esempio, come la equazione di una superficie possa dedursi dalla legge di generazione di questa, trattiamo il caso della sfera. Riferiamoci ad assi coordinati *ortogonali*; indichiamo con α, β, γ le coordinate note del centro C della sfera, con r il raggio, pure noto. E sia $P(x, y, z)$ un punto generico della sfera. Esprimendo, mediante le coordinate, che la distanza CP è uguale ad r, perveniamo all' equazione

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2,$$

ossia

$$(1') \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2) = 0,$$

che rappresenta appunto una sfera. La sfera è dunque una superficie del *secondo ordine*.

L' equazione (1'), confrontata colla equazione generale di secondo grado a tre variabili x, y, z, offre la particolarità che i quadrati x^2, y^2, z^2 hanno lo stesso coefficiente, e mancano i termini coi prodotti xy, xz, yz. Ora ogni equazione di secondo grado, avente queste particolarità, rappresenta, in assi ortogonali, una sfera. Infatti una siffatta equazione potrà sempre scriversi sotto la forma

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,$$

ossia

$$(2') \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4},$$

la quale, confrontata colla (1), indica appunto trattarsi di una sfera di centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ e di raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$.

Ciò, a dir vero, sussiste senz'altro, nella ipotesi che l'espressione sotto il radicale sia positiva. Ma, se quella espressione è nulla, vi è un sol punto reale $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ soddisfacente colle sue coordinate alla (2'); e nessun punto siffatto esiste, se quella espressione è negativa. Tuttavia, in virtù di convenzioni ormai familiari, si dirà ancora che la (2') rappresenta una sfera, il cui raggio è nullo o immaginario (cfr. n.° 143).

In ogni caso: *una equazione di secondo grado, in coordinate cartesiane ortogonali, la quale abbia uguali i coefficienti di* x², y², z², *e manchi dei termini con* xy, xz, yz, *rappresenta una sfera; se la equazione si riduce ad aver l'unità come coefficiente di* x², y², z², *le metà dei coefficienti di* x, y, z, *cambiate di segno, danno le coordinate del centro.*

Osservazione. — L' equazione di una sfera avente per centro l'origine e raggio 0, è, in assi ortogonali,

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Ora questa rappresenta un cono col vertice nell' origine (n°. 318), cono di cui un solo punto è reale, il vertice. Il cono è segato dal piano $xy (z = 0)$ nella coppia di rette $x^2 + y^2 = 0$, ossia $x \pm iy = 0$, cioè nelle direzioni assolute uscenti dall'origine, sul detto piano (n.° 121, Oss.). La stessa conclusione vale, qualunque sia il piano condotto per l'origine, con cui il cono (3) venga segato; infatti il detto piano può esser assunto come piano XY di un nuovo sistema di coordinate ortogonali XYZ, avente la stessa origine O; e, d'altra parte, la trasformazione di coordinate, con cui si passa dagli assi xyz ai nuovi assi XYZ, muta la (3) nella equazione dello stesso tipo $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, come il lettore potrà verificare, eseguendo effettivamente le sostituzioni (2) del n°. 308, e ricordando le relazioni che passano fra i nove coefficienti [1]. Dunque:

Una sfera di raggio 0, la quale nel campo reale si riduce ad un solo punto (il suo centro), nel campo complesso è un cono composto di tutte le direzioni assolute dello spazio uscenti dal centro, è il *cono assoluto* avente ivi il vertice (n.° 190).

Nell' enunciato non si tien conto della ipotesi che il centro della sfera cada nell' origine, giacchè l' equazione di una sfera di raggio 0, avente il centro in un punto qualsiasi dello spazio, può sempre, con una traslazione d'assi, ridursi alla forma (3).

Un cono assoluto, di centro qualsiasi, sega il piano all'infinito nel *cerchio assoluto*, conica immaginaria luogo dei punti ciclici di tutti i piani propri dello spazio (n.° 190). Reso omogeneo il sistema cartesiano ortogonale x, y, z, coll' introduzione della quarta coordinata t, *le equazioni del cerchio assoluto saranno* dunque

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0. \tag{4}$$

Ora è facile persuadersi che *ogni sfera dello spazio sega il piano all' infinito nel cerchio assoluto* (PONCELET, 1822); ciò d'accordo col fatto che ogni cerchio, sezione della sfera con un piano proprio, ha all' infinito due punti ciclici (n.° 155) appartenenti all' assoluto. La proposizione si giustifica analiticamente, osservando che l' equazione (2) di una sfera, resa omogenea, diviene

$$x^2 + y^2 + z^2 + axt + byt + czt + dt^2 = 0,$$

e questa, posto $t = 0$, si riduce alla prima delle (4).

---

[1] Che le coordinate (x, y, z), (X, Y, Z) di uno stesso punto P, riferito a due sistemi ortogonali aventi la stessa origine O, siano legate dalla identità $x^2 + y^2 + z^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2$, si dimostra anche direttamente, osservando che tanto il primo, quanto il secondo membro esprimono il quadrato della distanza OP. Il ragionamento suppone veramente che le coordinate siano reali; ma una identità algebrica tra quantità reali sussiste notoriamente anche per quantità immaginarie.

Fu osservato (n.° 190) che l'assoluto determina nel piano all'infinito la *polarità sferica*, in cui sono coniugati due punti (o due rette) individuanti direzioni (o giaciture) ortogonali. Ciò può verificarsi ora per via analitica. Infatti i due punti impropri $(l, m, n, 0)$, $(l', m', n', 0)$ sono coniugati rispetto alla conica (4), se $ll' + mm' + nn' = 0$ (n.° 200), e questa è precisamente la condizione di ortogonalità delle due rette proprie $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, $\frac{x}{l'} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{n'}$, aventi all'infinito quei due punti (n.° 300). Queste, ed altre simili verificazioni, fanno prevedere che le formole metriche, stabilite per via elementare nel Cap. II di questa Parte IV, possono riguardarsi come esprimenti relazioni proiettive di elementi impropri rispetto al cerchio assoluto. Ma su questa teoria non possiamo qui fermarci più a lungo.

Esercizi (1) **I.** — 1) Luogo dei punti tali, che la differenza dei quadrati delle distanze da due punti fissi sia costante.

2) Luogo dei punti, le cui distanze da due piani fissi, moltiplicate per due numeri dati, danno una somma costante.

3) Un triangolo, coi vertici sugli spigoli di un triedro, ruota intorno ad uno dei suoi lati; qual'è il luogo del baricentro del triangolo?

4) Qual'è il luogo dei baricentri dei triangoli, che staccano sugli assi tre segmenti di somma costante?

5) Con immediata estensione allo spazio dell'es. 8) del n.° 151 si definisce il piano polare armonico di un punto, rispetto a n piani dati. Si scriva l'equazione di questo piano.

6) Il luogo di un punto tale, che il rapporto delle distanze da due punti fissi sia costante, è in generale una sfera. Quale ne è il centro e quale il raggio? Si consideri, in particolare, il caso che il rapporto sia uguale a 1. Il luogo dei punti, le cui distanze da tre punti fissi sono proporzionali a tre numeri dati, è in generale un cerchio, il cui centro è sul piano dei tre punti. E se i tre numeri sono uguali?

7) Si estenda allo spazio l'es. 11), n.° 151.

8) Il luogo dei piedi delle perpendicolari, calate da un punto sui piani di una stella, è una sfera avente per diametro il segmento, che congiunge quel punto al centro della stella.

9) Se per un punto O si conducono più rette a secare una sfera, il luogo dei punti medi delle corde giacenti su quelle è una nuova sfera, che ha per diametro il segmento congiungente O col centro della sfera primitiva.

---

(1) Questi es. riguardano soltanto piani, sfere e loro mutue intersezioni. Di superficie più elevate trattano gli es. alla fine del Cap.

II. — 10) Trovare l'equazione della sfera, che passa per l'origine e per i punti (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1); oppure, che ha il centro in quest'ultimo punto e passa pel punto (1, 1, — 2).

11) Si scriva l'equazione di una sfera in coordinate polari, e se ne profitti per estendere alla sfera la nozione di *potenza* di un punto (n.° 153). Qual' è la potenza del punto (x_0, y_0, z_0) rispetto alla sfera $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$?

12) Data la sfera $S = 0$ dell'es. 11) e la retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, si determinino le intersezioni di questa con quella, e la condizione di contatto (donde si ricaverà una nuova via per trovare la distanza del punto (α, β, γ) dalla retta).

13) Le rette uscenti da un punto O e tangenti ad una sfera formano un cono del secondo ordine, che è rotondo intorno alla retta congiungente O col centro della sfera. (Si può assumere O come origine e questa retta come asse z).

14) L'equazione del piano tangente alla sfera $S = 0$ (es. 11)) in un suo punto $P'(x', y', z')$ è

$$xx' + yy' + zz' - \alpha(x + x') - \beta(y + y') - \gamma(z + z') + \delta = 0.$$

(Basta scrivere l'equazione del piano normale in P al raggio che passa per P, tenendo conto che P appartiene alla sfera; oppure si può imitare il procedimento esposto al n.° 154).

15) Qual' è la condizione, perchè il piano $ax + by + cz + d = 0$ tocchi la sfera $S = 0$? Se ne deduca l'equazione plückeriana dell'inviluppo dei piani tangenti alla sfera. (Si può ricorrere all'es. 14); o ricordare che la distanza del punto (α, β, γ) dal piano deve esser uguale al raggio della sfera).

16) Per la retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ condurre i piani tangenti alla sfera $S = 0$.

17) Determinare le coordinate del centro e il raggio del cerchio, che è intersezione del piano $P \equiv ax + by + cz + d = 0$ colla sfera $S = 0$.

18) Il cerchio dell'es. 17) ha come proiezione ortogonale sul piano xy una conica $K \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \cdots = 0$, ed il cerchio stesso può rappresentarsi mediante le due equazioni $P = 0$, $K = 0$. Viceversa, si dimostri che le due ultime equazioni rappresentano un cerchio, quando $\frac{a^2 + c^2}{a_{11}} = \frac{b^2 + c^2}{a_{22}} = \frac{ab}{a_{12}}$; quali sono le coordinate del centro?

19) Due sfere $S = 0$, $S' = 0$ si segano (oltre che nel cerchio assoluto all'infinito) lungo un cerchio reale, o immaginario, appartenente al *piano radicale* $S - S' = 0$ (supposti uguali ad 1 i coefficienti dei quadrati nei polinomi S, S'). Il problema di determinare la intersezione di due sfere equivale dunque a quello di determinare la intersezione di un piano con una sfera. Si estendano al caso di due sfere gli es. 15), 17).

20) Tre sfere $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ si segano generalmente in due punti reali, o immaginari, che stanno sulla retta (*asse radicale*) $S - S' = 0$, $S - S'' = 0$. Si trovino, ad es., le intersezioni delle tre sfere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - y - z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

21) I piani tangenti a due sfere, in ciascun punto comune ad esse, formano un diedro costante, che dicesi *angolo delle due sfere*. Determinare l'angolo delle due sfere $S = 0$, $S' = 0$, e la condizione perchè queste si tocchino, o si seghino ortogonalmente; l'ultima condizione è

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' - \frac{1}{2}(\delta + \delta') = 0.$$

III. — 22) Se le equazioni $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ rappresentano due sfere, anche l'equazione $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$ (con λ_1, λ_2 costanti arbitrarie, non entrambe nulle) rappresenta una sfera, la quale, al variare del rapporto $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, descrive un *fascio di sfere*. Le sfere del fascio passano tutte per uno stesso cerchio, *base* del fascio, il cui piano $S_1 - S_2 = 0$ (*piano radicale* del fascio) è il luogo dei punti aventi uguale potenza rispetto alle sfere $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, e ad ogni sfera del fascio. Per ogni punto dello spazio, che non appartenga al cerchio base, passa *una* sfera del fascio. Il luogo dei centri delle sfere del fascio è una retta (*asse centrale*) perpendicolare al piano radicale nel centro del cerchio base. Il piano radicale è invece il luogo dei centri delle sfere ortogonali alle sfere del fascio (cfr. n.i 158, 159). Queste ultime sfere passano tutte per due punti dell'asse centrale, che sono centri delle due sfere di raggio nullo appartenenti al fascio. Come si modificano questi risultati, se le sfere $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ sono concentriche?

23) Se $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ sono le equazioni di tre sfere, non appartenenti ad un fascio, l'equazione $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0$ (corrispondente a valori non tutti nulli, nè infiniti, dei parametri λ_1, λ_2, λ_3) rappresenta una sfera, che passa per i due punti comuni alle sfere date (*punti base*). L'insieme di quelle ∞^2 sfere costituisce un sistema (*rete di sfere*) tale, che ad esso appartiene ogni fascio determinato da due sfere della rete, mentre per due punti generici dello spazio passa una sola sfera della rete. La retta, che congiunge i due punti base, dicesi *asse radicale* della rete; per essa passano i piani radicali di tutti i fasci appartenenti alla rete, ed un suo punto generico ha la stessa potenza rispetto a tutte le sfere del sistema. Il luogo dei centri delle sfere della rete è, in generale, il piano (*piano centrale*) perpendicolare all'asse radicale nel punto medio tra i due punti base. L'asse radicale è invece il luogo dei centri delle sfere, che sono ortogonali a tutte le sfere della rete; esse costituiscono un fascio, il cui cerchio base sta nel piano centrale, e sega ortogonalmente le sfere della rete [1]; esso è il luogo dei centri delle sfere di raggio nullo appartenenti alla rete. Come si modificano i risultati, se i centri delle tre sfere $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ sono allineati?

24) Quattro sfere $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 = 0$, non appartenenti ad una stessa rete, determinano un *sistema lineare* ∞^3 di sfere, la cui sfera generica ha l'equazione $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0$ (ove λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sono costanti arbitrarie finite, soggette solo alla condizione di non

---

[1] S'intende dire con ciò, che, nei punti d'intersezione del cerchio con una sfera, la tangente al cerchio e il piano tangente alla sfera sono ortogonali.

essere tutte nulle). Al sistema appartiene ogni rete ed ogni fascio determinati da tre o due sfere generiche del sistema stesso. Esiste in generale una sola sfera del sistema, che passi per tre punti dati, o che abbia il centro in un punto dato. I piani radicali e gli assi radicali dei fasci e delle reti contenute nel sistema passano per uno stesso punto, che dicesi *centro radicale* del sistema. Esso è centro di una sfera ortogonale a tutte le sfere del sistema, la quale è il luogo dei centri delle sfere di raggio nullo del sistema. Se ne scriva l'equazione, partendo dall' una o dall' altra di queste sue proprietà. Come si modificano i risultati, se le quattro sfere date hanno i centri in un piano, oppure passano per un punto?

25) Un piano passante per i centri C, C' di due sfere sega queste lungo due cerchi, i cui centri di similitudine (n.° 160, es. 14)) non variano, mentre quel piano ruota intorno alla retta CC', e diconsi *centri di similitudine* (interno ed esterno) delle due sfere. Date le coordinate dei centri C, C' ed i raggi delle sfere, si determinino le coordinate dei due centri di similitudine. Ciascuno di essi è vertice di un cono rotondo circoscritto ad ambedue le sfere.

26) Si estendano ai centri di similitudine di tre sfere, prese due a due, i risultati enumerati nell' es. 15) del n.° 160.

27) Quattro sfere, prese due a due, danno complessivamente dodici centri di similitudine. Si dimostri che i sei centri di similitudine esterni sono in un piano, e a tre a tre su quattro rette; i tre centri di similitudine interni, che tre delle sfere determinano colla quarta, e i tre esterni, che quelle determinano fra loro, sono pure in un piano, e a tre a tre su quattro rette; e finalmente i quattro centri di similitudine interni, che due delle sfere determinano colle altre due, e i due esterni della prima e seconda coppia di sfere sono in un piano, e a tre a tre su quattro rette.

IV. *Inversione rispetto a una sfera.* — 28) Il concetto di *trasformazione per raggi vettori reciproci*, o *inversione*, rispetto a un *centro d' inversione* O e ad una sfera *fondamentale* col centro in quel punto, è una estensione immediata di quello stabilito nel piano (v. n.° 160, es. 16) e seg.). Enunciamo soltanto le proprietà fondamentali, facili a dimostrarsi direttamente. Le coordinate di due punti $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ corrispondenti (*inversi*) sono legate dalle formole

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

dove r è il raggio della sfera fondamentale. Una sfera ed un cerchio (intersezione di due sfere) sono trasformati generalmente in una sfera ed in un cerchio; se però quelli passano per O, le figure trasformate sono rispettivamente un piano ed una retta. E viceversa. Sfere corrispondenti segano la sfera fondamentale in uno stesso cerchio (reale o immaginario), e determinano un fascio, cui appartiene l' ultima sfera.

29) Due piani, o due rette, secantisi formano lo stesso angolo delle due sfere, o dei due cerchi (*inversi*), in cui si mutano mediante una inversione. Donde segue che l'angolo di due superficie, o di due curve qualsiasi, in un

punto ad esse comune, è uguale all' angolo delle figure *inverse*, nel punto corrispondente ([1]).

30) Fissato sopra una sfera un punto P(*polo*), e condotto un piano π parallelo al piano tangente in P, per es. passante per il centro (piano dell'*equatore*), si proiettino i punti della sfera da P su π. Ogni punto A della sfera ha una determinata proiezione A' su π, eccetto quando A cade in P, giacchè allora A' è indeterminato sulla retta all' infinito; e viceversa. Si ottiene così una *rappresentazione* della sfera sul piano π, conosciuta da IPPARCO e TOLOMEO, e detta *proiezione stereografica*. Le principali proprietà della proiezione stereografica seguono dal fatto, che una figura $AB\ldots$ sulla sfera, e la proiezione $A'B'\ldots$ sul piano, sono inverse rispetto al centro di inversione P e ad una sfera fondamentale, che ha centro P e passa per il cerchio segato da π sulla sfera primitiva. Si vede così che « i cerchi della sfera primitiva si proiettano stereograficamente in cerchi », e « che l' angolo di due curve sulla sfera è uguale all' angolo delle due curve proiezioni » In virtù dell'ultima proprietà, la proiezione stereografica dicesi *conforme*, e viene adoperata spesso nel tracciamento delle carte geografiche.

31) Le proprietà suddette della proiezione stereografica si deducono anche per via analitica, valendosi delle formole che legano le coordinate di due punti corrispondenti. Assunta come sfera primitiva la $x^2+y^2+z^2=r^2$, come polo P il punto $(0, 0, r)$, e come piano π il piano $z=0$, si osservi che le coordinate (x, y, z) di un punto A della sfera sono espresse, in funzione delle coordinate (x', y') del punto proiezione sul piano, mediante le formole

$$x=\frac{2r^2x'}{x'^2+y'^2+r^2},\quad y=\frac{2r^2y'}{x'^2+y'^2+r^2},\quad z=r\,\frac{x'^2+y'^2-r^2}{x'^2+y'^2+r^2},$$

donde

$$x'=\frac{rx}{r-z},\quad y'=\frac{ry}{r-z},\quad (x^2+y^2+z^2=r^2).$$

324. Equazioni parametriche di una curva. — Non sempre si riesce a tradurre direttamente la legge, secondo cui vien descritto un luogo geometrico, nelle equazioni del luogo. Conviene allora introdurre, accanto alle coordinate del punto mobile, certe variabili ausiliari, dette *parametri*, e stabilire relazioni tra quelle coordinate e questi parametri. Eliminando poi i parametri fra le dette relazioni, si perverrà ad una o più equazioni fra le coordinate x, y, z, equazioni rappresentanti il luogo che si vuol studiare. Questo procedimento si giustifica colle stesse considerazioni svolte in geometria piana al n.° 144 e seg.

([1]) Per *angolo* di due superficie, o di due curve, in un punto comune, si intende l' angolo formato dai piani, o dalle rette, tangenti a quelle superficie, o curve, nel punto. Basterà qui prendere questo concetto come intuitivo.

D' altra parte è spesso opportuno rappresentare una linea, od una superficie (anzichè nel modo indicato ai n.[i] 317, 319), mediante *equazioni parametriche*, esprimenti le coordinate del punto mobile che descrive il luogo, in funzione di uno o due parametri.

Siano, ad es.,

(1) $$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

funzioni continue della variabile t, per i valori di questa compresi in un conveniente intervallo. Ad un valore di t corrisponde, in virtù delle (1), una terna di valori (x, y, z), e quindi un punto; al variare di t, il punto si muove con continuità, e descrive, generalmente, una curva, rappresentata dalle (1). Eliminando il parametro t fra due delle equazioni (1), ad es. fra la seconda e la terza, si ottiene la equazione $F(y, z) = 0$ di un cilindro passante per quella curva; ed un secondo cilindro $\Phi(x, z) = 0$ proiettante la curva si ottiene, eliminando t fra la prima e la terza delle (1). Anche le equazioni $F(y, z) = 0$, $\Phi(x, z) = 0$ rappresentano la stessa curva (1), presa però insieme, generalmente, a qualche altra linea (cfr. n.° 319).

Per portare un esempio, si considerino le equazioni parametriche

(1') $$x = at + a', \quad y = bt + b', \quad z = ct + c',$$

dove le $a, a', \ldots, c'$ sono sei costanti. La eliminazione del parametro t fra le (1') conduce alle equazioni di una retta:

$$\frac{x - a'}{a} = \frac{y - b'}{b} = \frac{z - c'}{c}.$$

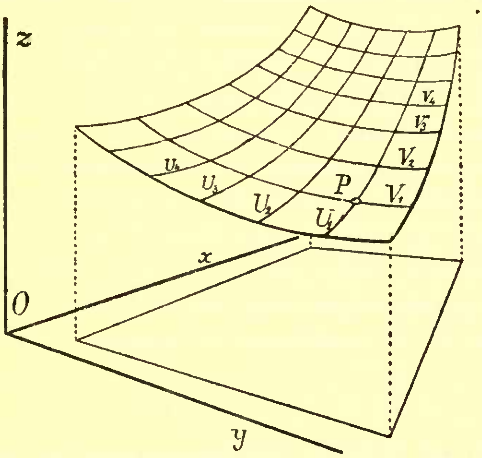
Dunque *le equazioni* (1') *rappresentano una retta*, i cui coseni di direzione, in assi ortogonali, sono proporzionali ad a, b, c (n.° 299).

325. Equazioni parametriche di una superficie. — Si abbiano ora tre equazioni

(2) $$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

esprimenti le coordinate di un punto variabile, mediante funzioni continue di due parametri u, v; e le (2) siano tali, che da esse sia possibile (almeno teoricamente) di eliminare u e v, ottenendo una sola relazione $F(x, y, z) = 0$. Le (2) rappresenteranno allora parametricamente la superficie $F = 0$; un punto generico di essa si otterrà dalle (2), attribuendo ad u, v una coppia di valori, e calcolando i corrispondenti valori di x, y, z.

Le equazioni (2) lasciano subito apparire due sistemi di curve giacenti sulla superficie. Se infatti, nelle (2), diamo ad u un valore costante $u = u_1$, e lasciamo variare il solo parametro v, il punto (x, y, z) corrispondente descrive (n.° 324) una curva, che giace sulla superficie, e può indicarsi con U_1. Una seconda curva U_2 si ottiene, attribuendo al parametro u un secondo valore $u = u_2$, e lasciando variare v; ed analogamente si ottengono infinite altre curve U_3, U_4,.., che si succedono con continuità, se i valori attribuiti ad u formano una successione continua; tutte queste curve formano un primo *sistema* di curve sulla superficie, il sistema $u =$ cost. Un secondo sistema di curve, V_1, V_2, V_3, ... sulla superficie si ottiene, attribuendo al parametro v un valore fisso, che potrà essere v_1, oppure v_2, oppure v_3, . . . , e lasciando di volta in volta variare u; sarà il sistema $v =$ cost. I due sistemi di curve formano sulla superficie un reticolato; per ogni punto P della superficie passa *una* curva del primo sistema ed *una* curva del secondo, se le equazioni (2) sono di tal natura, che, fissate le coordinate (x, y, z) del punto P, rimangano individuati i corrispondenti valori u_1, v_1 di u e v; in tal caso, quei valori u_1, v_1 potranno riguardarsi come speciali coordinate (*curvilinee*) del punto P variabile sopra la superficie.



La superficie poi potrà ritenersi generata, sia da una curva U, la quale si muova, e si deformi, assumendo le posizioni delle curve U_1, U_2, . . . , che tutte si appoggiano alle curve fisse V_1,

$V_2, \ldots$; sia da una curva V, la quale vari appoggiandosi alle curve fisse U_1, $U_2, \ldots$

Si considerino, ad es., tre equazioni contenenti linearmente i parametri:

(2') $x = au + a'v + a''$, $y = bu + b'v + b''$, $z = cu + c'v + c''$;

esse rappresentano il piano

$$\begin{vmatrix} x - a'' & a & a' \\ y - b'' & b & b' \\ z - c'' & c & c' \end{vmatrix} = 0,$$

la cui equazione si ottiene eliminando i parametri. Qui i due sistemi di linee $u = \text{cost}$, $v = \text{cost.}$, sono due fasci impropri di rette giacenti nel piano; e le coordinate (u, v) di un punto del piano possono riguardarsi come coordinate cartesiane, sul piano, rispetto agli assi $u = 0$, $v = 0$ e al punto unità ($u = 1$, $v = 1$).

Un secondo esempio interessante è fornito dalle equazioni (cfr. n.° 309)

(2'') $x = r \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi$, $z = r \cos \vartheta$,

dove r è una costante, ϑ, φ sono i parametri, ed x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali.

Eliminando i parametri, coll' innalzare a quadrato le tre equazioni e sommare, si ottiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

equazione di una sfera avente il centro nell'origine e raggio r. Le linee $\vartheta = \text{cost.}$, ossia $z = \text{cost.}$, sono cerchi *paralleli* segati dai piani paralleli ad xy; le linee $\varphi = \text{cost}$, ossia $\frac{y}{x} = \text{cost.}$, sono cerchi massimi *meridiani* segati dai piani condotti per l'asse z. Le coordinate φ e ϑ di un punto della sfera sono la *longitudine*, rispetto al meridiano (principale) $\varphi = 0$, situato nel piano xz, e il complemento della latitudine, o *colatitudine*; perciò φ e ϑ si chiamano *coordinate geografiche* sulla sfera.

326. Equazioni di cilindri e coni. — Le considerazioni generali, esposte sul principio del n.° 324, permettono di formare le equazioni di certe famiglie di superficie, che frequentemente si incontrano.

Una superficie generata da una retta mobile, le cui posizioni dipendano dai valori attribuiti ad *un* parametro, dicesi *rigata*; le infinite rette, che la costituiscono, sono le *generatrici* della superficie. Poichè la posizione di una retta

(1) $$x = lz + p, \quad y = mz + q$$

dipende dai valori di *quattro* quantità l, m, p, q, la (1) descriverà una rigata, se quelle quantità saranno legate da *tre* relazioni (o se saranno espresse in funzione di *un* parametro). Eliminando l, m, p, q fra queste tre relazioni e le (1), si avrà la equazione della rigata.

Fra le rigate sono notevoli, in particolare, i *cilindri* e i *coni*. La rigata è un cilindro, se le generatrici sono tutte parallele tra loro; è un cono, se passano tutte per uno stesso punto fisso (*vertice*).

Ora la retta (1) si muove parallelamente a sè stessa, se restano fissi i valori di l, m (n.° 290). Perchè essa descriva un cilindro, basterà dunque che passi *una* relazione fra i *due* parametri rimanenti p, q:

(2) $$f(p, q) = 0.$$

L'equazione del cilindro si ottiene, eliminando p, q fra le (1) e la (2); *è dunque*

(3) $$f(x - lz, \quad y - mz) = 0.$$

Si osservi che la (2) ha un semplice significato geometrico; essa rappresenta infatti la curva sezione del cilindro col piano xy, perchè p, q sono le coordinate della intersezione della generatrice (1) col detto piano. Si noti inoltre che, se la generatrice (1) è parallela all'asse z, allora $l = m = 0$, e si ricade in un tipo di equazione già nota (n.° 318).

Proponiamoci ora di scrivere la equazione di un cono avente per vertice il punto $V(x_0, y_0, z_0)$. Ogni retta per V ha equazioni del tipo

(4) $$x - x_0 = l(z - z_0), \quad y - y_0 = m(z - z_0).$$

La retta descrive un cono, se fra i *due* parametri l, m passa *una* relazione

(5) $$f(l, m) = 0.$$

L'eliminazione di l, m fra le (4) e la (5) conduce a scrivere *l'equazione del cono sotto la forma*

(6) $$f\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

Se il vertice coincide coll'origine ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), si ricade in una equazione già nota (n.° 318).

Vediamo, ad es., come si riesca a scrivere la equazione del cono proiettante dall'origine una curva assegnata

$$(7) \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0, \quad \psi(X, Y, Z) = 0,$$

dove le coordinate cartesiane di un punto descrivente la curva si sono indicate con X, Y, Z, per distinguerle dalle coordinate x, y, z di un punto generico del cono. Qui, in luogo delle (4), abbiamo le equazioni

$$(4') \qquad x = lz, \quad y = mz.$$

Il legame (5) fra l ed m si otterrà imponendo alla retta (4') di contenere un punto (X, Y, Z) della curva (7), il che dà

$$(8) \qquad l = \frac{X}{Z}, \quad m = \frac{X}{Z};$$

eliminando X, Y, Z fra le due ultime relazioni e le due (7), si avrebbe appunto una relazione fra l, m. Resterebbe poi, secondo il procedimento sopra esposto, da eliminare l, m tra la detta relazione e le (4'). Riassumendo: per ottenere la equazione del cono, si devono eliminare le cinque variabili X, Y, Z, l, m fra le sei relazioni (7), (4') e (8). Ora, in questo caso, conviene condurre la eliminazione nel seguente modo. Eliminiamo anzitutto l, m fra le (4') ed (8); otterremo le relazioni

$$(9) \qquad \frac{x}{z} = \frac{X}{Z}, \quad \frac{y}{z} = \frac{Y}{Z},$$

le quali, introducendo una variabile ausiliare t, possono anche scriversi così

$$(10) \qquad X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t};$$

eseguiamo poi le sostituzioni (10) nelle (7), che divengono

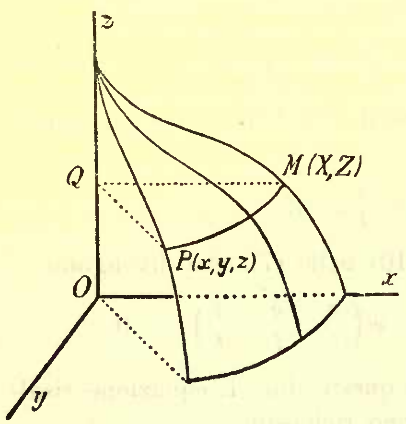
$$(7') \qquad \varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0, \quad \psi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0,$$

ed eliminiamo finalmente t fra queste due. L'equazione risultante rappresenta appunto il cono richiesto.

Il lettore osserverà che il procedimento consiste, in sostanza, nello scrivere le equazioni della curva (7) in coordinate omogenee x, y, z, t, sotto la forma (7'), e nell'eliminare la quarta coordinata t. Come la eliminazione di una delle tre coordinate x, y, z, tra le equazioni di una curva, equivale a proiettare la curva dal punto all'infinito di uno degli assi coordinati (n.° 319), così la eliminazione della quarta coordinata t, equivale alla proiezione della curva dall'origine, quarto vertice del tetraedro fondamentale del sistema cartesiano omogeneo.

327. Superficie rotonde. — Un'altra famiglia interessante di superficie è costituita dalle *superficie rotonde* (o *di rotazione*). Una superficie rotonda è generata da una curva, che ruoti intorno ad una retta fissa (*asse*), colla quale la curva sia rigidamente collegata. Ogni punto della curva descrive un cerchio (*parallelo*), che sta in un piano perpendicolare all'asse, ed ha il centro sull'asse; ed ogni piano perpendicolare all'asse sega la superficie (se vi è intersezione) lungo uno o più paralleli. I piani per l'asse segano la superficie lungo curve tutte uguali, che diconsi *meridiani*, e sono simmetriche rispetto all'asse. E la superficie può ritenersi generata facendo ruotare di mezzo giro un meridiano intorno all'asse (o di un intero giro la metà di un meridiano, che sta da una banda dell'asse).

Volendo scrivere l'equazione di una superficie rotonda, supporremo appunto che questa venga generata da un meridiano; e, per maggior semplicità, ci riferiremo ad un sistema cartesiano ortogonale, il cui asse z coincida coll'asse di rotazione. Supponiamo data l'equazione del meridiano in uno dei piani per z, ad es. sul piano xz; se con X, Z indichiamo le coordinate di un punto qualsiasi di questo piano ($y = 0$), il meridiano avrà una equazione del tipo



(1) $\qquad f(X, Z) = 0.$

Se un punto $M(X, Z)$ di esso, ruotando intorno a z, si porta nella posizione $P(x, y, z)$, si potranno subito stabilire due relazioni tra le coordinate di M e quelle di P, ricordando che M e P si trovano sopra uno stesso piano parallelo a xy, e sono equidistanti dal punto $Q(0,\ 0,\ z)$, in cui quel piano sega z. Si ha precisamente

(2) $$Z = z, \quad X = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Se facciamo variare x, y, z, in modo che i valori X, Z, risultanti dalle (2), verifichino la (1), il punto $P(x,\ y,\ z)$ varierà, descrivendo tutta la superficie. L'equazione di questa si otterrà dunque eliminando i parametri X e Z tra la (1) e le (2). Così si ricava

(3) $$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,,\ z) = 0,$$

che è l'equazione richiesta.

Brevemente si può dire che *l'equazione della superficie rotonda generata da una curva del piano* xz, *la quale ruoti intorno all'asse* z, *si ottiene sostituendo nella equazione della curva* $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ *al posto di* x.

Osservazioni. — Se la superficie rotonda si suppone generata dalla rotazione di una curva sghemba qualsiasi

(1') $$f(X,\ Y,\ Z) = 0, \quad \varphi(X,\ Y,\ Z) = 0$$

intorno all'asse z, per esprimere il legame fra un punto $M(X, Y, Z)$ di questa curva ed una posizione $P(x,\ y,\ z)$ assunta dal punto mediante la rotazione, dovremo adoperare, in luogo delle (2), le relazioni

(2') $$Z = z, \quad \pm\sqrt{X^2 + Y^2} = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

L'equazione della superficie si otterrà eliminando X, Y, Z fra le quattro equazioni (1'), (2').

328. Quadriche rotonde. — Per fare un' applicazione del procedimento sopra indicato, esaminiamo le superficie, che si ottengono facendo ruotare una conica intorno ad uno dei suoi assi di simmetria. Troveremo certe particolari superficie del secondo ordine, che prendono il nome di *quadriche rotonde*.

Si abbia, ad es., una ellisse, che possiamo ritenere situata nel piano xz, in guisa che x e z siano gli assi della curva. Questa avrà una equazione del tipo

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1.$$

Facendo ruotare la curva intorno all'asse z, otteniamo un *ellissoide rotondo* di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

L' ellissoide dicesi *schiacciato* se $a > b$, *allungato* se $a < b$; è una sfera se $a = b$.

Similmente la iperbole

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{b^2} = 1,$$

ruotando intorno all'asse non trasverso z, descrive l'*iperboloide rotondo ad una falda*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

mentre, ruotando intorno all' asse traverso x, descrive *l'iperboloide rotondo a due falde*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Finalmente la parabola

$$X^2 = 2pZ,$$

ruotando intorno all' asse z, descrive il *paraboloide rotondo*

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Si hanno così quattro tipi di quadriche rotonde, le cui forme, facili ad immaginare, verranno poi studiate accuratamente nella teoria delle quadriche.

329. Inviluppi di piani. — Il concetto di *luogo di punti* nello spazio si trasforma, per dualità, nel concetto di *inviluppo di piani*, ente costituito dai piani soddisfacenti ad una legge assegnata. Un inviluppo di piani si rappresenta mediante una o più equazioni in coordinate di piani, ad es. non omogenee, u, v, w; ed è formato da quei piani, che colle loro coordinate soddisfano alle equazioni nominate.

Come si distinguono luoghi di punti *semplicemente infiniti* o *curve*, e luoghi *doppiamente infiniti* o *superficie*, così si dovranno considerare inviluppi di piani *semplicemente* e *doppiamente infiniti*.

a) Un inviluppo doppiamente infinito si compone dei piani soddisfacenti, colle loro coordinate, ad *una* equazione $f(u, v, w) = 0$. L' inviluppo dicesi *algebrico*, *di classe* n, se la equazione è algebrica (razionale, intera) di grado n. Gli inviluppi doppiamente infiniti di prima classe sono le stelle di piani, o, se si vuole, i punti, considerati come sostegni degli infiniti piani passanti per essi (n.° 312). Tra gli inviluppi doppiamente infiniti di seconda classe si trova (come il lettore vedrà facilmente) l'insieme dei piani tangenti ad una data sfera.

Un inviluppo doppiamente infinito (algebrico o trascendente) è pure costituito dai piani, che toccano una data curva piana (algebrica o trascendente), vale a dire che passano per le singole tangenti alla curva. Quell'inviluppo si compone di infiniti fasci di piani, i cui assi stanno in un piano σ, e corrisponde, per dualità, ad una superficie costituita da infinite rette punteggiate uscenti da un punto S, vale a dire ad un cono di vertice S (1).

b) Un inviluppo semplicemente infinito di piani è, in linea generale, costituito dai piani comuni a due inviluppi doppiamente infiniti, e si rappresenta mediante le equazioni $f(u, v, w) = 0$, $\varphi(u, v, w) = 0$ di questi. Così, ad es., i piani di un fascio costituiscono un inviluppo semplicemente infinito, rappresentato da due equazioni lineari in u, v, w (n.° 312); i piani passanti per un punto e tangenti ad una sfera formano pure un inviluppo semplicemente infinito, rappresentato da una equazione lineare e da una (particolare) equazione quadratica in u, v, w. I piani proiettanti da un punto le tangenti ad una curva piana appartengono ad un inviluppo semplicemente infinito (inviluppo *conico* di piani), che corrisponde, per dualità nello spazio, ad una curva piana considerata come luogo di punti.

Queste poche nozioni bastano per il seguito, ove incontreremo soltanto inviluppi doppiamente infiniti di seconda classe.

Esercizi. I. — 1) Scrivere l'equazione del cono, che ha il vertice nell'origine delle coordinate e per direttrice il cerchio $ax + by + cz + d = 0$, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$.

2) Equazione del cilindro, che ha per direttrice il cerchio $x^2 + y^2 = r^2$ del piano xy e le generatrici parallele alla retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

---

(1) Come un cono di vertice $O(x = 0, y = 0, z = 0)$ è rappresentato, in coordinate cartesiane, da un'equazione omogenea in x, y, z (n.° 318), così l'inviluppo dei piani, che toccano una curva giacente sul piano all'infinito ($u = 0, v = 0, w = 0$), è rappresentato da un'equazione omogenea in u, v, w.

3) Il luogo dei punti, le cui distanze da un piano e da una retta fissa sono in rapporto costante, è un cono col vertice nel punto d'incontro della retta e del piano, ovvero un cilindro se la retta è parallela al piano; il cono risulta di rotazione, se la retta è perpendicolare al piano. (Per semplificare la ricerca, in questo e negli es. seguenti, converrà scegliere convenientemente gli assi; si potrà, ad es., nel primo caso sceglierе la retta come asse coordinato, e il piano passante per l'origine).

4) Il luogo dei punti tali, che la somma (o la differenza) delle distanze da due punti fissi sia costante, è un ellissiode (o iperboloide a due falde) rotondo, avente come asse la retta congiungente i due punti.

5) Il luogo dei punti, le cui distanze da un punto e da un piano fissi sono in rapporto costante, è una quadrica rotonda intorno alla perpendicolare calata dal punto sul piano, e precisamente un ellissoide, un paraboloide, o un iperboloide a due falde, secondo che il valore del rapporto è minore, uguale o maggiore dell'unità.

6) Il luogo dei punti, le cui distanze da un punto e da una retta hanno un rapporto costante k, è un ellissoide rotondo, o un iperboloide rotondo ad una falda, secondo che k è minore o maggiore dell'unità. Qual'è l'asse di rotazione? Se $k = 1$, si ottiene un cilindro parabolico, normale al piano individuato dal punto e dalla retta.

7) Il luogo dei punti, le cui distanze da due rette (in generale sghembe) sono in rapporto costante, è una superficie del secondo ordine, che diventa un cono se le due rette s'incontrano, e un cilindro se sono parallele.

8) Un cerchio di raggio r, il quale ruoti intorno ad una retta del suo piano, genera una superficie rotonda del quarto ordine, detta *toro* (o *superficie anulare*). Si scriva l'equazione della superficie, assumendo l'asse di rotazione come asse z, ed il piano contenente i centri dei cerchi meridiani come piano xy. Si determinino le intersezioni del toro coi piani coordinati, con piani paralleli a questi e col piano all'infinito. Si osservi, in particolare, che il piano $y = r$ sega il toro lungo una curva di Cassini (n.° 163), e precisamente lungo una lemniscata, se la distanza del centro del cerchio meridiano dall'asse z è $2r$.

9) Luogo dei punti tali, che il prodotto delle distanze da due punti fissi sia costante (cfr. n.° 163, 3)).

10) Luogo di un punto tale, che il triangolo avente per vertici i piedi delle perpendicolari calate dal punto sulle faccie di un triedro trirettangolo, abbia data area.

11) Un piano varia in guisa, che il volume formato da esso coi tre piani coordinati si mantiene costante; si trovi il luogo descritto dal piede della perpendicolare calata dall'origine sul piano.

II. — 12) Si sa (n.° 309, es. 6)) che le formule

$$x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c$$

determinano la posizione (x, y, z) assunta da un punto generico (X, Y, Z)

dello spazio mediante una traslazione. Se a, b, c sono funzioni continue di un parametro u, il punto avente le coordinate

(1) $$x = X + f_1(u), \quad y = Y + f_2(u), \quad z = Z + f_3(u)$$

varia con u, e descrive una curva C, la quale passa per la posizione iniziale (X, Y, Z), se (come supporremo) per un valore di u, ad es. per $u = 0$, si annullano le funzioni $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$. La C può riguardarsi come la curva, *traiettoria*, descritta dal punto (X, Y, Z), a cui si applichi una serie continua di successive traslazioni. La stessa serie di traslazioni, applicata ad un nuovo punto (X_0, Y_0, Z_0), lo fa muovere lungo una curva uguale alla C, le cui equazioni si otterrebbero dalle (1), ponendo X_0, Y_0, Z_0 al posto di X, Y, Z. Ora si applichi quella serie di traslazioni ai singoli punti di una curva C' avente le equazioni

$$X = \varphi_1(v), \quad Y = \varphi_2(v), \quad Z = \varphi_3(v).$$

Questa curva descriverà una *superficie di traslazione*, rappresentata dalle equazioni

(2) $$x = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) + \varphi_3(v).$$

Di questa superficie si dicono *generatrici* la curva $C'(u = 0)$ e le curve, ad essa uguali, $u =$ cost.; mentre diconsi *direttrici* le curve $v =$ cost., tutte uguali alla C. È chiaro però, data la simmetria con cui entrano le f e le φ nelle (2), che l'ufficio delle direttrici e delle generatrici è scambievole; la superficie può anche riguardarsi come generata da una curva uguale a C, la quale si muova per successive traslazioni, in modo che i suoi punti descrivano curve uguali a C'. Una superficie di traslazione può anche riguardarsi come luogo dei punti medi dei segmenti, che congiungono i punti di due curve (Lie); partendo dalle curve

$$x = 2f_1(u), \qquad y = 2f_2(u), \qquad z = 2f_3(u),$$
$$x = 2\varphi_1(u), \qquad y = 2\varphi_2(u), \qquad z = 2\varphi_3(u),$$

si ritrova la superficie (2).

Per fare qualche applicazione, si consideri: a) il caso che le curve C, C' sieno due rette, e si troverà come superficie di traslazione un piano; b) una curva sia il cerchio $x = r \cos u$, $y = r \operatorname{sen} u$, $z = 0$, e l'altra la retta $x = av$, $y = bv$, $z = cv$; la superficie è allora il cilindro, la cui equazione, ottenuta eliminando i parametri u, v, è $(cx - az)^2 + (cy - bz)^2 = c^2 r^2$; c) se le due curve sono le parabole $x = 2pu$, $y = 0$, $z = 2pu^2$; $x = 0$, $y = 2qv$, $z = 2qv^2$, la superficie è il *paraboloide ellittico* $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.

13) Le formole

$$x = X \cos \varphi - Y \operatorname{sen} \varphi, \quad y = X \operatorname{sen} \varphi + Y \cos \varphi, \quad z = Z$$

caratterizzano il moto rotatorio intorno all' asse z (n.° 309, es. 6)). Se X, Y, Z sono coordinate dei punti di una curva, se è dunque $X = f_1(u)$, $Y = f_2(u)$, $Z = f_3(u)$, la superficie di rotazione, che questa genera, ha le equazioni parametriche

$$x = f_1(u) \cos \varphi - f_2(u) \operatorname{sen} \varphi, \quad y = f_1(u) \operatorname{sen} \varphi + f_2(u) \cos \varphi, \quad z = f_3(u).$$

Per questa via si può ritrovare l' equazione di una superficie di rotazione, di cui sia dato il meridiano sul piano xz. Se le equazioni della curva generatrice fossero $X = f(Z)$, $Y = \varphi(Z)$, la superficie avrebbe l' equazione $x^2 + y^2 = [f(z)]^2 + [\varphi(z)]^2$. Se, in particolare, la curva che ruota è la retta $X = a$, $Y = bZ$, la superficie è l'iperboloide a una falda $x^2 + y^2 - b^2z^2 = a^2$. (È interessante osservare che anche la retta $X = a$, $Y = -bZ$, simmetrica dell'altra rispetto al piano xz, genera lo stesso iperboloide, e che perciò questa superficie contiene due sistemi distinti di rette).

14) Le formule

(1) $x = X \cos\varphi - Y \operatorname{sen}\varphi, \quad y = X \operatorname{sen}\varphi + Y \cos\varphi, \quad z = Z + c\varphi$

rappresentano un *movimento elicoidale* di asse z (n.° 309, es. 6)). Se in quelle formole si fa variare solo il parametro φ, la curva descritta dal punto (x, y, z) dicesi *elica cilindrica*, ed ha le equazioni parametriche (1); l'elica è tracciata sul cilindro rotondo $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$. In particolare, se il punto, nella posizione iniziale $\varphi = 0$, si trova sull'asse x, le equazioni sono del tipo

$$x = a \cos\varphi, \quad y = a \operatorname{sen}\varphi, \quad z = c\varphi;$$

le proiezioni della curva sui piani $x = 0$, $y = 0$ sono le curve sinusoidali (n.° 163, 4)) $y = a \operatorname{sen}\frac{z}{c}$, $x = a \cos\frac{z}{c}$, mentre sul piano $z = 0$ la proiezione è il cerchio $x^2 + y^2 = a^2$. Dicesi *passo* dell'elica la distanza costante $2\pi c$, che intercede fra due punti consecutivi della curva situati sopra una stessa generatrice del cilindro, su cui l'elica è tracciata. Svolgendo il cilindro sopra un piano (ove siano fissati gli assi ortogonali ξ, η), in guisa che il cerchio base $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ si sviluppi sopra l'asse ξ, e la generatrice del cilindro $y = 0$, $x = a$ si adagi sopra l'asse η, l'elica si sviluppa sulla retta $\xi = c\eta$, la quale forma coll'asse ξ un angolo α, detto *inclinazione* dell'elica, e tale che $\operatorname{tg}\alpha = c$.

15) Applicando il movimento elicoidale (1) ai punti (X, Y, Z) di una curva $X = f_1(u)$, $Y = f_2(u)$, $Z = f_3(u)$, si genera una *superficie elicoidale*, le cui equazioni parametriche sono

$$x = f_1(u) \cos\varphi - f_2(u) \operatorname{sen}\varphi, \quad y = f_1(u) \cos\varphi + f_2(u) \operatorname{sen}\varphi,$$
$$z = f_3(u) + c\varphi.$$

In particolare, la retta $X = lu$, $Y = mu$, $Z = nu$ genera l'elicoide

$$z = n\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{l^2 + m^2}} + c \operatorname{arc\,tg} \frac{-mx + ly}{lx + my},$$

il quale sega il piano xy in una spirale d'Archimede (cfr. n.° 163 es. I). L'elicoide dicesi *retto*, se la retta generatrice è normale all'asse; la sua equazione è $z = c \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$.

16) L'equazione di una superficie rotonda, il cui asse sia una retta qualsiasi

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n},$$

si ottiene osservando, che le equazioni

$$lx + my + nz = \lambda,$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \mu$$

rappresentano un cerchio, il cui centro sta su quella retta, ed il cui piano è perpendicolare alla retta; ed ogni cerchio così situato può rappresentarsi a quel modo, pur di scegliere convenientemente i parametri λ e μ. Se tra i due parametri stabiliamo un legame $\mu = f(\lambda)$, veniamo ad ottenere infiniti cerchi costituenti una superficie rotonda, di cui la retta data è asse. L'equazione di questa superficie è adunque del tipo

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = f(lx + my + nz).$$

In particolare, se $a = b = c = l = m = 0$, si ricade nel caso che l'asse coincida coll'asse z.

17) Si dimostri che la superficie del terzo ordine

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = k^3$$

è rotonda intorno alla retta $x = y = z$.

Capitolo V.

Proiettività fra due spazi.

330. Collineazioni e correlazioni nello spazio. — La nozione di corrispondenza proiettiva fra due forme di seconda specie (n.° 164 e seg.) si estende, senza difficoltà, alle forme di terza specie (spazi di punti o piani). Di queste nuove corrispondenze tratteremo qui rapidamente, sia perchè l'analogia colle forme di seconda specie suggerisce subito gli sviluppi qui omessi, sia perchè solo pochi risultati occorrono nel seguito del corso.

Una *proiettività* tra due spazi Σ, Σ' (naturalmente sovrapposti), vale a dire una corrispondenza che muti ogni elemento (punto o piano) di Σ in un elemento di Σ', e forme di prima o seconda specie, appartenenti a Σ, in forme della stessa specie, appartenenti a Σ', può essere una *collineazione* od una *correlazione.*

a) *Due spazi Σ, Σ' diconsi collineari* (od *omografici*), *se ai punti, alle rette, ai piani di Σ(o Σ') corrispondono ordinatamente i punti, le rette, e i piani di Σ'(o Σ), e ad elementi, che si appartengono nell'uno spazio, corrispondono elementi, che si appartengono nell'altro.* Piani corrispondenti α, α' in Σ, Σ' sono collineari (n.° 165), donde segue (n.° 167) che punteggiate corrispondenti in Σ, Σ' sono riferite proiettivamente; ecc.

b) *Due spazi Σ, Σ' diconsi correlativi* (o *reciproci*), *se ai punti, alle rette, ai piani di Σ(o Σ') corrispondono i piani, le rette, i punti di Σ'(o Σ), e ad elementi, che si appartengono nel-*

l'uno spazio, corrispondono elementi, che si appartengono nell'altro. Un piano (punteggiato o rigato) di Σ ha per corrispondente una stella (di piani o rette) in Σ'; e le due forme sono riferite proiettivamente. Una punteggiata di Σ ha per corrispondente un fascio di piani ad essa proiettivo in Σ'; ecc.

In generale: *due forme di prima o seconda specie, che si corrispondano in una proiettività fra due spazi, sono riferite proiettivamente tra loro.*

È chiaro poi che il prodotto di due o più proiettività fra spazi è ancora una proiettività.

331. Determinazione di una proiettività fra due spazi. — *Una proiettività fra due spazi è pienamente determinata, se di cinque elementi dello stesso nome (punti o piani) nell'uno spazio, tali che mai quattro appartengano ad una forma di seconda specie, sono assegnati i corrispondenti nell' altro spazio, soddisfacenti alle stesse condizioni* (cfr. n.° 168).

Supposto, ad es., che in Σ siano dati cinque punti A, B, C, D, E, tali che mai quattro appartengano ad un piano, ed in Σ' siano dati cinque punti A', B', C', D', E', nelle stesse condizioni, si assumano il tetraedro $ABCD$ come fondamentale di un sistema di coordinate proiettive omogenee (x, y, z, t) in Σ, ed E come punto unità; e similmente si operi in Σ', per fissare il sistema di coordinate proiettive (x', y', z', t'). Allora le uguaglianze

(1) $$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

(o le proporzioni equivalenti $x' : y' : \ldots = x : y : \ldots$, trattandosi di coordinate omogenee) definiscono una corrispondenza tra i due spazi, che è evidentemente una collineazione, e che muta i punti $A, \ldots, E$, in $A', \ldots, E'$. D'altra parte, supposto che esista tra i due spazi una collineazione, che muti la prima quintupla di punti nella seconda, e detti $P(x, y, z, t)$, $P'(x', y', z', t')$ due ulteriori punti corrispondenti, dalla uguaglianza tra doppi rapporti

(2) $$\overline{AB}(CDEP) = \overline{A'B'}(C'D'E'P'),$$

e dalle analoghe relative ai fasci $\overline{AC}$, $\overline{A'C'}$ e $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$, segue la relazione $y : z = y' : z'$ e le analoghe (n.° 313), donde si traggono le proporzioni sopra scritte, equivalenti alle uguaglianze (1). Si conclude esser unica, e rappresentata dalle (1), la collineazione soddisfacente alle condizioni imposte.

La (2), e le due uguaglianze analoghe citate, permettono anzi, dato P, di costruire il punto corrispondente P'.

332. Equazioni della collineazione tra due spazi. — Una collineazione tra due spazi, ove siano fissati due sistemi di coordinate omogenee di punti (x, y, z, t), (x', y', z', t'), è rappresentata dalle relazioni (1) del n.° precedente, se i punti fondamentali e i punti unità si corrispondono. In caso opposto, occorre eseguire in uno dei due spazi una trasformazione di coordinate proiettive (n.° 315). Si giunge così a relazioni del tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho\, x' = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} t, \\ \varrho\, y' = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} t, \\ \varrho\, z' = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34} t, \\ \varrho\, t' = a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44} t, \end{cases}$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità non nullo (che può supporsi uguale ad 1), e le a_{ik} sono sedici costanti, elementi di un determinante del quarto ordine A, diverso da zero:

$$(2)\qquad A \neq 0.$$

D'altra parte, che quattro relazioni del tipo (1), colleganti le coordinate omogenee di punti (ad es. cartesiane) di due spazi, definiscano una collineazione, quando sussiste la (2), e che, viceversa, ogni collineazione possa esser rappresentata a quel modo, si dimostra direttamente, imitando l'analogo ragionamento tenuto in geometria piana (n.° 171).

Per quella via si vede inoltre che le relazioni esprimenti x, y, z, t, in funzione di x', y', z', t', sono del tipo (1), e ne differiscono solo per lo scambio delle coordinate dei due spazi, e per la sostituzione di a_{ik} con A_{ki}, complemento algebrico di a_{ki} entro ad A (cfr. n.° 171, (3)). E si otterrebbero pure, lasciandosi guidare dall'analogia, le relazioni, sempre lineari ed omogenee, fra le coordinate di due piani corrispondenti nei due spazi (cfr. n.° 171, (4)).

Il carattere lineare di queste varie relazioni fa vedere che *una collineazione tra due spazi non altera l'ordine di una superficie algebrica, nè la classe di un inviluppo algebrico doppiamente infinito di piani.*

In altre parole: l'ordine e la classe sono *caratteri proiettivi* dei rispettivi enti; intendendo per *carattere proiettivo* di una figura solida ogni carattere, che non venga alterato da una collineazione (cfr. n.° 12).

333. Casi particolari metrici di collineazioni fra spazi. — Supposto che, nelle (1) del n.° precedente, le coordinate siano effettivamente coordinate *cartesiane* omogenee, risulta che al piano all'infinito $t' = 0$ del secondo spazio Σ' corrisponde, nel primo spazio Σ, il piano $a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t = 0$, generalmente proprio, detto *piano limite*.

a) Se però i piani all'infinito dei due spazi si corrispondono, si ha un caso particolare di collineazione, detto *affinità*. Riferendo i punti di due spazi affini a due triedri cartesiani corrispondenti, l'affinità vien rappresentata, in coordinate cartesiane non omogenee, da equazioni del tipo

(1) $$x' = lx, \quad y' = my, \quad z' = nz,$$

dove l, m, n sono tre costanti (cfr. n.° 173).

Nell'affinità punteggiate corrispondenti sono simili, piani corrispondenti sono affini. Due rette o piani paralleli di Σ hanno per corrispondenti in Σ' rette o piani paralleli; a un parallelepipedo corrisponde un parallelepipedo, ecc.

È costante il rapporto tra i volumi di figure corrispondenti nei due spazi.

b) Un caso particolare notevole dell' affinità si presenta, quando ogni angolo e (quindi) ogni diedro di Σ uguaglia il corrispondente angolo o diedro di Σ'; allora i due spazi diconsi *simili*.

Passa un rapporto costante k tra segmenti corrispondenti in una similitudine; aree corrispondenti hanno il rapporto costante k^2, e volumi corrispondenti stanno nel rapporto costante k^3. Le (1) rappresentano una similitudine, se i due triedri coordinati sono uguali (ad es. ortogonali), e nelle (1) è $l = m = n (= k)$, le unità di lunghezza essendo le stesse per i due spazi.

c) Se finalmente il rapporto di similitudine k tra Σ e Σ' vale 1, i due spazi possono chiamarsi *uguali*. Devono però distinguersi la *uguaglianza diretta*, in cui figure corrispondenti sono sovrapponibili, ed uno dei due spazi può considerarsi come una posizione assunta dall'altro mediante un movimento, e la *uguaglianza inversa*, in cui figure corrispondenti, pur avendo lati, angoli, diedri ordinatamente uguali, non sono in generale sovrapponibili, come avviene, ad es., per una figura solida e la sua immagine in uno specchio. Le relazioni

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

in coordinate cartesiane ortogonali, con una unica unità di lunghezza, rappresentano una uguaglianza diretta od inversa, secondo che i due triedri (formati dai semiassi positivi) xyz, $x'y'z'$ sono sovrapponibili o no (n.° 308, *c*)).

Osservazione. — Poichè una similitudine tra Σ e Σ' muta una sfera di Σ in una sfera di Σ', e il piano all'infinito in sè stesso, essa muterà in sè stesso il cerchio all'infinito, *assoluto*, comune alle sfere (n.° 323, Oss.). Vale a dire: ogni punto dell'assoluto, considerato in Σ, sarà mutato dalla similitudine in un punto (generalmente diverso) dell'assoluto, considerato in Σ'. Viceversa: *una collineazione tra due spazi, che muti l'assoluto in sè stesso, è una similitudine.* Ciò risulta dal fatto che, se π e π' sono due piani propri corrispondenti nella collineazione, i punti ciclici di π (comuni a π e all'assoluto) devono corrispondere ai punti ciclici di π' (comuni a π' e all'assoluto). Ma allora i due piani π, π' sono simili (n.° 174, Oss.); angoli corrispondenti di essi sono uguali; donde si conclude, per l'arbitrarietà di π, che ogni angolo di Σ è uguale al corrispondente angolo di Σ', ecc. [1].

---

[1] Analiticamente il teorema si dimostra così. Premesso che la nostra collineazione deve mutare il piano dell'assoluto, cioè il piano all'infinito, in sè stesso, ed un triangolo su questo piano, autopolare rispetto all'assoluto, in un altro triangolo siffatto, quindi (n.° 190) un triedro trirettangolo xyz in un triedro trirettangolo $x'y'z'$, si assumano questi due triedri come fondamentali in due sistemi cartesiani di Σ, Σ'. Le equazioni della nostra collineazione (che è un'affinità) saranno allora del tipo

$$(1') \qquad x' = lx, \quad y' = my, \quad z' = nz, \quad t' = t.$$

Queste mutano l'assoluto di Σ', che ha le equazioni

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0, \quad t' = 0,$$

nella conica di Σ

$$l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 = 0, \quad t = 0.$$

Ma questa coincide coll'assoluto di Σ ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $t = 0$), solo quando $l^2 = m^2 = n^2$; ed allora le (1') rappresentano una similitudine.

334. Elementi uniti in una collineazione. — Diremo, al solito, che un elemento (punto, retta, o piano) è *unito*, in una collineazione tra due spazi Σ, Σ', quando quell' elemento, considerato in Σ, ha per corrispondente sè stesso in Σ',

La ricerca analitica dei punti uniti si compie collo stesso metodo seguito in geometria piana (n.° 183). Posto che

(1) $\qquad \varrho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t,$ ecc.

siano le equazioni della collineazione (n.° 332), si scrivano $x, \ldots, t$ al posto di $x', \ldots, t'$. Si otterranno così le equazioni

$$(2)\quad \begin{cases} (a_{11}-\varrho)x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = 0, \\ a_{21}x + (a_{22}-\varrho)y + a_{23}z + a_{24}t = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}-\varrho)z + a_{34}t = 0, \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + (a_{44}-\varrho)t = 0, \end{cases}$$

contenenti la incognita ausiliare ϱ, e le coordinate omogenee x, y, z, t di un punto unito. Eliminando queste ultime fra le (2), si perviene ad una equazione di quarto grado in ϱ

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

la quale ha quattro radici ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4. Sostituendo nelle (2) al posto di ϱ, uno dei valori trovati, ad es. ϱ_1, si ottengono quattro equazioni lineari ed omogenee in x, y, z, t, che si riducono a tre indipendenti (al più). Si potranno dunque calcolare i rapporti $x : y : z : t$, e si avrà in corrispondenza un primo punto unito. Analogamente, valendosi delle radici ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, si trovano altri tre punti uniti. Dunque:

Una collineazione nello spazio ha (in generale) *quattro punti uniti, e* (per dualità) *quattro piani uniti.*

La determinazione analitica di questi ultimi si farebbe (cfr. n.° 183, (2′)) risolvendo il sistema delle quattro equazioni, che si ottengono dalle (2), sostituendo alle coordinate di punti le coordinate di piani, e mutando a_{ik} in a_{ki}; si arriverebbe dunque alla stessa equazione di quarto grado (3), di cui ogni radice fornisce insieme un punto unito ed un piano unito.

I quattro punti uniti di una collineazione, in generale distinti, sono vertici di un tetraedro, le cui facce sono i quattro piani uniti, ed i cui spigoli sono le sei rette unite della collineazione. I quattro punti, ed insieme i quattro piani, possono esser tutti reali, o due reali e due immaginari, o tutti immaginari. Ma può, in casi particolari, accadere che due, o tre, o quattro punti (e quindi piani) uniti vengano a coincidere, o che due punti (o piani) coincidano in un punto (piano), e due in un altro punto (piano); ciò, quando l'equazione (3) ha una radice doppia, tripla, quadrupla, o due radici doppie.

Particolarmente notevoli sono i casi, in cui la equazione (3) ammette una radice, sia ϱ_1, che annulli, non solo il determinante (3), ma pure tutti i minori del terzo ordine, od anche tutti i minori del secondo ordine, radice che, nel primo caso, si riconosce esser doppia, $\varrho_1 = \varrho_2$, e nel secondo caso tripla, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$. Sostituendo nelle (2), al posto di ϱ, quella radice ϱ_1, delle quattro equazioni (2), due o, rispettivamente, tre diventano conseguenza delle rimanenti; ogni punto, soddisfacente colle sue coordinate queste ultime equazioni, soddisfa il sistema (2), ed è quindi unito. Nel primo caso dunque la collineazione ha, come uniti, tutti i punti di una retta, e (per la analogia che collega la ricerca analitica dei punti e piani uniti) tutti i piani passanti per una seconda retta; una tale collineazione dicesi *assiale*. Nel secondo caso la collineazione ha, come uniti, tutti i punti (e le rette) di un piano, e tutti i piani (e le rette) di una stella, e dicesi *omologia solida*.

A dimostrar la esistenza di questi due casi di collineazione, vale anche il ragionamento sintetico seguente.

335. Omologia solida. — Collo stesso ragionamento adoperato in geometria piana (n.° 177), si dimostra che, se una collineazione tra due spazi ha cinque punti uniti, di cui mai quattro appartengano ad un piano, ogni altro punto è unito, e la collineazione è la identità. Esclusa la indentità dalle nostre considerazioni, la presenza di cinque o più punti uniti è possibile soltanto, quando quattro almeno di questi punti stiano in un piano. Ma qui si possono fare due ipotesi:

a) o i quattro punti uniti, situati in un piano, sono tali che mai tre di essi siano allineati, ed allora ogni punto del piano è unito (n.° 177);

b) oppure, dei quattro punti uniti, tre almeno stanno sopra una retta, ed allora ogni punto di questa è unito (n.° 66).

Si conclude che una collineazione, non identica, nello spazio, la quale abbia più di quattro punti (o piani) uniti, ha come uniti tutti i punti di (o i piani per) una retta, oppure tutti i punti di un piano (o i piani per un punto). Esaminiamo anzitutto la ipotesi *a*), la quale conduce ad una particolare collineazione, detta omologia solida. Sia σ il *piano di omologia*, di cui sono uniti tutti i punti, e quindi tutte le rette. Presi nello spazio due punti corrispondenti distinti A, A', si dimostra, imitando l'analogo ragionamento di geometria piana (n.° 178), che è unita la retta AA', ed è unito ogni piano per essa. La omologia possiede dunque infiniti piani uniti, i quali, per quanto sopra si disse, dovranno appartenere ad un fascio o ad una stella. Ma il primo caso si esclude, osservando che per un punto generico A dello spazio passano infiniti piani uniti. Si conclude dunque l'esistenza di un punto S, *centro di omologia,* tale che è unito ogni piano, e quindi ogni retta, per esso; anche il punto S è unito.

Risulta così che la omologia solida ha, come uniti, tutti i punti del piano di omologia σ, ed inoltre il centro di omologia S (che potrebbe eventualmente appartenere a σ); ha uniti tutti i piani per S ed il piano σ; finalmente ha unite tutte le rette di σ e le rette per S. All'infuori di questi, nessun altro elemento è unito nell'omologia; si dimostra col ragionamento analogo a quello tenuto in geometria piana (n.° 178).

Procedendo come al n.° 179, si dimostrano le seguenti proprietà dell' omologia:

Punti distinti, corrispondenti in una omologia solida, sono allineati col centro; piani distinti, corrispondenti, si segano sul piano di omologia; rette distinte, corrispondenti, si segano sul piano di omologia, e determinano un piano passante pel centro.

Una omologia è individuata, quando di essa si conoscano il centro, il piano, e due punti corrispondenti allineati col centro, o due piani corrispondenti secantisi sul piano di omologia.

Un primo caso particolare metrico di omologia solida, detto *omotetia*, si presenta, se il piano di omologia è all' infinito, mentre il centro è proprio. Nell' omotetia rette corrispondenti, o piani corrispondenti, sono paralleli tra loro; punti corrispondenti sono allineati col centro, e le loro distanze da questo stanno in un rapporto costante. Se, in particolare, questo rapporto vale — 1, i segmenti congiungenti punti omologhi sono bisecati dal centro, e la omotetia diventa la *simmetria rispetto ad un centro* (caso particolare di collineazione involutoria); figure omologhe sono inversamente uguali.

Un secondo caso particolare metrico, detto *affinità omologica*, si presenta, quando il centro di omologia è improprio ed il piano proprio. Tutti i segmenti, che congiungono punti omologhi, riescono paralleli, e sono divisi dal piano di omologia (ove lo incontrino) in un rapporto costante. Se questo rapporto vale — 1, e quei segmenti risultano perpendicolari al detto piano, si ha la *simmetria rispetto ad un piano*, nella quale figure corrispondenti sono inversamente uguali.

Finalmente, se il centro ed il piano di omologia sono impropri, la omologia diventa una *equipollenza*, collineazione, nella quale tutti i segmenti congiungenti punti omologhi risultano equipollenti. Ogni figura può esser sovrapposta alla corrispondente mediante una *traslazione* (movimento in cui tutti i punti descrivono segmenti equipollenti); figure corrispondenti sono quindi direttamente uguali.

336. Un esempio di collineazione assiale. — Dovremmo discutere ora la ipotesi *b*) del n.° precedente, relativa ad una collineazione, che possiede una retta r composta di punti uniti. Si dimostra allora che la collineazione possiede pure una retta r', asse di un fascio di piani uniti. Ma poichè una siffatta collineazione, detta *assiale*, non interviene nel seguito del nostro corso, nè trova facili applicazioni, crediamo inutile di svilupparne la teoria, e preferiamo dimostrare, sopra un esempio, come essa possa realmente presentarsi.

Si immagini che lo spazio Σ (od una figura rigida in esso contenuta) ruoti di un certo diedro intorno ad una retta r, ed assuma, alla fine del movimento, la posizione Σ'. È chiaro che fra i due spazi Σ, Σ' passa una collineazione (uguaglianza), in cui sono uniti tutti i punti della retta r e tutti i piani normali ad r, i quali passano per una retta impropria r'_∞. Questa collineazione è dunque assiale.

Se però la rotazione è misurata da un diedro piatto, sono uniti inoltre tutti i punti di r'_∞ e tutti i piani per r, e si ha un esempio di una particolare collineazione (detta *biassiale*), che ha, come uniti, tutti i punti di due rette r, r' e tutti i piani condotti per le rette stesse. Si tratta anzi qui di una collineazione non omologica, che ha proprietà involutoria; donde risulta non potersi estendere allo spazio il teorema, dimostrato nel piano (n.° 181), secondo il quale una collineazione piana involutoria è una omologia.

337. Correlazioni nello spazio. — Veniamo finalmente a trattare delle correlazioni nello spazio, di cui fu data la definizione al n.° 330, *b*), e di cui il teorema del n.° 331 dimostra l'esistenza [1].

Un ragionamento, perfettamente analogo a quello tenuto nel n.° 332, fa vedere che ogni correlazione fra lo spazio Σ, descritto dal punto $P(x, y, z, t)$, e lo spazio Σ', descritto dal piano $\pi'(u', v', w', r')$, è rappresentata da equazioni del tipo

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho u' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t,\\ \varrho v' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t,\\ \varrho w' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t,\\ \varrho r' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t,\end{aligned}\right.$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità non nullo, e le a_{ik} sono sedici costanti, costituenti un determinante del quarto ordine

$$(2)\qquad A \neq 0.$$

Risolvendo le (1) rispetto ad x, y, z, t, si ottengono le relazioni

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma x &= A_{11}u' + A_{21}v' + A_{31}w' + A_{41}r',\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma t &= A_{14}u' + A_{24}v' + A_{34}w' + A_{44}r',\end{aligned}\right.$$

(dove σ è un fattore di proporzionalità, e le A_{ih} sono i soliti complementi algebrici), le quali determinano il punto P di Σ, quando sia noto il piano corrispondente π' di Σ'.

---

[1] L'esistenza di una correlazione nello spazio (correlazione che muta una figura composta di n punti, n' rette, n'' piani, in una figura *duale* composta di n piani, n' rette, n'' punti) dà una nuova giustificazione della *legge di dualità nello spazio* (n.° 6), giacchè ogni proprietà grafica della prima figura trova riscontro in una proprietà grafica duale della seconda.

Finalmente se, dato un punto $R'(x', y', z', t')$ in Σ' si, desidera il piano corrispondente $\varrho(u, v, w, r)$ in Σ, basta seguire il procedimento sviluppato in geometria piana al n.° 186; si trovano così le formole

$$(4)\quad \begin{cases} \tau u = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + a_{41}t', \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau r = a_{14}x' + a_{24}y' + a_{34}z' + a_{44}t', \end{cases}$$

essendo τ un fattore di proporzionalità.

338. Correlazioni involutorie. — Stabilita una correlazione generica fra due spazi Σ, Σ' (che supporremo ora riferiti ad un unico triedro coordinato), un punto generico ha due piani corrispondenti *distinti*, secondo che quel punto vien considerato una prima volta in Σ, e trasformato mediante la correlazione diretta K, rappresentata dalle (1), colla quale si passa da Σ a Σ'; o vien considerato una seconda volta in Σ', e trasformato mediante la correlazione inversa K^{-1}, rappresentata dalle (4), che conduce da Σ' a Σ. Ciò risulta dalle formole stesse, perchè le (1) e le (4) forniscono risultati generalmente distinti (e non proporzionali), quando si ponga $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$.

Si può chiedere però, se esista un punto $P \equiv R'$, tale che i due piani π' e ϱ, ad esso corrispondenti mediante K, K^{-1}, vengano a coincidere in un solo; nel qual caso potrà dirsi che quel punto corrisponde *doppiamente* a questo piano (cfr. n.° 187). Ciò accade, se le coordinate x, y, z, t del punto rendono proporzionali i secondi membri delle (1) e delle (4); vale a dire, indicando con k un fattore di proporzionalità non nullo, se quelle coordinate rendono

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = k(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z + a_{41}t),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ossia

$$(5)\quad \begin{cases} (a_{11}-ka_{11})x+(a_{12}-ka_{21})y+(a_{13}-ka_{31})z+(a_{14}-ka_{41})t=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{41}-ka_{14})x+(a_{42}-ka_{24})y+(a_{43}-ka_{34})z+(a_{44}-ka_{44})t=0. \end{cases}$$

La coesistenza di queste equazioni, per valori non tutti nulli di x, y, z, t, esige l' annullarsi del determinante del sistema, cioè

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - ka_{11} & a_{12} - ka_{21} & a_{13} - ka_{31} & a_{14} - ka_{41} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{41} - ka_{14} & a_{42} - ka_{24} & a_{43} - ka_{34} & a_{44} - ka_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Si ha qui una equazione di quarto grado in k, la quale fornisce quattro radici k_1, k_2, k_3, k_4. Sostituendo nelle (5), al posto di k, una di queste radici, e risolvendo il sistema di equazioni che ne risulta, si trova un punto $(x : y : z : t)$, che soddisfa alla condizione richiesta. Dunque *in una correlazione nello spazio, esistono in generale quattro punti, ciascuno dei quali corrisponde doppiamente ad un piano.*

Può darsi però, in casi particolari, che esista un valore di k, il quale annulli tutti i minori del terzo ordine, o del secondo ordine, od anche tutti gli elementi del determinante (6). Per quel valore di k il sistema (5) equivale, ordinatamente, ad un sistema di due, una, o nessuna equazione lineare omogenea in x, y, z, t (annullandosi nell' ultimo caso tutti i coefficienti delle (5)); il sistema stesso rappresenta dunque, rispettivamente, una retta, un piano, o lo spazio. Vuol dire che il punto generico di quella retta, o di quel piano, o dello spazio, gode la proprietà richiesta, cioè corrisponde doppiamente ad un piano.

Solo il terzo caso ci interessa. Quando esso si presenta, ogni punto dello spazio ha dunque un unico piano corrispondente, sia nella correlazione diretta $\boldsymbol{K}$, sia nella inversa $\boldsymbol{K}^{-1}$. Diremo allora che *la correlazione è involutoria* (identica colla sua inversa), adottando qui una locuzione, che fu adoperata in casi analoghi (per es. al n.° 187).

La condizione analitica, affinchè tale sia la correlazione (1), è, come dicevamo, l' esistenza di un valore di k, che annulli tutti gli elementi del determinante (6), vale a dire che soddisfi alle sedici relazioni

$$(7)\qquad a_{il} - ka_{li} = 0, \qquad (i, l = 1, 2, 3, 4).$$

α) Ora, se uno almeno, a_{ii}, dei quattro elementi principali del determinante A della sostituzione (1) non è nullo, la corrispondente relazione (compresa nelle (7))

$$a_{ii} - ka_{ii} = 0$$

ci fornisce $k = 1$; e questo valore, sostituito nelle altre relazioni (7), ci dà

(8) $$a_{il} = a_{li} \qquad (i, l = 1, 2, 3, 4).$$

Concludiamo che il determinante A della correlazione è, in tal caso, *simmetrico*.

β) Se invece $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$, dovrà esser diverso da zero, per la (2), qualcuno degli altri elementi del determinante A. Sia, per es., $a_{12} \neq 0$. Allora la relazione

$$a_{12} - ka_{21} = 0,$$

compresa nelle (7), ci dice anzitutto che k ed a_{21} sono diversi da zero. Moltiplicando ora membro a membro la stessa relazione, scritta sotto la forma $a_{12} = ka_{21}$, per l'analoga $a_{21} = ka_{12}$, che è pur compresa fra le (7), si ottiene subito

$$k^2 = 1, \quad \text{donde} \quad k = \pm 1.$$

La soluzione $k = 1$ ci riconduce al caso α). La $k = -1$ ci dà invece

(8') $$a_{ii} = 0, \quad a_{il} = -a_{li} \qquad (i, l = 1, 2, 3, 4),$$

e conduce ad un determinante A *emisimmetrico*. Anche in geometria piana (n.° 187) avevamo incontrato, accanto al caso α), questo secondo caso β); ma avevamo dovuto scartarlo, perchè allora A aveva l' ordine 3, ed i determinanti emisimmetrici d'ordine dispari sono nulli. Una tale esclusione non è più lecita nello spazio, perchè ora A è del *quarto* ordine, e non si annulla più in conseguenza delle sole ipotesi (8'). Dunque:

Nello spazio esistono due tipi, essenzialmente distinti, di correlazioni involutorie; il determinante della sostituzione lineare, rappresentante la correlazione, è simmetrico per le correlazioni del primo tipo, emisimmetrico per quelle del secondo tipo.

Le correlazioni del primo tipo, perfettamente analoghe a quelle esistenti nel piano (n.° 188), prendono il nome di *correlazioni polari*, o *polarità nello spazio*. Le correlazioni del secondo tipo, che non hanno corrispondenze analoghe nel piano, diconsi, col Möbius (1837), *correlazioni nulle* (per ragioni prese dalla statica, ove esse trovano applicazione), od anche *correlazioni focali* (1).

---

(1) Una corrispondenza di questo tipo fra punti e piani era già stata segnalata dal Giorgini nel 1827.

È facile indicare un carattere geometrico, che permetta di distinguere le correlazioni polari dalle correlazioni nulle. Si ricerchi, a tal fine, il luogo di un punto (x, y, z, t), che appartenga al piano (u', v', w', r'), ad esso corrispondente nella correlazione (1). Supposto di aver riferito i punti ed i piani ad un unico sistema di assi coordinati, e scritta quindi la condizione di appartenenza di punto e piano sotto la forma (n.° 312)

$$u'x + v'y + w'z + r't = 0,$$

si osservi che questa, eseguendo le sostituzioni (1), diviene

$$(9) \quad a_{11}x^2 + \ldots + a_{44}t^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + \ldots + (a_{34} + a_{43})zt = 0.$$

Nelle ipotesi (8), la equazione stessa rappresenta una superficie del secondo ordine

$$(10) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0.$$

Invece, nelle ipotesi (8'), si annullano tutti i coefficienti della (9), la quale è dunque soddisfatta dalle coordinate di ogni punto dello spazio. Concludiamo:

Nella correlazione polare, quei punti, che appartengono ai piani corrispondenti, costituiscono una superficie di secondo ordine (*superficie fondamentale* della polarità). *Al contrario, nella correlazione nulla, ogni punto dello spazio appartiene al piano che gli corrisponde.*

Questo enunciato lascia prevedere la stretta relazione, che passa fra la teoria delle correlazioni polari e quella delle superficie del secondo ordine (cfr. n.° 188). E poichè lo studio delle correlazioni è qui premesso per illuminare la teoria di queste superficie, ci limitiamo, nelle righe seguenti, ad aggiungere qualche cenno sulle polarità, lasciando da parte le correlazioni nulle (1).

---

(1) Affinchè il lettore possa formarsi una idea delle correlazioni nulle, accennerò qui una generazione cinematica di corrispondenze siffatte, indicata dallo Chasles. Si immagini nello spazio un corpo rigido $ABC\ldots$, al quale venga impresso un movimento, che non sia nè una semplice traslazione, nè una rotazione intorno ad un asse. Nel primo istante i punti A,

339. Polarità nello spazio. — Ricordo anzitutto che una polarità nello spazio è rappresentata da quattro relazioni del tipo

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho r = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{cases} \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

colla condizione

$$(2)\qquad A \neq 0,$$

o dalle relazioni, risolte rispetto alle coordinate di punti,

$$(3)\quad \begin{cases} \sigma x = A_{11}u + A_{21}v + A_{31}w + A_{41}r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma t = A_{14}u + A_{24}v + A_{34}w + A_{44}r. \end{cases} \qquad (A_{ik} = A_{ki})$$

Di due elementi, che si corrispondono in una correlazione polare, è inutile dire quale si consideri nel primo, e quale nel secondo dei due spazi sovrapposti; si dirà senz' altro che i due elementi sono mutuamente *polari*. Così, un punto ha un *piano polare* (determinato dalle (1)), un piano ha un *polo* (determinato dalle (3)), una retta r ha una *retta polare* r'.

La polarità, che muta una retta r nella retta r', muta ogni punto di r (o di r') in un piano passante per r' (o per r); dunque, *di due rette mutuamente polari, ciascuna è il luogo dei poli dei piani passanti per l'altra.* Mentre un punto descrive la retta r, il piano polare ruota intorno alla retta r', generando un fascio proiettivo alla punteggiata su r.

In modo analogo si dimostrano i teoremi (cfr. n.° 188):

Se di due punti il secondo appartiene al piano polare del primo, il primo apparterrà al piano polare del secondo; i due punti diconsi *coniugati*, o *reciproci*, nella polarità.

Se di due piani il secondo passa per il polo del primo, il primo passerà per il polo del secondo; i due piani diconsi *coniugati*, o *reciproci*, nella polarità.

B, C... del corpo cominceranno a muoversi in determinate direzioni a, b, c... (tangenti in A, B, C... alle traiettorie descritte da questi punti). Si costruiscano ora i piani α, β, γ... perpendicolari alle rette a, b, c... in A, B, C... rispettivamente. Orbene, quei piani α, β, γ... corrispondono a quei punti A, B, C... in una determinata correlazione nulla. (cfr. n.° 339, es. 19)).

Si dice inoltre che

una retta ed un punto sono *coniugati*, o *reciproci*, quando la retta appartiene al piano polare del punto, e, in conseguenza, il punto appartiene alla retta polare della retta data.

una retta ed un piano sono *coniugati*, o *reciproci*, quando la retta passa per il polo del piano, e, in conseguenza, il piano passa per la retta polare della retta data (¹).

Così, ad es., se due rette r, r' sono mutuamente polari, ogni punto di r è coniugato ad ogni punto di r' e ad r' stessa, ed ogni piano per r è coniugato ad ogni piano per r' e ad r' stessa.

Un punto è *autoconiugato*, se esso appartiene al proprio piano polare; ora abbiamo visto al n.° 338, che *il luogo dei punti autoconiugati nella polarità* (1) *è la superficie del secondo ordine* (superficie *fondamentale* della polarità):

$$(10)\qquad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}t^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz + 2a_{14}xt+2a_{23}yz+2a_{24}yt+2a_{34}zt=0.$$

Dualmente, un piano è *autoconiugato*, se esso contiene il proprio polo. Per determinare l' inviluppo dei piani autoconiugati, si scriva la solita condizione di appartenenza di punto e piano $ux+vy+wz+rt=0$, ed in essa si sostituiscano, al posto delle coordinate (x, y, z, t) del polo, le loro espressioni (3). Fatti i calcoli, risulta l' equazione

$$(11)\qquad A_{11}u^2+A_{22}v^2+A_{33}w^2+A_{44}r^2+2A_{12}uv+2A_{13}uw + 2A_{14}ur+2A_{23}vw+2A_{24}vr+2A_{34}wr=0,$$

rappresentante un inviluppo di seconda classe. Dunque: *i piani autoconiugati, in una polarità nello spazio, costituiscono un inviluppo doppiamente infinito di seconda classe* (inviluppo *fondamentale* della polarità).

Vedremo poi tra poco, che, viceversa, una superficie di secondo ordine, od un inviluppo doppiamente infinito di seconda classe, determinano, in generale, una polarità, di cui quella superficie, o questo inviluppo, sono fondamentali. Ed in quella occasione ritorneremo sulla teoria della polarità.

(¹) Per ricordare queste definizioni, si noti che due elementi diconsi *polari*, quando la polarità muta uno di essi nell'altro; diconsi invece *coniugati*, o *reciproci*, quando uno di essi appartiene all'elemento polare dell'altro. Un elemento assegnato ha dunque un solo elemento polare, ma infiniti elementi coniugati.

Esercizi. I. — 1) Una collineazione tra due spazi, la quale abbia come punti uniti i vertici di un tetraedro reale $XYZT$, è rappresentata da equazioni (*canoniche*) del tipo

$$(1) \qquad \varrho x' = ax, \quad \varrho y' = by, \quad \varrho z' = cz, \quad \varrho t' = dt,$$

quando i punti dei due spazi si riferiscano ad un unico sistema di coordinate proiettive, avente quel tetraedro come fondamentale; a, b, c, d sono costanti, i cui mutui rapporti sono le caratteristiche (n.° 73, a)) delle proiettività, che la collineazione subordina sugli spigoli (rette unite) del tetraedro.

2) La collineazione (1) non ha altri punti uniti, se a, b, c, d sono distinte tra loro. Ma se $a = b$, ogni punto $(x, y, 0, 0)$ dello spigolo XY è unito, ed è pure unito ogni piano $\lambda x + \mu y = 0$ passante per lo spigolo opposto ZT. Si ha così un esempio di collineazione assiale; le rette congiungenti punti omologhi segano quest' ultimo spigolo, mentre le rette intersezioni di piani omologhi segano lo spigolo XY.

3) Si supponga ora che sia $a = b$, $c = d$, $a \neq c$; sono allora uniti tutti i punti e tutti i piani appartenenti all' uno, o all' altro, dei due spigoli XY, ZT, e si ha una collineazione biassiale. Ogni retta congiungente due punti omologhi sega i due spigoli nominati in altri due punti, che con quelli formano un doppio rapporto costante $\frac{a}{c}$ (*caratteristica*); la proprietà duale sussiste per la retta intersezione di piani omologhi.

4) Le proprietà enunciate permettono di costruire facilmente una collineazione biassiale, determinata da due assi XY, ZT, reali e distinti, e dal valore della caratteristica. Si esamini, in particolare, il caso che sia $a = -c$; allora le equazioni della collineazione possono scriversi sotto la forma

$$\varrho x' = x, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho z' = -z, \quad \varrho t' = -t,$$

e la collineazione è *involutoria* (collineazione biassiale *armonica*). Si considerino inoltre i casi metrici, che si presentano, quando il sistema di coordinate è cartesiano ortogonale.

5) Se nelle (1) (es. 1)) si ha $a = b = c \neq d$, la collineazione, le cui equazioni possono scriversi sotto la forma

$$\varrho x' = x, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho z' = z, \quad \varrho t' = kt,$$

è un' omologia col centro $(0, 0, 0, 1)$, col piano $t = 0$, e colla caratteristica k (cfr. n.° 180). Se, in particolare, $k = -1$, l' omologia è *armonica* (cfr. n.° 181), e fornisce un secondo tipo di collineazioni *involutorie* dello spazio. Si consideri, in particolare, la ipotesi che il tetraedro fondamentale abbia una delle sue facce (la $t = 0$, oppure la $z = 0$) all' infinito, nel qual caso le coordinate diventano cartesiane.

6) In coordinate cartesiane omogenee, una omologia, il cui centro cada nell' origine, ha equazioni del tipo

$$\varrho x' = x, \quad \varrho y' = y, \quad \varrho z' = z, \quad \varrho t' = ax + by + cz + dt.$$

Qual' è il piano d' omologia? Qual' è la condizione perchè il detto piano passi per il centro d' omologia, e la omologia sia *speciale* (n.° 183, 5))?

7) Ogni collineazione involutoria dello spazio è una omologia armonica, o una collineazione biassiale armonica. [Sia K la collineazione involutoria, e siano AA', BB',... coppie di punti distinti corrispondenti. Le

rette AA', BB',... sono unite (n.° 181). Se si segano a due a due, si ha una omologia (n.° 335) armonica. Se invece due di esse sono sghembe, assumendo il tetraedro $AA'BB'$ come fondamentale in un sistema di coordinate proiettive, le equazioni della collineazione assumono la forma

$$\varrho x' = ay, \quad \varrho y' = bx, \quad \varrho z' = ct, \quad \varrho t' = dz,$$

dove $ab = cd$, perchè devono coincidere i punti corrispondenti al punto (1, 1, 1, 1) in K e in K^{-1}. Mediante una trasformazione conveniente di coordinate, che alteri solo il punto unità, quelle equazioni si mutano nelle seguenti:

$$\varrho X' = Y, \quad \varrho Y' = \pm X, \quad \varrho Z' = T, \quad \varrho T' = \pm Z,$$

dove vanno scelti i segni superiori se $ab = cd > 0$, gli inferiori nel caso opposto. In ambedue i casi si ha una collineazione biassiale armonica, la quale, nel primo caso, ha due assi reali $(X = Y, Z = T)$, $(X = -Y, Z = -T)$, e nel secondo due assi immaginari $(X = iY, Z = iT)$, $(X = -iY, Z = -iT)$].

II. — 8) In una collineazione tra due spazi Σ, Σ', non affini, ogni punteggiata di Σ, parallela al relativo piano limite, è simile alla punteggiata corrispondente di Σ'. Ed in infiniti modi si possono costruire punteggiate corrispondenti uguali. Un piano di Σ, parallelo al relativo piano limite, è affine al piano corrispondente; e vi son due posizioni di quel piano, per cui la affinità riesce equivalente. In generale, non esistono piani corrispondenti simili; se, in casi particolari, ne esiste una coppia, ne esistono infinite; allora si possono costruire piani corrispondenti uguali; e spostando lo spazio Σ', rispetto allo spazio Σ, si può ottenere che la collineazione diventi una omologia (cfr. n.° 185, es. 15), 16)).

9) L'affinità tra due spazi Σ, Σ', riferiti a due triedri ortogonali corrispondenti, ha equazioni del tipo

$$x' = lx, \quad y' = my, \quad z' = nz.$$

Un segmento di Σ ha col corrispondente di Σ' un rapporto, che dipende solo dalla direzione ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) del primo segmento. Qual'è questo rapporto? quali sono le direzioni per cui il rapporto vale 1? Si troverà che le rette uscenti dalla origine di Σ, sostegni di punteggiate uguali alle corrispondenti in Σ', formano il cono di secondo ordine

$$(l^2 - 1)x^2 + (m^2 - 1)y^2 + (n^2 - 1)z^2 = 0,$$

cono immaginario se i tre coefficienti hanno lo stesso segno, reale in caso opposto, spezzato in due piani se uno dei coefficienti si annulla; in tale ipotesi ciascuno dei due piani è uguale al piano corrispondente. Si dimostri inoltre, che ciascuno dei due piani

$$x\sqrt{l^2 - m^2} \pm z\sqrt{m^2 - n^2} = 0$$

(dove si può supporre $l \geqq m \geqq n$), e ciascuno dei piani paralleli in Σ, è simile al corrispondente piano in Σ'; il rapporto di similitudine vale m.

10) Riferiti due spazi affini Σ, Σ' ad un unico sistema di coordinate ortogonali, e scritte le equazioni della affinità sotto la forma

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a,$$
$$y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b,$$
$$z' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c,$$

si osservi che le condizioni, affinchè l' affinità muti il cerchio assoluto ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $t = 0$) in sè stesso, sono

$$\alpha^2_i + \beta^2_i + \gamma^2_i = k^2, \quad \alpha_i\alpha_l + \beta_i\beta_l + \gamma_i\gamma_l = 0, \quad (i, l = 1, 2, 3)$$

dove k è una costante; il determinante dei coefficienti di x, y, z vale k^3. Soddisfatte quelle condizioni, ogni segmento di Σ' ha col segmento corrispondente di Σ il rapporto costante k; l'affinità è dunque una similitudine, e precisamente una uguaglianza se $k = 1$ (cfr. n.° 174, Oss.); nell' ultimo caso le formole scritte coincidono con quelle per la trasformazione ortogonale di coordinate (n.° 309, es. 2)). La similitudine (od uguaglianza) è diretta od inversa, secondo che k è positivo o negativo.

11) In una similitudine tra Σ e Σ', che non sia una uguaglianza ($k^2 \neq 1$), esistono almeno due punti reali uniti, uno proprio U (*centro di similitudine*), l' altro improprio V_∞; in generale, vi sono altri due punti uniti immaginari, che cadono nei punti ciclici dei piani normali ad UV_∞: ma ogni punto all' infinito di questi piani può esser unito, od anche tali possono essere tutti i punti del piano all' infinito. Nel terzo caso la similitudine è una omotetia (n.° 335); nel primo e nel secondo diviene una omotetia, purchè si faccia ruotare lo spazio Σ' intorno alla retta UV_∞ di un angolo conveniente. Dunque: « due spazi simili, non uguali, possono sempre esser portati in posizione omotetica, mediante rotazione di uno di essi intorno ad un asse conveniente » (Chasles).

12) Nell' uguaglianza diretta tra Σ e Σ' può esistere un punto unito reale e proprio U, nel qual caso esiste una retta u reale, uscente da U, i cui punti son tutti uniti; facendo ruotare uno dei due spazi intorno ad u, di un angolo conveniente, si ottiene la sovrapposizione delle figure omologhe. Nella ipotesi opposta esiste sempre almeno una retta reale unita u, sulla quale la corrispondenza tra Σ e Σ' subordina una uguaglianza diretta. Applicando ad uno dei due spazi un movimento di traslazione nella direzione u, si può ottenere che le due punteggiate uguali sopra u si sovrappongano, e si ricade nel caso precedente. Dunque: « Una figura nello spazio può sempre esser portata a coincidere con una seconda figura, direttamente uguale ad essa, mediante una traslazione parallela ad una retta determinata, seguita da una rotazione intorno a questa retta », o, brevemente, « mediante un movimento elicoidale intorno alla retta ». Si può anche dire: « ogni movimento nello spazio può essere sostituito da un movimento elicoidale intorno ad una retta determinata » (Mozzi, Chasles); il segmento che misura la traslazione, o l' angolo che misura la rotazione, si annullano in casi particolari. La retta nominata dicesi *asse* del movimento elicoidale; scegliendolo come asse z, le relazioni, che legano l' antica e la nuova posizione di uno stesso punto, si presentano sotto la forma c) dell' es. 1), che segue il n.° 309.

13) I segmenti AA', BB', ..., che congiungono punti corrispondenti delle due figure direttamente uguali, hanno proiezioni ortogonali uguali sull' asse, e vengono proiettati dall' asse sotto angolo costante. I punti medi A_0, B_0,... dei detti segmenti formano una nuova figura, che corrisponde alle due primitive in due affinità.

14) I segmenti congiungenti punti omologhi di due spazi, o di due figure, inversamente uguali, hanno i loro punti medi sopra uno stesso piano, o riuniti in un punto. Nell' ultimo caso le due figure sono simmetriche rispetto a questo punto; nel primo caso l' una figura può porsi in posizione simmetrica all' altra rispetto a quel piano, mediante una rotazione intorno ad un asse normale al piano, o mediante una traslazione in una direzione parallela al piano.

III. — 15) Una correlazione tra due spazi Σ, Σ', la quale muti i vertici di un tetraedro, considerati in Σ, nelle facce opposte, considerate in Σ', è una polarità; assunto il tetraedro come fondamentale in un sistema di coordinate proiettive di punti e piani, le equazioni della correlazione prendono la forma

$$\varrho u' = ax, \quad \varrho v' = by, \quad \varrho w' = cz, \quad \varrho r' = dt,$$

dove a, b, c, d sono costanti (cfr. n.° 190, es. 8)).

16) Una correlazione nulla è definita (n.° 338) da equazioni del tipo:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho u &= & a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \varrho v &= -a_{12}x & + a_{23}z + a_{24}t, \\ \varrho w &= -a_{13}x - a_{23}y & + a_{34}t, \\ \varrho r &= -a_{14}x - a_{24}y - a_{34}z, & \end{aligned}\right.$$

nell' ipotesi che il determinante dei coefficienti $(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$ sia diverso da zero. Il piano π, che corrisponde al punto $P(x', y', z', t')$, ha, in coordinate variabili x, y, z, t, l' equazione

$$(2)\quad a_{12}(xy' - x'y) + a_{13}(xz' - x'z) + a_{14}(xt' - x't) + a_{23}(yz' - y'z) + a_{24}(yt' - y't) + a_{34}(zt' - z't) = 0;$$

il piano passa per il punto P, e dicesi *piano polare* del punto (*polo*) P nella correlazione nulla. Se il punto P descrive una retta r, il piano π ruota intorno ad una retta r' (*polare* di r), generando un fascio, che è prospettivo alla punteggiata sopra r, se r ed r' sono sghembe. « Due rette polari, in una correlazione nulla, o sono sghembe, o coincidono ». Nell' ultimo caso r dicesi *direttrice* della correlazione nulla; ogni punto di r ha come polare un piano passante per r, e viceversa. « Ad ogni punto P, o ad ogni piano π, appartengono infinite direttrici formanti un fascio, il cui piano, o il cui centro, corrispondono nella correlazione al punto P, o al piano π ». L'insieme delle infinite direttrici di una correlazione nulla dicesi *complesso lineare di rette;* è questa la prima forma, che si presenta nella geometria dello spazio rigato. La condizione, perchè la retta congiungente i due punti (x, y, z, t), (x', y', z', t') sia direttrice della correlazione (1), è espressa dal verificarsi della (2).

17) Al piano all' infinito corrisponde, nella correlazione nulla, un punto improprio C_∞, *centro* della correlazione. Ogni retta s condotta per C_∞ (*diametro*) ha come polare una retta impropria s'_∞, e contiene quindi i poli di tutti i piani paralleli passanti per s'_∞. In particolare, i piani normali ad uno, e quindi ad ogni diametro, hanno i poli sopra un particolare diametro, che dicesi *asse* della correlazione nulla. Partendo dalle equazioni di questa, si trovino le coordinate del centro e le equazioni dell' asse.

18) Assunto l'asse di una correlazione nulla come asse z di un sistema cartesiano ortogonale, le equazioni della correlazione prendono la forma

$$(1') \qquad \varrho u = ay, \quad \varrho v = -ax, \quad \varrho w = bt, \quad \varrho r = -bz;$$

quindi l'equazione non omogenea del piano polare del punto (x', y', z') è

$$(2') \qquad (xy' - x'y) + k(z - z') = 0, \qquad \left(k = \frac{b}{a}\right);$$

ed è pur questa la condizione, perchè la retta congiungente i due punti (x, y, z), (x', y', z') sia direttrice. L'equazione (2') non si altera, se al triedro degli assi si applica una traslazione parallela all'asse z, od una rotazione intorno all'asse z; ciò si verifica, sia eseguendo la relativa trasformazione di coordinate (che, ad es., nel primo caso è rappresentata dalle formole $z = Z + h$, $z' = Z' + h$), sia badando al significato geometrico dei binomi $xy' - x'y$, $z - z'$, il primo dei quali esprime il doppio della proiezione di un'area triangolare, ecc. Segue che la correlazione nulla non è alterata nè da una traslazione parallela all'asse, nè da una rotazione intorno all'asse, nè, in generale, da un movimento elicoidale intorno all'asse. In altre parole: « un movimento elicoidale intorno all'asse, che » porti un punto P in una nuova posizione P', sovrappone il piano polare » di P al piano polare di P' ». Una qualsiasi retta perpendicolare all'asse può dunque scegliersi come asse coordinato x. Preso su questa retta il polo $(x', 0, 0)$, il piano polare ha, (2'), l'equazione $y = \frac{k}{x'} z$; esso passa per l'asse x, e forma col piano xy un diedro ω, tale che $\operatorname{tg} \omega = \frac{x'}{k}$ (assumendo come positiva la rotazione che porta il piano xy a coincidere col piano xz). « Mentre un punto P descrive una retta perpendicolare all'asse di una correlazione nulla, il piano polare π di P ruota intorno a quella retta (che è una direttrice), ed il rapporto fra la distanza di P dall'asse e la tangente del diedro, che π forma con un piano normale all'asse, conserva un valore costante k » (Möbius). La correlazione nulla è pienamente determinata, quando sia noto l'asse ed il valore della costante k.

19) « Ad ogni spostamento di una figura nello spazio è collegata una determinata correlazione nulla, che ha per asse l'asse del movimento elicoidale atto a produrre quello spostamento (es. 12)); nella correlazione, il punto medio del segmento, che congiunge le posizioni iniziale e finale di uno stesso punto mobile, ha come polare il piano perpendicolare al detto segmento nel punto medio nominato » (Chasles). Se

$$x = X \cos\varphi - Y \operatorname{sen}\varphi, \quad y = X \operatorname{sen}\varphi + Y \cos\varphi, \quad z = Z + c$$

sono le relazioni che legano le posizioni iniziale e finale, ed (x_0, y_0, z_0) è il punto medio del segmento che le congiunge, il piano polare di esso ha l'equazione

$$(xy_0 - x_0 y) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{c}{2} (z - z_0) = 0,$$

che definisce appunto la correlazione nulla.

Parte Quinta.

Superficie di secondo ordine.

Capitolo I.

Polarità definita dalla superficie.

340. Definizione ed esempi di quadriche. — Una *superficie del secondo ordine*, o, come diremo brevemente, una *quadrica*, è il luogo dei punti (reali e immaginari) dello spazio soddisfacenti, colle loro coordinate cartesiane x, y, z, ad una equazione di secondo grado a tre variabili. Una equazione siffatta può contenere sei termini di secondo grado (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz), tre termini di primo grado (x, y, z), e un termine noto; essa avrà la forma

$$(1)\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

dove le a sono coefficienti costanti, che supporremo reali, quando non si dica il contrario; alcune possono anche esser nulle.

Spesso conviene adoperare la equazione della superficie in coordinate omogenee x, y, z, t; col solito procedimento (n.° 310) applicato alla (1), si ottiene questa equazione sotto la forma

$$(1')\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0;$$

ponendo in questa $t = 1$, si riproduce la (1) (1).

La equazione generale (1) delle quadriche non si presta allo studio della forma di siffatte superficie, studio che verrà fatto in seguito, partendo da equazioni contenenti un minor numero di termini. È bene però, nei paragrafi seguenti, riferirsi ad alcuni tipi di quadriche facilmente costruibili, per potervi applicare i risultati a cui giungeremo. Tali tipi sono la sfera

---

(1) È bene notare, sebbene non occorra per il seguito, che la (1) o (1') rappresentano una quadrica, anche se le variabili si riguardano come coordinate proiettive non omogenee, od omogenee.

(n.° 323), l'ellissoide rotondo, i due iperboloidi rotondi, il paraboloide rotondo (n.° 328). Appartengono pure alla famiglia delle quadriche i *coni* e i *cilindri del secondo ordine*, proiettanti una conica da un punto, proprio od improprio, esterno al piano della curva (come si verifica scrivendo le relative equazioni); in particolare, il cono ed il cilindro rotondo della geometria elementare; ed una quadrica particolare è *la coppia di piani*, rappresentata dall'equazione, che si ottiene moltiplicando tra di loro, membro a membro, le equazioni dei due piani, ridotte ad aver 0 nel secondo membro.

D'altra parte, va notato che una quadrica può non avere alcun punto reale (ad es. $x^2 + y^2 + z^2 = -1$), od averne un solo (ad es. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$).

Ai greci erano note soltanto le quadriche rotonde, escluso l'iperboloide ad una falda, che fu considerato da Wren (1699). Lo studio delle quadriche, partendo dall'equazione generale, fu inaugurato da Eulero (1748), e condotto a fine da Monge e dalla sua scuola (1801), cui son dovuti i nomi ora adottati delle varie specie di quadriche.

341. Numero dei punti che individuano una quadrica. — Poichè l'equazione (1) di una quadrica contiene *dieci* coefficienti, e quindi dipende da *nove* costanti (i rapporti di nove tra i coefficienti al rimanente), si conclude, imitando il ragionamento fatto per le coniche al n.° 194, che *per nove punti dello spazio passa sempre una quadrica ed in generale una sola.*

Per nove punti passano più di una, e quindi infinite quadriche, quando i punti stessi occupano tali posizioni particolari, che tutte le quadriche passanti per alcuni di essi vengano, in conseguenza, a passare per i rimanenti. Ciò accade, ad es., se i nove punti sono scelti sopra la curva di intersezione di due quadriche $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, giacchè allora per quei punti passano le due quadriche nominate, ed anzi, come poi si vedrà, ognuna delle infinite quadriche rappresentate dall'equazione $f + \lambda\varphi = 0$, al variare del parametro λ. Ma su questi casi di indeterminazione non possiamo qui trattenerci.

342. Intersezioni con una retta. — Le intersezioni della quadrica (1) (n.° 340) colla retta $x = lz + p$, $y = mz + q$ si determinano sostituendo nella (1), al posto di x, y, le loro espressioni in funzione di z, risolvendo la equazione risultante di secondo grado in z, e sostituendone successivamente le radici z_1, z_2 nelle espressioni di x e di y. Si ottengono così, in generale, *due* punti.

Per fare una discussione minuziosa del problema conviene adoperare, come retta secante, uno degli assi coordinati, ad es. l'asse $x(y = 0,\ z = 0)$; ipotesi questa, cui ci si può sempre ridurre, operando, ove occorra, una trasformazione di coordinate.

Posto $y = z = 0$ nella (1), questa diviene

$$a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0; \tag{2}$$

di qua si ricavano le ascisse x_1, x_2 delle due intersezioni della quadrica coll'asse x. Ora, sulla (2), si possono ripetere le osservazioni fatte, trattando la questione analoga relativa alle coniche (n.° 195). Basterà dunque enunciare qui il risultato:

Una retta sega una quadrica in due punti (propri od impropri), che possono essere reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati; a meno che la retta non abbia più di due punti in comune colla superficie, nel qual caso tutta la retta giace sulla superficie. Va notato, in quest' ultimo caso, che (al contrario di ciò che accade per le coniche) una quadrica non si spezza necessariamente, per il fatto di contenere una retta. Ad es. un cono, superficie non spezzata, contiene infinite rette; altri esempi, più notevoli, di quadriche contenenti rette saranno visti in seguito.

Una retta, che seghi una quadrica in due punti reali e distinti, dicesi *secante*; in due punti immaginari, dicesi *non secante*; in due punti reali e coincidenti, dicesi *tangente* alla quadrica nel punto (*di contatto*), ove quei due coincidono.

343. Intersezione con un piano. — Supponiamo, per semplicità, che si tratti di un piano coordinato, ad esempio del piano $xy(z = 0)$, avvertendo che ogni altro piano (proprio) potrebbe assumersi come piano xy, pur di eseguire una conveniente trasformazione di coordinate ([1]).

([1]) La curva intersezione di una quadrica $f(x, y, z) = 0$ con un piano generico $z = ax + by + c$ è già rappresentata dalle due equazioni scritte; volendo la proiezione della curva sul piano xy, dal punto all'infinito dell'asse z, basta (n.° 319) eliminare z tra le due equazioni; si

La curva intersezione della quadrica (1) (n.° 340) col piano xy, si ottiene ponendo $z = 0$ nella (1); si giunge così all' equazione

$$(3) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0,$$

la quale, nel piano xy (cioè insieme alla $z = 0$), rappresenta *una conica* [2]. Il risultato vale, anche se uno o più (ma non tutti i) coefficienti della (3) sono nulli; giacchè, ad es., ove fossero $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, ricorrendo all' equazione omogenea (1') della quadrica (n.° 340) e ponendovi $z = 0$, si troverebbe, in luogo della (3), la equazione

$$t(2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44}t) = 0,$$

rappresentante, nel piano xy, due rette, tra cui la retta all'infinito $t = 0$.

Se però tutti i coefficienti della (3) sono nulli, ogni punto $(x, y, 0)$ del piano xy appartiene alla superficie. Questa contiene dunque il piano xy, e si spezza nel piano stesso ed in un secondo piano (distinto o coincidente col primo), come prova la equazione (1), la quale, nelle ipotesi in cui ci troviamo, diviene

$$z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_{34}) = 0,$$

e rappresenta i due piani $z = 0$, $2a_{13}x + \ldots + 2a_{34} = 0$. Concludendo:

Un piano sega una quadrica lungo una conica; a meno che tutto il piano non formi parte della quadrica, la quale allora si spezza in quel piano ed in un secondo piano (che può eventualmente coincidere col primo).

Esclusa l'ultima ipotesi, la curva intersezione di una quadrica con un piano può presentare, sotto l'aspetto proiettivo, i seguenti tre casi:

1) può essere una conica reale, non degenere, nel qual caso il piano dicesi *secante*;

---

ottiene così l'equazione $f(x, y, ax + by + c) = 0$, che è di secondo grado in x, y, e rappresenta, nel piano xy, una conica; donde si conclude che anche la curva obbiettiva è una conica.

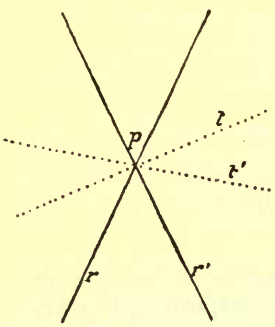
(2) La (3), presa a sè, rappresenta, nello spazio, un cilindro (n.° 318) colle generatrici parallele all'asse z, passante per la conica nominata.

2) può essere una conica completamente immaginaria; il piano allora dicesi *non secante* od *esterno*;

3) può esser finalmente una conica degenere, cioè una coppia di rette (reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie coniugate); il piano allora, per ragioni che ora esporremo, dicesi *tangente.*

Qualunque di questi tre casi si presenti, è evidente che una retta, tracciata in quel piano, sega la quadrica nei punti stessi, ove la retta sega la conica intersezione. Segue che una retta reale di un piano secante può essere secante, non secante o tangente, rispetto alla superficie; e le rette tangenti, situate nel piano, formano un inviluppo di seconda classe. In un piano esterno ogni retta reale è non secante, rispetto alla superficie [1]. Esamineremo ora quali particolarità presentino le rette di un piano tangente.

344. Piano tangente. — Supponiamo dunque che un piano π seghi una quadrica lungo due rette r, r', che possono esser o reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie coniugate. In ogni caso le due rette hanno (almeno) un punto reale P comune. Ogni altra retta t, condotta per P nel piano π, sega la conica degenere rr', e quindi la quadrica, in due punti riuniti in P; la retta t è dunque tangente alla quadrica in P (n.° 342). Sicchè sul piano π esiste un fascio, di centro P, composto di rette tangenti in P alla quadrica (tra le quali, due, r ed r', appartengono alla quadrica). Questo fatto spiega la denominazione di *piano tangente alla quadrica* in P, che, secondo il n.° precedente, viene attribuita al piano π. Diremo dunque:



Se un piano sega una quadrica lungo due rette (reali o immaginarie), ogni retta del piano passante per il (o per ogni)

---

[1] Il lettore seguirà nel miglior modo queste considerazioni, immaginando, ad es., una sfera in relazione con un piano, che la seghi lungo un cerchio, o che non la incontri affatto.

punto comune alle due rette tocca ivi la quadrica, ed il piano stesso è tangente ivi alla superficie.

Il piano è tangente alla superficie nel punto $P \equiv rr'$, se le due rette sono distinte; in *ogni* punto di $r \equiv r'$, se le due rette coincidono.

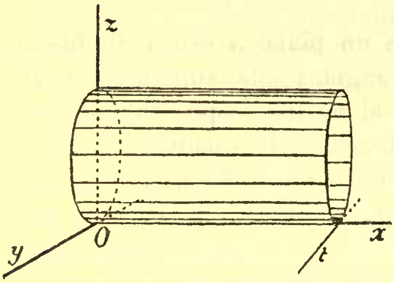
Viceversa, supponiamo che in un piano π esista un fascio di centro P, composto di rette tangenti alla superficie in P. Anzi supponiamo, giacchè basta al nostro scopo, che almeno *due* rette t, t' del fascio (P, π) tocchino la quadrica in P. Il piano π sega la quadrica lungo una conica, che ha in comune, tanto con t, quanto con t', due punti riuniti in P. Ora una tal conica deve spezzarzi in due rette r, r' (reali o immaginarie) uscenti da P, giacchè, in tutti gli altri casi, esisterebbe *una sola* retta tangente alla conica in P (n.° 198).

Dunque il piano π è tangente alla quadrica in P, e contiene infinite rette tangenti alla superficie nel punto stesso. In conclusione:

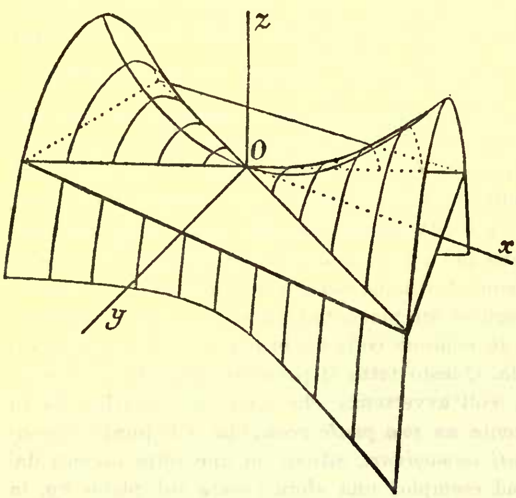
Il piano, determinato da due rette tangenti ad una quadrica in uno stesso punto, contiene infinite altre tangenti alla quadrica in quel punto; il piano è tangente ivi alla quadrica, e la sega lungo due rette (reali o immaginarie) uscenti da quel punto.

Osservazione. — La definizione data di piano tangente, in virtù dei due teoremi precedenti, equivale a questa: « dicesi tangente ad una quadrica, in un punto, un piano contenente infinite rette ivi tangenti alla superficie ». Ora quella definizione ha bisogno di qualche avvertenza, quando si voglia metterla d'accordo col concetto di piano tangente suggerito dall'intuizione. Infatti noi siamo abituati a considerare superficie (come la sfera), che appariscono dovunque *convesse* ad un osservatore situato esternamente; per tali superficie un piano tangente, secondo il concetto intuitivo, ha un solo punto in comune colla superficie, e lascia tutta la superficie da una stessa banda. Questo fatto si presenta appunto nelle quadriche dovunque convesse, coll'avvertenza che una tal quadrica ha in comune con un piano tangente *un solo punto reale*, che è il punto di contatto, ed inoltre *infiniti punti immaginari*, situati su due rette uscenti dal detto punto. Si consideri, ad esempio, una sfera posata sul piano xy, in modo da toccarlo nell'origine; il centro della sfera starà sull'asse z (nella ipotesi di assi ortogonali); se è, ad es., il punto (0, 0, 1), la sfera ha l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, e sega il piano xy nella conica $x^2 + y^2 = 0$, cioè nelle due rette immaginarie $x \pm iy = 0$ uscenti dal punto di contatto O; la sfera tocca poi evidentemente ogni altra retta del piano xy uscente da O.

Consideriamo ora un secondo caso. Si tratti di un cono, o di un cilindro, posato sopra un piano, che ne contenga una generatrice; sia, ad es., il cilindro circolare retto $y^2 + z^2 - 2z = 0$, che ha per base, sul piano yz, il cerchio di centro (0, 0, 1) e di raggio 1. Questo cilindro sega il piano xy lungo la conica $y^2 = 0$, che si riduce all' asse x, contato due volte. Il cilindro tocca dunque il piano xy in ogni punto dell'asse x, secondo la nostra dicitura, ed anche secondo il linguaggio ordinario; ogni altra retta t del piano xy tocca il cilindro in un punto dell' asse x.



Meno facile a concepirsi è il terzo caso, che si presenta per le quadriche *convesso-concave*, le quali hanno in ogni loro punto la forma di una sella. Tali sono, ad es., l' iperboloide rotondo ad una falda (n.° 328), generato da una iperbole, rotante intorno all' asse non trasverso, od il paraboloide iperbolico $x^2 - y^2 = z$, di cui parleremo in seguito. Consideriamo, ad es., quest'ultima superficie. Essa è segata dal piano xy lungo la conica $x^2 - y^2 = 0$, composta delle due rette reali $x \pm y = 0$ uscenti dall'origine. Il piano xy tocca dunque la superficie, secondo la definizione da noi data; ed effettivamente una retta generica del piano xy uscente da O, retta di equazioni $y = kx$, $z = 0$, tocca la superficie in O, come subito si verifica. In realtà, il piano xy spezza la superficie in due parti, di cui una ($x > y$, $z > 0$) sta al disopra del piano xy, l' altra ($x < y$, $z < 0$) sta al disotto. Per questa superficie adunque il linguaggio geometrico è in disaccordo col linguaggio ordinario, il quale non distingue i piani secanti la superficie lungo due rette reali (piani *tangenti*, secondo i geometri) dagli altri piani secanti la superficie lungo coniche non degeneri (piani *secanti*) ([1]).



([1]) Piani tangenti ad una superficie *convesso-concava* furono considerati da EULERO (1760) e MEUSNIER (1776). Il teorema, secondo cui un piano tangente ad una quadrica siffatta sega la superficie lungo due rette reali, è dovuto a DUPIN (1813).

345. Per costruire il piano π tangente ad una quadrica in un punto dato P, basta conoscere, secondo l' ultimo teorema del n.° precedente, due rette t, t' tangenti alla quadrica in P. Queste si ottengono, segando la quadrica con due piani arbitrari passanti per P, e conducendo le tangenti t, t' in P alle coniche sezioni; sarà poi $\pi \equiv tt'$ il piano tangente richiesto.

La costruzione di π, a dir vero, non esclude che possano esistere altri piani tangenti alla quadrica in P, oltre π. Ciò accadrebbe, se fuori del fascio (P, π) esistesse almeno una ulteriore retta u tangente alla quadrica di P. Ma allora ogni fascio determinato dalla u con una retta generica del fascio (P, π) conterrebbe due, e quindi (n.° 344) infinite rette tangenti alla quadrica in P; ogni retta della stella P sarebbe ivi tangente alla quadrica, o vi apparterrebbe; ogni piano per P toccherebbe ivi la quadrica, e la segherebbe (n.° 344) lungo due rette (reali o immaginarie) uscenti da P. La quadrica risulterebbe dunque costituita da infinite rette uscenti da P, sarebbe un *cono di secondo ordine* di vertice P, formato dalle rette proiettanti da P una conica (reale, o immaginaria, o spezzata in rette). Siamo quindi autorizzati a concludere:

Una quadrica ha, in ogni suo punto, un unico piano tangente, il quale contiene tutte le rette tangenti in quel punto alla superficie; fa eccezione solo il caso che la quadrica sia un cono, ed il punto ne sia il vertice. In realtà, ogni piano condotto per il vertice V di un cono, segando la superficie in due rette uscenti da V, va considerato, secondo la nostra definizione, come piano tangente al cono nel vertice; badiamo però, che, d' ordinario, si dice *tangente ad un cono* un piano, che passi per il vertice, ed abbia in comune col cono due generatrici *coincidenti* (piano proiettante dal vertice una retta tangente ad una conica sezione). Un siffatto piano tocca il cono in ogni punto della generatrice, colla quale le due coincidono (n.° 344).

346. I risultati precedenti ci dimostrano la presenza di rette reali, od immaginarie, sopra una quadrica. Studieremo in un successivo capitolo la distribuzione di queste rette. Per ora limitiamoci a notare che *ogni piano, condotto per una retta di* *una quadrica, sega la quadrica lungo una seconda retta (che può anche coincidere colla prima), e tocca la superficie nel punto (od in ogni punto) comune alle due rette.* Infatti la intersezione della quadrica con quel piano deve essere una conica (n.° 343), della quale forma parte la prima retta; la conica quindi si spezza in questa retta ed in una seconda retta, ed il piano riesce tangente.

Il teorema è sopratutto interessante, nel caso che la prima retta ed il piano siano reali; giacchè allora è reale anche la seconda retta (componente colla prima una conica, la cui equazione ha coefficienti reali).

347. Intersezioni di una quadrica colla retta congiungente due punti. — Abbandoniamo, per il momento, le considerazioni sintetiche precedenti, che verranno riprese in seguito, e cerchiamo di confermare, per via analitica, alcuni dei risultati ottenuti. Ci varremo di un metodo, già adoperato nella teoria delle coniche (n.° 197 e seg.), il quale ci fornirà molte altre proprietà notevoli.

Partiamo dall' equazione di una quadrica in coordinate omogenee (cartesiane o proiettive):

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) \equiv a_{11}x^2 + \cdots + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + \cdots + 2a_{34}zt = 0,$$

e conveniamo subito di porre $a_{hk} = a_{kh} (h, k = 1, 2, 3, 4)$, ogniqualvolta la simmetria lo consigli. Siano poi $P(x, y, z, t)$, $P'(x', y', z', t')$ due punti dello spazio. Cerchiamo le intersezioni della retta PP' colla quadrica (1). Notiamo, a tal fine, che ogni punto Q della retta PP' ha coordinate del tipo (n.° 312, a))

$$Q(kx + x', \ldots, kt + t'),$$

e che il punto appartiene alla quadrica, se queste coordinate soddisfano la equazione (1). Sostituendo nella (1) le coordinate di Q, sviluppando ed ordinando rispetto a k, otteniamo l' equazione

$$(2) \quad k^2 f(x, y, z, t) + 2kf\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \end{pmatrix} + f(x', y', z', t') = 0.$$

In questa il coefficiente di k^2 e il termine noto sono i valori assunti dal polinomio (1), in relazione alle coordinate di P e

P', mentre il coefficiente di $2k$ può scriversi per disteso sotto una delle forme seguenti (cfr. n.° 197):

$$(3)\left\{\begin{aligned} f\binom{x,\ y,\ z,\ t}{x',y',z',t'} &\equiv a_{11}xx'+\cdots+a_{44}tt'+a_{12}(xy'+x'y) \\ &\qquad +\cdots+a_{34}(zt'+z't) \\ &\equiv (a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t)x' \\ &\quad +(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t)y' \\ &\quad +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t)z' \\ &\quad +(a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t)t' \\ &\equiv (a_{11}x'+\cdots+a_{14}t')x+(a_{21}x'+\cdots+a_{24}t')y \\ &\quad +(a_{31}x'+\cdots+a_{34}t')z+(a_{41}x'+\cdots+a_{44}t')t. \end{aligned}\right.$$

Sul polinomio stesso si osserverà:

1) che esso è bilineare e simmetrico, rispetto ai due gruppi di valori (x, y, z, t), (x', y', z', t');

2) che, ordinato ad es. secondo x', y', z', t', i coefficienti rispettivi sono le semiderivate parziali di $f(x, y, z, t)$ rispetto ad x, y, z, t;

3) che, posto $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=t$, il polinomio (3) si riduce al polinomio (1).

La (2) è una equazione quadratica in k. Se k_1, k_2 sono le radici, le intersezioni Q_1, Q_2 della quadrica colla retta PP' hanno le coordinate

$$Q_1(k_1x+x', \cdots, k_1t+t'),$$
$$Q_2(k_2x+x', \cdots, k_2t+t').$$

Le intersezioni sono *due*, come sapevamo. Si ha indeterminazione, vale a dire la retta PP' appartiene alla quadrica, quando coesistono le relazioni

$$f(x, y, z, t)=0,\quad f\binom{x,\ y,\ z,\ t}{x',\ y',\ z',\ t'}=0,\quad f(x', y', z', t')=0,$$

di cui la prima e terza esprimono che i punti P e P' stanno, come è naturale, sulla superficie.

348. Equazione del piano tangente. — Se il punto P' sta sulla quadrica, nella (2) manca il termine noto $f(x', y', z', t')$; una delle radici, ad es. k_1, si annulla, ed il punto Q_1 coincide con P'. La seconda intersezione Q_2 della retta PP' colla quadrica viene essa pure a coincidere con P', cioè la retta $P'P$

riesce tangente alla quadrica in P, quando risulti anche $k_2 = 0$, quando dunque, nella (2), si annulli inoltre il coefficiente di $2k$:

$$(4) \qquad f\binom{x,\ y,\ z,\ t}{x',\ y',\ z',\ t'} = 0,$$

ossia

$$(4') \quad (a_{11}x' + \ldots)x + (a_{21}x' + \ldots)y + (a_{31}x' + \ldots)z + (a_{41}x' + \ldots)t = 0.$$

La (4), o (4′), è dunque la condizione, cui devono soddisfare le coordinate $(x,\ y,\ z,\ t)$ del punto P, affinchè esso stia sopra una tangente alla quadrica nel punto assegnato P' $(x',\ y',\ z',\ t')$. Poichè l'equazione (4′) contiene linearmente quelle coordinate, essa rappresenta un piano. E così rimane confermato che *le infinite rette tangenti ad una quadrica in un punto stanno in un piano* (piano tangente), *la cui equazione si forma, attribuendo, come coefficienti, alle variabili* (x, y, z, t) *i valori assunti dalle semiderivate del polinomio* f(x, y, z, t), *quando in esse si sostituiscano le coordinate del punto di contatto.*

Il piano tangente in P' è indeterminato, soltanto quando quelle semiderivate si annullino insieme per le coordinate di P', e ciò, come vedremo, accade nel solo caso che la quadrica sia un cono col vertice P' (d'accordo col teorema del n.° 345).

Osservazione. — In coordinate cartesiane ordinarie $x,\ y,\ z$, conviene talvolta scrivere la equazione del piano tangente ad una quadrica, nel punto $P'(x',\ y',\ z')$, sotto una delle due forme seguenti:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} &(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})(x - x') \\ +\ &(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24})(y - y') \\ +\ &(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})(z - z') = 0, \end{aligned}$$

che si dimostra equivalente alla (4′), ridotta in coordinate non omogenee, quando si tenga conto che la equazione della superficie è soddisfatta dalle coordinate di P';

$$(\beta) \quad a_{11}xx' + \ldots + a_{33}zz' + a_{12}(xy' + x'y) + \ldots + a_{23}(yz' + y'z) + a_{14}(x + x') + \ldots + a_{34}(z + z') + a_{44} = 0,$$

la quale si forma tenendo presente la regola esposta per le coniche nella Oss. seguente il n.° 198.

Valendosi dell'una o dell'altra formula, il lettore vedrà che, se la quadrica passa per l'origine (se dunque $a_{44} = 0$), l'equazione del piano tangente ivi si ottiene uguagliando a zero il complesso dei termini lineari nell'equazione non omogenea della superficie.

349. — Cono circoscritto alla quadrica da un punto. — Tolta ora la restrizione che il punto $P'(x', y', z', t')$ appartenga alla quadrica (1), osserviamo che la retta $P'P$ del n.° 347 tocca in un punto $Q_1 \equiv Q_2$ la superficie, quando l'equazione (2) in k ha una radice doppia, ossia quando

$$(5) \qquad f(x, y, z, t) \cdot f(x', y', z', t') - \left\{ f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \end{pmatrix} \right\}^2 = 0;$$

e viceversa. Supposto fisso il punto $P'(x', y', z', t')$, la (5) rappresenta dunque il luogo dei punti P, che si trovano sulle tangenti alla quadrica uscenti da P'; questo luogo è evidentemente un cono di vertice P', cono di *secondo* ordine, perchè tale è il grado della (5) nelle coordinate di P. Dunque: *le tangenti ad una quadrica, uscenti da un punto qualsiasi dello spazio, costituiscono un cono del secondo ordine*, che dicesi *cono circoscritto alla superficie dal punto.*

Ritorneremo tra poco (n.° 355) su questo risultato, per esaminarlo con maggior cura.

350. — Punti coniugati rispetto ad una quadrica. — Riprendiamo la equazione (2) (n.° 347), nella ipotesi che il punto P' occupi una posizione generica nello spazio, e supponiamo ora che in quella equazione sia

$$(4) \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \end{pmatrix} = 0.$$

Vuol dire che le due radici k_1, k_2 della (2) sono uguali in valore assoluto ma di segno opposto, e, in conseguenza, che le due intersezioni Q_1, Q_2 della retta PP' colla quadrica sono divise armonicamente da P e P' (cfr. n.° 200). Diremo che *due punti sono coniugati* (o *reciproci*) *rispetto ad una quadrica, quando essi dividono armonicamente le intersezioni della loro congiungente colla superficie.* Dunque *la* (4) *esprime la condizione, perchè i due punti* (x, y, z, t), (x', y', z', t') *siano coniugati* rispetto alla nostra superficie.

La condizione di coniugio è *simmetrica* rispetto ai due punti, cui si riferisce. *Sopra ogni retta dello spazio, che non appar-*

tenga alla superficie, esistono infinite coppie di punti coniugati, le quali formano una involuzione, avente come punti doppi le intersezioni colla quadrica.

Sopra una retta della superficie la definizione geometrica di punti coniugati diventa illusoria ; ma, in quel caso, conviene riguardare come coniugati due punti comunque presi sulla retta ; ciò per il fatto che la condizione analitica (4) è verificata da due punti arbitrari di quella retta (n.° 347).

I punti autoconiugati sono i punti della superficie.

351. Piano polare di un punto. — *Il luogo dei punti* P(x, y, z, t) *coniugati ad un punto fisso* P'(x', y', z', t'), *rispetto ad una quadrica,* è rappresentato dalla (4), o dalla

$$(4') \quad (a_{11}x' + \ldots)x + (a_{21}x' + \ldots)y + (a_{31}x' + \ldots)z + (a_{41}x' + \ldots)t = 0,$$

ove si riguardino come variabili x, y, z, t, è dunque *un piano, che dicesi piano polare del punto fisso rispetto alla quadrica.* Esso è anche il sostegno delle rette polari di P', rispetto alle coniche segate sulla superficie dai piani passanti per P'. Il punto P' dicesi *polo* di quel piano.

Se il polo appartiene alla quadrica, il piano polare coincide col piano tangente ivi (n.° 348).

Dato il polo $P'(x', y', z', t')$, il piano polare π' è individuato dalla (4'), ed ha le coordinate

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} \rho u' &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}t', \\ \rho v' &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}t', \\ \rho w' &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34}t', \\ \rho r' &= a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}t', \end{aligned}\right.$$

essendo ρ un fattore di proporzionalità.

Ora queste relazioni definiscono una *correlazione* (n.° 337) tra i due spazi sovrapposti, descritti, l'uno dal punto $P'(x', y', z', t')$, l' altro dal piano $\pi'(u', v', w', r')$. Ciò almeno nella ipotesi che *sia diverso da zero il discriminante dell'equazione* (1) (o della quadrica relativa), cioè il determinante

$$(7) \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

questa ipotesi sarà sottintesa nel seguito, finchè non si dichiari il contrario. Il determinante (7) è simmetrico (essendo $a_{hk} = a_{kh}$), quindi la correlazione ha carattere involutorio, è una *polarità* (n.° 339).

Come ogni punto possiede un determinato piano polare, definito dalle (6), così ogni piano possiede un determinato polo, che ha le coordinate

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma x' = A_{11}u' + A_{12}v' + A_{13}w' + A_{14}r', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma t' = A_{41}u' + A_{42}v' + A_{43}w' + A_{44}r', \end{cases}$$

ove le A_{hk} sono i soliti complementi algebrici (n.° 339).

352. Equazione tangenziale di una quadrica. — Sappiamo già (n.° 339) che una correlazione polare possiede una *superficie fondamentale di secondo ordine*, luogo dei punti appartenenti ai propri piani polari, ed un *inviluppo fondamentale di seconda classe*, formato dai piani che contengono i propri poli. Ora, *nella polarità definita dalla quadrica* (1), *la superficie fondamentale è evidentemente la quadrica* (1) *stessa*, come risulta paragonandone l'equazione colla (10) del n.° 339.

Quanto all' inviluppo fondamentale, la cui equazione fu già scritta, al n.° 339, sotto la forma

$$(9)\quad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + A_{44}r^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw \\ + 2A_{14}ur + 2A_{23}vw + 2A_{24}vr + 2A_{34}wr = 0,$$

si dimostra (col ragionamento analogo a quello tenuto per le coniche, n.° 203) che esso è formato dai piani tangenti alla quadrica (1). Concludiamo:

I piani tangenti ad una quadrica (*di discriminante non nullo*) *costituiscono un inviluppo doppiamente infinito di seconda classe. L' equazione di questo inviluppo* (brevemente, *l'equazione tangenziale*, o *plückeriana* della quadrica) *si ottiene dall' equazione puntuale* (1), *sostituendo alle coordinate di punti le coordinate di piani, ed. ai coefficienti i rispettivi complementi algebrici estratti dal discriminante.*

Possiamo infine riassumere i principali risultati dei due ultimi n.i nel seguente teorema:

Una quadrica (*di discriminante non nullo*) *determina nello spazio una correlazione polare, la quale muta ogni punto nel* *proprio piano polare, ed ogni piano nel proprio polo; in particolare, ogni punto della quadrica corrisponde al proprio piano tangente, e viceversa.*

Questo risultato completa il teorema del n.° 339, secondo il quale una polarità nello spazio determina una quadrica (fondamentale); ora vediamo infatti che sussiste anche il teorema inverso.

353. Piani tangenti ad una quadrica condotti per una retta. — La polarità, che una quadrica determina, permette di dedurre da proposizioni già note, relative ai punti di una quadrica, nuove proposizioni relative ai piani tangenti.

Proponiamoci, ad es., di vedere quanti piani tangenti ad una quadrica passino per una retta assegnata r. La retta r ha come polare una nuova retta r', la quale è il luogo dei poli dei piani passanti per r, rispetto alla quadrica (n.° 339) (1). Ora, se un piano per r è tangente alla quadrica, il polo di esso, cioè il punto di contatto, appartiene tanto alla quadrica quanto alla retta r'; e viceversa. Dunque (n.° 342):

Per una retta si possono condurre ad una quadrica due piani tangenti, i cui punti di contatto stanno sulla retta polare della data; i due piani sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari, secondo che la retta polare è secante, tangente, o non secante, rispetto alla superficie; nel caso intermedio, come vedremo, la retta primitiva è essa pure tangente alla superficie. *Fa solo eccezione la ipotesi che la retta appartenga alla superficie, giacchè allora* (n.° 346) *ogni piano per essa è tangente alla superficie,* e la retta (come sarà dimostrato) coincide colla propria polare.

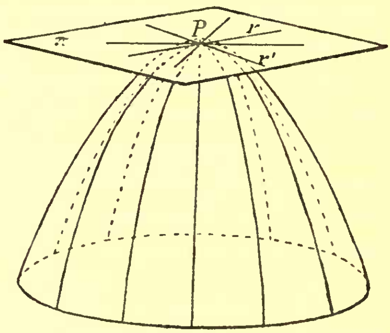
354. Tangenti coniugate ad una quadrica in un punto. — Per esaurire la discussione del n.° precedente, è necessario esaminare, quali posizioni particolari possano assumere due rette mutuamente polari r, r'.

---

(1) Un'altra generazione della retta r', polare di una retta r, è la seguente, che il lettore potrà giustificare da sè: *la retta polare di una retta* r *è il luogo dei poli di* r, *rispetto alle coniche sezioni della quadrica coi piani passanti per* r. Questa generazione cade in difetto, se r appartiene alla quadrica.

Due rette siffatte, in generale, sono sghembe. Vediamo ora quando esse si incontrino.

Supposto anzitutto che le due rette r, r' non coincidano, chiamiamo P il punto e π il piano comuni alle rette stesse. Poichè P appartiene ad r e ad r', il piano polare di P dovrà passare per r' ed r, dovrà dunque coincidere con π. Ma allora P e π si appartegono, ed in conseguenza P è un punto della quadrica, π è il relativo piano tangente, r ed r' sono tangenti alla superficie in uno stesso punto P. Viceversa, si dimostra, invertendo il ragionamento, che una retta r, tangente ad una quadrica in un punto P, ha come polare una nuova tangente r' alla superficie nello stesso punto P.



Supponiamo che la tangente r descriva il fascio di centro P e piano π; la tangente r' descriverà un fascio sovrapposto, proiettivo al precedente, perchè la polarità determinata dalla quadrica muta l'un fascio nell'altro. La proiettività tra i due fasci è anzi una involuzione, giacchè la relazione fra due rette polari r, r' è scambievole.

Sia u una retta doppia della involuzione, vale a dire una retta coincidente colla propria polare. Ogni punto Q di u ha il piano polare che passa per u, e quindi per Q; ne viene che Q è un punto della quadrica, e che la retta u stessa appartiene alla quadrica. Le rette doppie della involuzione sopra considerata sono adunque le due rette (reali o immaginarie) costituenti la sezione della quadrica col piano tangente π. Concludiamo:

Una retta tangente ad una quadrica in un punto, ha come polare una seconda retta tangente alla quadrica nel punto stesso; nel fascio di rette, che ha per centro quel punto e per piano il relativo piano tangente, viene così a stabilirsi una corrispondenza tra rette mutuamente polari, che è una involuzione, avente per rette doppie le due rette comuni al piano ed alla quadrica.

Due tangenti mutuamente polari (aventi dunque lo stesso punto di contatto) si chiamano di solito *tangenti coniugate*, adottando per le quadriche una denominazione, che il DUPIN ha introdotto per una superficie qualsiasi, algebrica o trascendente (1); la involuzione, di cui parla l'enunciato, si dice, in conseguenza, *involuzione delle tangenti coniugate in un punto.* Essa è ellittica (parabolica), o iperbolica, secondo che le due rette sezioni della quadrica col piano tangente sono reali e distinte (reali e coincidenti), o immaginarie (2). E il punto di contatto, come sarà ripetuto anche in seguito, si dice ordinatamente *punto ellittico* (*parabolico*), o *iperbolico.* Va notato però che il caso intermedio, della involuzione parabolica, esigerebbe un esame speciale, sul quale non intendiamo ora di fermarci, perchè, come vedremo, quel caso si presenta solo nelle quadriche a discriminante nullo, che sono escluse dalle nostre attuali considerazioni.

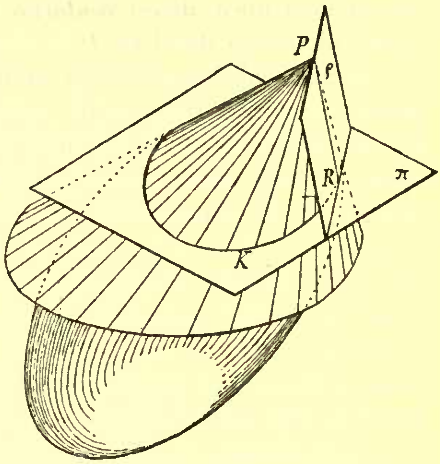
Osservazione. — La polarità, determinata dalla quadrica, muta la punteggiata sopra una retta u, appartenente alla superficie, nel fascio dei relativi piani tangenti, i quali passano tutti per u. Quella punteggiata e quel fascio, di sostegno u, sono adunque riferiti proiettivamente. In altre parole: *mentre un punto descrive una retta di una quadrica, il piano tangente in esso ruota intorno alla retta, e genera un fascio proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto.*

355. Piani tangenti passanti per un punto. — Per un punto P dello spazio, che non appartenga ad una quadrica, passano infiniti piani (reali o immaginari) tangenti alla superficie. Se ϱ è uno tra questi, il punto di contatto R, essendo polo di ϱ, sta sul piano polare π di P, quindi sulla conica K in cui π sega la quadrica. Viceversa, il piano tangente alla

(1) Il lettore osserverà che l'aggettivo *coniugato* è qui adottato in un senso diverso da quello convenuto nella teoria della polarità. Se ciò potesse dar luogo ad equivoci, sarebbe preferibile, finchè si considerano superficie del secondo ordine, parlare di *tangenti polari.*

(2) Ad es., sulla sfera, che è segata dai piani tangenti lungo direzioni assolute (n.° 344, Oss.), la involuzione delle tangenti coniugate è circolare.

quadrica in un punto R di K passa per P. La retta $\pi\varrho$, che giace nel piano tangente ϱ, e passa per il punto di contatto R, tocca in R la quadrica e quindi la conica K. Segue che:



I piani tangenti ad una quadrica, che passano per un punto dallo spazio, si ottengono proiettando dal punto le tangenti a quella conica, lungo cui il piano polare del punto sega la quadrica. Quei piani tangenti formano, come diremo, un *inviluppo* (semplicemente infinito) *conico di seconda classe* (n.° 329).

La retta PR, che va dal punto P ad un punto qualsiasi R della conica K, tocca in R la quadrica, perchè giace nel piano ϱ tangente alla quadrica in R. Possiamo dunque enunciare il teorema (dovuto a MONGE, 1798-99):

Per un punto passano infinite rette (reali o immaginarie) *tangenti ad una quadrica, le quali costituiscono il cono di secondo ordine, che proietta dal punto la conica sezione della quadrica col piano polare del punto stesso; la detta conica è il luogo dei punti di contatto delle generatrici del cono.* È questo il *cono circoscritto alla quadrica*, del quale abbiamo già scritto l' equazione al n.° 349.

Ogni piano tangente alla quadrica condotto per P, contenendo una tangente alla conica K, sega il cono circoscritto lungo due generatrici coincidenti, ossia tocca il cono lungo tutta una generatrice (n.° 344). Segue che l'inviluppo conico di vertice P, di cui parla il primo enunciato, è costituito dai piani tangenti, lungo generatrici, al cono circoscritto dal punto P.

Un punto P dicesi *esterno*, od *interno*, rispetto ad una quadrica, secondo che il cono circoscritto da P è reale o immaginario, ossia secondo che è secante, o non secante, il piano π

polare di P. Nel primo caso, la conica di contatto K separa sulla quadrica (supposta opaca) la regione visibile dalla regione invisibile, rispetto ad un osservatore situato in P; perciò quella conica dicesi *contorno apparente* della quadrica, rispetto al centro di vista P.

Si può chiedere come si modifichino i risultati precedenti, quando il punto P sta sulla quadrica, nel qual caso il piano π è ivi tangente alla superficie, e la conica K si scinde in due rette. È facile vedere che allora l' inviluppo conico dei piani uscenti da P, e tangenti alla quadrica, si scinde nei due fasci di piani, che hanno per assi le rette costituenti la conica K (n.° 346). Quanto al cono formato dalle rette tangenti alla quadrica uscenti dal punto P, esso si riduce al piano π (o meglio al fascio di rette di centro P e piano π) contato due volte, come si può verificare per via analitica, ricorrendo all' equazione (5) del n.° 349.

Osservazione. — Nella ipotesi che il punto P non appartenga alla quadrica, è bene notare che la polarità, determinata da questa, trasforma l'inviluppo conico dei piani tangenti, condotti da P, nella conica K formata dai punti di contatto in π, e trasforma il cono circoscritto di vertice P, considerato come costituito da infinite rette, nella conica K, considerata come inviluppo delle sue tangenti; se poi il cono stesso si riguarda come luogo degli infiniti suoi punti, situati su quelle rette (generatrici), l' ente polare sarà formato dagli infiniti piani passanti per le tangenti alla conica K. Queste relazioni ci mostrano come gli inviluppi conici ed i coni si trasformino per dualità nello spazio.

Segue ancora che le generatrici del cono hanno come tangenti coniugate (o polari), rispetto alla quadrica, le tangenti alla conica K, nei rispettivi punti di contatto.

356. Piani coniugati rispetto ad una quadrica. Figure autoconiugate. — Le due definizioni equivalenti, che si sogliono dare di punti coniugati rispetto ad una quadrica (punti dividenti armonicamente le intersezioni della loro congiungente colla quadrica, oppure punti, di cui l' uno appartiene al piano polare dell' altro) conducono, trasformate mediante la polarità, a due definizioni di piani coniugati (o reciproci) rispetto ad una quadrica: *due piani diconsi coniugati, quando dividono armonicamente i piani tangenti condotti alla quadrica dalla retta intersezione, ossia quando l'uno passa per il polo dell' altro.* Dalla prima definizione segue che: *per una retta passano infinite coppie di piani coniugati rispetto ad una quadrica, le quali formano una involuzione, avente come piani doppi i piani tangenti condotti per la retta alla quadrica.* La condizione analitica di coniugio tra due piani di date coordinate si scrive, partendo dall'equazione tangenziale della quadrica, nello stesso modo come la condizione di coniugio tra punti, partendo dall' equazione puntuale.

Si hanno talvolta da considerare figure autoconiugate rispetto ad una quadrica, tali cioè che i vertici, o le facce, siano coniugate a due a due.

Precisamente, dicesi *autoconiugato rispetto ad una quadrica:*

un triangolo, quando ciascun vertice è coniugato dei rimanenti due, ed ha quindi il piano polare passante per il lato opposto.

Un triangolo autoconiugato è autopolare rispetto alla conica, che il suo piano sega sulla quadrica. (n° 206).

un triedro, quando ciascuna faccia è coniugata delle rimanenti due, ed ha quindi il polo sopra lo spigolo opposto.

Un triedro autoconiugato è autopolare rispetto al cono circoscritto dal suo vertice alla quadrica [1].

Si dice poi che un tetraedro è *autopolare* (od autoconiugato) *rispetto ad una quadrica*, se ciascun vertice di esso ha per piano polare la faccia opposta. In un siffatto tetraedro i vertici sono coniugati a due a due, e così pure le facce; tre vertici, o tre facce, costituiscono un triangolo, o un triedro, autoconiugato.

Esistono infiniti tetraedri autopolari. Per costruirne uno si prenda ad arbitrio un vertice A, che non appartenga alla quadrica, e si costruisca il piano α polare di A; su questo piano si prenda ad arbitrio un secondo vertice B, non appartenente alla quadrica, e si costruisca il piano β polare di B; sulla retta $\alpha\beta$ si prenda ad arbitrio un terzo vertice C, non

---

[1] L' enunciato di destra risulterà chiaro, quando avremo parlato della polarità rispetto ai coni (n.° 359).

appartenente alla quadrica, e si costruisca il piano γ polare di C; il punto $D \equiv \alpha\beta\gamma$, che ha per piano polare $\delta \equiv ABC$, sarà il quarto vertice del tetraedro richiesto.

357. Superficie di secondo ordine degeneri. — Negli ultimi paragrafi furono escluse le quadriche aventi il discriminante nullo. Dobbiamo ora esaminare quale particolarità presenti la superficie

$$(1)\quad f(x, y, z, t) \equiv a_{11}x^2 + \ldots + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{34}zt = 0,$$

quando

$$(2)\qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Ricordiamo che la (2) è la condizione, perchè esista un sistema di valori, non tutti nulli, (x_0, y_0, z_0, t_0), soddisfacenti alle quattro equazioni

$$(3)\qquad a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}t = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

quei valori saranno proporzionali ai complementi algebrici (supposti non tutti nulli) degli elementi di una stessa linea in A. Ora si dimostra (imitando il ragionamento svolto per le coniche, n.° 211) che le quantità x_0, y_0, z_0, t_0 rendono

$$f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0, \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x_0, & y_0, & z_0, & t_0 \end{pmatrix} = 0,$$

nella seconda delle quali x, y, z, t hanno valori arbitrari. La prima di queste ha un immediato significato geometrico, giacchè ci dice che il punto V, di coordinate (x_0, y_0, z_0, t_0), appartiene alla quadrica (1).

Cerchiamo ora le intersezioni della superficie colla retta VP, congiungente il punto $V(x_0, y_0, z_0, t_0)$ con un punto arbitrario $P(x, y, z, t)$. Sappiamo (n.° 347) che queste dipendono dall' equazione

$$(4)\quad k^2 f(x, y, z, t) + 2kf\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x_0, & y_0, & z_0, & t_0 \end{pmatrix} + f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0,$$

la quale però ha nulli il termine noto e il coefficiente di $2k$. Segue che la retta VP sega la quadrica (1) in due punti riuniti in V; a meno che il punto $P(x, y, z, t)$ non appartenga esso pure alla quadrica, nel qual caso la (4) diviene una identità, ed ogni punto della retta VP appartiene alla superficie. Questa è dunque costituita dalle infinite rette congiungenti il punto V coi punti, che la superficie ha in comune con un piano generico, non passante per V; poichè questi punti costituiscono una conica (n.° 343), la superficie sarà un *cono* (reale o immaginario) di vertice V [1].

Il ragionamento sussiste pure nella ipotesi, che siano nulli tutti i minori del terzo ordine del determinante A. In questo caso però, due delle quattro equazioni (3) sono conseguenze delle rimanenti due, le quali rappresentano una retta v; ogni punto di questa (avendo coordinate soddisfacenti il sistema (3)) gode le proprietà che prima spettavano all' unico punto V. Vuol dire che tutte le rette congiungenti i punti di v con un punto P della quadrica, fuori di v, formano parte della quadrica; questa dunque contiene il piano vP, e, in generale, un secondo piano passante per v e distinto dal primo. La quadrica si riduce ad una *coppia di piani*.

Finalmente, se tutti i minori di secondo ordine di A sono nulli (ma non tutti gli elementi), tre delle quattro equazioni (3) sono conseguenze della rimanente; questa rappresenta un piano, ogni cui punto gode la proprietà del vertice V. La quadrica si riduce allora a quel piano contato due volte, cioè ad un *piano doppio*. Nell' ultimo caso è facile verificare che il primo membro dell' equazione della superficie è il quadrato di un polinomio di primo grado in x, y, z, t; si ha infatti, nell' ipotesi $a_{11} \neq 0$,

$$a_{11} f(x, y, z, t) \equiv (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t)^2.$$

Riassumendo:

Una quadrica, la cui equazione puntuale abbia il discriminante nullo, è un cono, il cui vertice ha coordinate proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una stessa linea del discriminante; se si annullano inoltre tutti i minori del terzo ordine del discriminante, la quadrica si scinde in due

---

[1] In questa discussione, d' indole proiettiva, i cilindri non sono distinti dai coni; la superficie sarebbe un cilindro, se V fosse un punto improprio.

piani; se finalmente si annullano tutti i minori del secondo ordine, la quadrica si riduce ad un piano doppio. E viceversa, perchè i ragionamenti, che precedono, sono tutti invertibili.

Il *cono*, la *coppia di piani* ed il *piano doppio* costituiscono i tre successivi casi di degenerazione di una superficie (luogo di punti) di secondo ordine.

358. Talvolta il semplice aspetto dell'equazione di una quadrica lascia vedere che la superficie è un cono. Così, ad es., una equazione di secondo grado, omogenea, in coordinate cartesiane ordinarie (x, y, z):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

rappresenta un cono avente il vertice nell'origine (n.° 318).

E la equazione ottenuta dalla precedente, col sostituire $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ al posto di x, y, z, rappresenta un cono di vertice (x_0, y_0, z_0), avente la stessa conica all'infinito del cono suddetto.

359. Polarità rispetto ad un cono. — Rispetto ad un cono $f(x, y, z, t) = 0$, di vertice $V(x_0, y_0, z_0\ t_0)$, ogni punto $P'(x', y', z', t')$ dello spazio, distinto da V, ha ancora un determinato piano polare π', che si definisce nel solito modo (n.° 351), ed ha l'equazione

$$f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \end{pmatrix} = 0.$$

Questo piano passa sempre per il punto V (giacchè l'equazione è soddisfatta dalle coordinate di V), e contiene le infinite rette coniugate armoniche di VP' rispetto alle coppie di rette, secondo cui il cono è segato dai piani passanti per VP'. Mentre il polo P' descrive una retta p' uscente da V, il piano polare π' non varia, al contrario di ciò che accade per una quadrica generale; il piano polare del vertice V è indeterminato, perchè la precedente equazione è identicamente soddisfatta, quando si ponga $x' = x_0, \ldots, t' = t_0$. Viceversa, un piano qualsiasi, non passante per V, ha sempre come polo il punto V. Invece un piano π' passante per V ha infiniti poli situati sopra una retta p' uscente da V.

La polarità degenere, determinata da un cono, viene adunque a stabilire una corrispondenza biunivoca tra le rette

p' ed i piani π' della stella V. Ed è facile persuadersi che tale corrispondenza è *una polarità nella stella* V, di cui si è dato un cenno nelle prime righe del n.° 190; è precisamente quella polarità, che si ottiene, proiettando da V la polarità piana definita da una conica, sezione del cono con un piano non passante per V.

Ogni piano passante per V sega il cono lungo due generatrici (reali o immaginarie); se le due generatrici coincidono, il che accade quando il piano passa per una tangente della conica sopra nominata, il piano è tangente al cono lungo tutta quella generatrice (n.° 345). Dunque: *il piano tangente ad un cono in un punto, diverso dal vertice, passa per il vertice, e tocca il cono lungo tutta la generatrice contenente il punto assegnato.* Nel vertice non v'è un piano tangente determinato.

Per una retta generica p', uscente dal vertice di un cono, passano due piani (reali od immaginari) tangenti al cono; le generatrici di contatto appartengono al piano π', polare di p'. Due piani per p', che dividano armonicamente quei piani tangenti, sono *coniugati* rispetto al cono, e formano con π' un *triedro autopolare rispetto al cono*, tale cioè che ciascuno spigolo ha per piano polare la faccia opposta. Esistono infiniti triedri siffatti; essi si ottengono, proiettando dal vertice V i triangoli autopolari rispetto ad una sezione piana del cono.

360. Inviluppi di seconda classe degeneri. — Una equazione di secondo grado in coordinate di piani, $F(u, v, w, r) = 0$, rappresenta, quando il discriminante del polinomio F sia nullo, l'ente duale di un cono, di cui si è parlato nella Oss. al n.° 355. Mentre un cono (riguardato come luogo di punti) si compone di infinite punteggiate, i cui sostegni hanno un punto (vertice) in comune, l'inviluppo duale si compone di infiniti fasci di piani, i cui assi stanno in un medesimo piano, e toccano in questo piano una conica (cfr. n.° 329). Un siffatto inviluppo degenere, costituito dagli infiniti piani che passano per le infinite tangenti ad una conica, fu detto (da HESSE, 1861) *quadrica limite,* alludendo al fatto che l'inviluppo dei piani tangenti ad una quadrica degenererebbe a quel modo, se la quadrica si schiacciasse, in guisa da ricoprire due volte la regione piana interna, od esterna, ad una conica.

Se la conica inviluppo si scinde in due punti distinti (n.° 215), la quadrica inviluppo degenere si scinde in due stelle di piani, aventi quei due punti come centri, e prende il nome di *coppia di punti;* i due punti (o le due stelle) possono anche coincidere, e allora si ha il *punto doppio.* Riassumendo:

Una equazione di secondo grado in coordinate di piani, il cui discriminante sia nullo, rappresenta una quadrica limite; se son nulli tutti i minori del terzo ordine del discriminante, l'inviluppo si scinde in due punti (o, meglio, *in due stelle); i due punti coincidono, se sono nulli inoltre tutti i minori del terzo ordine del discriminante.*

La *quadrica limite,* la *coppia di punti* ed il *punto doppio* costituiscono i tre successivi casi di degenerazione di una quadrica inviluppo.

Come una equazione di secondo grado, omogenea in x, y, z, rappresenta (n. 358) un cono, col vertice nell' origine ($x = y = z = 0$), così una equazione di secondo grado, omogenea in u, v, w, rappresenta una quadrica limite giacente sul piano all'infinito ($u = v = w = 0$). In modo analogo, scambiando coordinate di piani, si rappresenterebbe una quadrica limite appartenente ad uno dei piani coordinati.

Aggiungeremo l'osservazione seguente, lasciando al lettore la cura di giustificarla (cfr. n.° 215). È noto che, se

(1) $a_{11}x^2 + \ldots + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{34}zt = 0$

è l'equazione di una quadrica, a discriminante non nullo, l'inviluppo dei piani tangenti alla (1) è rappresentato dall'equazione

(I) $A_{11}u^2 + \ldots + A_{44}r^2 + 2A_{12}uv + \ldots + 2A_{34}wr = 0,$

formata nel modo indicato al n.° 352.

Ora, se la (1) è l'equazione di un cono, la (I) rappresenta il vertice del cono, come *punto doppio*; se poi la (1) è una coppia di piani distinti o coincidenti, la (I) perde ogni significato, perchè tutti i suoi coefficenti si annullano.

Valgono pure le osservazioni duali.

Esercizi I — 1) Si scriva l'equazione di una quadrica passante per l'origine, per i punti (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), (0, — 1, 2), (2, 0, — 3), (3, — 2, 0), e per i punti all'infinito delle rette $x = y = z$, $x = y = -z$.

2) La condizione per una quadrica di toccare, in un dato punto, una retta, od un piano assegnato, equivale a due, o rispettivamente a tre rela-

zioni lineari fra i coefficienti dell' equazione della quadrica. Si scriva, ad es., l'equazione della quadrica, che tocca gli assi coordinati nei punti (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), ed il piano all' infinito nel punto improprio della retta $x = y = z$.

3) Perchè una quadrica contenga una data retta, o una data conica, devono esser soddisfatte rispettivamente tre, o cinque condizioni lineari. Si scriva l' equazione di una quadrica, che passi per l'asse x, per la retta all' infinito del piano yz, e per i tre punti (0, 1, 2), (1, − 1, 1), (2, 2, − 1).

4) Si scriva l'equazione di una quadrica, che seghi il piano xy lungo la conica $x^2 + y^2 - xy + 2x - 1 = 0$, tocchi l' asse z nel punto (0, 0, 1) e passi per i punti (0, — 1, 2), (2, 0, 3).

5) Data la quadrica $xy + xz + yz - x - 2y - 3z + 6 = 0$, trovare: *a*) le equazioni dei piani tangenti nei punti, ove essa sega gli assi coordinati; *b*) il piano polare del punto (2, 1, 1); *c*) i piani tangenti condotti per la retta $\frac{x}{2} = -y = z$; *d*) la retta polare della retta precedente; *e*) l' equazione del cono circoscritto dall' origine alla quadrica.

6) Determinare il termine noto della equazione $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz + 2x - 6y + k = 0$, in modo che essa rappresenti un cono. Quale ne è il vertice?

II — 7) L' equazione di un cono circoscritto al triedro degli assi coordinati è del tipo $ayz + bzx + cxy = 0$. Scrivere le equazioni dei piani tangenti lungo gli spigoli del triedro, e dimostrare che quelli segano le facce opposte in tre rette di un piano (cfr. n.° 215, es. 30)).

8) Le equazioni, in coordinate di piani, di un cono tangente ai tre piani coordinati, sono del tipo $avw + bwu + cuv = 0$, $r = 0$. Si deduca che la equazione del cono, in coordinate cartesiane, è

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2bcyz - 2cazx - 2abxy = 0.$$

Si trovino le equazioni delle generatrici di contatto, e si dimostri che i piani, che le congiungono cogli spigoli opposti del triedro xyz, passano per una stessa retta.

9) Un cono, avente il triedro degli assi come autopolare, ha l'equazione

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

10) Una quadrica passante per l' origine, ed avente ivi come tangente il piano xy, ha una equazione del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{34}z = 0.$$

Si determinino le rette, che la quadrica ha in comune col piano tangente, e la involuzione delle tangenti coniugate in O; si dimostri che la condizione, perchè gli assi x, y siano coniugati, è $a_{12} = 0$.

11) Una quadrica passante per l' origine e per i punti all' infinito degli assi coordinati, o, in coordinate proiettive, una quadrica circoscritta al tetraedro fondamentale, ha una equazione del tipo

$$a_{12}xy + a_{13}xz + a_{14}xt + a_{23}yz + a_{24}yt + a_{34}zt = 0.$$

Quali sono i piani tangenti nei quattro punti fondamentali?

12) In coordinate di piani, l'equazione di una quadrica tangente alle facce del tetraedro fondamentale, si ottiene dalla precedente sostituendo ad x, y, z, t le coordinate u, v, w, r. Si deduca l'equazione puntuale della quadrica stessa, e le coordinate dei punti di contatto.

13) L'equazione di una quadrica tangente ai sei spigoli del tetraedro fondamentale (in particolare ai tre assi cartesiani e alle rette improprie dei piani coordinati) è del tipo

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + d^2t^2 - 2abxy - \cdots = 0.$$

Si determinino i punti di contatto con quegli spigoli, e i relativi piani tangenti, e si dimostri che le tre rette congiungenti i punti di contatto degli spigoli opposti concorrono in un punto, mentre le tre rette intersezioni dei piani tangenti condotti per gli spigoli opposti stanno in un piano.

14) Scritta l'equazione di una quadrica, che contenga l'asse delle x, si determini, in un punto P generico di questo, il piano tangente π, che passa pure per l'asse x. Si dimostri analiticamente che, mentre P descrive una punteggiata su questa retta, il piano π ruota intorno alla retta, generando un fascio proiettivo alla punteggiata.

15) Si scriva l'equazione di una quadrica, che passi per gli assi x, y; come si semplifica l'equazione, se la quadrica contiene inoltre la retta all'infinito del piano xz? e se contiene anche la retta all'infinito del piano yz? Nell'ultimo caso l'equazione si presenta sotto la forma $axy + bzt = 0$. In coordinate proiettive, l'equazione stessa rappresenta una quadrica contenente gli spigoli del quadrilatero sghembo $XTYZ$. Qual'è l'equazione tangenziale di questa quadrica? Quante quadriche contenenti quegli spigoli passano per un punto generico dello spazio, o toccano un piano generico?

16) L'equazione (*canonica*) di una quadrica, avente il tetraedro fondamentale come autopolare, è del tipo (cfr. n.° 207)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0.$$

Determinare le intersezioni cogli spigoli, e i rispettivi piani tangenti. Qual'è l'equazione tangenziale della quadrica stessa?

17) Le quadriche, rispetto alle quali un determinato tetraedro è autopolare, formano un tal sistema, che per tre punti generici dello spazio passa una sola quadrica del sistema; e vi è pure una sola quadrica del sistema, che tocchi tre piani generici assegnati.

18) Si estendano alle quadriche gli es. 21), 22), 23) del n.° 215, e si stabilisca, in particolare, il teorema di Carnot, relativo alle intersezioni di una quadrica coi lati di un n. gono semplice sghembo. Si deduca, nel caso $n = 4$, che le otto intersezioni di una quadrica coi lati di un quadrilatero sghembo sono tali, che ogni quadrica passante per sette di esse contiene, in conseguenza, l'ottava.

19) L'es. 34) del n.° 215 dà, mediante proiezione da un punto, il teorema: « due triedri autopolari rispetto ad un cono quadrico (che abbia con essi il vertice comune) sono iscritti in un secondo cono quadrico, e circoscritti ad un terzo ». Segue, in particolare (n.° 190): « due triedri trirettan-

goli collo stesso vertice sono iscritti in un cono del secondo ordine, e circoscritti ad un altro » (STEINER).

20) Le terne di punti A, B, C di una quadrica, che sono viste da un punto fisso O della superficie mediante terne di rette mutuamente perpendicolari, stanno in piani ABC passanti per un unico punto, situato sulla normale alla quadrica (cioè al piano tangente) in O. (Cfr. n.° 222, es. 13)). (Per la dimostrazione analitica, giova assumere O come origine, e la normale come uno degli assi. Per la dimostrazione sintetica, si faccia ruotare il triedro $OABC$ intorno allo spigolo OA, e si osservi che, in corrispondenza, il piano ABC descrive un fascio, il cui asse AA' sega la detta normale, ecc.).

III — 21) La polarità (*sferica*) determinata da una sfera Ω (ad es. dalla sfera $x^2+y^2+z^2-1=0$) ha notevoli particolarità metriche. Il piano polare di un punto qualsiasi è normale alla retta congiungente quel punto col centro O della sfera; il diedro di due piani è uguale all'angolo, sotto cui da O sono visti i rispettivi poli; due rette mutuamente polari sono ortogonali; in un tetraedro autopolare le altezze si segano nel punto O (cfr. n.° 215, es. 17)).

22) Se un punto P descrive una conica K, il piano polare π', rispetto alla sfera Ω, inviluppa un cono; questo cono, ed il cono proiettante K da O, sono *supplementari*, tali cioè che ogni generatrice dell'uno è normale ad un piano tangente all'altro. Segue che, se uno dei due coni è rotondo, sarà rotondo anche l'altro, intorno ad un asse parallelo all'asse del primo.

23) Se un punto descrive una quadrica Q, il piano polare rispetto ad Ω inviluppa una seconda quadrica Q' (*polare* di Q), i cui punti hanno come polari i piani tangenti a Q. In particolare « se Q è una sfera di centro C, la quadrica polare Q' è rotonda intorno all'asse OC, ed è generata precisamente da una conica, avente in O un fuoco, la quale ruoti intorno al suo asse focale OC ». Il punto O dicesi *fuoco* per la quadrica rotonda, ed il piano polare di O rispetto ad essa (che è pure piano polare di C rispetto ad Ω) dicesi *piano direttore*, e contiene una *direttrice* di ciascuna conica meridiana. Il cono circoscritto dal fuoco O alla quadrica rotonda Q' si compone delle direzioni assolute uscenti da O. La quadrica Q' ha poi un secondo fuoco ed un secondo piano direttore, provenienti dall'altro fuoco e dall'altra direttrice della conica meridiana. Viceversa, ogni quadrica Q', rotonda intorno all'asse focale della conica meridiana, è trasformata in una sfera dalla polarità rispetto ad una sfera Ω, che abbia il centro O in un fuoco di Q'. Questi risultati si confermano analiticamente, ricordando che l'equazione di una quadrica rotonda, la cui conica meridiana abbia un fuoco in O e l'asse focale z, è del tipo $x^2+y^2+z^2=(az+b)^2$. In generale, l'equazione di una quadrica rotonda, avente un fuoco nell'origine, può scriversi sotto la forma

$$x^2+y^2+z^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2;$$

qual'è il piano direttore? quale l'asse? quale l'interpretazione geometrica di questa equazione? (cfr. n.° 257).

24) Dal fatto che ogni cono circoscritto alla sfera Q è rotondo, segue (es. 22)) che « ogni sezione piana della quadrica Q' è proiettata da un fuoco O della quadrica, mediante un cono rotondo », che ha per asse la congiungente di O col polo (rispetto a Q') del piano secante. « Le coppie di tangenti coniugate a Q', in un suo punto qualsiasi, sono proiettate dal fuoco O mediante coppie di piani perpendicolari ». « Ogni conica di Q', il cui piano passi per O, ha un fuoco in O » (Dupin). Mediante analoghe considerazioni seguono le proprietà: « Ogni piano condotto per il fuoco O è normale alla retta, che congiunge O col polo del piano rispetto alla quadrica ». « Le coppie di rette, mutuamente polari rispetto alla quadrica Q', sono proiettate da O mediante coppie di piani perpendicolari ».

25) Due quadriche rotonde, aventi un fuoco O comune, si segano lungo due coniche, i cui piani formano un gruppo armonico coi rispettivi piani direttori.

26) Ad un tetraedro si possono circoscrivere, in generale, otto quadriche rotonde, aventi un dato fuoco; come si costruiscono i relativi piani direttori, e come sono situati rispetto alle facce del tetraedro? (cfr. n.° 307, es. 21)).

27) Una omologia, che abbia il centro nel centro di una sfera, trasforma questa in una quadrica rotonda, avente ivi un fuoco (n.° 267, es. 2)).

Capitolo II.

Rette di una quadrica — Generazione delle quadriche. Fasci e schiere di quadriche.

361. Punti ellittici, parabolici, iperbolici. — Abbiamo già visto, nel Capitolo precedente (n.° 344), che sopra una quadrica esistono rette reali od immaginarie; sappiamo anzi che per ogni punto della superficie passano, in generale, due rette, costituenti la intersezione della quadrica col piano tangente in quel punto. Volendo ora approfondire lo studio delle rette situate sulla superficie, dobbiamo chiederci anzitutto, se esistano, sopra una quadrica, punti *singolari*, per cui passino più di due rette della quadrica. Supposto che per un punto P passino almeno tre rette di una quadrica, notiamo che, se queste stanno in un piano, il piano stesso forma parte della quadrica (n.° 343), la quale si spezza allora in due piani (distinti o coincidenti); se poi le tre rette non appartengono ad un piano, i tre piani, che esse determinano a due a due, toccano in P la quadrica, la quale è un cono col vertice in P (n.° 345). Dunque: *per un punto di una quadrica passano due, e due sole rette appartenenti ad essa*; *a meno che la quadrica non si spezzi in due piani, o non sia un cono col vertice in quel punto.*

Scartando questi evidenti casi di eccezione, dobbiamo considerare le ipotesi che le due rette di una quadrica, uscenti da un punto di essa, siano reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie. Nella prima ipotesi il punto, come già sappiamo (n.° 354), dicesi *iperbolico*, nella seconda *parabolico*, nella terza *ellittico.* Si potrebbe pensare che, sopra una stessa quadrica, si trovassero punti delle tre specie. Dimostreremo, al contrario, che:

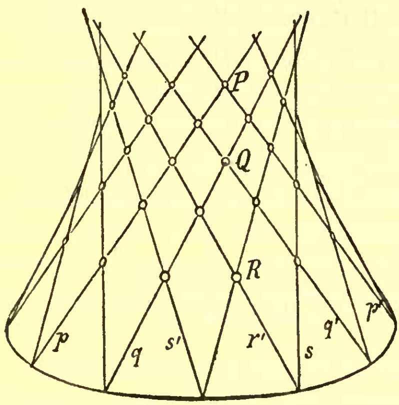
Secondo che un punto di una quadrica è iperbolico, parabolico od ellittico, tale sarà, rispettivamente, ogni altro punto (non singolare) *della quadrica;* saremo così condotti a distinguere *quadriche a punti iperbolici, quadriche a punti parabolici,* e *quadriche a punti ellittici.*

Il teorema precedente considera tre ipotesi; basterà esaminare la prima e la seconda, giacchè seguirà poi per assurdo che il teorema è vero, anche quando è soddisfatta la terza ipotesi.

362. Quadriche a punti parabolici. — Esaminiamo anzitutto la seconda ipotesi del teorema precedente. Supponiamo dunque che un punto P di una quadrica sia parabolico; vuol dire che il piano π, tangente alla quadrica in P, sega la superficie lungo due rette reali e coincidenti $p \equiv p'$ uscenti da P, e tocca la quadrica in ogni punto di p (n.° 346). Conduciamo per p un secondo piano arbitrario ϱ; questo tocca la quadrica in un qualche punto R di p (n.° 346). Allora però la quadrica ammette in R due piani tangenti distinti π e ϱ, ed è quindi un cono col vertice in R (n.° 345). D' altra parte ogni punto di un cono è parabolico (n.° 359), all'infuori del vertice, punto singolare. Concludiamo che il teorema precedente sussiste nel caso dei punti parabolici; vediamo inoltre che *le quadriche a punti parabolici sono i coni* (o cilindri).

363. Quadriche a punti iperbolici. — Supponiamo ora, in secondo luogo, che un punto P di una quadrica sia iperbolico;

da P usciranno due rette reali e distinte p e p', appartenenti alla quadrica, e costituenti la intersezione di questa col piano tangente in P. Dobbiamo dimostrare che ogni altro punto Q della quadrica, e iperbolico. È iperbolico intanto ogni altro punto di p, o p'; infatti un punto di p (ad es.) non può esser ellittico, giacchè per esso passa una prima retta reale p, nè può esser parabolico, chè tale sarebbe allora il punto P (n.° 362). Possiamo dunque supporre che il punto considerato Q stia fuori di p, p', e quindi fuori del piano pp'. Consideriamo allora il piano Qp; questo sega la quadrica lungo p, e lungo una seconda retta reale q' (n.° 346), la quale dovrà contenere il punto Q, che appartiene al piano ed alla quadrica, ma non a p. Similmente, segando la quadrica col piano Qp', otteniamo una seconda retta reale q della quadrica, pure passante per Q. In conclusione, per Q passano due rette reali della quadrica, q, q', certo distinte, chè altrimenti Q, e quindi anche P, sarebbe parabolico, contro l'ipotesi. Con ciò il teorema enunciato alla fine del n.° 361 è dimostrato, anche nella ipotesi dei punti iperbolici, e quindi sussiste in ogni caso.



364. I due sistemi di rette di una quadrica rigata. — Riprendiamo in esame la ultima ipotesi: da un punto P di una quadrica, escano due rette reali e distinte, p, p', appartenenti alla superficie. La costruzione del n.° precedente ci ha mostrato che, per ogni altro punto Q della quadrica, passano due rette reali e distinte q, q'; delle quali la prima, q, appartenendo al piano Qp', sega la retta p', mentre la seconda, q', sega la retta p. Prendiamo ora sulla superficie un terzo punto R; colla costruzione analoga otteniamo due rette reali e distinte r, r' uscenti da R, delle quali la prima sega p', mentre la seconda sega p.

Così continuando, vediamo che sulla superficie esistono infinite rette reali; di queste, alcune

$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad \cdots \quad \text{segano } p' ;$$

le altre

$$p', \quad q', \quad r', \quad s', \quad \cdots \quad \text{segano } p.$$

Chiameremo *primo sistema* (o *serie*, o *schiera*) l'insieme delle rette che incontrano p'; *secondo sistema* l'insieme delle rette che segano p; avvertendo sin d'ora che i due sistemi hanno proprietà simmetriche, sicchè sarà lecito scambiare la denominazione di *primo* e *secondo* sistema. Ora, ai due sistemi spettano le seguenti notevoli proprietà.

1) *Due rette di uno stesso sistema sono sghembe tra loro.* Supposto infatti, ad es., che q ed r si segassero, poichè entrambe segano p', seguirebbe che le tre rette q, r, p' dovrebbero appartenere ad un medesimo piano, o ad un medesimo punto (n.° 7, δ)). Nel primo caso quel piano formerebbe parte della quadrica; nel secondo caso la quadrica sarebbe un cono col vertice in quel punto (n.° 361). Ma queste conclusioni sono evidentemente in contraddizione colle ipotesi, in cui ci siamo posti.

2) *Due rette di sistemi diversi si segano* (in un punto proprio od improprio). Ciò risulta chiaro intanto per le coppie di rette p, p'; q, q'; r, r'; ..., che escono, per costruzione, dai punti P, Q, R, ... assunti sulla superficie, e costituiscono le intersezioni di questa coi piani tangenti nei punti nominati. Consideriamo ora, ad es., le due rette q, r'. La r' sega il piano qq' in un punto, che, appartenendo alla quadrica, dovrà stare su q, o su q'; ma non può stare su q', per il lemma precedente; dunque deve stare su q.

Riassumendo questi risultati, insieme ai precedenti, possiamo dire:

Una quadrica a punti iperbolici possiede infinite rette reali, che si distribuiscono in due sistemi; due rette di uno stesso sistema sono sghembe, due rette di sistemi diversi si segano; ad ogni punto della superficie, e ad ogni piano tangente alla superficie appartengono due rette, una del primo, l'altra del secondo sistema (1).

(1) Proprietà analoghe, quando si sostituisca l'aggettivo *reale* con *immaginario*, sussistono pure per le quadriche a punti ellittici, ma presentano minore interesse, mancando allora la intuizione geometrica.

Per questa proprietà, una quadrica a punti iperbolici dicesi *quadrica rigata*, od anche *doppiamente rigata.*

365. Costruzione di una quadrica rigata. — Si conoscano della quadrica tre rette p, q, r, appartenenti ad uno stesso (primo) sistema, e quindi sghembe a due a due. Le rette p', q', r'... del *secondo* sistema devono segar quelle tre (n.° 364); viceversa, ognuna delle infinite rette, che incontrano p, q, r (n.° 7, γ)), ha tre punti (uno su ciascuna di esse) in comune colla superficie, e quindi vi giace per intero, ed appartiene al secondo sistema, perchè sega p. Dunque tutte le rette del secondo sistema si ottengono, conducendo le rette che si appoggiano a p, q, r. Ed in modo analogo, quando si siano costruite tre rette p', q', r' del secondo sistema, si potranno ottenere le infinite rette del primo sistema, tra le quali si trovano p, q, r.

Una quadrica rigata è dunque pienamente determinata da tre sue rette di uno stesso sistema. Anzi, per costruire una quadrica rigata, si può partire da tre rette arbitrarie p, q, r dello spazio, purchè sghembe a due a due. Infatti, per nove punti, di cui tre appartengano a p, tre a q, e tre ad r, passa sempre una quadrica (n.° 341), la quale contiene quelle rette (n.° 342) come rette di uno stesso sistema. Che poi la quadrica sia unica, risulta dalla costruzione precedente. In conclusione:

Tre rette, sghembe a due a due, individuano una quadrica rigata, la quale contiene le infinite rette, che si appoggiano a quelle tre, ed infinite altre rette, tra cui le tre primitive.

Quando una quadrica è generata partendo da tre rette p, q, r, e costruendo le infinite rette p', q', r',..., che si appoggiano a quelle, si dice che le rette costruite sono *generatrici* della superficie, e le rette date sono *direttrici.* Ed i due sistemi di rette della superficie si chiamano talora *sistema delle generatrici*, e *sistema delle direttrici*; ma i due nomi possono evidentemente scambiarsi tra loro.

Osservazione. — Segue indirettamente, dai risultati ottenuti, una notevole proprietà del sistema delle infinite rette, che si appoggiano a tre rette sghembe a due a due; vediamo infatti che ogni retta, la quale seghi tre di quelle infinite rette, segherà, in conseguenza, tutte le altre.

Segue inoltre che il problema di *condurre una retta, la quale seghi quattro rette date, sghembe a due a due*, ammette, in generale, due soluzioni reali o immaginarie. Si consideri infatti la quadrica, che ha come direttrici tre, a, b, c, delle rette date; essa segherà la quarta retta d in due punti (reali o immaginari), per ciascuno dei quali passa una generatrice della quadrica, soddisfacente al problema. Fa eccezione solo il caso, che d sia anch'essa direttrice della quadrica nominata, perchè allora il problema ammette infinite soluzioni. Il problema è di secondo grado, e la sua risoluzione grafica può ricondursi, in virtù delle considerazioni che seguono, alla determinazione dei punti uniti di una proiettività tra punteggiate sovrapposte.

366. Generazione delle quadriche rigate mediante forme proiettive. — Per costruire le generatrici di una quadrica rigata, ossia le rette che segano tre rette (direttrici) p, q, r, sghembe a due a due, si può procedere, come sappiamo (n.° 7, γ)), in due modi duali l'uno dell'altro.

Si può infatti, in primo luogo, scegliere su p un punto variabile P, e costruire la retta p' intersezione dei piani Pq, Pr. Questi, mentre P descrive la punteggiata p, generano due fasci proiettivi tra loro, perchè prospettivi a quella punteggiata. Dunque le generatrici p', q', r' ... di una quadrica rigata possono riguardarsi come intersezioni di coppie di piani omologhi in due fasci proiettivi, aventi per assi due direttrici q, r.

Dualmente, per costruire una generatrice qualsiasi possiamo condurre per p un piano variabile π, e tracciare la retta p' congiungente i due punti $q\pi$, $r\pi$. Questi, al variare di π, descrivono, su q, r, due punteggiate proiettive, e le generatrici appariscono come congiungenti punti omologhi.

Riassumendo, possiamo dire che

Un sistema di rette di una quadrica rigata può considerarsi

sia come l'insieme delle rette intersezioni di piani omologhi in due fasci proiettivi, aventi per assi due rette sghembe.	*sia come l'insieme delle rette congiungenti punti omologhi in due punteggiate proiettive, aventi per sostegni due rette sghembe.*

Le rette sghembe, qui nominate, sono due rette arbitrarie dell'altro sistema.

Viceversa: *due fasci proiettivi di piani, ad assi sghembi, o due punteggiate proiettive, a sostegni sghembi, generano, nel modo ora indicato, un sistema di rette di una quadrica rigata,* alla quale appartengono, come rette dell' altro sistema, i due assi dei fasci, o i due sostegni delle punteggiate. Ciò risulta dalle considerazioni che precedono, e può dimostrarsi, nel modo più semplice, per via analitica.

Consideriamo infatti, ad esempio, due fasci proiettivi di piani, che possiamo rappresentare mediante due equazioni del tipo

$$(1) \qquad L + kM = 0, \qquad L' + kM' = 0,$$

dove L, M, L', M' sono polinomi lineari in x, y, z, e k è un parametro variabile, ad ogni valore del quale corrisponde una coppia di piani omologhi (cfr. n.° 148). L'equazione della superficie costituita dalle rette (1) (*generatrici*), intersezioni di piani omologhi, si otterrà eliminando il parametro k; si giunge così all'equazione di secondo grado, in x, y, z,

$$(2) \qquad LM' - L'M = 0,$$

che rappresenta una quadrica. La superficie contiene evidentemente la retta $L = M = 0$ asse del primo fascio, e la retta $L' = M' = 0$ asse del secondo fascio; queste sono due *direttrici* della quadrica. Si noterà poi che la stessa quadrica (2) è pur generata dai due fasci proiettivi di piani

$$(3) \qquad L + hL' = 0, \qquad M + hM' = 0,$$

i quali hanno per assi due generatrici $L = L' = 0$, $M = M' = 0$ (rappresentate dalle (1) per $k = 0, \infty$), ed i cui piani omologhi si segano nelle singole direttrici (3) della superficie. Da questa doppia generazione risulta la presenza sulla superficie dei due sistemi di rette. E sarebbe facile ritrovare le proprietà di questi, facendo uso delle equazioni (1), (3) di una generatrice o, rispettivamente, di una direttrice arbitraria. Ma ciò può esser lasciato al lettore.

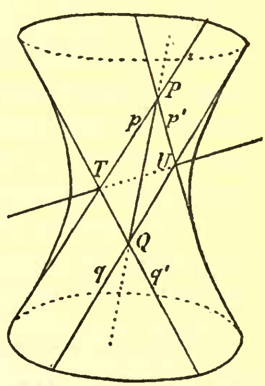
Osservazione. — Se gli assi di due fasci proiettivi di piani si segano in un punto V, le rette intersezioni di piani omologhi costituiscono un cono del secondo ordine col vertice in V; i due fasci generano dunque una superficie del secondo ordine degenere.

Dualmente, se i sostegni di due punteggiate proiettive stanno in un piano ω, le rette congiungenti punti omologhi inviluppano una conica di ω, ed i piani per esse costituiscono una quadrica limite (n.° 360), cioè un inviluppo di piani degenere, di seconda classe.

367. Qualche proprietà delle quadriche rigate. — Poichè una retta reale sega un piano reale in un punto reale, segue che *ogni piano (reale) sega una quadrica rigata lungo una conica reale, che può anche scindersi in due rette reali*; il piano è dunque secante o tangente.

Dualmente: *per un punto (reale) dello spazio passano infiniti piani reali (e quindi infinite rette reali), che toccano una quadrica rigata; quei piani costituiscono* (n.° 355) *un inviluppo conico reale di seconda classe, che può anche scindersi in due fasci di piani.* In altre parole, *ogni punto è esterno ad una quadrica rigata, o sta sulla superficie.*

I piani tangenti alla quadrica condotti per un punto V dello spazio, non situato sulla superficie, sono i piani proiettanti da V le rette della superficie (n.° 346); ciascuno di essi contiene due rette della quadrica, una del primo e l'altra del secondo sistema. Segue che le proiezioni, sopra un piano arbitrario ω da un punto generico V, delle rette di una quadrica rigata, toccano una conica di ω, che è sezione del cono circoscritto alla quadrica da V, ed è proiezione da V del contorno apparente della superficie (relativo al punto V) (n.° 355).



Siano P, Q due punti di una quadrica rigata, dai quali escano, rispettivamente, le rette p, q del primo sistema e le rette p', q' del secondo sistema. Queste quattro rette sono lati di un quadrilatero sghembo $pq'qp'$, del quale due vertici opposti sono $P \equiv pp'$, $Q \equiv qq'$, e gli altri due sono $T \equiv pq'$, $U \equiv pq'$. I piani pp', qq', tangenti alla quadrica in P e Q, si segano lungo la retta TU; e i piani tangenti in T, U si segano lungo PQ. Dunque le due diagonali PQ, TU del quadrilatero sono rette mutuamente polari, rispetto alla quadrica. Segue che *una retta secante, rispetto ad una quadrica rigata, ha per polare una nuova retta secante*, e, in conseguenza, *una retta non secante ha per polare una retta non secante.* In altre parole: *per una retta si possono condurre, o no, piani tangenti reali ad una quadrica rigata, secondo che la retta sega, o no, in punti reali la superficie.*

Al contrario, si dimostra che, per una quadrica reale non rigata (ad es. per una sfera), una retta secante ha come polare una retta non secante, e viceversa; sicchè per le rette non secanti possono condursi piani tangenti reali, non già per le rette secanti.

Le proprietà generali delle quadriche rigate furono scoperte da MONGE (1794) e dalla sua Scuola. La generazione mediante forme proiettive fu indicata da STEINER (1832).

368. Fascio di quadriche. — Prima di abbandonare le proprietà proiettive delle quadriche (rigate o no), vogliamo dar un cenno dei fasci e delle schiere di quadriche, limitandoci a considerare il caso generale.

Due quadriche

$$(1) \quad \begin{cases} f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + \cdots + 2a_{12}xy + \cdots + a_{44} = 0, \\ \varphi(x, y, z) \equiv b_{11}x^2 + \cdots + 2b_{12}xy + \cdots + b_{44} = 0, \end{cases}$$

hanno in comune infiniti punti (reali o immaginari), costituenti una curva sghemba, che è rappresentata dal sistema delle equazioni (1). Un piano generico sega le due quadriche in due coniche, e quella curva nelle *quattro* intersezioni di queste coniche (n.° 226). Perciò la curva dicesi *del quarto ordine.* Essa può presentare vari casi, che non staremo a distinguere; ad es., essa può scindersi in due coniche giacenti in piani distinti, e secanti la retta intersezione negli stessi due punti, od anche può comporsi dei lati di un quadrilatero sghembo, ecc.

Consideriamo ora le infinite quadriche rappresentate dall'equazione di secondo grado

$$(2) \qquad \lambda f(x, y, z) + \mu\varphi(x, y, z) = 0,$$

o, ciò che fa lo stesso, dalla

$$(2') \qquad f(x, y, z) + k\varphi(x, y, z) = 0,$$

al variare del parametro $k = \frac{\mu}{\lambda}$. Queste quadriche, tra cui si trovano le due date, costituiscono un fascio (cfr. n.° 227).

Esse passano tutte per la curva del quarto ordine nominata (che dicesi *curva base* del fascio), perchè le coordinate di un punto qualsiasi di questa annullano i polinomi (1), e quindi il polinomio (2).

a) *Per ogni punto dello spazio, che non appartenga alla curva base, passa una ed una sola quadrica del fascio*; giacchè, sostituendo nella (2′), al posto di x, y, z, le coordinate del punto, rimane determinato il parametro k.

b) *Le quadriche di un fascio segano sopra una retta generica coppie di una involuzione;* se, ad es., come retta si assume l' asse $x (y = z = 0)$, il che non costituisce una restrizione (cfr. n.° 227), la coppia di punti segata dalla quadrica (2′) è rappresentata da

$$(3) \quad (a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44}) + k(b_{11}x^2 + 2b_{14}x + b_{44}) = 0,$$

e, al variare di k, descrive una involuzione (n.° 83) [1].

Dal teorema b) segue:

c) *Entro un fascio esistono due quadriche, che toccano una retta generica assegnata; i punti di contatto sono coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio.* Infatti questi punti sono doppi nella involuzione sopra nominata. Si ricordi che le due quadriche, di cui parla questo enunciato, possono esser rappresentate anche da equazioni a coefficienti immaginari; una simile osservazione si applica a vari enunciati seguenti.

d) *Le quadriche di un fascio segano, sopra un piano generico, coniche di un fascio.* Supposto che il piano secante sia il

---

[1] Può accadere tuttavia, per particolari posizioni della retta, che le due coppie

$$a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0, \qquad b_{11}x^2 + 2b_{14}x + b_{44} = 0$$

vengano a coincidere, nel qual caso si ha

$$a_{11} : a_{14} : a_{44} = b_{11} : b_{14} : b_{44},$$

ed ogni coppia (3) viene a coincidere con quelle. Allora però il valore $k = -\frac{a_{11}}{b_{11}} = -\frac{a_{14}}{b_{14}} = -\frac{a_{44}}{b_{44}}$ rende la (3) una identità, e la quadrica del fascio, corrispondente a quel valore di k, contiene la retta. Il caso eccezionale si presenta dunque, se la retta appartiene ad una quadrica del fascio; quella retta ha due punti (reali o immaginari) comuni colla curva base, è una *corda* di questa curva. Sorvoliamo sul caso, privo di interesse, che la retta appartenga a tutte le quadriche del fascio.

piano $xy(z = 0)$, il che non costituisce una restrizione, la conica sezione della quadrica (2′) sarà

$$(4) \qquad f(x, y, 0) + k\varphi(x, y, 0) = 0;$$

essa descrive effettivamente un fascio (n.° 227), al variare di k (2).

In un fascio di coniche esistono generalmente tre coniche degeneri (n.° 228), i cui punti doppi costituiscono un triangolo autopolare rispetto a tutte le coniche del fascio. Ora, se una quadrica del nostro fascio sega il piano xy lungo una di quelle coniche degeneri, la quadrica tocca il piano nel punto doppio della conica, e viceversa (n.° 344). Dunque:

e) *Entro un fascio esistono tre quadriche, che toccano un piano generico; i punti di contatto costituiscono un triangolo autoconiugato rispetto a tutte le quadriche del fascio (ed alle coniche che esse segano sul piano).*

Quante quadriche di un fascio degenerano in coni? Sappiamo (n.° 357) che la quadrica (2′) è un cono, se si annulla il discriminante

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kb_{11} & \cdots & a_{14} + kb_{14} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{41} + kb_{41} & \cdots & a_{44} + kb_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Abbiamo qui una equazione di quarto grado in k, la quale fornisce quattro valori di k, e, in corrispondenza, quattro coni. Dunque (Poncelet, 1822):

f) *Entro un fascio di quadriche esistono, in generale, quattro coni.* Questo numero subisce riduzioni, se una, o più quadriche del fascio degenerano in coppie di piani.

---

(2) Se però il piano $\pi \equiv xy$ forma parte di una quadrica del fascio (la quale si scinde allora in due piani π, π'), quel piano sarà segato da tutte le quadriche del fascio in una stessa conica, che forma parte della curva base del fascio. Questa allora si scinde in quella conica di π, ed in una seconda conica di π', per la quale passano pure tutte le quadriche del fascio. Viceversa, se due quadriche si segano in una conica, situata in un piano π, vi è una quadrica del fascio, che si scinde nel piano π ed in un secondo piano π'; questo è segato in una stessa conica dalle due quadriche primitive e da ogni quadrica del fascio. Segue di qua il notevole teorema: *se due quadriche passano per una stessa conica, esse si segano lungo una seconda conica, che ha colla prima due punti comuni (o coincide con essa).*

g) *I vertici dei quattro coni, appartenenti ad un fascio di quadriche, formano un tetraedro autopolare rispetto a tutte le quadriche del fascio.* Per dimostrare il teorema, si osservi, in primo luogo, che il piano polare di un punto generico P dello spazio, rispetto alla quadrica $f + k\varphi = 0$ del fascio, ha un'equazione del tipo

$$(5)\quad (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4) + k(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4) = 0,$$

supposto che $\alpha_1 x + \cdots = 0$ e $\beta_1 x + \cdots = 0$ rappresentino i piani polari di P, rispetto alle quadriche $f = 0$, $\varphi = 0$; ciò si verifica, scrivendo per disteso le dette equazioni, secondo la nota regola (n.° 351). Ne viene che « i piani polari di un punto generico, rispetto alle quadriche di un fascio, formano un fascio ». Se però il punto P è vertice di un cono appartenente al fascio, cono che corrisponderà a un certo valore di k, il piano polare di P, rispetto al cono, è indeterminato (n.° 359), e la equazione (5), per quel valore di k, diviene una identità. Ciò è possibile soltanto, se

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_4;$$

ma allora i piani polari di P, rispetto alle quadriche $f = 0$, $\varphi = 0$, e a tutte le altre quadriche del fascio, coincidono. Sicchè « il vertice di un cono, appartenente ad un fascio di quadriche, ha lo stesso piano polare, rispetto a tutte le quadriche del fascio ». Fra queste quadriche, oltre al cono di vertice P, si trovano altri tre coni, i cui vertici siano Q, R, S. Il piano polare di P, rispetto a tutte le quadriche del fascio, e quindi anche rispetto al cono Q, deve passare per il vertice Q del cono (n.° 359), e deve passare analogamente per R, S; sarà dunque il piano QRS. Risulta così dimostrato che, nel tetraedro $PQRS$, ciascun vertice ha come piano polare la faccia opposta, rispetto a tutte le quadriche del fascio.

h) *Ogni piano tangente, lungo una generatrice, ad uno dei coni appartenenti al fascio di quadriche, sega le quadriche lungo coniche, che si toccano in due punti fissi; i due punti appartengono a quella generatrice.* Infatti il fascio delle coniche, sezioni col piano nominato, possiede una conica (sezione del cono), che degenera in una retta doppia; quel fascio è, in conseguenza, un fascio-schiera di coniche bitangenti (n.[i] 225; 231, Oss.)

Il ragionamento, che precede, è invertibile; si conclude che

i) *I piani secanti le quadriche di un fascio* (od anche due quadriche assegnate) *in coniche bitangenti, si distribuiscono in quattro inviluppi conici di seconda classe, precisamente nei quattro inviluppi di piani tangenti ai quattro coni del fascio.*

369. Schiera di quadriche. — I risultati precedenti si traducono subito per dualità, pur di considerare due *quadriche inviluppi*, definite da equazioni di secondo grado in coordinate (u, v, w) di piani

$$(1) \qquad f(u, v, w) = 0, \quad \varphi(u, v, w) = 0,$$

insieme alle infinite quadriche rappresentate dall'equazione

$$(2') \qquad f(u, v, w) + k\varphi(u, v, w) = 0,$$

contenente il parametro k. Queste quadriche costituiscono, come si suol dire, una *schiera*, ente duale del fascio (cfr. n.° 231). Gli infiniti piani tangenti alle due quadriche (1), toccano pure tutte le quadriche della schiera, e formano un inviluppo semplicemente infinito, *inviluppo base* della *quarta classe*; esprimendo, con questa locuzione, il fatto, che per ogni punto dello spazio passano quattro piani dell'inviluppo.

Le proprietà delle schiere di quadriche si deducono per dualità dalle proprietà dei fasci; basterà dunque raccogliere qui gli enunciati, lasciando al lettore la cura di trasformare anche le dimostrazioni. Dei risultati, cui perveniamo, sarà fatta in seguito una importante applicazione metrica.

a) *Ogni piano dello spazio, che non appartenga all'inviluppo base, riesce tangente ad una, e ad una sola quadrica della schiera.*

b) *Le coppie di piani tangenti, condotti alle quadriche di una schiera per una retta generica, formano una involuzione.*

c) *Una retta generica è toccata da due quadriche della schiera; i relativi piani tangenti* (*passanti per la retta*) *sono coniugati rispetto a tutte le quadriche della schiera.*

d) *I coni circoscritti alle quadriche di una schiera, da un punto generico, formano una schiera* (cioè toccano quattro piani fissi uscenti dal punto).

e) *Per un punto generico passano tre quadriche della schiera; i relativi piani tangenti, in quel punto, costituiscono un triedro* *autoconiugato rispetto a tutte le quadriche della schiera (ed ai coni ad esse circoscritti dal punto).*

f) *In una schiera di quadriche esistono, in generale, quattro quadriche inviluppi degeneri* (n.° 360), *cioè quattro coniche considerate come inviluppi di piani.*

g) *I piani delle quattro coniche formano un tetraedro autopolare rispetto a tutte le quadriche della schiera.*

h) *I coni circoscritti alle quadriche di una schiera, da un punto qualsiasi* (P) *di una di quelle coniche* (K), *si toccano lungo due generatrici, hanno cioè, lungo queste, gli stessi piani tangenti; i due piani tangenti si segano nella tangente alla detta conica* (K) *in quel punto* (P).

i) *Le quattro coniche, appartenenti alla schiera, costituiscono il luogo dei punti, da cui si possono circoscrivere alle quadriche della schiera coni, che si tocchino tra loro lungo due generatrici.*

Esercizi. I. — 1) Costruire, mediante fasci di piani proiettivi, una quadrica rigata, conoscendo: *a*) due generatrici e tre punti; *b*) una conica e due generatrici secanti la curva; *c*) una conica, una generatrice che vi si appoggi, e due punti A, B; *d*) una generatrice, una direttrice e quattro punti A, B, C, D; *e*) una generatrice e sei punti A, B, C, D, E, F; (nel problema *c*) si costruiscano le due direttrici passanti per A, B; nel problema *d*) la conica segata dal piano ABC; nel problema *e*) la generatrice uscente da A, dalla quale i cinque punti $BCDEF$ sono proiettati mediante un gruppo di piani proiettivo ad un gruppo noto (n.° 231, es. 26)).

2) Due stelle T, T', legate da una correlazione, generano, come luogo della intersezione di elementi (retta e piano) corrispondenti, una quadrica che passa per T e T'. Ed ogni quadrica a punti reali può esser generata mediante due stelle correlative, aventi i centri in due punti arbitrari della superficie (Seydewitz). (Scelto T come origine delle coordinate, e T' come centro della stella di piani $\lambda L + \mu M + \nu N = 0$, che è correlativa alla stella di rette $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$, la superficie generata ha l' equazione $xL + yM + zN = 0$. D'altra parte, l'equazione di ogni quadrica passante per l'origine può, in infiniti modi, porsi sotto quella forma, donde segue la seconda parte del teorema).

II. — 3) L' equazione canonica (n.° 360, es. 16)) di una quadrica, riferita ad un tetraedro autopolare,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

si presta per classificare le quadriche sotto l' aspetto proiettivo. Considerati anzitutto i casi di degenerazione, in cui uno, due o tre coefficienti si annullano, si esaminino le ipotesi: 1) i quattro coefficienti hanno lo stesso segno (quadrica a punti immaginari); 2) tre hanno lo stesso segno, e il rimanente il segno opposto (quadrica a punti ellittici; tali sono infatti i punti reali, in cui certi spigoli del tetraedro segano la superficie); 3) due coefficienti hanno un segno e due il segno opposto (quadrica a punti iperbolici).

4) Indicando con X, Y, Z coordinate cartesiane ortogonali, si applichi alla quadrica precedente la collineazione

$$X = \sqrt{\pm \frac{a}{d}\frac{x}{t}}, \quad Y = \sqrt{\pm \frac{b}{d}\frac{y}{t}}, \quad Z = \sqrt{\pm \frac{c}{d}\frac{z}{t}},$$

dove i segni vanno scelti in modo, che i radicali risultino reali. Si vedrà che « ogni quadrica a punti ellittici è collineare ad una sfera, ed ogni quadrica a punti iperbolici è collineare ad un iperboloide rotondo ad una falda ».

5) In un tetraedro autopolare, rispetto ad una quadrica a punti ellittici, un vertice è interno e gli altri sono esterni; i tre spigoli uscenti dal primo vertice sono secanti e i tre rimanenti no; una faccia è esterna e le rimanenti sono secanti. Se invece la quadrica ha punti iperbolici, i quattro vertici del tetraedro sono esterni, le quattro facce sono secanti, due coppie di spigoli opposti sono secanti, mentre la terza coppia si compone di rette non secanti.

6) Di due rette mutuamente polari, rispetto ad una quadrica a punti ellittici, una è secante e l'altra no; mentre, se la quadrica ha punti iperbolici, le due rette sono insieme secanti, oppure no.

7) Se due tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono mutuamente polari, rispetto ad una quadrica Q (in guisa che A abbia per piano polare $\alpha' \equiv B'C'D'$, ecc.), le rette AA', BB', CC', DD', congiungenti vertici omologhi, sono generatrici di una quadrica rigata; e la stessa proprietà spetta alle rette $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, intersezioni di facce corrispondenti (Chasles). (Per dimostrare la seconda parte, si osservi che le tre facce α', β', γ' del secondo tetraedro segano sulla faccia δ del primo un triangolo, che è polare di ABC rispetto alla sezione di Q; l'asse di omologia dei due triangoli (n.° 215, es. 31)) incontra dunque le rette $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$; similmente si ottengono altre tre rette secanti queste quattro, donde segue il teorema).

8) In particolare: se una quadrica è circoscritta a un tetraedro, i piani tangenti nei vertici segano le facce opposte in quattro generatrici di una quadrica rigata; e dualmente (Bobillier).

9) Se la quadrica Q dell'es. 7) è una sfera col centro in D, segue: le quattro altezze di un tetraedro sono generatrici di una stessa quadrica rigata.

III. — 10) Se due quadriche si toccano in un punto O, vale a dire hanno ivi lo stesso piano tangente ω, ogni quadrica del fascio, determinato da quelle due, ha in O il piano tangente ω; dei quattro coni del fascio due coincidono in un cono di vertice O, che sega il piano ω lungo due rette generalmente distinte r, s; gli altri due coni hanno i vertici su ω, in due punti P, Q, generalmente distinti da O, e toccano il piano ω lungo le rette OP, OQ, rispettivamente, le quali sono tangenti coniugate, rispetto ad ogni quadrica del fascio. Un piano generico condotto per O sega le quadriche lungo coniche, che hanno in O un contatto semplice; ma se il piano passa per una delle rette r, s sopra nominate, il contatto è di secondo ordine (n.° 229). (Si assuma O come origine, ω come piano xy).

11) Il fascio determinato da una quadrica e da un cono del secondo ordine, che abbia il vertice in un punto O di quella, si compone di quadriche toccantisi in O, ed ha le proprietà sopra esposte.

12) Se due quadriche hanno una retta comune (ad es. l'asse x), esse si toccano generalmente in due punti di questa; negli stessi due punti si toccano tutte le altre quadriche del fascio determinato da quelle; e quei punti sono vertici di due coni appartenenti al fascio, ciascuno dei quali assorbe due dei quattro coni, che si presentano in un fascio generale. Il fascio particolare suddetto è anche determinato da due coni, che abbiano una generatrice in comune, ma non lo stesso vertice.

13) Può anche accadere che due quadriche, aventi una retta comune, si tocchino in più di due punti della retta, nel qual caso esse si toccano in ogni punto della retta. Lo stesso fatto si verifica per tutte le altre quadriche del fascio, una delle quali si spezza in due piani passanti per la retta. La curva base del fascio si compone di questa retta, contata due volte, e di due rette secanti quella, ma sghembe tra loro. Un fascio siffatto è pur determinato da una quadrica e da una coppia di piani passanti per una retta della superficie.

14) Se due quadriche hanno in comune una conica, e quindi una seconda conica secante la prima in due punti O, P, le quadriche si toccano in questi due punti, ed ivi si toccano tutte le quadriche del fascio determinato da quelle. Al fascio appartengono la coppia dei piani delle due coniche, e due coni, ciascuno dei quali proietta l'una conica nell'altra. I vertici dei due coni sono separati armonicamente dai piani delle due coniche.

15) Se due quadriche si toccano in due punti O, P, ed è M un ulteriore punto ad esse comune, il piano OPM sega le quadriche lungo due coniche, che hanno due punti comuni in O, due in P ed un quinto in M. Le due coniche quindi o coincidono, o degenerano in due coppie di rette aventi una retta comune. Nel primo caso le due quadriche si segano lungo due coniche secantisi in O e P (es. 14)), nel secondo caso si segano lungo una retta ed una curva residua del 3° ordine (cubica sghemba; es. 12)).

16) Se due quadriche si toccano in tre punti O, P, Q, questi appartengono ad una retta, o determinano un piano. Nel primo caso le due quadriche si toccano in tutti i punti di quella retta (es. 13)). Nel secondo caso esse segano il piano OPQ lungo una stessa conica. Se la conica non si spezza, le quadriche si toccano in ogni punto di essa; la conica stessa, contata due volte, costituisce la totale intersezione delle due quadriche. Ma la conica può spezzarsi in due rette OP, OQ, ed allora le quadriche hanno in comune queste rette, ed inoltre una conica (di un secondo piano) passante per P e Q.

17) Due quadriche possono toccarsi al più in quattro punti O, P, Q, R, senza toccarsi in infiniti punti; ciò accade, se le quadriche passano per gli

spigoli di un quadrilatero sghembo semplice, avente i vertici in quei punti. Al fascio determinato dalle due quadriche appartengono due coppie di piani. Una correlazione muta un fascio siffatto in un sistema dello stesso tipo; sicchè quel fascio è insieme fascio e schiera. Quali ne sono le quadriche inviluppi degeneri?

18) Se $f = 0$ è l'equazione di una quadrica, ed $U = 0$, $V = 0$ sono le equazioni di due piani, sotto la forma $f + \lambda UV = 0$ si può rappresentare ogni quadrica, che passi per le coniche intersezioni di f con quei due piani.

19) Tre quadriche contenenti una stessa conica, prese a due a due, danno come ulteriori intersezioni tre coniche, i cui piani passano per una stessa retta. Quale corollario si ottiene, se la conica primitiva è l'assoluto?

20) L'equazione $f + \lambda U^2 = 0$ rappresenta una quadrica tangente alla $f = 0$ lungo la conica, che questa quadrica ha in comune col piano $U = 0$. Al variare di λ, si ottiene un fascio di quadriche, a cui appartiene un cono, ed un piano doppio $U^2 = 0$. Un piano generico sega il fascio lungo coniche di un fascio-schiera (n.° 231, Oss.), aventi due tangenti comuni, le quali si segano nel punto, ove il piano è toccato da *una* quadrica del fascio; le due tangenti sono anzi le generatrici di questa quadrica. Questo sistema di quadriche è duale di sè stesso; è, nel tempo stesso, un fascio ed una schiera. I coni circoscritti alle quadriche del sistema da un punto formano un fascio-schiera di coni, che si toccano tutti lungo due generatrici, le quali appartengono alla quadrica del sistema passante per il punto.

21) Due quadriche Q', Q'', le quali tocchino, rispettivamente, una terza quadrica Q lungo le coniche K', K'', si segano in due coniche, i cui piani formano un gruppo armonico coi piani di K' e K''; (Monge, Chasles). Caso particolare: la quadrica Q sia un cono; questione duale.

22) I coni circoscritti ad una stessa quadrica da due punti si segano lungo due coniche.

23) Se due quadriche Q', Q'' sono iscritte in uno stesso cono Q, esse sono iscritte in un secondo cono Q_1 (teorema duale di quello contenuto nella nota a pag. 640). Le due quadriche Q', Q'' si segano lungo due coniche, i cui piani dividono armonicamente i piani delle coniche $Q'Q$, $Q''Q$, ed i piani delle coniche $Q'Q_1$, $Q''Q_1$. (Il caso particolare, che Q sia il cono delle direzioni assolute uscenti da un punto, conduce al risultato del n.° 360 es. 25)).

24) Dualmente: due quadriche, che si seghino lungo due coniche, sono iscritte in due coni. Caso particolare, che una delle coniche sia il cerchio assoluto.

25) Dati quattro punti, esistono in generale otto quadriche, che passano per quelli, e toccano, ciascuna lungo una conica, un cono od una quadrica Q assegnata. Come si possono costruire i piani delle otto coniche? Come si scrive la equazione di una quadrica soddisfacente al problema?

(Cfr. n.° 231, es. 9), 21)). Caso particolare, che Q sia il cono delle direzioni assolute uscenti da un punto (n.° 360, es. 26)).

26) Tradurre per dualità il risultato generale precedente; si vedrà, in particolare, che per una conica passano generalmente otto quadriche tangenti a quattro piani assegnati. Come caso più particolare, si conclude che in un tetraedro si possono iscrivere otto sfere.

IV. — 27) I piani polari di un punto, rispetto alle quadriche di un fascio, formano (n.° 368) un fascio. I fasci di piani, che si ottengono al variare del punto, sono riferiti proiettivamente tra loro, quando si riguardino come corrispondenti i piani polari relativi ad una stessa quadrica. In particolare, i quattro piani di uno di quei fasci, che passano per i vertici del tetraedro autopolare rispetto alle quadriche del fascio, formano un doppio rapporto costante; donde segue una proprietà notevole degli assi di quei fasci di piani, in relazione al detto tetraedro (n.° 46, es. 8)).

28) Dualmente: i poli di un piano, rispetto alle quadriche di una schiera, formano una punteggiata sopra una retta, che sega il piano nel punto, ove esso è toccato da una quadrica della schiera. Al variare del piano varia la retta; ma le punteggiate, che così si ottengono, sono tutte proiettive tra loro. Sui relativi sostegni le quattro facce del tetraedro autopolare, rispetto alle quadriche della schiera, determinano un doppio rapporto costante.

29) Le rette polari di una retta fissa, rispetto alle quadriche di un fascio (o di una schiera), costituiscono un sistema di rette di una quadrica rigata, che passa per i vertici (o tocca le facce) del tetraedro autopolare.

30) In un fascio di quadriche vi sono generalmente tre quadriche, che toccano un dato piano (n.° 368, e)); i punti di contatto determinano un triangolo tale, che i lati uscenti da un vertice sono tangenti coniugate rispetto alla quadrica del fascio passante per quel vertice.

31) Dualmente: in una schiera di quadriche vi sono generalmente tre quadriche, che passano per un dato punto; i relativi piani tangenti formano un triedro tale, che gli spigoli giacenti in una faccia sono tangenti coniugate rispetto alla quadrica della schiera, che tocca quella faccia.

32) Poichè i piani tangenti a due quadriche, in un punto ad esse comune, si segano in una retta, che è tangente alla curva intersezione, il risultato precedente può enunciarsi così: « sopra una quadrica Q di una schiera le altre quadriche della schiera segano un sistema di curve tale, che per ogni punto della quadrica Q passano due curve del sistema, le cui tangenti, in quel punto, sono coniugate rispetto a Q ».

33) Se, in particolare, la quadrica Q è una sfera, le due curve del sistema, uscenti da un punto generico di Q, si segano ivi ortogonalmente.

Capitolo III.

Proprietà diametrali.

370. Sezione di una quadrica col piano all'infinito. — Dobbiamo ora occuparci delle proprietà metriche delle superficie di secondo ordine, vale a dire delle relazioni di una quadrica col piano all'infinito, e col cerchio assoluto dello spazio.

Una quadrica

$$(1)\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

sega il piano all'infinito lungo la conica

$$(2)\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

come risulta, trasformando la (1) in coordinate omogenee (x, y, z, t) (n.° 340), e ponendo poi $t = 0$. A dir vero, la conica è rappresentata dalla (2) insieme all'equazione $t = 0$; la (2), presa a sè, rappresenta nello spazio un cono del secondo ordine col vertice nell'origine O (n.° 358), precisamente il cono proiettante da O la conica all'infinito della superficie.

Questa conica (o quel cono) può essere reale e non degenere, immaginaria e non degenere, oppure spezzata in due rette [1]. In corrispondenza, distingueremo tre specie di quadriche, delle quali possiamo esaminare sin d'ora la natura delle sezioni piane; ci appoggeremo, a tal fine, sulla osservazione, che i punti all'infinito della conica K, sezione di una quadrica con un piano proprio π, cadono nelle intersezioni della retta all'infinito p_∞ di π colla conica all'infinito H_∞ della superficie. La conica K è adunque ellisse, parabola, o iperbole, secondo che la retta p_∞ è esterna, tangente, o secante rispetto alla conica H_∞.

1) Se la conica all'infinito della superficie, H_∞, è immaginaria non degenere, la superficie non ha punti reali impropri, e dicesi *ellissoide*. Essa può avere punti reali propri (*ellissoide reale*;

---

[1] Trattandosi di una conica all'infinito, vanno presi in esame solo i caratteri *proiettivi* di essa.

fig. 1 [1]), o può non averne alcuno (*ellissoide immaginario*) [2]. *Le sezioni piane di un ellissoide sono ellissi* (reali o immaginarie). Il piano tangente all' ellissoide in un punto sega la superficie lungo due rette immaginarie, donde segue che tutti i punti di un ellissoide sono ellittici; *l' ellissoide non possiede rette reali.*

2) Se la conica all' infinito, H_∞, è reale non degenere, la superficie dicesi *iperboloide. Un iperboloide possiede, come sezioni piane, ellissi, parabole ed iperboli*, secondo la posizione del piano secante. Il piano tangente ad un iperboloide in un punto può segare (come vedremo in seguito) la superficie lungo rette reali od immaginarie.

Nel primo caso quel punto, e quindi ogni punto della suficie è iperbolico; la superficie contiene rette reali, e dicesi *iperboloide rigato*, o *iperboloide ad una falda* (fig. 2). Nel secondo caso ogni punto della superficie è ellittico; si ha allora l'*iperboloide non rigato*, o *iperboloide a due falde* (fig. 3).

3) Supponiamo infine che la conica all'infinito, H_∞, si scinda in due rette. La superficie tocca allora il piano all'infinito nel punto (o nei punti), che le due rette hanno in comune, e dicesi *paraboloide*.

Vanno qui distinti tre casi, secondo la natura delle due rette componenti H_∞. Infatti le due rette possono esser reali e distinte, secantisi in un punto C_∞; questo punto, e quindi ogni altro punto della superficie è iperbolico, e la superficie dicesi *paraboloide iperbolico*, o *paraboloide rigato* (fig. 5); *la sezione piana generica di un paraboloide iperbolico è una iperbole; risulta una parabola, se il piano passa per* C_∞. Oppure le due rette componenti la conica H_∞ sono immaginarie, secantisi in un punto reale C_∞; la superficie, di cui ogni punto è ellittico, dicesi allora *paraboloide ellittico*, o *paraboloide non rigato* (fig. 4); *la sezione piana generica di un paraboloide ellittico è una ellisse; solo i piani*

---

[1] Le figure, qui indicate, si trovano riunite nella Tavola annessa a questo volume. Esse sono riproduzioni di modelli appartenenti al Gabinetto di Geometria dell' Università di Roma, e provenienti dalla Casa Martin Schilling in Halle a. S. (già L. Brill in Darmstadt). Il Sig. Schilling ha gentilmente accordato il permesso di questa riproduzione.

[2] Ad es., trattando delle sfere, che sono particolari ellissoidi, abbiamo distinto sfere reali e sfere immaginarie.

passanti per C_∞ *segano la superficie lungo parabole.* Finalmente, le due rette componenti H_∞ possono esser reali e coincidenti; in tal caso ogni punto della superficie è parabolico, e la superficie è un cono (n.° 362) col vertice all'infinito (sulla retta in cui quelle due coincidono), ossia un cilindro, e precisamente un *cilindro parabolico*, perchè le sezioni piane generiche del cilindro sono parabole.

A parte quest'ultimo caso, nella discussione non abbiamo tenuto conto delle quadriche degeneri. Il lettore vedrà però subito, che un cono a vertice proprio appartiene alla categoria degli ellissoidi o degli iperboloidi, secondo che il cono non ha od ha punti reali fuori del vertice, secondo che il cono è *immaginario* o *reale;* un piano generico sega un cono immaginario secondo una conica (ellisse) immaginaria, e un cono reale secondo una conica reale, che può esser ellisse, parabola od iperbole, in relazione alla posizione del piano. Un cono a vertice improprio, ossia un cilindro, appartiene alla categoria dei paraboloidi; precisamente alla categoria dei paraboloidi iperbolici, se il piano all'infinito sega il cilindro lungo rette reali e distinte, nel qual caso le sezioni piane generiche sono iperboli (*cilindro iperbolico*); alla categoria dei paraboloidi ellittici, se il piano all'infinito sega il cilindro secondo rette immaginarie, nel qual caso le sezioni piane del cilindro sono ellissi (*cilindro ellittico*); finalmente il cilindro è *parabolico,* come sopra si disse, se il piano all'infinito lo tocca lungo una generatrice.

Osservazione. — Si possono chiedere i criteri analitici, che valgono a decidere se una quadrica data appartiene all'una o all'altra delle famiglie sopra considerate. Questi criteri saranno stabiliti in seguito, come pure in seguito si ritornerà sulla discussione precedente, allo scopo di esaminare con cura le forme delle superficie sopra nominate. Per ora limitiamoci a notare che la quadrica (1) è un paraboloide, se la sua conica all'infinito (2) si scinde in due rette; dovrà a tal fine annullarsi il discriminante della (2) (n.° 211), cioè il determinante

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

che si riconosce essere il complemento algebrico di a_{44} nel discriminante della (1). Dunque: *la condizione, perchè la quadrica* (1) *sia un paraboloide, è espressa da*

$$A_{44} = 0.$$

371. Sezioni di una quadrica con piani paralleli. — Si considerino le coniche segate sopra una quadrica da una serie di piani paralleli. Queste coniche hanno gli stessi punti all'infinito, precisamente quei punti, ove la retta all'infinito, comune ai loro piani, incontra la conica all'infinito della superficie; in conseguenza quelle coniche sono tutte della stessa specie (ellissi, iperboli o parabole). Si suol dire inoltre, tenendo conto del n.° 267, che *le coniche segate sopra una quadrica da piani paralleli sono omotetiche.* Occorre tuttavia avvertire che una omotetia reale, trasformante una conica nell'altra, esiste soltanto, se le due coniche che si considerano sono entrambe reali (o entrambe immaginarie), e se inoltre, quando siano iperboli, il tratto di retta all'infinito, interno all'una conica, riesca pure interno all'altra [1]. In ogni caso, confrontando due di quelle coniche, è sempre vero che gli asintoti dell'una sono paralleli agli asintoti dell'altra, e diametri coniugati dell'una sono paralleli a diametri coniugati dell'altra.

Sotto questa forma, la proprietà sussiste pure, se una delle due coniche degenera, nel qual caso il relativo piano è tangente alla quadrica, e le coppie di diametri coniugati divengono coppie di tangenti coniugate (n.° 354). Risulta così che *le coppie di tangenti coniugate ad una quadrica in un punto sono parallele alle coppie di diametri coniugati di una conica, segata da un piano parallelo al piano tangente in quel punto.*

372. Piani diametrali. — Un punto all'infinito P_∞ ha, rispetto ad una quadrica, un piano polare, che contiene i punti medi di tutte le corde aventi la direzione di P_∞. Dunque:

I punti medi di un sistema di corde parallele di una quadrica stanno in un medesimo piano, che dicesi *piano diametrale*, precisamente piano diametrale *coniugato* con ciascuna di quelle

[1] Il caso opposto, come si vedrà, può presentarsi nelle quadriche (iperboloide o paraboloide) rigate.

corde (cfr. n.° 232). La conica (reale od immaginaria), secondo cui la quadrica è segata da un piano diametrale, è luogo dei punti di contatto delle tangenti parallele alle corde, che il piano biseca.

Sia

$$(1)\quad a_{11}x^2 + \ldots + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{13}x + \ldots + a_{44} = 0$$

la equazione della quadrica, in coordinate cartesiane ordinarie, e sia

$$(2)\qquad \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

una retta uscente dall'origine. Il piano polare del punto all'infinito $(l, m, n, 0)$ della retta, ossia il piano diametrale coniugato alla retta (2) ed alle parallele, ha l'equazione

$$(3)\quad l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0.$$

Considerando, in particolare, i punti all'infinito degli assi cartesiani $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, si ha il risultato: *i piani diametrali coniugati cogli assi* x, y, z *hanno, rispettivamente, le equazioni*

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \end{cases}$$

ottenute annullando le semiderivate parziali, rispetto ad x, y, z, *del polinomio* (1); *l'equazione di ogni altro piano diametrale è una combinazione lineare di quelle tre.*

373. Centro. — *Gli infiniti piani diametrali di una quadrica* (ossia i piani polari dei punti all'infinito) *passano per uno stesso punto, polo del piano all' infinito,* che dicesi *centro* della quadrica. Il centro C è proprio negli ellissoidi e negli iperboloidi, che non toccano il piano all' infinito, ed è centro di simmetria per la superficie; ogni corda di questa, passante per C, ha in C il punto medio, ed ogni conica, segata da un piano per C, ha in C il suo centro. Al contrario, nei paraboloidi (non degeneri), che toccano in un punto il piano all'infinito, il centro C coincide con questo punto improprio, e non dà luogo evidentemente ad una simmetria. D'accordo con ciò, si dice talora che gli ellissoidi e gli iperboloidi sono superficie dotate di centro, i paraboloidi sono privi di centro; altre volte si dice che questi ultimi hanno il centro improprio. *I piani diametrali di un paraboloide formano una stella impropria.*

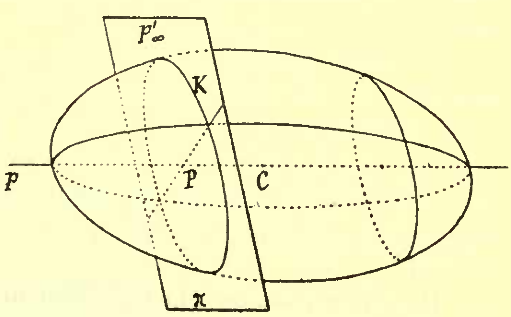
Le coordinate del centro della quadrica (1) si ottengono, risolvendo le equazioni di tre piani diametrali, che non formino fascio, ad es. dei tre piani (4) del n.° precedente. Si trovano così le coordinate

$$(5) \qquad x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \qquad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \qquad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}},$$

dove le A_{ih} sono i soliti minori del discriminante. Il centro è improprio, quando $A_{44} = 0$, quando cioè la quadrica è un paraboloide (n.° 370, Oss.), ed ha allora le coordinate omogenee $(A_{14}, A_{24}, A_{34}, 0)$. È indeterminato, quando $A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$, nel qual caso risulta pure $A = 0$, e la quadrica (che appartiene alle categorie dei paraboloidi e dei coni) è un cilindro; un cilindro ha effettivamente infiniti centri situati sopra una retta, propria se il cilindro è ellittico o iperbolico, impropria se il cilindro è parabolico. In un cono a vertice proprio, il centro coincide col vertice.

374. Diametri. — Le rette passanti per il centro di una quadrica diconsi *diametri. I diametri di un paraboloide sono tutti paralleli tra loro.*

Poichè ogni diametro p passa per il centro C della quadrica, la retta p', polare di p rispetto alla superficie, starà nel piano polare di C, cioè nel piano all'infinito: e viceversa. I diametri possono dunque definirsi come le rette polari delle rette all'infinito.



Sia p un diametro, e p'_∞ ne sia la retta polare. Ogni punto P di p è coniugato, rispetto alla superficie, ad ogni punto P'_∞ di p'_∞; in P cade dunque il punto medio della corda intercettata dalla superficie sulla retta PP'_∞. Segue che

P è centro della conica K, segata sulla superficie dal piano $\pi \equiv Pp'_\infty$.

Facendo variare il punto P lungo p, risulta che *il luogo dei centri delle sezioni di una quadrica*, *ottenute con una serie di piani paralleli*, *è un diametro*, il quale dicesi *coniugato* con ciascuno di quei piani (d'accordo col n.° 339). Due, tra i detti piani, toccano la superficie nei punti, ove questa è segata dal diametro.

375. Cono asintotico. — Il ragionamento precedente cade in difetto, se il diametro p sega la retta polare p'_∞. In tal caso p è tangente alla superficie nel punto all'infinito pp'_∞ (n.° 354).

I diametri tangenti ad una quadrica costituiscono il cono circoscritto alla quadrica dal centro, cono che tocca la superficie lungo la conica all'infinito di questa, e dicesi *cono asintotico*. Scartando il caso del paraboloide (per cui il detto cono degenera nel piano all'infinito contato due volte), risulta che il cono asintotico si ottiene, proiettando dal centro la conica all'infinito della quadrica, od anche conducendo per il centro le rette parallele alle rette (reali od immaginarie), che la superficie possiede. Il detto cono è reale negli iperboloidi, immaginario negli ellissoidi. I piani tangenti al cono, lungo le singole generatrici, toccano la superficie nei punti all' infinito di queste, e diconsi *piani asintotici;* ciascuno di essi sega la superficie lungo due rette parallele (reali od immaginarie).

Un piano generico dello spazio sega la quadrica ed il cono asintotico in due coniche, che hanno gli stessi punti all'infinito e gli stessi asintoti (sezioni del detto piano coi piani asintotici, che toccano la quadrica in quei due punti). *Le due coniche sono adunque concentriche*, *ed omotetiche* (n.° 267); l'affermazione vale, tenendo presente però la restrizione esposta al n.° 371.

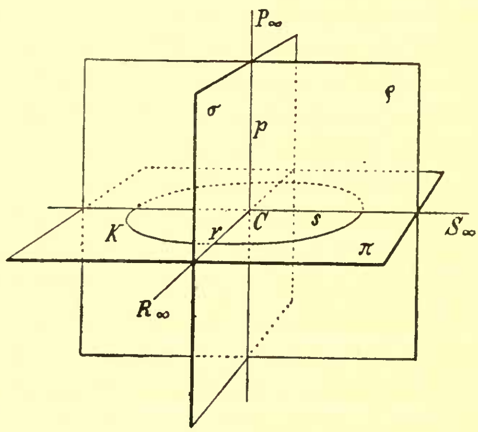
Data la equazione (1) (n.° 370) di una quadrica, per formare l' equazione del cono asintotico, si ricordi che la (2) del n.° 370 rappresenta il cono proiettante dall'origine la conica all'infinito della superficie. Si trasporti ora questo cono parallelamente a sè stesso, finchè il vertice coincide col centro (x_0, y_0,

z_0) della quadrica (n.° 373, (5)); si otterrà il cono asintotico, la cui equazione è dunque (cfr. n.° 234) [1]

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 \\
& + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) \\
& + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) = 0.
\end{aligned}
$$

376. Coppie di piani diametrali coniugati. — Due piani diametrali di una quadrica qualsiasi diconsi *coniugati*, se ciascuno contiene il polo dell'altro (n.° 356), in altre parole, se ciascuno è parallelo alle corde bisecate dall'altro. *Per un diametro passano infinite coppie di piani diametrali coniugati; esse formano una involuzione, i cui piani doppi sono i piani* (asintotici ossia) *tangenti condotti per quel diametro* (n.° 356).

Per costruire una coppia di piani diametrali coniugati, passanti per un diametro p, conviene proceder così. Si costruisca anzitutto un piano π coniugato a p, contenente dunque la retta p'_∞ polare di p. Il piano π sega la quadrica lungo una conica K, che ha il centro nel punto $C \equiv p\pi$ (n.° 374). Si conducano ora due diametri coniugati r, s della conica K, e siano R_∞, S_∞ i loro punti all'infinito. Poichè la retta polare



di R_∞ rispetto a K è la s, il piano polare di R_∞ rispetto alla quadrica passerà per s; esso passa inoltre per p, giacchè R_∞ sta su p'_∞; il detto piano sarà dunque $\rho \equiv ps$. Simil-

---

[1] Se $f(x, y, z) = 0$ è l'equazione della quadrica, l'equazione del cono asintotico può pure scriversi sotto la forma

$$f(x, y, z) - \frac{A}{A_{44}} = 0,$$

che si giustifica imitando il ragionamento esposto nella Oss. al n.° 234.

mente si vede che il piano polare di S_∞ rispetto alla quadrica è $\sigma \equiv pr$. E si conclude che i due piani diametrali ϱ e σ, di cui ciascuno contiene il polo dell'altro, sono coniugati. In breve: *i piani diametrali coniugati passanti per un diametro* p *si ottengono, congiugendo* p *colle coppie di diametri coniugati della conica* K, *segata da un piano coniugato a* p.

377. Terne di piani diametrali coniugati. — Esaminiamo, in particolare, il caso che la quadrica abbia centro proprio C; allora, tra i piani coniugati col diametro p, ve ne sarà uno (proprio) π passante per il centro C. Questo piano *diametrale* π dicesi *coniugato* col diametro p, e p è il diametro *coniugato* col piano diametrale π. *In una quadrica a centro, ad ogni diametro corrisponde un piano diametrale coniugato, il quale ha il polo nel punto all'infinito del diametro, e biseca le corde parallelle a questo.* Il punto all'infinito del diametro e la retta all'infinito del piano diametrale si corrispondono nella polarità piana, determinata dalla conica all'infinito della superficie; o, in altre parole, il diametro ed il piano diametrale si corrispondono nella polarità, che il cono asintotico determina entro la stella C. Applichiamo ora al piano diametrale π ed alla conica K, che esso sega sulla superficie, le considerazioni del n.° precedente. Se r, s sono due diametri coniugati di K, vale ancora il risultato che i loro punti all'infinito R_∞, S_∞ hanno come piani polari $\varrho \equiv ps$, $\sigma \equiv pr$. Ma, questa volta, si può aggiungere che il punto all'infinito P_∞ di p ha come piano polare $\pi \equiv rs$. Il triedro prs ha dunque la proprietà, che ogni sua faccia ha per polo il punto all'infinito dello spigolo opposto, e biseca le corde parallele a questo spigolo; esso è un *triedro diametrale autoconiugato* (n.° 356), le sue facce costituiscono una *terna di piani diametrali coniugati*, i suoi spigoli *una terna di diametri coniugati.* Ciascuna faccia del triedro sega la quadrica in una conica, di cui due diametri coniugati sono gli spigoli giacenti su quella faccia.

Se poi, insieme al triedro, consideriamo il piano all'infinito, che è il piano polare del vertice, abbiamo un particolare tetraedro autopolare rispetto alla quadrica (n.° 356); i vertici all'infinito di esso formano un triangolo autopolare rispetto alla conica all'infinito della superficie. Viceversa, un siffatto triangolo, insieme al centro della superficie, dà un tetraedro autopolare, le cui facce proprie sono tre piani diametrali mutuamente coniugati. Si conclude:

Una quadrica a centro possiede infinite terne di piani diametrali coniugati; queste si ottengono, proiettando dal centro gli infiniti triangoli autopolari rispetto alla conica all'infinito della superficie.

Osservazione. — La nozione di piani diametrali coniugati vale anche per i coni a vertice proprio, e non differisce dalla nozione di piani coniugati, cui conduce la teoria della polarità rispetto al cono (n.° 359). In particolare, si noti che due o tre piani diametrali mutuamente coniugati, rispetto ad una quadrica a centro, sono pure coniugati rispetto al cono asintotico, e viceversa.

378. Piani principali. — Sappiamo (n.° 372) che ogni piano diametrale divide per metà le corde aventi una data direzione. Se quel piano è perpendicolare a queste corde, esso dicesi *piano principale*, ed è un piano di simmetria della superficie. Sappiamo inoltre (n.° 374) che ogni diametro contiene i centri delle coniche, segate dai piani (coniugati con esso) aventi una data giacitura. Se quel diametro è perpendicolare a questi piani, esso dicesi *asse* della superficie, ed è un asse di simmetria per la quadrica. Noi ci proponiamo ora la ricerca analitica dei piani principali e degli assi di una quadrica.

Ricordiamo, a tal fine, che, data la equazione di una quadrica

$$(1) \quad a_{11}x^2 + \cdots + 2a_{12}xy + \cdots + 2a_{14}x + \cdots + a_{44} = 0,$$

il piano diametrale coniugato alla corda

$$(2) \qquad \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

ed alle sue parallele, ha (n.° 372) l'equazione

$$(3) \quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})m + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})n = 0,$$

ossia, ordinando rispetto a x, y, z,

$$(3') \quad (a_{11}l + a_{21}m + a_{31}n)x + (a_{12}l + a_{22}m + a_{32}n)y + (a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n)z + (a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n) = 0.$$

Affinchè il piano (3′) risulti perpendicolare alla retta (2), deve essere, nella ipotesi di cordinate ortogonali,

$$\frac{a_{11}l + a_{21}m + a_{31}n}{l} = \frac{a_{12}l + a_{22}m + a_{32}n}{m} = \frac{a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n}{n}.$$

Indicando con k il valore comune delle tre frazioni, sviluppando e ordinando rispetto a l, m, n, otteniamo le equazioni

$$(4)\quad \begin{cases} (a_{11} - k)l + a_{21}m + a_{31}n = 0, \\ a_{12}l + (a_{22} - k)m + a_{32}n = 0, \\ a_{13}l + a_{23}m + (a_{33} - k)n = 0, \end{cases}$$

le quali, oltre alle incognite l, m, n, di cui interessano solo i rapporti, contengono l'incognita ausiliare k. Per risolvere un siffatto sistema, conviene (cfr. n.° 183) eliminare anzitutto l, m, n; si ottiene così l'equazione di terzo grado in k

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0,$$

che interviene ad ogni passo nello studio delle proprietà metriche delle quadriche, e si suole indicare brevemente con

$$(5)\qquad \Delta(k) = 0.$$

Sviluppata e ordinata rispetto a k, essa si presenta sotto la forma

$$(5')\qquad k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0,$$

dove A_{44} è il noto determinante del terzo ordine, e dove si è posto, per brevità,

$$(6)\quad \begin{cases} I = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \quad = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2. \end{cases}$$

Indichiamo con k_1, k_2, k_3 le radici dell'equazione (5). Una qualsiasi di esse, ad es. k_1, sostituita al posto di k nelle (4), fa sì che una delle (4) diventi conseguenza delle rimanenti due; si potranno dunque calcolare valori non tutti nulli di l, m, n, che verifichino insieme le (4). Questi valori, sostituiti nella (3), o (3′), danno l'equazione di un piano principale.

Concludiamo che una quadrica possiede, in generale, *tre piani principali.*

Ma si può affermar di più, che *questi piani sono sempre reali.* Basta perciò assicurarsi che siano tali le tre radici k_1, k_2, k_3 della (5). Ora, che così sia, risulta da un noto teorema d'algebra, il quale insegna che la equazione di grado n (qui $n = 3$), ottenuta uguagliando a zero un determinante simmetrico di ordine n (ad elementi tutti reali), ai cui elementi principali sia aggiunta la incognita (qui $-k$), ha tutte le sue n radici reali (¹).

Però, nel caso presente, non occorre nemmeno ricorrere a quel teorema, bastando al nostro scopo il ragionamento che segue, nel quale dovremo tuttavia distinguere le quadriche a centro dai paraboloidi.

379. Piani principali delle quadriche a centro. — Supposto che la nostra superficie abbia un centro proprio C, si osservi anzitutto che è certo reale una delle radici dell'equazione (5), o (5′), *di grado dispari a coefficienti reali.* A questa radice corrisponde un piano principale *reale* π, piano proprio, giacchè contiene il centro C; il diametro p coniugato a π è, per ipotesi, perpendicolare a π (v. fig. di pag. 655). Il piano π sega la quadrica lungo una conica K, che ha il centro C. Questa conica possiede

---

(¹) Fra le tante dimostrazioni, che furono date di quel celebre teorema, riproduciamo qui, per comodità del lettore, la seguente, limitandoci al caso particolare che ci interessa.

Supposto di aver calcolato una radice k della (5), ed i corrispondenti valori non tutti nulli di l, m, n, soddisfacenti al sistema (4), in cui, al posto di k, si sia sostituito il valore trovato, indichiamo con l', m', n' i valori coniugati di l, m, n (valori che coincidono con l, m, n, se questi sono reali). Ora moltiplichiamo ordinatamente le (4) per l', m', n', e sommiamo membro a membro. Otterremo

$$a_{11}ll' + a_{22}mm' + a_{33}nn' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{13}(ln' + l'n) \\ + a_{23}(mn' + m'n) = k(ll' + mm' + nn'),$$

nella quale il primo membro ed il coefficiente di k sono certamente reali, perchè tali sono $ll', \ldots, lm' + l'm, \ldots$ (anche quando l, m, n fossero complessi). Inoltre ll', mm', nn' sono $\geqq 0$, e certo non tutti e tre nulli, chè altrimenti sarebbe $l = m = n = 0$, contro la ipotesi; dunque il coefficiente di k è diverso da zero. Ora l'equazione precedente, risolta rispetto a k, dà per k un valore reale; è quindi vero ciò che si era affermato.

certo due diametri reali r, s coniugati e perpendicolari tra loro, che sono *assi* della conica (n.° 236). Consideriamo ora il triedro reale, trirettangolo, prs; esso è autoconiugato rispetto alla superficie (n.° 377); ciascuna faccia dunque divide per metà le corde parallele allo spigolo opposto, cioè perpendicolari alla faccia stessa; ciascuna faccia è, in conseguenza, un piano principale della superficie. E si hanno così i tre piani principali, che una quadrica, in generale, possiede. Concludiamo:

Una quadrica a centro possiede tre piani principali reali, i quali costituiscono un triedro trirettangolo, autoconiugato rispetto alla superficie. È questa, in generale, la sola terna di piani diametrali mutuamente coniugati e perpendicolari.

Gli spigoli del triedro, cioè i diametri coniugati e perpendicolari ai singoli piani principali, sono *assi* della superficie (n.° 378); *vertici* diconsi i punti, ove gli assi segano la quadrica. Il piano tangente alla quadrica in un vertice è perpendicolare al relativo asse. Gli assi ed i vertici, situati in un piano principale, sono assi e vertici per la conica *sezione principale* della quadrica con quel piano.

Osservazione. — Il teorema e le considerazioni precedenti sussistono anche per i coni a vertice proprio. Ogni cono siffatto possiede tre piani reali di simmetria, o *piani principali*, passanti per il vertice. I piani principali di una quadrica a centro sono pure piani principali del cono asintotico.

380. Piani principali di un paraboloide. — Esaminiamo, in secondo luogo, il caso dei paraboloidi. Riprendiamo l'equazione

$$\Delta(k) = 0 \tag{5}$$

del n.° 378, ed osserviamo che, nella ipotesi attuale, la (5) ha una radice $k_1 = 0$, perchè il termine noto A_{44} della (5′) si annulla, quando la quadrica è un paraboloide (n.° 370, Oss.).

Sostituiamo ora la radice $k_1 = 0$, al posto di k, nelle (4) del n.° 378; esse divengono

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n &= 0, \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n &= 0, \\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n &= 0, \end{aligned}\right. \tag{4′}$$

e coesistono, nel nostro caso, per valori non tutti nulli di l, m, n. Calcolati questi valori, formiamo con essi l'equazione (3′)

del n.° 378, la quale rappresenta, secondo la teoria generale, un piano principale. Attualmente però la (3′), tenuto conto delle (4′), diviene

$$0x + 0y + 0z + (a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n) = 0,$$

e rappresenta (supposto non nullo il trinomio tra parentesi, con che vengono scartati i cilindri, n.° 373) il piano all'infinito, come risulta introducendo coordinate omogenee. Un tal piano si riguarda però come una soluzione estranea del problema, e ci si limita a considerare i *due* piani principali, provenienti dalle due radici non nulle della (5). Che questi siano reali, risulta dalla considerazione geometrica seguente, oltre che dal teorema algebrico menzionato alla fine del n.° 378.

Ricordando che i diametri di un paraboloide sono tutti paralleli tra loro, consideriamo i piani perpendicolari ad essi, e costruiamo il diametro p, che è coniugato a quei piani; esso sarà un asse, anzi il solo *asse* del paraboloide (n.° 378). L'asse sega il paraboloide in un punto proprio, detto *vertice*, ove il piano tangente è normale all'asse, e nel centro all'infinito della quadrica. Sia poi π uno dei piani perpendicolari a p, e sia K la conica segata da esso sulla superficie, conica che ha il centro nel punto proprio $p\pi$ (v. fig. di pag. 655). Se r ed s sono gli assi, certo reali, di k, e R_x, S_x sono i loro punti all'infinito, sappiamo già (n.° 376) che i piani polari di R_x, S_x sono $\varrho \equiv ps$, $\sigma \equiv pr$. Questi piani, essendo dunque rispettivamente coniugati e normali alle rette r, s, sono *i piani principali* del paraboloide. Osservando che essi sono coniugati e perpendicolari tra loro, concludiamo:

Un paraboloide possiede, in generale, due piani principali reali, che sono coniugati e perpendicolari tra loro; essi si segano lungo un diametro, detto asse, che è coniugato ai piani perpendicolari ad esso.

Osservazione. — Le considerazioni precedenti si applicano, con qualche modificazione, ai cilindri. È chiaro però, direttamente, che un cilindro ammette come piani di simmetria ogni piano normale alle generatrici, ed i piani paralleli a queste condotti per gli assi di una sezione normale. Di questi ultimi piani ve n'è uno solo, se la sezione è una parabola (cilindro parabolico), ve ne son due, se è una conica a centro (cilindro ellittico od iperbolico); la retta, in cui questi due si segano, dicesi *asse* del cilindro.

381. Casi particolari; quadriche rotonde; sfera. — Noi abbiamo visto nei n.[i] 379, 380 che, nota una radice k, dell'equazione $\Delta(k) = 0$ (ad es. la radice $k_1 = 0$ nel caso dei paraboloidi), la determinazione dei due piani principali, corrispondenti alle altre due radici, è ridotta alla determinazione degli assi di una certa conica K, assi che, congiunti colla retta p normale al piano π di K nel centro della conica, forniscono i piani principali nominati. Ora può accadere che la conica K sia un cerchio, nel qual caso ogni suo diametro è asse. Il ragionamento, fatto sopra, prova allora che ogni piano per p è piano principale; la quadrica possiede dunque infiniti piani principali, passanti per un asse p, e, quando la quadrica abbia centro, un ulteriore piano principale perpendicolare all' asse. D'altra parte, ogni piano normale a p sega la quadrica lungo una conica simile a K (n.° 371), cioè lungo un cerchio che ha il centro su p (n.° 374). La quadrica è dunque *rotonda*; essa può generarsi, facendo ruotare intorno a p (*asse di rotazione*) la conica (*meridiano*), secondo cui la superficie è segata da un piano qualsiasi condotto per p. Ritroviamo così le quadriche rotonde, di cui si è discorso al n.° 328, superficie che hanno evidentemente infiniti piani di simmetria.

Se poi, in un caso più particolare, la conica meridiana è un cerchio, la quadrica sarà una *sfera*. Ogni piano diametrale della sfera è piano principale, o piano di simmetria; ogni diametro è asse, coniugato al piano diametrale perpendicolare ad esso. Per la sfera adunque la polarità, che si genera nella stella avente per centro il centro della sfera, quando ad ogni diametro si associ il piano diametrale coniugato (n.° 377), è la polarità *ortogonale* o *sferica* (n.° 190); il cono asintotico della sfera, che determina quella polarità, è dunque *il cono delle direzioni assolute* uscenti dal centro; e la conica all' infinito della sfera, anzi di ogni sfera, è *il cerchio assoluto dello spazio* (cfr. n.° 323, Oss.). Le sfere (superficie caratterizzate da una proprietà metrica) rientrano dunque nella famiglia delle quadriche (superficie definite da caratteri proiettivi), come quadriche costrette a contenere il cerchio assoluto dello spazio.

Ritornando al problema dei piani principali, possiamo ora affermare:

Una quadrica possiede più di tre, anzi infiniti piani principali, solo quando essa è rotonda, nel qual caso sono principali tutti i piani passanti per l'asse di rotazione, e, se la quadrica ha centro, un piano ulteriore perpendicolare al detto asse. Ogni piano diametrale della quadrica è principale, se essa è una sfera.

Osservazione. — Si può chiedere quale particolarità offra l'equazione

$$(5) \qquad \Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0,$$

da cui dipendono i piani principali di una quadrica, quando questa è rotonda. Notiamo perciò che la (5) non può avere più di tre radici, e che ad una, k_1 di queste corrisponde (n.° 378) un solo piano principale, se le equazioni (4) (n.° 378), ove sia posto $k = k_1$, determinano i rapporti $l : m : n$. Perchè si abbiano infiniti piani principali, dovranno dunque quelle equazioni (4), in corrispondenza a un particolar valore di k, lasciare indeterminati i rapporti $l : m : n$; ciò accade, se due delle (4) diventano conseguenze della rimanente, ossia se esiste un valore k_1 di k, che annulli tutti i minori del secondo ordine del determinante (5). In tal caso si dimostra che k_1 è radice doppia dell'equazione (5); e, viceversa, una radice doppia gode quella proprietà [1]. Un caso di maggiore indeterminazione si

---

[1] Indicando brevemente con Δ il determinante (5), con δ_{il} un suo elemento, e con Δ_{il} il relativo complemento algebrico, si osservi che l'equazione cubica in k, $\Delta = 0$, dà, derivata rispetto a k, l'equazione quadratica $\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0$. Ora, se un valore k_1 di k annulla il determinante Δ e tutti i minori Δ_{il}, certo k_1 è radice doppia dell'equazione $\Delta = 0$, perchè ne annulla il primo membro e la funzione derivata.

Si supponga ora, inversamente, che un valore k_1 di k sia radice doppia dell'equazione $\Delta = 0$, e quindi semplice dell'equazione $\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0$. Indicando con ilm una permutazione dei numeri 1, 2, 3, e tenendo conto dell'identità $\Delta_{ii}\,\Delta_{ll} - \Delta^2_{il} = \delta_{mm}\Delta$, la quale, per $k = k_1$, diviene $\Delta_{ii}\,\Delta_{ll} = \Delta^2_{il}$, possiamo affermare che k_1 rende

$$(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33})\,\Delta_{ii} = \Delta^2_{1i} + \Delta^2_{2i} + \Delta^2_{3i} = 0,$$

e quindi (trattandosi di quantità reali) $\Delta_{1i} = 0$, $\Delta_{2i} = 0$, $\Delta_{3i} = 0$, per $i = 1, 2, 3$. Sicchè k_1 annulla tutti i minori del secondo ordine di Δ.

presenta, se una radice k_1 della (5) annulla tutti gli elementi del determinante (5), e rende quindi identicamente verificate le (4); allora infatti ogni piano diametrale è principale. D'altra parte, affinchè ciò accada, occorre e basta che siano verificate le condizioni

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

le quali esprimono che la superficie è una sfera (n.° 323); in tal caso $k_1 = a_{11}$ è radice tripla della (5). Viceversa, si dimostra che, se la (5) ha una radice tripla, son verificate le ultime condizioni, e la quadrica è una sfera ([1]). In conclusione:

Se l'equazione $\Delta(\mathrm{k}) = 0$ ammette una radice, che annulli tutti i minori del secondo ordine del determinante Δ (k) (ossia, se ha una radice doppia), la quadrica è rotonda; se ammette una radice, che annulli tutti gli elementi del determinante (ossia, se ha una radice tripla), la quadrica è una sfera; e viceversa.

382. I piani principali di una quadrica in relazione col cerchio assoluto. — La ricerca analitica dei piani principali di una quadrica (n.° 378) vien messa in luce più viva, mediante le considerazioni geometriche seguenti.

Si considerino insieme la conica all'infinito H_∞ della quadrica, ed il cerchio assoluto Ω_∞; queste due coniche si segano in quattro punti immaginari, i quali (provenendo dalla risoluzione di due equazioni a coefficenti reali) si distribuiscono in due coppie (M, M'), (N, N') di punti immaginari coniugati. I punti stessi determinano un quadrangolo completo, in cui una coppia di lati opposti si compone di rette reali (MM', NN') (n.° 121), e le altre due coppie si compongono, ciascuna, di rette immaginarie coniugate (come ad es. MN', MN'). È dunque reale (n.° 121) il triangolo diagonale PRS del qua-

---

([1]) Infatti, se k_1 è radice tripla dell'equazione $\Delta = 0$, essa verifica l'equazione prima derivata, ed annulla quindi (in virtù della nota precedente) tutti i minori Δ_{il}; essa verifica inoltre l'equazione seconda derivata $\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 0$. Moltiplicando i due membri di questa per δ_{ii}, e ricordando che $\delta_{ii}\,\delta_{ll} - \delta^2_{il} = \Delta_{mm}$, ossia $= 0$, per $k = k_1$, si vede che k_1 rende

$$(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33})\,\delta_{ii} = \delta^2_{1i} + \delta^2_{2i} + \delta^2_{3i} = 0,$$

e quindi $\delta_{1i} = 0$, $\delta_{2i} = 0$, $\delta_{3i} = 0$, per $i = 1, 2, 3$.

drangolo; ed è autopolare rispetto alle due coniche H_∞, Ω_∞ (n.° 228). Ne viene che il piano polare di P, rispetto alla quadrica, cioè il piano diametrale coniugato alla direzione di P, passa per RS, ed è normale alla detta direzione (n.° 190). Quel piano è dunque piano principale della quadrica. Risulta così nuovamente che una quadrica ha tre piani principali reali, che sono i piani polari di P, R, S; se la quadrica ha centro, essi si ottengono proiettando dal centro i lati del triangolo PRS; se la quadrica è un paraboloide, nel qual caso H_∞ degenera in due rette (lati opposti del quadrangolo nominato), secantisi in un vertice P del triangolo diagonale, il piano principale, che è polare di P, coincide col piano all'infinito, e restano due piani principali propri, passanti per PR, PS, rispettivamente.

Può darsi che le quattro intersezioni M, M', N, N' delle coniche H_∞, Ω_∞ non siano tutte distinte; non può però M coincidere col punto immaginario coniugato M', se non in un punto reale, mentre Ω_∞ non ha punti reali; dovrà dunque M coincidere, ad es., con N, e, in conseguenza, M' andrà a coincidere con N': le due coniche allora si toccano in due punti immaginari coniugati $M \equiv N$, $M' \equiv N'$. Le tangenti (immaginarie coniugate) in questi punti si segheranno in un punto reale P. Ora, questa volta, il punto P con una qualsiasi delle infinite coppie di punti R, S, dividenti armonicamente MM', dà un triangolo autopolare rispetto alle due coniche. Esistono dunque infiniti triangoli siffatti, col vertice P; e la nostra quadrica possiede infiniti piani principali, di cui tutti, tranne uno, passano per P; la quadrica, in breve, è rotonda intorno ad un asse passante per P. Osservando che questi ragionamenti sono invertibili, si giunge al notevole risultato: *condizione necessaria e sufficiente, perchè una quadrica sia rotonda, è che la sua conica all'infinito tocchi in due punti il cerchio assoluto.*

Se poi H_∞ ed Ω_∞ coincidono, si ha il caso della sfera.

Volendo porre sotto forma analitica queste considerazioni, si osservi che (ove si rappresenti la quadrica colla solita equazione $a_{11}x^2 + \cdots = 0$) le coniche H_∞ ed Ω_∞ hanno, sul piano all'infinito $t = 0$, le equazioni (n.i 370; 323, Oss.).

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Per determinare il triangolo autopolare comune alle due coniche, conviene (n.° 228) determinare le coniche degeneri del fascio $(H_\infty, \Omega_\infty)$:

$$(a_{11}-k)x^2+(a_{22}-k)y^2+(a_{33}-k)z^2$$
$$+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0.$$

Occorre dunque annullare il discriminante dell' ultima equazione, e con ciò si ottiene precisamente la $\Delta(k)=0$, di cui ora apparisce il significato geometrico.

Se poi le due coniche H_∞, Ω_∞ si toccano in due punti, la retta che li congiunge, contata due volte, fornisce una conica degenere del fascio precedente; deve esister dunque un valore di k, che annulli non solo il discriminante, ma pure tutti i minori del secondo ordine (n.° 211). E così si ritrovano le condizioni analitiche, perchè una quadrica sia rotonda.

I piani principali di una quadrica, di cui si serve già Eulero (1748) per semplificare l'equazione della superficie, furono definiti, nel modo qui adottato (n.° 378), da Binet (1809). L'equazione $\Delta(k)=0$, da cui essi dipendono, appare sotto forma sviluppata in una Nota di Hachette e Petit (1812), e sotto forma di determinante in Cauchy (1829). Le considerazioni dell' ultimo n.° sono dovute a Poncelet (1822), nel caso di una quadrica generale; ma l'osservazione, che una quadrica rotonda è bitangente al cerchio assoluto, fu fatta da Staudt (1856).

Esercizi I — 1) Determinare i centri delle quadriche seguenti:

$$2x^2+2y^2+z^2+2xy-6x-6y+1=0,$$
$$2x^2+3y^2+4z^2+6xy+8xz+4yz-2x-5y=0,$$
$$2xy-xz+yz-2x+2y-3z-2=0,$$
$$x^2+2y^2+3z^2+2xz-4yz+2x-2y-2z=0,$$
$$x^2+y^2+2xy-2x+2y-2z=0.$$

Per quelle, tra queste quadriche, che hanno centro proprio, si determini il cono asintotico; per le altre si diano le equazioni delle rette all' infinito.

II — 2) Data una quadrica ed un punto P, che non vi appartenga, si possono costruire infinite corde della superficie aventi in P il punto medio; esse appartengono tutte ad un piano, che sega la quadrica lungo una conica avente il centro P. Ma, se per P passano tre corde non situate in un piano, ed aventi ivi il punto medio, P è punto medio di ogni corda condotta per esso, ed è il centro della quadrica.

3) Rispetto ad una quadrica $a_{11}x^2+\ldots=0$, ogni direzione (l, m, n) ha come coniugato un determinato piano diametrale. Quali sono le condizioni, perchè i piani diametrali, coniugati alle direzioni

$$(l, m, n), \quad (l_1, m_1, n_1), \quad (l_2, m_2, n_2),$$

siano coniugati tra loro a due a due?

4) Date le equazioni di una quadrica e di un piano, si scrivano le equazioni del diametro coniugato con quel piano.

5) Il piano suddetto sega la quadrica lungo una conica; si cerchino le coordinate del centro di questa, e si esamini se la curva sia una ellisse, una parabola, od una iperbole. (Si può sostituire a quella curva la sua proiezione sul piano xy, parallelamente a z).

6) Il luogo dei punti medi delle corde di una quadrica Q, uscenti da un punto fisso arbitrario P, è una quadrica Q', la quale passa per il centro C di Q, per il punto P, e sega Q lungo la conica all'infinito, e lungo il contorno apparente di Q rispetto al punto P. La quadrica Q' è anche il luogo dei centri delle coniche di Q, i cui piani passano per P.

7) Se il punto P dell'es. precedente varia descrivendo una retta p, la quadrica Q' varia descrivendo un fascio, la cui curva base si compone della conica all'infinito di Q e di una seconda conica, che giace nel piano diametrale coniugato con p, passa per il centro C e per i punti di contatto dei piani tangenti condotti per p, e sega in un punto la retta p e in due punti la conica all'infinito di Q. Segue che il luogo dei centri delle coniche, segate sopra una quadrica dai piani di un fascio, è una conica giacente nel piano coniugato coll'asse del fascio, ecc.

III — 8) In un fascio di quadriche vi sono, generalmente, tre paraboloidi, tra cui uno almeno è iperbolico; i centri di quelli sono proiettati dal centro di ciascuna quadrica del fascio mediante una terna di diametri coniugati.

9) Se tra le quadriche di un fascio vi è una sfera, gli assi di quelle hanno direzioni costanti; i relativi punti all'infinito sono centri dei tre paraboloidi appartenenti al fascio. Sopra un piano le quadriche segano coniche, i cui assi hanno direzioni costanti (n.° 238, es. 18)).

10) Nel fascio, determinato da una quadrica rotonda con una sfera, ogni quadrica è rotonda; e gli assi di rotazione sono tutti paralleli, e stanno in uno stesso piano. Al fascio appartengono tre coni rotondi, ed un cilindro parabolico, che tocca il piano all'infinito lungo la retta impropria comune ai piani dei paralleli. Viceversa, un cilindro parabolico ed una sfera determinano un fascio composto di quadriche rotonde.

11) Si può sempre costruire una sfera, che tocchi una quadrica rotonda lungo un parallelo assegnato. Viceversa, se una quadrica è toccata lungo una conica da una sfera, la quadrica è rotonda, quella conica è un parallelo, ed il centro della sfera sta sull'asse di rotazione (cfr. n.° 238, es. 21)). Segue che l'equazione di ogni quadrica rotonda, avente per asse la retta $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$, può scriversi sotto la forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \lambda P^2 + 2\mu P + \nu,$$

dove λ, μ, ν sono tre parametri, e P indica il trinomio $lx + my + nz$ (cfr. n.° 329, es. 16)).

12) I centri delle quadriche di una schiera si trovano sopra una retta, che passa per il centro improprio del paraboloide appartenente alla schiera,

e per i centri delle quattro coniche, inviluppi di piani, che appartengono alla schiera.

13) In particolare: *a*) Il luogo dei centri delle quadriche, che toccano un dato cono lungo una conica fissa, è la retta congiungente il vertice del cono col centro della conica. *b*) Il luogo dei centri delle quadriche, che passano per gli spigoli di un quadrilatero semplice sghembo $ABCD$, è la retta che congiunge i punti medi delle due diagonali AC, BD. Segue che ogni segmento, avente gli estremi sulla coppia di spigoli opposti AB, CD (oppure BC, AD) e secante quella retta, ha ivi il suo punto medio.

14) Il luogo dei centri delle quadriche di un fascio è, in generale, una curva sghemba (del terzo ordine). Ma, per fasci particolari, il luogo può ridursi ad una conica o ad una retta. L' ultimo caso si presenta nei fasci-schiere considerati nell' es. precedente. Porteremo ora qualche esempio di fasci, per cui ha luogo il secondo caso.

Se ad un fascio di quadriche appartiene un cilindro, il vertice di esso ha lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio; questo piano, che è un piano diametrale comune, contiene i centri delle dette quadriche, i quali formano la *conica dei nove punti* (n.° 238, es. 14)) del fascio di coniche, segato su quel piano dalle quadriche. Ad es., nel fascio di quadriche rotonde, considerato nell' es. 10), il luogo dei centri è una iperbole equilatera (n.° 238, es. 17)).

15) Il luogo dei centri delle quadriche, che passano per due coniche aventi due punti M, N comuni, è una conica situata nel piano polare del punto all' infinito della retta MN, rispetto ad ogni quadrica del fascio; ed è precisamente la conica dei nove punti del fascio di coniche segato su quel piano. Se le due coniche primitive sono cerchi, il luogo dei centri delle quadriche è una iperbole equilatera.

Capitolo IV.

Equazioni ridotte delle quadriche.

383. Quadriche riferite a particolari sistemi cartesiani. — L' equazione cartesiana di una quadrica

$$(1)\quad a_{11}x^2 + \cdots + 2a_{12}xy + \cdots + 2a_{14}x + \cdots + a_{44} = 0$$

si semplifica notevolmente, se gli assi coordinati hanno particolari relazioni colla superficie (cfr. n.° 239). Discuteremo qui i casi più interessanti, tenendo presenti le equazioni dei tre piani diametrali della (1), coniugati cogli assi x, y, z, rispettivamente:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0. \end{aligned}\right.$$

a) Supposto anzitutto che si tratti di una quadrica a centro, e che l'origine delle coordinate cada nel centro, si osserverà che i piani diametrali (2) devono passare per l'origine, donde le condizioni

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0 ;$$

l'equazione di una quadrica a centro manca dei termini a primo grado, se l'origine delle coordinate cade nel centro ; e viceversa.

b) Supposto inoltre che i tre piani coordinati costituiscano una terna di piani diametrali coniugati (n.° 377), i tre piani diametrali (2) devono coincidere ordinatamente coi piani coordinati yz, zx, xy, donde le condizioni

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

da aggiungersi alle tre precedenti. L'equazione (1) della superficie si riduce, in conseguenza, alla forma *normale*, o *canonica*,

$$(b) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0.$$

L'equazione di una quadrica a centro, riferita ad una terna di piani diametrali coniugati, contiene solo i quadrati delle coordinate e il termine noto ; e viceversa (¹).

Al tipo (*b*) *si riduce, in particolare, l'equazione di una quadrica a centro riferita ai tre piani principali*: si ha allora il vantaggio che il sistema delle coordinate è ortogonale.

c) Per ottenere un sistema di riferimento, che si applichi anche ai paraboloidi, scegliamo come origine O un punto della quadrica, come piano xy il piano tangente in O, come piani xz, yz due piani diametrali coniugati passanti per O, e, in conseguenza, come asse z il diametro passante per O, il quale è coniugato a quel piano tangente.

Allora i punti all'infinito degli assi x, y hanno, come piani polari, rispettivamente i piani yz, xz; dunque le due prime

---

(¹) Adoperando le coordinate proiettive omogenee, si dimostra (cfr. n.° 207) che l'equazione di una quadrica si riduce a contener solo i quadrati delle quattro coordinate, quando il tetraedro fondamentale sia autopolare rispetto alla superficie. Nel caso del testo, il detto tetraedro si compone dei tre piani diametrali mutuamente coniugati e del piano all'infinito.

equazioni (2) rappresentano i piani $x = 0$, $y = 0$, ordinatamente; donde le condizioni:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = 0,$$

alle quali va aggiunta l'altra

$$a_{44} = 0,$$

esprimente che l'origine sta sulla superficie. L'equazione (1) di questa si riduce, in conseguenza, al tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{34}z = 0.$$

Se poi si fa la ipotesi che la quadrica sia un paraboloide, nel qual caso l'asse z (diametro) sega la superficie nell'origine ed in un punto improprio, si trova inoltre $a_{33} = 0$, e si conclude:

L'equazione di un paraboloide, riferito a due piani diametrali coniugati (xz, yz), *ed al piano* (xy) *tangente nell'estremo proprio del diametro* z, *assume la forma*

(c) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0.$$

Alla stessa forma si riduce, in particolare, l'equazione di un paraboloide riferito ai due piani principali (xz, yz) *ed al piano* (xy) *tangente nel vertice*; si ha allora il vantaggio che il sistema di cordinate è ortogonale.

384. Discussione dell'equazione normale di una quadrica a centro. — Abbiamo visto che ogni quadrica a centro può rappresentarsi, in coordinate cartesiane *ortogonali,* mediante una equazione (normale) del tipo

(1) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0;$$

basta a tal fine riferire la superficie ai tre piani principali [1]. Le varie forme delle quadriche a centro dipendono dai segni, che possono ricevere i quattro coefficienti della (1), o meglio, i loro mutui rapporti.

Osserviamo prima però, che alcuni coefficienti della (1) possono anche esser nulli; in corrispondenza, la quadrica risulta degenere. Così, se $a_{44} = 0$, si ha l'equazione

(1') $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0,$$

---

[1] Se la superficie possedesse infiniti piani principali, si assumerebbe, come coordinati, tre di quei piani mutuamente perpendicolari.

rappresentante un *cono* col vertice nell'origine (n.° 358), riferito ai tre piani principali. Il cono ha tutti i punti immaginari, fuori del vertice (*cono immaginario*), se a_{11}, a_{22}, a_{33} hanno lo stesso segno, giacchè non si può allora soddisfare la (1′) con valori reali, diversi da zero, di x, y, z. Il cono (1′) ha invece infiniti punti reali (*cono reale*), se uno dei coefficienti della (1′) ha segno opposto agli altri due. Notiamo inoltre che, se due coefficienti della (1′) sono uguali, ad es. se $a_{11} = a_{22}$, il cono è *rotondo* intorno ad un asse coordinato, che, nel caso presente, è quello delle z, giacchè ogni piano $z = k$, perpendicolare a questo asse, sega il cono (1′) lungo il cerchio $a_{11}(x^2 + y^2) + a_{33}k^2 = 0$, che ha il centro sopra l'asse stesso.

Se fosse invece, nella (1), $a_{33} = 0$, si avrebbe il *cilindro*

$$(1'') \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0$$

colle generatrici parallele all'asse z, cilindro *ellittico* od *iperbolico*, secondo che la (1″), nel piano xy, rappresenta una ellisse od una iperbole, secondo che dunque a_{11} ed a_{22} hanno segni uguali od opposti. In particolare, se $a_{11} = a_{22}$, si ha un *cilindro rotondo*.

Sarebbe facile similmente esaminare gli ulteriori casi di degenerazione, che si presentano, se due o tre coefficienti della (1) si annullano; ma questa ricerca può essere lasciata al lettore.

Supposto ora che tutti i coefficienti della (1) siano diversi da zero, la (1), mediante divisione dei due membri per $-a_{44}$, assume la forma

$$(2) \qquad mx^2 + ny^2 + pz^2 = 1,$$

dove m, n, p sono tre quantità reali, non nulle. Riguardo ai loro segni, si possono fare le seguenti ipotesi, essenzialmente distinte tra loro, alle quali ogni altra può ridursi, scambiando opportunemente i nomi degli assi coordinati:

	m	n	p	
I.	+	+	+	Ellissoide reale,
II.	—	—	—	Ellissoide immaginario,
III.	+	+	—	Iperboloide ad una falda,
IV.	+	—	—	Iperboloide a due falde.

I nomi delle superficie, ora scritti, vengono giustificati dalla discussione che segue.

385. Ellissoide. — I) Se, nella (2), si suppongono $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, la superficie sega l' asse x in due punti reali A, A', di coordinate

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{m}} = \pm a,$$

l' asse y in due punti reali B, B', di coordinate

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{n}} = \pm b,$$

e l' asse z in due punti reali C, C', di coordinate

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{p}} = \pm c,$$

dove a, b, c sono i valori assoluti dei radicali. I sei punti A, A', B, B', C, C' sono i *vertici* della superficie, ed a, b, c sono le lunghezze dei *semiassi*. Esprimendo m, n, p in funzione di a, b, c, e sostituendo nella (2), la equazione della nostra superficie diviene:

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Da questa è facile dedurre la forma della superficie.

Osserviamo infatti che il piano $xy (z = 0)$ sega la quadrica lungo la conica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che è una ellisse $ABA'B'$ di semiassi $OA = a$, $OB = b$. Un piano parallelo, $z = k$, sega la quadrica lungo l' ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2},$$

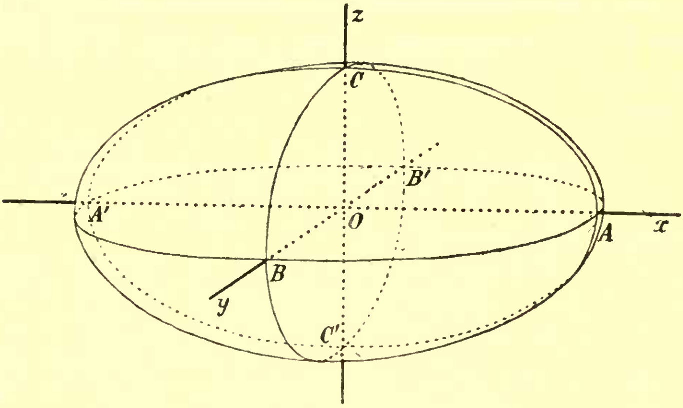
ossia

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1,$$

i cui semiassi valgono

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - k^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - k^2};$$

mentre k cresce in valore assoluto da 0 a c, i semiassi vanno diminuendo, e precisamente, per $k = \pm c$, l'ellisse si riduce ad una coppia di rette immaginarie, ed il corrispondente piano è tangente (in C, o C') alla superficie. Se poi k, in valore assoluto, supera c, l'ellisse sezione è immaginaria. Si conclude che la quadrica non ha punti reali fuori dello strato, compreso



tra i piani condotti per C e C' parallelamente al piano xy. Risultati analoghi si ottengono, considerando, in luogo del piano xy, ciascuno degli altri due piani coordinati; alla fine si vede che tutta la quadrica è contenuta entro un parallelepipedo, di cui AA', BB', CC' sono linee mediane. La quadrica, non avendo punti reali all'infinito, è effettivamente un *ellissoide* (reale) (n.° 370). Ogni punto dell'ellissoide è *ellittico* (n.° 361), giacchè tale è il punto C, o C', come ora si è visto.

Casi particolari si ottengono, supponendo due, o tre, semiassi uguali tra loro. Se $a = b$, il piano $z = 0$ ed i suoi paralleli segano l'ellissoide lungo cerchi; quindi l'ellissoide, la cui equazione assume la forma

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

è *rotondo* intorno all'asse z (n.° 328).

Se $a = b = c$, l'equazione diviene

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

e rappresenta una *sfera* di raggio a.

II). Passiamo alla ipotesi $m < 0$, $n < 0$, $p < 0$. Non esistono allora valori reali di x, y, z soddisfacenti la (2); perciò diremo che essa rappresenta un *ellissoide immaginario.*

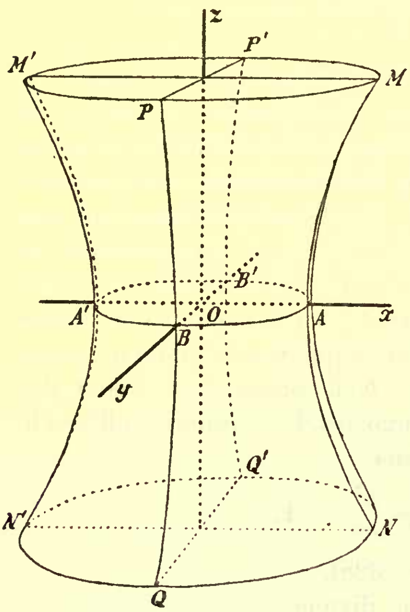
386. Iperboloide ad una falda. — III) Discutiamo ora la ipotesi III: $m > 0$, $n > 0$, $p < 0$. La superficie (2) sega ancora l'asse x in due punti reali A, A', a distanza $\pm\sqrt{\frac{1}{m}}$ da O, e l'asse y in due punti reali B, B', a distanza $\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$ da O. Ma poichè $\sqrt{\frac{1}{p}}$ è immaginario, l'asse z non sega la quadrica in punti reali.

Posto

$$a = \sqrt{\frac{1}{m}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{-p}},$$

l'equazione (2) diventa

$$\text{(III)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Il piano $z = 0$ sega la quadrica lungo la ellisse ($ABA'B'$ della figura)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

di semiassi a, b, che dicesi *ellisse di gola* dell'iperboloide, perchè si riconosce esser la più piccola ellisse tracciata sulla superficie. Il piano $z = k$ sega la superficie lungo la ellisse ($MPM'P'$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2},$$

i cui semiassi

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + k^2}, \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + k^2}$$

vanno crescendo, mentre k cresce in valore assoluto, vale a dire, mentre il piano $z = k$ si allontana dal piano $z = 0$.

Il piano $y = 0$ invece sega la quadrica lungo la iperbole $(MANM'A'N')$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

di cui l'asse trasverso AA' è situato lungo la retta x, mentre su z sta l'asse non trasverso. Anche il piano parallelo $y = k$ sega la quadrica lungo una iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2},$$

ossia

$$\frac{x^2}{a^2 \frac{b^2 - k^2}{b^2}} - \frac{z^2}{c^2 \frac{b^2 - k^2}{b^2}} = 1,$$

la quale iperbole ha l'asse trasverso parallelo ad x, finchè $|k| < b$, mentre l'asse trasverso diventa parallelo a z, se $|k| > b$. Nel caso intermedio, $k = \pm b$, l'equazione dell'iperbole si riduce a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

e quindi la curva si spezza nelle due rette reali

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

del piano $y = \pm b$; il detto piano è tangente alla quadrica (in B o B'), e il punto di contatto è iperbolico; quindi (n.° 363) la quadrica, che stiamo esaminando, è rigata.

Le ultime considerazioni andrebbero ripetute, senza sostanziali differenze, quando si esaminasse il modo di comportarsi della quadrica rispetto al piano $x = 0$ ed ai suoi paralleli.

Da ciò che si è detto, segue che la quadrica si compone di una *sola falda*, che si estende all'infinito dall'una e dall'altra banda del piano $z = 0$; la superficie (III) dicesi *iperboloide ad una falda*, o *iperboloide rigato*. Esso ha due *assi trasversi* AA', BB', di lunghezze $2a$, $2b$, e quattro vertici reali A, A', B, B'; si suol dire talora che, sopra z, giace un *asse non trasverso* di lunghezza $2c$, i cui estremi sarebbero i punti $(0, 0, \pm c)$, non appartenenti però alla quadrica.

Che l'iperboloide ad una falda (III) contenga infinite rette reali, si può anche dimostrare direttamente, senza ricorrere alle proprietà generali delle quadriche rigate. Si osservi infatti che la equazione (III) può scriversi sotto la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

ossia

$$(\mathrm{III_a}) \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right);$$

essa quindi è soddisfatta, ogni qual volta sussistano insieme le due equazioni

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

dove λ è un parametro arbitrario. Ora queste rappresentano una retta; ogni punto di essa sta dunque sull'iperboloide. Al variare di λ, la prima equazione lineare ci dà un piano variabile in un fascio, mentre la seconda equazione dà pure un piano variabile in un secondo fascio, proiettivo al primo; le infinite rette, intersezioni di piani corrispondenti, stanno sulla superficie, e costituiscono un primo sistema di rette. Al secondo sistema si giunge, osservando che l'iperboloide ($\mathrm{III_a}$) contiene pure la retta

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

qualunque sia il parametro μ.

L'iperboloide ad una falda (III) può esser rotondo; ciò accade se $a = b$, nel qual caso la equazione (III) assume la forma

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

la superficie è generata (n.° 328) da una iperbole ruotante intorno all' asse non trasverso (asse delle z); od anche da una retta qualsiasi dell'iperboloide, ad es. dalla retta $y = \frac{a}{c}z$, $x = a$, quando si faccia ruotare intorno all'asse z, che è sghembo con quella retta, e si suppone rigidamente collegato con essa.

387. Iperboloide a due falde. — IV) Rimane la ipotesi IV: $m > 0$, $n < 0$, $p < 0$. In corrispondenza la superficie (2) sega l'asse delle x in due punti reali A, A', a distanza $\pm\sqrt{\frac{1}{m}}$ da O; ed ha in comune punti immaginari cogli altri due assi.

Posto

$$a = \sqrt{\frac{1}{m}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{-n}}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{-p}},$$

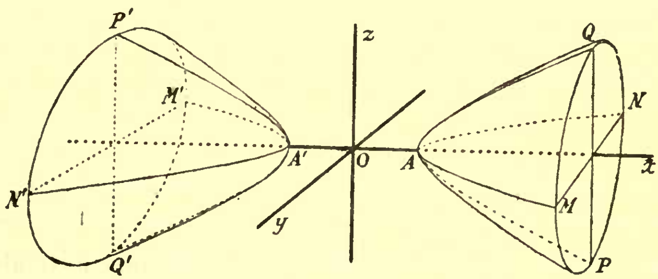
l'equazione (2) diviene

$$\text{(IV)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Il piano $z = 0$ sega la quadrica (IV) lungo la iperbole ($MANM'A'N'$ della figura)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che ha l'asse trasverso AA', e l'asse non trasverso sopra y. I piani paralleli $z = k$ segano pure la quadrica lungo iperboli, i cui assi trasversi conservano la stessa direzione, e cre-



scono al crescere di k (in valore assoluto). Osservazioni analoghe valgono per il piano $y = 0$ (che sega lungo la iperbole $PAQP'A'Q'$) e per i piani paralleli.

Invece il piano $x = 0$ sega sulla quadrica l'ellisse immaginaria

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

ed il piano parallelo $x = k$ sega la ellisse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1,$$

ossia

$$\frac{y^2}{b^2\,\dfrac{k^2-a^2}{a^2}}+\frac{z^2}{c^2\,\dfrac{k^2-a^2}{a^2}}=1,$$

la quale è immaginaria, finchè $|\,k\,| < a$, si riduce ad una coppia di rette immaginarie se $k = \pm\, a$ (sicchè il piano corrispondente tocca la superficie in A od A', e questi punti, insieme agli altri punti della superficie, sono ellittici), è finalmente reale se $|\,k\,| > a$; gli assi di quest'ultima ellisse sono paralleli alle rette x, y, e vanno crescendo al crescere di $|\,k\,|$; (si veda l'ellisse $QNPM$ della figura).

Segue da questa discussione che la quadrica (IV) si compone di due falde distinte, esterne allo strato compreso fra i piani condotti per A, A' parallelamente ad yz; le due falde si estendono all'infinito. Perciò la superficie (IV) prende il nome di *iperboloide a due falde* (o *iperboloide non rigato*). Il detto iperboloide ha un solo *asse trasverso* AA', di lunghezza $2a$, e due vertici reali A, A'; esso possiede inoltre due *assi non trasversi*, di lunghezze $2b$, $2c$, situati lungo y, z rispettivamente.

L'iperboloide a due falde (IV) è rotondo, se $b = c$, nel qual caso l'equazione diviene

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1;$$

l'asse di rotazione è, questa volta, x, e la superficie è generata da una iperbole ruotante intorno al suo asse trasverso (n.° 328).

388. Alcune formole relative all'equazione normale di una quadrica a centro. — Dalle discussioni fatte risulta che la equazione di ogni quadrica reale, a centro, può porsi sotto la forma

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1,$$

dove i segni superiori corrispondono all'*ellissoide*, il segno superiore davanti a un termine e l'inferiore davanti all'altro portano all'*iperboloide ad una falda*, mentre i segni inferiori conducono all'*iperboloide a due falde.* Conservando le stesse convenzioni nelle formole seguenti, osserviamo che *il piano tangente alla quadrica nel punto* (x', y', z') (o, in generale, il piano polare di questo punto, comunque scelto) ha l'equazione (n.° 348)

$$(2) \qquad \frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} \pm \frac{zz'}{c^2} = 1;$$

e la *normale alla superficie* nel punto stesso, cioè la perpendicolare ivi al piano tangente, ha le equazioni

$$(3) \qquad \frac{a^2(x-x')}{x'} = \pm \frac{b^2(y-y')}{y'} = \pm \frac{c^2(z-z')}{z'},$$

(le quali rappresentano, in generale, la perpendicolare condotta dal polo al piano polare).

Il diametro

$$(4) \qquad \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

ha il piano diametrale coniugato (n.° 372)

$$(5) \qquad \frac{lx}{a^2} \pm \frac{my}{b^2} \pm \frac{nz}{c^2} = 0.$$

Posto che l, m, n siano proprio i coseni di direzione del diametro, il valore comune delle tre frazioni (4) è la distanza ϱ dell'origine, centro della superficie, dal punto (x, y, z) (n.° 299); se questo punto sta sulla superficie, e ϱ misura quindi un semidiametro, le cordinate $x = l\varrho$, $y = m\varrho$, $z = n\varrho$ devono soddisfar la (1). Sostituendo e dividendo per ϱ^2, si ricava

$$(6) \qquad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{l^2}{a^2} \pm \frac{m^2}{b^2} \pm \frac{n^2}{c^2},$$

relazione, che, in certo senso, può riguardarsi come la *equazione polare* della quadrica rispetto al centro. I tre coseni di direzione l, m, n sono legati dalla condizione $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, tenendo conto della quale, la (6) può trascriversi, nel caso dell' ellissoide, sotto la forma

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)m^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)n^2.$$

Questa, nella ipotesi $a \geqq b \geqq c$, fa vedere che si ha sempre $\frac{1}{\varrho^2} \geqq \frac{1}{a^2}$, ossia $\varrho \leqq a$ (in valore assoluto). Se invece avessimo supposto che a fosse il minore dei tre semiassi, sarebbe risultato, dalla stessa relazione, $\varrho \geqq a$. Concludendo: *fra tutti i semidiametri di un ellissoide, il massimo e il minimo coincidono col maggiore e col minore dei tre semiassi.*

Considerazioni analoghe, che lascieremo al lettore, possono esser applicate agli iperboloidi; esse fanno vedere che, *di tutti i semidiametri di un iperboloide ad una falda, il minimo coincide col minore dei due semiassi trasversi*; *e di tutti i semidiametri di un iperboloide a due falde, il minimo coincide col semiasse trasverso.* Non si parla del massimo semidiametro, perchè gli iperboloidi posseggono semidiametri infiniti (asintoti).

Il *cono asintotico* della quadrica (1) ha l'equazione (n.° 375)

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Finalmente l'*equazione tangenziale della quadrica* (1), in coordinate non omogenee u, v, w di piani, è (n.° 352)

$$(8) \qquad a^2u^2 \pm b^2v^2 \pm c^2w^2 = 1.$$

Osservazione. — Alcune formule precedenti si trasportano subito al cono

$$(1') \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

reale o immaginario, secondo che si prende il segno $+$ o $-$ davanti all'ultimo termine. In particolare, se $P(x', y', z')$ è un punto del cono, il piano tangente in quel punto, e in ogni altro punto della generatrice OP, ha l'equazione

$$(2') \qquad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} \pm \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Dette u, v, w, r le coordinate del detto piano, si hanno dunque le relazioni

$$u = \frac{x'}{a^2}, \qquad v = \frac{y'}{b^2}, \qquad w = \pm \frac{z'}{c^2}, \qquad r = 0;$$

ricavando x', y', z' dalle prime tre di queste, e sostituendone i valori nella (1'), che è soddisfatta dalle coordinate di P, si trova la equazione

$$(8') \qquad a^2u^2 + b^2v^2 \pm c^2w^2 = 0,$$

che è verificata dalle prime tre coordinate omogenee di ogni piano tangente al cono. La (8'), insieme colla $r = 0$, esprimente che la quarta coordinata del detto piano è nulla (in relazione col fatto che il piano stesso passa per l'origine, n.° 359), rappresenta il cono in coordinate di piani. *Un cono ha due equazioni tangenziali*, come era prevedibile, visto che i piani tangenti ad un cono (lungo le generatrici) formano un *inviluppo semplicemente infinito* (n.° 329).

La (8'), considerata isolatamente, è soddisfatta dalle coordinate dei piani tangenti al cono (1') e dei piani a questi paralleli, vale a dire, dalle coordinate dei piani, che toccano la conica all'infinito del cono (1'). In breve, *la* (8') *rappresenta la quadrica limite* (n.° 360), *inviluppo dei piani, che toccano una conica situata sul piano all' infinito.*

389. Discussione dell'equazione ridotta di un paraboloide. — Abbiamo già visto che l' equazione di un paraboloide, in coordinate cartesiane ortogonali, può sempre ridursi alla forma

(1) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0;$$

basta perciò assumere come origine il vertice della superficie, come asse z l'asse della superficie, come piani xz, yz i due piani principali, e come piano xy il piano tangente nel vertice.

Nell'equazione (1) qualche coefficiente può anche esser zero; ma la quadrica allora degenera. Così, se $a_{34} = 0$, il paraboloide si riduce ad una coppia di piani $\sqrt{a_{11}}\ x \pm \sqrt{-a_{22}}\ y = 0$. Se invece è $a_{22} = 0$, l'equazione

(1') $$a_{11}x^2 + 2a_{34}z = 0,$$

a cui la (1) si riduce, rappresenta un *cilindro parabolico* avente le generatrici parallele ad y, e secante sul piano xz la parabola rappresentata dalla (1').

Lasciando da parte questi ed altri evidenti casi di degenerazione, supporremo diversi da zero i tre coefficienti della (1). Dividendone i due membri per $-a_{34}$, possiamo porre quell' equazione sotto la forma

(2) $$mx^2 + ny^2 = 2z,$$

dove m, n sono due quantità reali, non nulle. Anzi una di queste, ad es. m, può sempre supporsi positiva, giacchè, in caso opposto, si muterebbe segno ai due membri della (2), e si invertirebbe il verso positivo sull' asse z, cambiando z in $-z$.

Dunque i casi distinti, che, rispetto ai segni, possono presentare i coefficienti della (2), sono raccolti nella tabella seguente:

	m	n	
I.	$+$	$+$	Paraboloide ellittico.
II.	$+$	$-$	Paraboloide iperbolico.

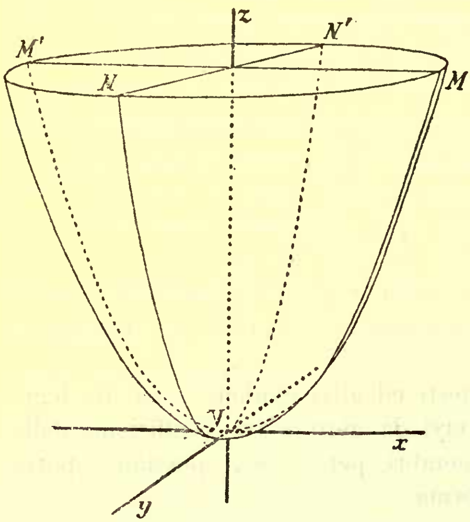
390. Paraboloide ellittico. — I) Discutiamo anzitutto la ipotesi $m > 0$, $n > 0$. Porremo, per comodità, $m = \frac{1}{p}$, $n = \frac{1}{q}$, dove p, q sono due quantità *positive*, parametri (come vedremo) delle due sezioni principali della superficie. Con ciò la (2) diviene

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{I}$$

Il piano $z = 0$ sega il paraboloide lungo la coppia di rette immaginarie

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0,$$

uscenti dal vertice V; questo punto, come ogni altro della superficie, è dunque ellittico, ed il paraboloide è *ellittico* (o *non rigato*). Un piano $z = k$, parallelo a quello, sega il paraboloide lungo la ellisse



$$\frac{x^2}{2pk} + \frac{y^2}{2qk} = 1,$$

che è reale, se $k > 0$ (l' ellisse $MNM'N'$ della figura), ed ha gli assi paralleli ad x, y, e crescenti con k; la ellisse è invece immaginaria, se $k < 0$. Segue che tutta la superficie sta al disopra del piano xy.

Il piano $y = 0$ dà come sezione la parabola (MVM')

$$x^2 = 2pz,$$

mentre il piano parallelo $y = k$ dà pure una parabola

$$x^2 = 2pz - \frac{pk^2}{q};$$

questa, colla traslazione di assi $x = X$, $z = Z + \frac{k^2}{2q}$, si riconosce esser uguale alla precedente, ed aver per vertice il punto (nuova origine) $x = 0$, $y = k$, $z = \frac{k^2}{2q}$, il cui luogo (al variare di k) è la curva $x = 0$, $y^2 = 2qz$.

Ora quest'ultima curva è la parabola (NVN') intersezione del paraboloide (I) col piano $x = 0$; i piani paralleli $x = k$ segano poi la superficie lungo parabole uguali a quella, aventi i vertici sulla parabola MVM' sopra considerata.

Segue di qua che il paraboloide ellittico può costruirsi così: si assumano due parabole invariabili di forma MVM', NVN', e si dispongano anzitutto in modo, che esse abbiano lo stesso vertice V, lo stesso asse Vz, diretto ugualmente, ed i rispettivi piani perpendicolari; si tenga poi fissa una delle due parabole, e si faccia variar l'altra con moto traslatorio (cioè parallelamente a sè stessa), in modo che il suo vertice percorra la parabola fissa; la parabola mobile descriverà il paraboloide.

Riprendiamo l'equazione (I); se $a = b$, essa diviene

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

e rappresenta un paraboloide *rotondo* intorno all'asse z (n.° 328), generato da una parabola ruotante intorno al suo asse.

391. Paraboloide iperbolico. — II). Se, nella (2), è $m > 0$, $n < 0$, porremo $m = \frac{1}{p}$, $n = -\frac{1}{q}$, dove p, q sono ancora quantità *positive*, e scriveremo quell'equazione così:

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Il piano $z = 0$ sega la superficie lungo due rette reali (HVH', KVK') uscenti dal vertice V, aventi, su quel piano, le equazioni

$$\frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Il punto V dunque, come ogni altro punto della superficie, è iperbolico, ed il paraboloide (II) è *iperbolico* (o *rigato*). Un piano parallelo $z = k$ lo sega lungo la iperbole

$$\frac{x^2}{2pk} - \frac{y^2}{2qk} = 1,$$

il cui asse trasverso è parallelo ad x, se $k > 0$ (come nell'iperbole $PNQP'N'Q'$), ed è invece parallelo ad y, se $k < 0$ (come nell'iperbole $RTR'SUS'$); in ogni caso l'asse trasverso va crescendo, mentre k cresce in valore assoluto.

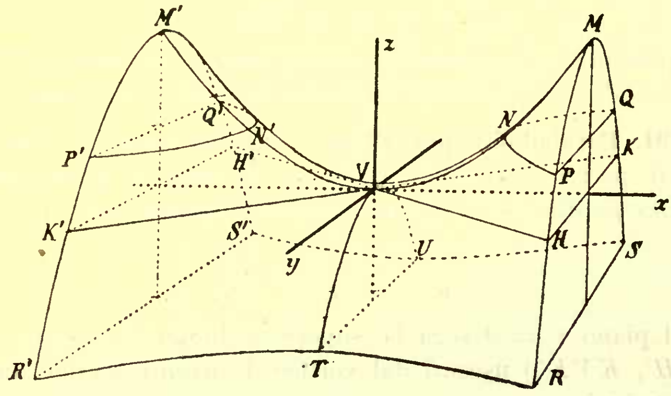
Il piano $y = 0$ sega la superficie lungo la parabola (MVM')

$$x^2 = 2pz,$$

di cui l'asse coincide con z; precisamente, la porzione di asse interna alla curva è la semiretta positiva z. I piani paralleli segano il paraboloide lungo parabole uguali e similmente poste, i cui vertici formano la parabola (TVU)

$$y^2 = -2qz,$$

che è sezione del paraboloide col piano $x = 0$. Anche questa parabola ha l'asse sopra la retta z; ma ora (essendo negativo il coefficiente $-2q$) è interna alla curva la semiretta negativa z. Finalmente, i piani paralleli $x =$ cost. segano la superficie lungo parabole uguali e similmente poste all' ultima conside-



rata (come, ad es., la RMS o $R'M'S'$), i vertici delle quali costituiscono la parabola MVM', di cui sopra si è discorso.

Risulta di qua che anche il paraboloide iperbolico può esser generato mediante la traslazione di una parabola rigida, in modo analogo a quello visto per il paraboloide ellittico; colla differenza che qui la parabola mobile, ad es. UVT, e la fissa, ad es. MVM', hanno gli assi diretti in verso opposto.

Per procurarci le equazioni delle rette di un paraboloide iperbolico, scriveremo la (II) sotto la forma

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z.$$

Si vede allora che il paraboloide contiene le infinite rette rappresentate, al variare di λ, dalla coppia di equazioni

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2\lambda z,\quad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda},$$

come pure le infinite rette rappresentate, al variare di μ, dalle equazioni

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\mu,\quad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{2}{\mu}z.$$

Le rette del primo sistema sono tutte parallele al piano $\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0$; quelle del secondo sistema sono parallele al piano $\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0$. I due piani diconsi *piani direttori* del paraboloide; le loro rette all'infinito appartengono alla superficie, e precisamente al secondo e al primo sistema.

Poichè due rette di uno stesso sistema di una quadrica rigata sono segate dalle rette dell'altro sistema in punteggiate proiettive (n.° 366), e tra queste rette vi è ora una retta impropria, segue (n.° 64, *b*)) che *due rette di uno stesso sistema di un paraboloide iperbolico sono segate in parti proporzionali dalle rette dell'altro sistema*: e, viceversa, le rette, che congiungono punti omologhi di due punteggiate simili (od uguali), a sostegni sghembi, costituiscono un paraboloide iperbolico.

Un paraboloide iperbolico non può mai esser rotondo, giacchè le sue sezioni piane sono soltanto iperboli o parabole (n.° 370), non mai cerchi.

392. Alcune formole relative all'equazione ridotta dei paraboloidi. — Limitiamoci a ricordare che, data la equazione di un paraboloide

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}=2z, \tag{1}$$

il *piano tangente* alla superficie nel punto (x', y', z') (o il piano polare del detto punto) ha l'equazione

$$(2) \qquad \frac{xx'}{p} \pm \frac{yy'}{q} = z + z',$$

e la normale nel punto stesso (o la perpendicolare dal punto al piano polare) ha le equazioni

$$(3) \qquad \frac{p(x - x')}{x'} = \pm \frac{q(y - y')}{y'} = -(z - z').$$

La *equazione tangenziale* del paraboloide, in coordinate u, v, w di piani, si riconosce essere (n.° 352)

$$(4) \qquad pu^2 \pm qv^2 = 2w.$$

393. Effetto di particolari trasformazioni di coordinate sulla equazione di una quadrica. — Nel n.° 383 abbiamo visto quali termini entrino nell' equazione di una quadrica, riferita a particolari sistemi di coordinate. Rimane però da esaminare come si possano calcolare i coefficienti della equazione nominata, quando la quadrica sia inizialmente data mediante l'equazione generale

$$(1) \quad a_{11}x^2 + \cdots + 2a_{12}xy + \cdots + 2a_{14}x + \cdots + a_{44} = 0;$$

rimane, in sostanza, da eseguire la trasformazione di coordinate, con cui si passa dall' antico sistema generale x, y, z ad un nuovo sistema particolare X, Y, Z. Riserbandoci di indicare un metodo, che dispensi dai calcoli laboriosi, a cui la trasformazione diretta condurrebbe, notiamo alcuni casi, ove il risultato è facilmente prevedibile (cfr. n.° 248).

I. *Una trasformazione di coordinate, nella quale muti l'origine ma non le direzioni degli assi, lascia inalterati i coefficienti dei termini a secondo grado nell'equazione di una quadrica.*

Una siffatta trasformazione è espressa infatti dalle formole (n.° 308)

$$x = \alpha + X, \quad y = \beta + Y, \quad z = \gamma + Z,$$

dove α, β, γ sono costanti; eseguendo queste sostituzioni nella(1), sviluppando e ordinando rispetto ad X, Y, Z, si trova una equazione del tipo

(2) $a'_{11}X^2 + \cdots + 2a'_{12}XY + \cdots + 2a'_{14}X + \cdots + a'_{44} = 0,$

dove si riconosce essere

$$a'_{ik} = a_{ik}, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$
$$a'_{i4} = a_{i1}\alpha + a_{i2}\beta + a_{i3}\gamma + a_{i4}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$
$$a'_{44} = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma$$
$$+ 2a_{14}\alpha + 2a_{24}\beta + 2a_{34}\gamma + a_{44}.$$

Le uguaglianze contenute nella prima orizzontale dimostrano il lemma.

II. *Una trasformazione di coordinate, che lasci ferma l'origine, non altera il termine noto dell' equazione di una quadrica.*

Si riconosce direttamente, eseguendo sulla (1) la trasformazione (n.° 308)

$$x = \alpha' X + \alpha'' Y + \alpha''' Z,$$
$$y = \beta' X + \beta'' Y + \beta''' Z,$$
$$z = \gamma' X + \gamma'' Y + \gamma''' Z,$$

dove le α, β, γ sono costanti; (cfr. per le coniche, n.° 248, II).

III *Una trasformazione ortogonale, che lasci ferma l'origine, muta il trinomio* $x^2 + y^2 + z^2$ *nel trinomio* $X^2 + Y^2 + Z^2$.

Infatti entrambi i trinomi esprimono il quadrato della distanza della origine dal punto, che ha le antiche coordinate $(x,\ y,\ z)$, e le nuove $(X,\ Y,\ Z)$.

394. Invarianti di una quadrica rispetto ad una trasformazione ortogonale di coordinate. — Riprendiamo l'equazione di una quadrica

(1) $a_{11}x^2 + \cdots + 2a_{12}xy + \cdots + 2a_{14}x + \cdots + a_{44} = 0,$

e supponiamo che, mediante una qualsiasi trasformazione di coordinate, essa si muti nella

(2) $a'_{11}X^2 + \cdots + 2a'_{12}XY + \cdots + 2a'_{14}X + \cdots + a'_{44} = 0.$

Cerchiamo di formare, coi coefficienti della (1), certe, espressioni *invarianti* rispetto alla trasformazione, tali cioè, che non mutino valore, quando vengano formate coi coefficienti della (2), anzichè coi coefficienti della (1), e ciò qualunque sia la trasformazione impiegata, o la quadrica a cui si applica (cfr. n.° 249). Noi però, per maggiore semplicità, ci limiteremo a considerare *trasformazioni ortogonali.* E supporremo anzitutto che la trasformazione, con cui si passa dalla (1) alla (2), non alteri l'origine, riserbandoci di togliere poi quest' ultima restrizione.

Tenendo conto delle formole rappresentanti quella trasformazione, e del lemma III (n.° 393), possiamo scrivere le seguenti identità:

$$(3)\; a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \cdots + a_{44}$$
$$\equiv a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + 2a'_{12}XY + 2a'_{13}XZ + 2a'_{23}YZ + \cdots + a'_{44}$$

$$(4)\qquad x^2 + y^2 + z^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2,$$

nella prima delle quali è anzi $a_{44} = a'_{44}$ (lemma II, n.° 393). Insieme alle due identità scritte, sussiste pure la identità, che da quelle si ottiene aggiungendo ai due membri della (3) i due membri della (4), moltiplicati per uno stesso parametro arbitrario $-k$:

$$(5)\left\{\begin{aligned} &(a_{11} - k)x^2 + (a_{22} - k)y^2 + (a_{33} - k)z^2 \\ &\quad + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \ldots + a_{44} \\ &\equiv (a'_{11} - k)X^2 + (a'_{22} - k)Y^2 + (a'_{33} - k)Z^2 \\ &\quad + 2a'_{12}XY + 2a'_{13}XZ + 2a'_{23}YZ + \ldots + a'_{44}. \end{aligned}\right.$$

I due membri della (5), uguagliati a zero, rappresentano una stessa quadrica Q, riferita una volta agli assi x, y, z, una seconda volta agli assi X, Y, Z, quadrica che varia in un fascio, al variare di k. Volendo determinare, ad es., per quali valori di k la quadrica Q divenga un paraboloide, possiamo valerci sia dell'equazione in x, y, z, sia di quella in X, Y, Z. La prima equazione ci fornisce, per k, la equazione di condizione (n.° 370, Oss.)

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0,$$

equazione che abbiamo già trovato al n.° 378, ed abbiamo indicato con $\Delta(k) = 0$, e che, sviluppata, assume la forma

$$(7)\qquad k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0,$$

dove A_{44} è il noto determinante di terzo ordine, e si è posto inoltre

$$(8)\left\{\begin{aligned} I &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ J &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2. \end{aligned}\right.$$

Se invece avessimo adoperata l' equazione della quadrica Q in X, Y, Z, si sarebbe trovata, per k, la condizione

$$(7') \qquad k^3 - I'k^2 + J'k - A'_{44} = 0,$$

dove I', J', A'_{44} sono ciò che divengono I, J, A_{44}, quando si formino colle a'_{ik}, coefficenti della (2), anzichè colle a_{ik} coefficienti della (1).

Le due equazioni di condizione (7) e (7′) devono fornire per k gli stessi valori; esse avranno dunque i coefficienti proporzionali, anzi uguali, perchè coincidono i coefficienti di k^3. Sussistono dunque le uguaglianze

$$(9) \qquad I = I', \qquad J = J', \qquad A_{44} = A'_{44},$$

le quali dicono che le espressioni I, J, A_{44} non mutano valore, sia che vengano formate coi coefficienti della (1), sia coi coefficienti della (2). In breve, quelle espressioni sono *invarianti* relativi ad una trasformazione ortogonale di coordinate, che non sposti l' origine.

Un quarto invariante si ottiene, imponendo alla quadrica variabile Q, sopra considerata, la condizione, perchè essa degeneri in un cono. Se si opera sulla equazione di Q in x, y, z, la detta condizione è espressa dall' annullarsi del discriminante del primo membro della (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando, e mettendo in evidenza il termine con k^3 e il termine noto, che solo interessano nel nostro caso, la detta condizione assume la forma

$$(10) \qquad - a_{44}k^3 + \cdots + A = 0.$$

Operando similmente sulla equazione di Q in X, Y, Z, troviamo l'equazione di condizione

$$(10') \qquad - a'_{44}k^3 + \cdots + A' = 0,$$

dove A' è il discriminante della (2). Poichè la (10) e la (10′) devono avere le stesse radici, poichè inoltre a_{44} ed a'_{44} sono uguali, come fu già notato, e possono ritenersi diversi da zero (chè altrimenti si aggiungerebbe ai due membri della (5) una stessa costante non nulla), si conclude che sarà pure

$$(11) \qquad A = A'.$$

Vediamo così che le quattro espressioni

$$(12) \qquad I, \quad J, \quad A_{44}, \quad A$$

non variano, quando mutano gli assi coordinati ortogonali, restando ferma l'origine. Ma quelle espressioni non si alterano nemmeno per una traslazione di assi. Ciò è chiaro per le prime tre, le quali dipendono dai soli coefficienti dei termini a secondo grado della (1), coefficienti che non si alterano in conseguenza di una traslazione di assi (n. 393, lemma II). Quanto ad A, l'asserzione si verifica direttamente collo stesso procedimento, che fu usato nella teoria delle coniche (n.° 249, pag. 422), formando cioè il determinante A' colle espressioni delle a'_{ik} contenute nelle formole del n.° 393, I, e mostrando che, mediante semplici trasformazioni, A' si riduce ad A.

Visto ciò, si conclude (con Cauchy, 1826) che le espressioni (12) sono effettivamente invarianti, rispetto ad *ogni* trasformazione ortogonale di coordinate. In parole:

Nel passaggio da assi ortogonali ad assi ortogonali, rimangono immutati i valori delle quattro espressioni seguenti, formate coi coefficenti dell' equazione di una quadrica:

1) *il discriminante* A *dell' equazione* (*invariante biquadratico*);

2) *il complemento algebrico* A_{44} *del termine noto entro al discriminante* (*invariante cubico*);

3) *la somma* J *dei complementi algebrici degli elementi principali in* A_{44} (*invariante quadratico*);

4) *la somma* I *degli elementi principali di* A_{44}, *ossia la somma dei coefficienti dei quadrati nell' equazione della quadrica* (*invariante lineare*).

Naturalmente (come fu già notato in geometria piana, n.° 249, Oss.) l'invarianza delle quattro espressioni suddette vale, ove si paragonino due equazioni (1), (2), dedotte una dall'altra mediante una trasformazione ortogonale, *avendo cura di non introdurre nè togliere fattori.*

Osservazione. — Abbiamo già notato che l'equazione (6), da cui hanno origine tre invarianti, coincide coll'equazione (5) del n.° 378, da cui dipendono i piani principali di una quadrica. Di questa coincidenza non dobbiamo sorprenderci. Infatti, nel presente n.°, noi abbiamo considerato un fascio di quadriche Q, secanti sul piano all'infinito un fascio di coniche, determinato dalla conica all'infinito della quadrica (1) ($k = 0$) e dall'assoluto ($k = \pm \infty$). Chiedere quali quadriche Q divengano paraboloidi, equivale a chiedere quali coniche del detto fascio si spezzino in due rette; la (6) esprime appunto la condizione di spezzamento.

Ora si è visto (n.° 382) che anche il problema dei piani principali di una quadrica porta a determinare le coniche degeneri del fascio nominato.

Dunque le due questioni trattate nel n.° 378 e nel n.° presente, sebbene in apparenza molto distinte, portano ad uno stesso problema di geometria piana. Aggiungeremo qui che, come sono invarianti i coefficienti dell'equazione $\Delta(k) = 0$, così ne sono invarianti le radici k_1, k_2, k_3, di cui ora vedremo il significato geometrico. Esse però non si possono esprimere razionalmente mediante i coefficienti della (1), sono, come talora si dice, *invarianti irrazionali.*

395. Calcolo dei coefficienti dell'equazione ridotta di una quadrica col mezzo degli invarianti. — Ritornando ora al problema enunciato nelle prime righe del n.° 393, proponiamoci di convertire in forma ridotta l'equazione data di una quadrica, riferita ad un sistema qualsiasi di coordinate ortogonali:

(1) $a_{11} x^2 + \ldots + 2a_{12} xy + \ldots + 2a_{14} x + \ldots + a_{44} = 0.$

Calcolati gli invarianti

$$I, \quad J, \quad A_{44}, \quad A$$

della (1) (n.° 394), che sono *quantità note*, dobbiamo distinguere due casi.

a) La quadrica (1) *abbia centro proprio*; sia dunque $A_{44} \neq 0$. Come equazione ridotta prenderemo l'equazione normale

(2) $$a'_{11} X^2 + a'_{22} Y^2 + a'_{33} Z^2 + a'_{44} = 0,$$

che la quadrica assume, ove venga riferita ai suoi piani principali; i coefficienti della (2) sono incogniti. Per calcolarli, formiamo gli invarianti della (2); essi risultano espressi da

$$I' = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}, \qquad J' = a'_{11}a'_{22} + a'_{11}a'_{33} + a'_{22}a'_{33},$$
$$A_{44} = a'_{11}a'_{22}a'_{33}, \qquad A = a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44}.$$

Paragonandoli cogli invarianti della (1), troviamo quattro equazioni fra quattro incognite:

$$(3) \qquad \begin{cases} a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} = I, \\ a'_{11}a'_{22} + a'_{11}a'_{33} + a'_{22}a'_{33} = J, \\ a'_{11}a'_{22}a'_{33} = A_{44}, \\ a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44} = A. \end{cases}$$

Le ultime due ci danno

$$(4) \qquad a'_{44} = \frac{A}{A_{44}},$$

mentre le prime tre ci dicono che a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} sono le radici della nota equazione cubica

$$(5) \qquad k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0,$$

ossia (n.i 378, 394):

$$(6) \quad \Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Indicando con k_1, k_2, k_3 le radici della (5) o (6), che sappiamo già esser reali (n.° 378), *l'equazione normale della nostra quadrica assume la forma*

$$(7) \qquad k_1X^2 + k_2Y^2 + k_3Z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

(β) *La quadrica* (1) *sia un paraboloide;* si abbia dunque $A_{44} = 0$. Come equazione ridotta prenderemo la

$$(2') \qquad a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + 2a'_{34}Z = 0,$$

che il paraboloide assume, ove venga riferito ai due piani principali ed al piano tangente nel vertice. Calcoliamo gli invarianti della (2′), ed uguagliamoli agli invarianti già noti della (1); trascurando la relazione $A_{44} = A'_{44}$, che diviene nel caso presente $0 = 0$, otteniamo le tre relazioni

$$(3') \quad a'_{11} + a'_{22} = I, \qquad a'_{11}a'_{22} = J, \qquad -a'_{11}a'_{22}a'^2_{34} = A.$$

Le ultime due ci danno

$$(4') \qquad a'_{34} = \pm \sqrt{-\frac{A}{J}},$$

(dove il segno del radicale è indifferente, potendosi mutare il segno di a'_{34} coll'invertire il verso positivo sull'asse Z). La prima e seconda delle (3′) ci dicono poi, che a'_{11}, a'_{22} sono radici dell'equazione quadratica

$$(5') \qquad k^2 - Ik + J = 0,$$

o, se si vuole, sono le due radici non nulle k_1, k_2, della solita equazione cubica $\Delta(k) = 0$, la quale, questa volta, ha come terza radice $k_3 = 0$ (n.° 380).

L'equazione ridotta del paraboloide è dunque

$$(7') \qquad k_1 X^2 + k_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{A}{J}}\, Z = 0.$$

Osservazione I. — I procedimenti ora indicati per formare l'equazione ridotta di una quadrica non degenere, si applicano, almeno in parte, anche alle quadriche degeneri. Così, per il *cono a vertice proprio*, la cui equazione normale ha la forma

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 = 0,$$

si trova, col ragionamento fatto in α), che a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} sono le radici k_1, k_2, k_3 della equazione cubica $\Delta(k) = 0$.

Per il *cilindro ellittico* o *iperbolico*, che ha l'equazione normale

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{44} = 0,$$

risulta che a'_{11} e a'_{22} sono le due radici non nulle dell'equazione $\Delta(k) = 0$, di cui la terza radice è nulla, perchè $A_{44} = 0$; ma il termine noto a'_{44} non si può calcolare mediante l'espressione (4), la quale assume ora la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si giunge a calcolarlo mediante un altro procedimento che esporremo nell'esercizio 4) dopo il n°. 398.

Finalmente, per il *cilindro parabolico*, la cui equazione può ridursi al tipo

$$a'_{11}X^2 + 2a'_{34}Z = 0,$$

si vede che a'_{11} è l'unica radice non nulla dell'equazione (6), la quale ha, questa volta, due radici nulle, perchè $J = A_{44} = 0$.

Il coefficiente a'_{34} non vien determinato dalla espressione (4'), che assume ora l'aspetto $\frac{0}{0}$; se ne calcolerà il valore, eseguendo direttamente la trasformazione di coordinate.

Lasciamo al lettore le analoghe considerazioni per le quadriche spezzate in due piani.

Osservazione II. — Se l'equazione $\Delta(k) = 0$ ha una radice doppia $k_1 = k_2$, la quadrica (7), o (7'), risulta rotonda intorno all'asse Z; e se la $\Delta(k) = 0$ ha una radice tripla $k_1 = k_2 = k_3$, la quadrica risulta una sfera. Rimangono così confermate, per altra via, le asserzioni del n.° 381, Oss.

396. Classificazione delle quadriche partendo dalla equazione generale. — I risultati del n.° precedente possono riassumersi così.

Data l'equazione generale di una quadrica

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + \ldots\ldots + a_{44} = 0,$$

si formi l'equazione cubica

$$(5) \qquad k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0,$$

ossia

$$(6) \qquad \Delta(k) = 0,$$

e se ne calcolino le radici k_1, k_2, k_3.

α) Se queste sono tutte diverse da zero, se dunque $A_{44} \neq 0$, l'equazione della quadrica può porsi sotto la forma

$$(7) \qquad k_1 X^2 + k_2 Y^2 + k_3 Z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

Ricordando ora la discussione fatta al n.° 384, si vede che, nella ipotesi $A \neq 0$, la superficie è un ellissoide reale, un iperboloide ad una falda, un iperboloide a due falde, od un ellissoide immaginario, secondo che tre, due, una, o nessuna delle radici della (6) hanno il segno di $-\frac{A}{A_{44}}$. Se invece $A = 0$, la quadrica è un cono reale o immaginario, secondo che le dette radici hanno tutte lo stesso segno oppur no.

β) Se una delle radici della (6) è nulla, ad es. $k_3 = 0$, ed è quindi $A_{44} = 0$, la quadrica è un paraboloide; la sua equazione, nella ipotesi $A \neq 0$, può porsi sotto la forma

$$(7') \qquad k_1X^2 + k_2Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{A}{J}}\,Z = 0,$$

sicchè il paraboloide è ellittico od iperbolico, secondo che k_1 e k_2 hanno lo stesso segno, oppur no. Se invece $A = 0$, la quadrica è un cilindro, la cui equazione può porsi sotto la forma

$$k_1 X^2 + k_2 Y^2 + a'_{44} = 0,$$

quando k_1, k_2 siano diverse da zero; il cilindro è ellittico od iperbolico, secondo che k_1, k_2 hanno lo stesso segno, oppur no. Finalmente, se due radici della (6) si annullano, ad es. $k_2 = k_3 = 0$, la quadrica è un cilindro parabolico.

Tutta questa discussione (ove son lasciati da parte i casi di spezzamento della quadrica in piani; n.° 357) può riassumersi nella tabella seguente. Nella quale è da avvertire che, *ove si incontrino, in una stessa orizzontale, due o più doppi segni*, devono prendersi contemporaneamente i segni superiori, o gli inferiori.

k_1	k_2	k_3	A_{44}	A	
				$+$	Ellissoide immaginario.
$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	0	Cono immaginario.
				$-$	Ellissoide reale.
				$+$	Iperboloide ad una falda.
$\pm$	$\mp$	$\mp$	$\pm$	0	Cono reale.
				$-$	Iperboloide a due falde.
$\pm$	$\pm$	0	0	$-$	Paraboloide ellittico.
				0	Cilindro ellittico.
$\pm$	$\mp$	0	0	$+$	Paraboloide iperbolico.
				0	Cilindro iperbolico.
$\pm$	0	0	0	0	Cilindro parabolico.

Le radici indicate con k_1, k_2, k_3 si intendono disposte in tal ordine, da verificare uno dei casi contenuti nella tabella, il che è sempre possibile [1].

---

[1] Nella formazione della tabella, il lettore osserverà che il segno di A_{44} dipende dai segni di k_1, k_2, k_3, perchè è $A_{44} = k_1 k_2 k_3$ (vedi n.° 395, eq. (5)); inoltre che, quando $k_3 = 0$, e $k_1 k_2 = J$ (n.° 395, eq. (5′)), il segno di A è opposto al segno di $k_1 k_2$, come risulta dalla (4′) del n.° 395, la quale deve fornire per a'_{34} un valore reale.

Delle tre radici k_1, k_2, k_3 dell' equazione

$$(5) \qquad k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0,$$

interessano, come si disse, solo i segni. Ora, poichè l'equazione ha tutte le sue radici reali, tante sono le radici positive, quante sono le variazioni di segno nella serie dei coefficienti 1, $-I$, J, $-A_{44}$ (¹), ossia quante sono le permanenze nella serie

$$+1, \quad I, \quad J, \quad A_{44}.$$

L' esame di tutti i casi possibili conduce, tenendo conto della tabella precedente, a stabilire i seguenti criteri, dove, relativamente ai doppi segni, è rispettata la convenzione fatta sopra:

I	J	A_{44}	A	
$\pm$	$+$	$\pm$	$+$	Ellissoide immaginario.
			0	Cono immaginario.
			$-$	Ellissoide reale.
altri casi		$\pm$	$+$	Iperboloide ad una falda.
			0	Cono reale.
			$-$	Iperboloide a due falde.
$\pm$	$+$	0	$-$	Paraboloide ellittico.
			0	Cilindro ellittico.
arbitrario	$-$	0	$+$	Paraboloide iperbolico.
			0	Cilindro iperbolico.
$\pm$	0	0	0	Cilindro parabolico.

397. Significato del segno del discriminante. — Dall'esame delle tabelle precedenti risulta che le quadriche, per cui $A > 0$, sono o immaginarie (ellissoide immaginario), o rigate (iperboloide ad una falda, paraboloide iperbolico), mentre le quadriche, per cui $A < 0$, sono reali non rigate (ellissoide reale, iperboloide a due falde, paraboloide ellittico). Si ha dunque il seguente notevole criterio:

Una quadrica, non degenere, a punti reali, è rigata o non rigata, secondo che il discriminante di essa è positivo o negativo.

(¹) V. ad es. CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica*, 1902, pag. 382.

Ora questo teorema può pure dimostrarsi, in modo diretto, per la via seguente [1].

Data l' equazione generale di una quadrica a punti reali, il cui discriminante A sia diverso da zero, si trasportino gli assi coordinati (supposti ortogonali), in guisa che l' origine O si porti in un punto O' della superficie, ed il piano xy si porti nel piano XY ivi tangente, il sistema restando ortogonale; con ciò il valore del discriminante non muta (n.° 394). La nuova equazione della superficie mancherà del termine noto, e dei termini lineari in X, Y (perchè la parte a primo grado, uguagliata a zero, deve rappresentare il piano tangente nell' origine, che è $Z = 0$); l' equazione avrà dunque la forma

$$(1) \quad a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + 2a'_{12}XY + 2a'_{13}XZ + 2a'_{23}YZ + 2a'_{34}Z = 0.$$

Calcoliamo il discriminante di questa equazione, ed uguagliamolo ad A; sarà

$$A = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{43} & 0 \end{vmatrix} = - a'^2_{34} (a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}).$$

Vediamo dunque che A ha lo stesso segno della espressione $(a'^2_{12} - a'_{11}a'_{22})$. Se ora cerchiamo la intersezione della quadrica (1) col piano tangente $Z = 0$, troviamo la coppia di rette

$$a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 = 0,$$

ossia

$$\frac{X}{Y} = \frac{- a'_{12} \pm \sqrt{a'^2_{12} - a'_{11}a'_{22}}}{a'_{11}},$$

coppia che è reale od immaginaria, secondo che l' espressione sotto il radicale risulta positiva o negativa. Dunque il punto O', che è un punto arbitrario della superficie, è iperbolico od ellittico, secondo che A è positivo o negativo; il che si doveva appunto dimostrare.

Nella dimostrazione, figura la ipotesi che il sistema di coordinate, cui vien riferita la quadrica, sia ortogonale. Sarebbe

(1) BIANCHI, *Lezioni di geometria analitica*, 1904, pag. 534.

facile però stabilire che il teorema sussiste pure in coordinate oblique; sussiste anzi, in generale, quando la quadrica si riferisca ad un sistema di coordinate proiettive qualsiasi. Ma su questa estensione, che è legata colle considerazioni del n.° seguente, non vogliamo qui trattenerci.

398. Classificazione proiettiva delle quadriche. — La classificazione delle quadriche, contenuta nelle tabelle precedenti, è fondata sopra criteri metrici. Sotto l' aspetto proiettivo, quando si riguardino come equivalenti due quadriche trasformabili l' una nell' altra mediante una collineazione reale (rappresentata cioè da una sostituzione lineare a coefficienti reali), si è condotti a distinguere un minor numero di tipi. Precisamente: *le quadriche non degeneri, sotto l' aspetto proiettivo, si distribuiscono nelle tre famiglie seguenti*: 1) *quadriche a punti immaginari;* 2) *quadriche a punti reali ellittici* (*o non rigate*); 3) *quadriche a punti reali iperbolici* (*o rigate*). Ogni quadrica di una di queste famiglie è trasformata da una collineazione in una quadrica della famiglia stessa; ciò è evidente, quando si pensi che una collineazione muta punti e rette reali di una quadrica in punti e rette reali della quadrica trasformata. Ma, viceversa, si dimostra (e qui basti l'enunciato) che, *date due quadriche di una stessa famiglia, si può sempre formare* (*e in infiniti modi*) *una collineazione, che muti l' una quadrica nell' altra.* Per esempio ogni quadrica reale non rigata (ellissoide reale, iperboloide a due falde, paraboloide ellittico) può esser sempre trasformata in una sfera reale, mediante una collineazione (cfr. n.° 369, es. 3), 4)).

La prima e la terza delle tre famiglie sopra indicate corrispondono a valori positivi del discriminante A; per la seconda famiglia invece è $A < 0$.

Esercizi. I — 1) Determinare i piani principali delle quadriche seguenti, e ridurne le equazioni a forma canonica:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 6x - 6y + 1 = 0,$$
$$10(x^2 + y^2 + z^2) + 8xz + 6yz - 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xz + 2yz - 1 = 0,$$
$$xy + xz + yz - 4 = 0,$$
$$x^2 - yz \pm 1 = 0,$$
$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 4y - z + 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y - 2z = 0.$$

2) Ogni iperboloide riferito a tre asintoti, come assi coordinati, ha un'equazione della forma

$$a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + k = 0;$$

si dimostri che l'iperboloide (anche nella ipotesi di assi obliqui) è rigato o no, secondo che il prodotto $a_{12}\, a_{13}\, a_{23}$ ha il segno di k o il segno opposto. (Si seghi la superficie col piano tangente nel punto all'infinito dell'asse z).

3) Si dimostri che la superficie

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1$$

è un iperboloide ad una o due falde, secondo che la somma $a + b + c$ è positiva o negativa, ed è un cilindro iperbolico se quella somma è nulla. La condizione necessaria è sufficiente, perchè la superficie sia rotonda, è $ab + bc + ca = 0$.

4) Per determinare il termine noto dell'equazione canonica di un cilindro ellittico od iperbolico (n.° 395, Oss. I), di cui è data l'equazione generale, si trasportino parallelamente due piani coordinati, ad es. xz, yz, lasciando fisso il terzo xy, e si scelga come nuova origine il centro della conica, che il cilindro sega sul piano xy. Il termine noto della nuova equazione (che si può calcolare col mezzo degli invarianti della detta conica) è il termine noto dell'equazione canonica richiesta (n.° 393, II). Si applichi questo procedimento al cilindro

$$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z = 5.$$

II — 5) In un ellissoide (di semiassi a, b, c) è costante $\left(= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ la somma dei quadrati dei valori inversi di tre semidiametri mutuamente perpendicolari (CHASLES). Come si esprime questa somma mediante gli invarianti della superficie? (cfr. n.° 252, es. 11)) [1].

6) È pure costante $\left(= 4\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right)\right)$ la somma dei quadrati dei valori inversi delle aree di tre triangoli, determinati da tre semidiametri mutuamente perpendicolari, presi a due a due (CHASLES).

7) Nello studio delle proprietà metriche di un ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ conviene adoperare le seguenti equazioni parametriche:

$$x = a\cos\alpha, \qquad y = b\cos\beta, \qquad z = c\cos\gamma,$$

dove α, β, γ sono gli angoli, che una retta variabile forma con tre rette mutuamente perpendicolari. A queste formule si arriva naturalmente, se si stabilisce l'affinità $x = aX$, $y = bY$, $z = cZ$ tra l'ellissoide dato e la sfera $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Mediante quella affinità il punto sopra considerato dell'ellissoide si muta nel punto $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ della sfera.

8) A tre punti dell'ellissoide, che siano estremi di tre semidiametri mutuamente coniugati, corrispondono, nell'affinità nominata, tre punti della sfera appartenenti a tre raggi mutuamente perpendicolari. Dalle for-

---

[1] I risultati relativi all'ellissoide, contenuti in questo e nei successivi esercizi, si estendono alle altre quadriche a centro, pur di considerare i semidiametri in valore *algebrico* (reale o immaginario).

mole esprimenti questo fatto si ricavino i seguenti tre teoremi, che estendono all'ellissoide le relazioni di APOLLONIO per la ellisse (n.° 252).

9) In un ellissoide è costante ($= a^2 + b^2 + c^2$) la somma dei quadrati di tre semidiametri coniugati (LIVET).

10) È costante $\left(= \frac{1}{4}\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\right)$ la somma dei quadrati delle aree di tre triangoli, determinati da tre semidiametri mutuamente coniugati, presi a due a due (BINET).

11) È costante $\left(= \frac{1}{6}\,abc\right)$ il volume del tetraedro, di cui tre spigoli sono tre semidiametri mutuamente coniugati (LIVET).

12) È costante la somma dei quadrati delle proiezioni ortogonali di tre semidiametri coniugati, sopra una retta (PETIT), o sopra un piano assegnato (CHASLES).

13) L'affinità, che lega un ellissoide ad una sfera, permette di dedurre il volume di quello, dal volume di questa. Si trova così che il volume racchiuso da un ellissoide di semiassi a, b, c, è $\frac{4}{3}\,\pi abc$ (cfr. n.° 265).

III — 14) Se p è la distanza del centro da un piano tangente all'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, e λ, μ, ν sono gli angoli, che la normale al piano forma cogli assi, si ha

$$p^2 = a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \cos^2 \mu + c^2 \cos^2 \nu.$$

Applicando questa formola a tre piani tangenti, mutuamente perpendicolari, risulta

$$p^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

e si conchiude: « il luogo dei punti, da cui si possono condurre ad un ellissoide terne di piani tangenti perpendicolari, è una sfera, di raggio $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, concentrica all'ellissoide » (MONGE); (cfr. n.° 252, es. 21)). Il cono circoscritto all'ellissoide, da un punto qualsiasi della sfera, è tale, che ad esso sono circoscritti infiniti triedri trirettangoli.

15) Il teorema precedente vale anche per i due iperboloidi $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, per i quali la sfera di MONGE ha il raggio $\sqrt{a^2 \pm b^2 - c^2}$, e può quindi essere immaginaria. La sfera di MONGE non sega in punti reali l'ellissoide, o l'iperboloide a due falde. Essa sega l'iperboloide ad una falda lungo una curva reale, se $a > c$; « questa curva (del quarto ordine) è il luogo di un punto, da cui escono due rette della superficie perpendicolari tra loro ».

16) Rispetto al paraboloide $\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$, il luogo dei punti, da cui si possono circoscrivere terne di piani tangenti mutuamente perpendicolari, è il piano $2z + p \pm q = 0$. Esso sega il paraboloide iperbolico lungo una iperbole, in ogni punto della quale si incontrano due rette della superficie mutuamente perpendicolari.

IV — 17) Se in un cono si può iscrivere un triedro trirettangolo, è nullo l'invariante lineare I; viceversa, se $I = 0$, si possono iscrivere nel cono infiniti triedri trirettangoli, donde risulta che « se in un cono si può iscrivere un triedro trirettangolo, si possono iscrivere nel cono infiniti triedri siffatti» (cfr. n.° 360, es. 19)). (Per dimostrare il teorema diretto, si riferisca il cono al triedro trirettangolo; per l'inverso, si assuma una generatrice come asse x, e si ricordi il n.° 251).

18) Dicesi *equilatero* un cono, od una quadrica (iperboloide o paraboloide iperbolico), che abbia nullo l'invariante lineare. Il cono asintotico di un iperboloide equilatero è equilatero. I piani direttori di un paraboloide equilatero sono perpendicolari. La sezione piana di un iperboloide (o cono) equilatero con un piano perpendicolare ad un asintoto (o ad una generatrice) è una iperbole equilatera; tale è pure la sezione di un paraboloide equilatero con ogni piano normale all'asse.

19) In un iperboloide equilatero ad una falda, ciascuna generatrice è segata ortogonalmente da due direttrici, che formano tra loro un angolo retto. La direttrice e le due generatrici, che son parallele a quelle tre rette, formano con esse un seilatero semplice sghembo, i cui lati appartengono alla superficie, ed i cui angoli sono retti; lati opposti del seilatero sono paralleli.

20) In un paraboloide (rigato) equilatero, la generatrice (o direttrice) uscente dal vertice sega ortogonalmente tutte le direttrici (o generatrici). Viceversa, se una retta di un paraboloide ha questa proprietà, esso è equilatero.

21) Segue che le perpendicolari calate sopra una retta, dai punti di una retta sghemba con quella, formano un paraboloide equilatero, cui appartengono le rette date.

22) In un fascio di quadriche vi è, in generale, una sola quadrica equilatera; se ve ne son due, ogni quadrica del fascio è equilatera. Se le quadriche del fascio sono coni equilateri collo stesso vertice, le quattro generatrici base del fascio formano un quadrispigolo, in cui le coppie di facce opposte si segano ortogonalmente. Ad un triedro generico si possono circoscrivere infiniti coni equilateri; questi contengono tutti la retta, ove si segano i piani condotti per i tre spigoli perpendicolarmente alle facce opposte (cfr. n.° 231, es. 33)).

23) Un cono (od un iperboloide) dicesi *dualmente equilatero*, se è nullo il suo invariante quadratico J. Ad un cono siffatto possono circoscriversi infiniti triedri trirettangoli; e viceversa. Un iperboloide dualmente equilatero possiede infinite terne di piani asintotici mutuamente perpendicolari. La sfera di Monge (es. 14), 15)) di un tale iperboloide ha raggio nullo.

24) Il luogo dei vertici dei coni dualmente equilateri, circoscritti ad una quadrica, è la sfera di Monge (es. 14)). Partendo dalla condizione $J = 0$ ora esposta, si ritrovi l'equazione di questa sfera.

25) Il luogo di un punto, da cui si possono condurre ad una quadrica a centro terne di tangenti mutuamente perpendicolari, ossia il luogo dei vertici dei coni equilateri circoscritti alla quadrica, è una nuova quadrica concentrica alla data, cogli assi ugualmente diretti. Se la quadrica primitiva è un paraboloide, il detto luogo è un paraboloide rotondo collo stesso asse.

V — 26) In una quadrica a centro il segmento di una normale qualsiasi, compreso fra il piede ed un piano principale, moltiplicato per la distanza del centro dal relativo piano tangente, dà un prodotto costante (uguale al quadrato del semiasse perpendicolare al piano principale considerato).

27) Segue che i segmenti di una normale, compresi fra il piede e le intersezioni coi piani principali, hanno rapporti, che non variano al variare della normale.

28) Da un punto generico S dello spazio si conducano le normali ad una quadrica a centro. Dalle equazioni, cui devono soddisfare le coordinate dei piedi di quelle, si deduca che per questi punti passano tre cilindri di secondo ordine, di cui ciascuno contiene uno degli assi, i punti all'infinito degli altri due assi, ed il punto S. Due di questi cilindri hanno in comune una retta impropria ed una curva sghemba del 3.° ordine, la quale contiene i piedi delle dette normali. Osservando che i due cilindri e la quadrica data hanno in comune complessivamente otto punti, si conclude che « per un punto si possono condurre sei normali ad una quadrica a centro, i cui piedi stanno sopra una curva del terzo ordine, che passa per il punto dato, per il centro e per i punti all'infinito degli assi ».

Per i sei piedi (e per quella curva) passano infinite quadriche, le cui equazioni si ottengono combinando linearmente le equazioni dei tre cilindri; tra queste quadriche si trova un cono, col vertice nel centro della quadrica data, ed un cono col vertice in S. Segue: « le sei normali, condotte da un punto ad una quadrica a centro, appartengono ad un cono (equilatero) del secondo ordine col vertice in quel punto » (Chasles).

29) Per un punto generico dello spazio si possono condurre cinque normali ad un paraboloide; il cono del secondo ordine, che esse determinano, contiene la parallela all'asse del paraboloide condotta per il punto.

Capitolo V.

Sezioni circolari. — Quadriche confocali.

399. Sezioni circolari di una quadrica; ricerca sintetica. — Esporremo in quest'ultimo Capitolo alcune proprietà metriche, che mettono in luce le relazioni di una quadrica col cerchio assoluto dello spazio.

Proponiamoci anzitutto il problema delle *sezioni circolari*: « data una quadrica (che non sia una sfera), determinare i piani, che la segano lungo cerchi, o, brevemente, i *piani ciclici* ». Ricordiamo che la conica K, segata sopra una quadrica da un piano π, ha, come punti all'infinito, le intersezioni della retta all'infinito p_∞ del piano colla conica all'infinito H_∞ della superficie. Ora, se K è un cerchio, quei punti all' infinito devono esser i punti ciclici di π (n.° 155), devono adunque trovarsi (oltre che su H_∞) sul cerchio assoluto dello spazio, Ω_∞, che è il luogo dei punti ciclici di tutti i piani dello spazio. Quei due punti saranno perciò intersezioni delle coniche H_∞, Ω_∞, e la retta p_∞ del piano π richiesto sarà la congiungente di due tali intersezioni.

Ora fu già notato (n.° 382) che le due coniche H_∞, Ω_∞ si segano in quattro punti immaginari, i quali si distribuiscono in due coppie (M, M'), (N, N') di punti immaginari coniugati. Il quadrangolo completo, che ha quei punti come vertici, ha due lati opposti reali MM', NN', gli altri quattro immaginari. È però reale il triangolo diagonale PRS del quadrangolo, ed ha come vertici i punti all' infinito degli assi della quadrica.

Ricordando che ciascuno dei sei lati del detto quadrangolo è retta impropria di uno, anzi di infiniti piani ciclici paralleli, concludiamo:

Una quadrica è segata lungo cerchi dai piani di sei fasci impropri, dei quali però due soli si compongono di piani reali. I piani di ciascuno dei sei fasci sono paralleli ad uno degli assi della quadrica, mentre ogni asse è parallelo ai piani di due dei sei fasci. In particolare, i piani ciclici reali sono paralleli ad uno stesso asse.

Il risultato vale anche per i coni (a vertice proprio). In particolare, ogni cono reale ammette due serie di sezioni circolari reali, e può quindi riguardarsi come *cono circolare*, ottenuto mediante la proiezione di un cerchio da un punto esterno al piano di questo.

L' enunciato esige invece qualche avvertenza, sopra cui ritorneremo, nel caso dei paraboloidi. Fermandoci ora sulle quadriche a centro, possiamo anche dire:

Fra i piani diametrali di una quadrica a centro, sei, di cui due reali, segano la superficie lungo cerchi; per ogni asse della superficie passano due di quei sei piani; in particolare, per uno degli assi passano i due piani ciclici reali, i quali (come è visibile per ragioni di simmetria) risultano simmetrici rispetto ai due piani principali secantisi lungo quell' asse.

I piani ciclici di un fascio segano la quadrica lungo cerchi, i cui centri stanno sopra il diametro coniugato con quei piani, cioè sulla retta polare della retta impropria comune ai piani stessi (n.° 374). Poichè quest' ultima retta passa per il punto improprio di un asse della quadrica, quel diametro giacerà nel piano principale perpendicolare all'asse. In corrispondenza ai sei fasci di piani ciclici, avremo dunque sei diametri, giacenti, a coppie, nei tre piani principali della quadrica; tra questi diametri, due soli sono reali, e stanno in uno stesso piano principale. Ciascuno dei sei diametri incontra la quadrica in due punti, reali o immaginari, i cui piani tangenti segano la superficie lungo cerchi di raggio nullo, vale a dire lungo coppie di direzioni assolute (n.° 143). Ora un punto di una quadrica, il cui piano tangente seghi la superficie lungo due rette aventi direzioni assolute, dicesi *punto circolare* od *ombelico*; in esso la involuzione delle tangenti coniugate (n° 354) è circolare. Concludiamo:

Una quadrica a centro possiede dodici ombelichi, situati a coppie sopra sei diametri; ogni piano principale contiene quattro di quei punti. Dei dodici ombelichi, quattro al più sono reali, e stanno in uno stesso piano principale (perpendicolare all'asse per cui passano due piani ciclici reali). Precisamente, ricordando le relazioni tra rette polari esposte al n.° 367, si dimostra che *una quadrica a punti ellittici possiede effettivamente quattro ombelichi reali, mentre sopra una quadrica a punti iperbolici gli ombelichi sono tutti immaginari;* (ciò è chiaro, perchè un ombelico reale è un punto ellittico). La sfera naturalmente non è compresa in questo enunciato, giacchè ogni punto di essa è un ombelico.

Vediamo ora come questi risultati si modifichino nel caso dei paraboloidi. La conica all'infinito H_∞ di un paraboloide si scinde, come sappiamo, in due rette, reali o immaginarie, secondo che il paraboloide è iperbolico od ellittico. Queste costituiscono una coppia di lati opposti del quadrangolo $MM'NN'$ sopra considerato; ma i piani passanti per una di quelle rette non segano il paraboloide lungo cerchi propriamente detti, bensì lungo la retta impropria nominata ed una retta propria. Scartando questi piani, risulta che *un paraboloide possiede* *quattro fasci impropri di piani ciclici, dei quali fasci due si compongono di piani reali se il paraboloide è ellittico, e nessuno se il paraboloide è iperbolico* (1). I quattro fasci si distribuiscono in due coppie, in guisa che i piani di ciascuna coppia sono paralleli ad una delle rette, ove il piano tangente nel vertice del paraboloide è segato dai piani principali; ad una delle coppie appartengono i piani ciclici reali del paraboloide ellittico.

Il diametro coniugato ai piani ciclici di un fascio sega il paraboloide nel centro improprio ed in un punto proprio, che è un ombelico della superficie; dunque: *un paraboloide possiede quattro ombelichi, situati a coppie nei due piani principali: di questi punti, due (appartenenti ad uno stesso piano principale) sono reali nel paraboloide ellittico, nessuno nel paraboloide iperbolico.*

Osservazione. — Noi abbiamo tacitamente supposto che le quattro intersezioni M, M', N, N' della conica all'infinito H_∞ di una quadrica coll' assoluto Ω_∞ siano distinte tra loro. Ora fu già osservato (n.° 382) che può M venire a coincidere con N, e nel tempo stesso M' con N'; allora le due coniche H_∞, Ω_∞ si toccano nei due punti $M \equiv N$, $M' \equiv N'$, e la superficie è rotonda intorno ad un asse, che passa per il polo P della retta $MM' \equiv NN'$ rispetto alle dette coniche. In tal caso, le due serie di piani ciclici reali vengono a coincidere nell' unico fascio improprio dei piani passanti per la retta MM'; questi piani sono perpendicolari all'asse di rotazione, e segano la quadrica rotonda lungo i cerchi *paralleli* (n° 327). I punti di incontro dell' asse colla quadrica (ove esistano) sono gli ombelichi reali della superficie.

400. Sezioni circolari; ricerca analitica. — Le considerazioni precedenti possono tutte interpretarsi col mezzo delle coordinate. La ricerca analitica dei piani ciclici di una quadrica, di data equazione, porta, in sostanza, alla ricerca delle coniche degeneri nel fascio determinato dalla conica all'infinito H_∞ della superficie insieme coll'assoluto, porta dunque a risolvere quel-

(1) L' ultimo risultato è evidente, perchè il paraboloide iperbolico è segato dai piani reali lungo iperboli, o parabole (n.° 370).

l' equazione cubica $\Delta(k) = 0$, che abbiamo già incontrato più volte (n.[i] 378, 394). Il procedimento si semplifica notevolmente, se si parte dall' equazione normale della quadrica. Noi lo esporremo nel caso dell'ellissoide, ed enunceremo i risultati relativi agli altri casi.

Sia dato un ellissoide non rotondo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

i cui assi possiamo supporre scelti in guisa che sia

$$a > b > c. \tag{2}$$

La conica all'infinito H_∞ dell' ellissoide ha (nel piano $t = 0$) l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{3}$$

mentre (nello stesso piano) l'assoluto Ω_∞ ha l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{4}$$

La conica generica del fascio, determinato da H_∞, Ω_∞,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - k(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

ossia

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - k\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - k\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - k\right) = 0,$$

degenera in corrispondenza ai tre valori del parametro

$$k = \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}.$$

Essa, ad es., per il valore $k = \frac{1}{b^2}$, si scinde nelle due rette

$$x\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \pm z\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} = 0,$$

ossia

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \pm \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2} = 0, \tag{5}$$

rette che son reali in virtù delle (2); agli altri due valori di k corrispondono invece, come subito si vede, coppie di rette immaginarie. *La stessa equazione* (5), ove si faccia astrazione dalla $t = 0$, rappresenta i due piani proiettanti dall' origine quelle due rette, *rappresenta i due piani ciclici reali condotti per il* *centro dell' ellissoide. Essi si segano lungo l'asse* y, *che è l'asse di lunghezza intermedia.*

I diametri coniugati ai due piani (5) hanno le equazioni (n.° 372)

$$y = 0, \qquad \frac{x}{a\sqrt{a^2 - b^2}} = \pm \frac{z}{c\sqrt{b^2 - c^2}},$$

e segano l'ellissoide (1) in quattro punti, le cui coordinate si ottengono, risolvendo il sistema formato dalle due equazioni ora scritte (presa la seconda coll'uno e coll'altro segno) e dall'equazione (1). Fatti i calcoli, si ottengono così *le coordinate dei quattro ombelichi reali dell' ellissoide:*

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad 0, \quad \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\right).$$

Similmente si dimostra che *i piani ciclici reali condotti per il centro di un iperboloide ad una falda passano per il maggiore dei due assi trasversi; e gli analoghi piani, relativi all' iperboloide a due falde, passano per il maggiore dei due assi non trasversi.* Dei due iperboloidi, solo il secondo ha quattro ombelichi reali nel piano principale perpendicolare all' asse nominato.

Per il paraboloide ellittico

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

con $p > q > 0$, i due piani ciclici reali uscenti dal vertice hanno le equazioni

$$y\sqrt{p - q} \pm z\sqrt{q} = 0,$$

e i due ombelichi reali, propri, hanno le coordinate

$$\left(0, \quad \pm\sqrt{q\,(p - q)}, \quad \frac{1}{2}(p - q)\right).$$

Le due serie di sezioni circolari del cono generale di 2° ordine furono scoperte da DESCARTES (1648), mentre APOLLONIO aveva insegnato a determinare una delle serie, quando l'altra era nota. D'ALEMBERT (1780) dimostrò che anche l'ellissoide possiede due serie di sezioni circolari. La ricerca generale, per tutte le specie di quadriche, fu fatta da MONGE e HACHETTE (1802); le considerazioni sintetiche del n.° 399 sono dovute a PONCELET (1822).

401. Quadriche a centro confocali. — Ad una nuova serie di proprietà metriche notevoli delle quadriche si giunge, quando si cerchi di estendere a queste superficie la nozione di fuochi, che presenta tanto interesse nello studio delle coniche. Giova qui, per procedere nel modo più semplice, partire dal concetto di *coniche confocali*, e cercare l' equivalente nello spazio.

Ricordiamo perciò (n.° 262) che quelle coniche formano una schiera, alla quale appartiene, come conica inviluppo degenere, la coppia dei punti ciclici. Ora, similmente, possiamo formare la schiera di quadriche (n.° 369), che è determinata da una quadrica generica assegnata e dal cerchio assoluto, riguardato come *quadrica limite*, ossia quadrica inviluppo degenere; tutte le quadriche della schiera si diranno *confocali*. In altre parole: *due quadriche si dicono confocali, se della schiera che le contiene fa parte il cerchio assoluto.*

Le numerose proprietà delle quadriche confocali si ottengono subito, ricordando le proprietà proiettive delle schiere di quadriche (n.° 369), e tenendo conto della particolarità metrica, che caratterizza la schiera, di cui ora vogliamo occuparci. Ma per procedere nel modo più completo, cominceremo collo stabilire le equazioni delle quadriche confocali.

Partiamo dall' equazione di una quadrica in coordinate di punti; supporremo, per semplicità, ridotta la equazione a forma normale, e lascieremo da parte per il momento il caso dei paraboloidi. Non occorre invece distinguere tra le varie specie di quadriche a centro, giacchè, come vedremo, ogni schiera di quadriche a centro confocali contiene ellissoidi ed iperboloidi delle due specie. Possiamo dunque, senza introdurre restrizioni, supporre che la superficie data sia un ellissoide reale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

i cui assi riterremo scelti in guisa, che sia

$$a > b > c; \tag{2}$$

(veniamo così ad escludere il caso delle quadriche rotonde, che presenta minor interesse). Il nostro ellissoide, considerato come inviluppo di piani, ha (n.° 388) l'equazione

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1. \tag{3}$$

D' altra parte, l'assoluto è rappresentato, in coordinate di piani, da

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0, \tag{4}$$

come risulta dall'Oss. del n.° 388 applicata al cono

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Le quadriche inviluppi (3), (4) determinano una schiera, la cui quadrica generica ha l'equazione plückeriana

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 - k(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

ossia

$$(5) \quad (a^2 - k)u^2 + (b^2 - k)v^2 + (c^2 - k)w^2 - 1 = 0,$$

e quindi l'equazione cartesiana

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} + \frac{z^2}{c^2 - k} = 1.$$

Al variare di k, la quadrica (5) o (6) descrive la schiera delle quadriche confocali alla data.

La (6) ci fa vedere anzitutto che *le quadriche confocali hanno lo stesso centro e gli stessi piani principali; esse segano ciascuno di questi in una schiera di coniche confocali*; ad es., le sezioni col piano xy hanno, come fuochi, due punti sull'asse x, di ascisse $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$.

La (6) fa vedere, in secondo luogo, che tra quelle quadriche vi sono effettivamente quadriche a centro di tutte le specie, come avevamo affermato. Infatti, tenendo conto delle disuguaglianze (2), apparisce che, ai valori di k compresi negli intervalli qui sotto indicati, corrispondono le quadriche nominate di fronte:

$-\infty < k < c^2$, ... ellissoidi reali,
$c^2 < k < b^2$, ... iperboloidi ad una falda,
$b^2 < k < a^2$, ... iperboloidi a due falde,
$a^2 < k < +\infty$, ... ellissoidi immaginari.

Ai limiti degli intervalli corrispondono quadriche inviluppi degeneri, cioè coniche riguardate come inviluppi di piani. Ad es., per $k = c^2$, la (5) ci dà

$$(a^2 - c^2)u^2 + (b^2 - c^2)v^2 = 1,$$

che è (n.° 244) l'equazione plückeriana della ellisse reale

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

situata nel piano $z = 0$. Si può formar così la tabella:

$k = c^2$, ... ellisse reale $\dfrac{x^2}{a^2 - c^2} + \dfrac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$ nel piano xy,

$k = b^2$, ... iperbole $\dfrac{x^2}{a^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$ nel piano xz,

$k = a^2$, ... ellisse immag. $\dfrac{y^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - c^2} = -1$ nel piano yz,

$k = \pm \infty$.. cerchio assoluto nel piano all' infinito.

Son queste le quattro coniche costituenti le quadriche inviluppi degeneri, che una schiera, come già sappiamo, contiene (n.° 369, f)). Le prime tre di esse, o talora solo le prime due, che sono reali, diconsi *coniche focali* della schiera. Dunque:

Una schiera di quadriche a centro confocali possiede tre coniche focali, appartenenti ai tre piani principali: *due di queste coniche sono reali, e precisamente una ellisse, situata nel piano che contiene l' asse maggiore e l' asse medio di un qualsiasi ellissoide della schiera, ed una iperbole, nel piano dell' asse maggiore e dell' asse minore del detto ellissoide.*

La ellisse focale

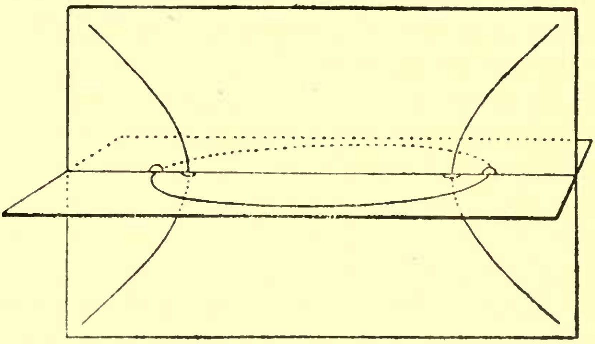
$$\text{(7)} \qquad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad z = 0$$

ha i fuochi nei punti $\left(\pm \sqrt{a^2 - b^2},\ 0,\ 0\right)$, ove cadono i fuochi delle coniche segate sul piano xy dalle quadriche confocali; gli stessi punti sono vertici dell' asse trasverso nella iperbole focale

$$\text{(8)} \qquad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad y = 0,$$

i cui fuochi $\left(\pm \sqrt{a^2 - c^2},\ 0,\ 0\right)$ sono, alla loro volta, i vertici dell' asse maggiore della ellisse (7), e son pure i fuochi delle sezioni delle quadriche confocali col piano xz. Conviene ricordare una parte di questo risultato così:

La ellisse e la iperbole focale hanno gli assi focali situati *sopra una stessa retta, ove sta l' asse maggiore di ogni ellissoide della schiera; i fuochi di ciascuna delle due curve sono vertici dell' asse focale per l' altra.*



Riprendendo ora in esame le due tabelle precedenti, ove son considerate le variazioni del parametro k, noi possiamo raffigurarci, nel seguente modo, un sistema di quadriche a centro confocali. Si attribuisca anzitutto a k un valore compreso tra $-\infty$ e c^2; la (6) ci darà in corrispondenza un ellissoide, i cui semiassi valgono

$$\sqrt{a^2 - k}\,, \quad \sqrt{b^2 - k}\,, \quad \sqrt{c^2 - k}\,,$$

e decrescono al crescere di k. Quando k raggiunge il valore c^2, il minore dei tre semiassi, $\sqrt{c^2 - k}$, diretto secondo z, si annulla, l'ellissoide si schiaccia, e si riduce ad un disco, che ricopre due volte la regione del piano xy interna alla ellisse focale (7). Continuando k a crescere nell' intervallo da c^2 a b^2, si ottengono iperboloidi ad una falda di semiassi trasversi decrescenti $\sqrt{a^2 - k}$, $\sqrt{b^2 - k}$, diretti secondo x, y; le ellissi di gola di questi iperboloidi cadono tutte nell' interno della ellisse focale. Se poi k raggiunge il valore b^2, il minore dei due semiassi trasversi, $\sqrt{b^2 - k}$, si annulla, e l' iperboloide si schiaccia sul piano xz, e viene a ricoprire doppiamente la regione di questo piano esterna alla iperbole focale (8). Finalmente, quando k cresce da b^2 ad a^2, si hanno iperboloidi a due falde, in cui l' unico semiasse trasverso, $\sqrt{a^2 - k}$, va decrescendo, ed è diretto secondo x; questi iperboloidi segano il piano xz lungo iperboli giacenti nella regione ora nominata. Per $k = a^2$ si ha l'ellisse immaginaria del piano yz, e per $k > a^2$ si ottengono quadriche immaginarie [1], [2].

Premesse queste nozioni, veniamo a tradurre, pel nostro caso, le proprietà generali delle schiere di quadriche.

La proprietà *a*) del n.° 369 ci dà

a) *Tra le infinite quadriche confocali a una data, ve n'è una sola che tocca un piano generico assegnato*; *quella superficie è sempre reale, se tale è il piano*, giacchè essa corrisponde a quel valore di k (certo minore di a^2), che soddisfa la (5), ove siano poste, in luogo di u, v, w, le coordinate del piano.

Per una retta generica r dello spazio conduciamo le coppie di piani tangenti alle singole quadriche confocali; quelle coppie costituiscono una involuzione (n.° 369, *b*)), cui appartiene la coppia dei piani passanti per r e tangenti all'assoluto. I piani doppi dell'involuzione, dovendo dividere armonicamente anche questa coppia, risultano perpendicolari tra loro e reali; essi d'altra parte toccano (n.° 369, *c*)) l'una o l'altra delle due quadriche della schiera, che sono tangenti alla retta. Seguono dunque i teoremi:

b) *Le coppie di piani tangenti, condotte per una retta alle infinite quadriche confocali* (*e alle loro coniche focali*), *formano una involuzione simmetrica* (cfr. n.° 262, *c*)).

c) *Fra le infinite quadriche confocali ve ne son due, sempre reali, che toccano una retta generica assegnata*; *i relativi piani tangenti, passanti per la retta, sono perpendicolari tra loro.*

Il teorema *d*) del n.° 369 ci dà:

d) *I coni circoscritti, da un punto generico dello spazio, alle quadriche confocali formano una schiera, cui appartiene il*

---

[1] Si possono seguire queste osservazioni, e le successive, sulla fig. 6 della Tavola annessa al volume, la qual figura rappresenta tre quadriche confocali, delle tre specie.

[2] Se si fa invece decrescere k da a^2 a $-\infty$, si ottiene anzitutto un iperboloide a due falde, che per $k = b^2$ viene a ricoprire due volte la regione del piano xz *interna* all'iperbole focale (8), poi un iperboloide ad una falda, che per $k = c^2$ si schiaccia sulla regione del piano xy *esterna* all'ellisse focale (7), finalmente un ellissoide reale.

cono delle direzioni assolute uscenti dal punto; una siffatta schiera dicesi *schiera di coni confocali.*

Per quel punto passano (n.° 369, *e*)) tre delle quadriche confocali, i cui piani tangenti nel punto costituiscono un triedro autoconiugato rispetto alle quadriche stesse ed ai coni nominati. Il triedro è dunque trirettangolo (perchè autoconiugato rispetto al cono delle direzioni assolute), ed è formato dai piani principali, sempre reali, di ciascuno di quei coni (n.° 382). Dunque:

e) *Fra le infinite quadriche confocali ve ne son tre, sempre reali, che passano per un punto generico assegnato; i relativi piani tangenti in quel punto sono perpendicolari a due a due.*

Segue che, se due quadriche confocali si segano lungo una curva, i rispettivi piani tangenti, in ciascun punto di questa, sono perpendicolari; le due quadriche *si segano ortogonalmente* lungo la curva. Il fatto che per ogni punto dello spazio passano tre quadriche confocali, secantisi ivi ortogonalmente a due a due, si esprime dicendo che le quadriche confocali formano un (particolare) *sistema triplo ortogonale di superficie.*

Ridimostriamo, e completiamo per via analitica, la prima parte del teorema *e*). Le quadriche confocali, passanti per un punto generico assegnato, corrispondono a quei valori di k, che soddisfano l'equazione (6), nella quale x, y, z indichino le coordinate del punto dato. Liberando da frazioni la (6), si ottiene

$$(9)\quad \begin{aligned}&(a^2-k)(b^2-k)(c^2-k)-x^2(b^2-k)(c^2-k)\\ &\quad -y^2(c^2-k)(a^2-k)-z^2(a^2-k)(b^2-k)=0,\end{aligned}$$

equazione cubica in k, che ha tre radici reali k_1, k_2, k_3, perchè il primo membro assume valori di segni alternati $(+, -, +, -)$, quando a k si attribuiscano successivamente i valori $-\infty$, c^2, b^2, a^2. Dagli intervalli, ove vengono a trovarsi le radici, si deduce che:

e′) *Le tre quadriche confocali reali, passanti per un punto generico assegnato, sono: un ellissoide, un iperboloide ad una* *falda, ed un iperboloide a due falde* (¹). Donde segue che quadriche confocali dello stesso nome non si segano in punti reali, mentre si vedrebbe che quadriche confocali di nome diverso si segano lungo curve reali.

Ad ogni punto $P(x, y, z)$ dello spazio corrispondono, mediante la (9), tre valori reali k_1, k_2, k_3, appartenenti agli intervalli $(-\infty, c^2)$, (c^2, b^2), (b^2, a^2), e relativi alle tre quadriche confocali che passano per il punto. Viceversa, dati tre valori reali k_1, k_2, k_3, appartenenti a quegli intervalli, si hanno tre quadriche confocali, che si segano in otto punti $P(\pm x, \pm y, \pm z)$, dei quali uno solo sta, ad es., nel triedro che ha come spigoli i tre semiassi positivi. In virtù di questa corrispondenza, si assumono talora i tre numeri k_1, k_2, k_3 come coordinate di un punto P variabile nello spazio, o nel triedro suddetto. Il sistema delle *coordinate ellittiche*, a cui così si perviene, viene applicato utilmente in alcune questioni di geometria, di meccanica ecc.

Riprendiamo in esame le proprietà generali delle schiere di quadriche. I teoremi *f*), *g*) del n.° 369 ci condurrebbero alle coniche focali della nostra schiera, delle quali abbiamo già discorso. Il teorema *h*) (n.° 369) ci dà invece una notevolissima proprietà delle dette coniche. Si assuma infatti sopra una, K, delle coniche focali un punto P, e da esso si circoscrivano coni alle quadriche confocali; questi, tra cui si trova il cono delle direzioni assolute uscenti da P, hanno in comune, secondo il teorema *h*), due generatrici ed i piani tangenti lungo queste, i quali piani si segano nella tangente in P alla conica K.

(¹) Se le quadriche corrispondenti ai valori k_1, k_2 del parametro hanno in comune il punto (x_0, y_0, z_0), sussistono le relazioni

$$\frac{x_0^2}{a^2-k_1}+\frac{y_0^2}{b^2-k_1}+\frac{z_0^2}{c^2-k_1}=1, \quad \frac{x_0^2}{a^2-k_2}+\frac{y_0^2}{b^2-k_2}+\frac{z_0^2}{c^2-k_2}=1,$$

dalle quali, mediante sottrazione, e soppressione del fattore non nullo $k_1 - k_2$, si ricava

$$\frac{x_0^2}{(a^2-k_1)(a^2-k_2)}+\frac{y_0^2}{(b^2-k_1)(b^2-k_2)}+\frac{z_0^2}{(c^2-k_1)(c^2-k_2)}=0.$$

Ora si riconosce esser questa la condizione di perpendicolarità dei piani tangenti (n.° 388) alle due quadriche in (x_0, y_0, z_0). Resta così dimostrata analiticamente anche la seconda parte del teorema *e*).

Ora sappiamo che un cono, il quale sia bitangente al cono delle direzioni assolute uscenti dal suo vertice, è rotondo, ed ha, come asse di rotazione, la retta intersezione dei piani tangenti comuni ai due coni (n.° 382). Dunque:

h) *I coni circoscritti alle quadriche confocali, da un punto di una conica focale, sono rotondi, ed hanno, come asse comune di rotazione, la tangente a quella conica in quel punto.*

Anzi i punti delle coniche focali sono i soli (n.° 369, *i*)), che godano della proprietà enunciata.

402. Paraboloidi confocali. — Vediamo rapidamente come queste proprietà si estendano ai paraboloidi.

Dato un paraboloide, ad es. ellittico, non rotondo,

$$(1') \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

con $p > q > 0$, e scrittane l'equazione tangenziale (n.° 392)

$$(3') \qquad pu^2 + qv^2 - 2w = 0,$$

si consideri la schiera determinata da esso col cerchio assoluto. La quadrica generica della schiera ha l'equazione tangenziale

$$(5') \qquad (p-k)u^2 + (q-k)v^2 - (kw+2)w = 0,$$

e l'equazione cartesiana

$$(6') \qquad \frac{x^2}{p-k} + \frac{y^2}{q-k} = 2z - k.$$

Variando k da $-\infty$ a $+\infty$, si ottengono dunque *paraboloidi ellittici* finchè $k < q$, *paraboloidi iperbolici* se $q < k < p$, e di nuovo *paraboloidi ellittici* (coll'asse diretto in senso inverso rispetto ai primi) se $k > p$. In corrispondenza al valore $k = q$, si ha una *parabola focale*

$$x^2 = (p-q)(2z-q)$$

nel piano principale $y = 0$; e per $k = p$ si ha una *seconda parabola focale*

$$y^2 = -(p-q)(2z-p)$$

nel piano principale $x = 0$. Le due parabole hanno gli assi sovrapposti (sulla retta z), ma rivolti in senso opposto, ed hanno lo stesso parametro $p - q$. *Il fuoco della prima parabola* $\left(0, 0, \frac{p}{2}\right)$ *è il vertice della seconda, e viceversa.*

Alla schiera dei paraboloidi confocali si applicano immutati i teoremi *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *h*) del n.° precedente. Il teorema *e'*) diviene:

Per un punto passano tre paraboloidi confocali, di cui due ellittici ed uno iperbolico, secantisi ortogonalmente nel punto.

403. Coniche focali di una quadrica. — Data una quadrica, è perfettamente determinata la schiera di quadriche confocali, a cui essa appartiene; son determinate quindi le coniche focali della schiera, che possono dirsi *coniche focali della quadrica* primitiva. Esse sono caratterizzate dalla proprietà seguente, che discende dal teorema *h*) del n.° 401; nell' enunciato si tien conto soltanto delle due coniche reali.

Il luogo dei punti, da cui si possono circoscrivere coni rotondi ad una quadrica, si compone di due coniche reali (dette focali), giacenti in due piani principali della quadrica, ed aventi gli assi focali situati sopra uno stesso asse di quella. Precisamente, se la quadrica ha centro, l' asse nominato è il maggiore degli assi trasversi o l' unico asse trasverso; delle due coniche focali una è ellisse, l' altra è iperbole; i fuochi di ciascuna sono vertici dell' asse focale per l' altra. Se la quadrica è un paraboloide, le due coniche focali sono parabole, aventi ciascuna il vertice nel fuoco dell' altra.

I coni rotondi, di cui parla il teorema, sono poi reali o immaginari, secondo che i relativi vertici sono esterni od interni alla quadrica.

Le due coniche focali reali e la conica focale immaginaria di una quadrica a centro segano la superficie complessivamente in dodici punti. Si dimostra, per via sintetica o analitica, che son questi i dodici ombelichi della quadrica [1]; sono reali, nell' ellissoide, gli ombelichi segati dalla iperbole focale, e, nell' iperboloide a due falde, quelli segati dall'ellisse focale. Considerazioni analoghe valgono per i paraboloidi.

404. Coniche focali coniugate. — Le osservazioni del n.° precedente continuano a sussistere, anche quando si parta da

---

[1] Infatti il cono *rotondo*, circoscritto da uno di quei punti alla quadrica, degenera, come inviluppo, in due fasci, i cui assi sono le direzioni assolute uscenti dal punto nel piano tangente alla quadrica (n.° 355).

una quadrica inviluppo *degenere*, cioè da una conica, diversa dal cerchio assoluto, giacchè quella conica, insieme coll' assoluto, determina pienamente una schiera di quadriche confocali, di cui essa è una conica focale. Ciò segue senz' altro dalla definizione di schiera, e risulta pure dal notare che, ad es., la ellisse

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \qquad z = 0$$

appartiene (come conica focale) alla sola schiera di quadriche confocali

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1,$$

dove λ è un parametro; basta, per assicurarsene, identificare l' equazione della ellisse alla (7) del n.° 401. Riguardando dunque una data conica come conica focale di una schiera di quadriche confocali, restano determinate le altre due coniche focali della schiera, delle quali una è reale, e dicesi *conica focale coniugata della primitiva*. A queste coniche focali coniugate si applica ancora il teorema del n.° precedente, coll' avvertenza però che il cono circoscritto ad una conica, da un punto della conica stessa, è il piano della curva, contato due volte, e non ha quindi alcun interesse, mentre il cono circoscritto alla conica, da un punto generico della conica focale, è il cono proiettante quella curva da questo punto.

Tenendo conto solo di questi ultimi coni, si giunge al seguente notevolissimo teorema:

Il luogo dei punti, da cui una conica reale è proiettata mediante coni rotondi, è una seconda conica reale, la quale, a sua volta, è proiettata mediante coni rotondi dai punti della conica primitiva. I piani delle due coniche si segano ortogonalmente lungo l'asse focale comune alle due curve, ed i fuochi di ciascuna sono vertici dell'asse focale per l'altra. Se la conica primitiva è una ellisse, l'altra è una iperbole, e viceversa; se quella è una parabola, sarà una parabola anche la seconda.

Risulta da questo teorema che per una conica qualsiasi passano infiniti coni rotondi. Per conseguenza, la definizione, che i geometri greci anteriori ad Apollonio davano delle coniche come sezioni di coni *rotondi*, non introduceva in realtà alcuna restrizione.

Sebbene gli ellissoidi confocali si presentino in una ricerca di meccanica celeste fatta da Laplace (1799), si può affermare che la teoria delle quadriche confocali fu fissata nelle sue linee principali da Dupin (1813), il quale scoprì le coniche focali, e dimostrò (contemporaneamente a Binet) che le dette quadriche formano un sistema triplo ortogonale. Però l'osservazione (presa qui come definizione), che quelle quadriche costituiscono una particolare schiera, è dovuta a Chasles (1837).

Che le coniche focali siano luoghi di vertici di coni rotondi, circoscritti alle quadriche confocali, fu dimostrato da Steiner (1826), mentre il caso particolare, relativo ai coni rotondi passanti per una data conica, era già noto a Dupin (1813).

Esercizi. I — 1) Un cono quadrico di vertice O, ed il cono assoluto avente lo stesso vertice determinano *un fascio di coni conciclici* ed *una schiera di coni confocali*, fascio, o schiera, ottenuti proiettando da O il fascio o, rispettivamente, la schiera di coniche determinati, sul piano all'infinito, dalle coniche all'infinito dei due coni. I coni del fascio, o della schiera, hanno i piani principali e gli assi in comune (piani principali ed assi del fascio o della schiera). La polarità ortogonale nella stella O muta i coni conciclici in coni confocali, e viceversa.

2) Nel fascio di coni conciclici vi sono tre coni, che degenerano in coppie di piani *ciclici*, secantisi lungo i tre assi del fascio; di queste coppie una sola si compone di piani reali. Ogni piano parallelo ad uno dei piani ciclici sega ciascun cono del fascio lungo un cerchio. Due piani paralleli a due piani ciclici costituenti una delle dette coppie si chiamano *antiparalleli*; essi segano ciascun cono lungo due cerchi, che appartengono ad una sfera. Una sfera condotta per O, in guisa da toccare ivi uno dei piani ciclici, sega tutti i coni del fascio lungo cerchi, i cui piani sono paralleli tra loro ed antiparalleli a quel piano ciclico.

3) Un piano generico condotto per O tocca due coni del fascio lungo due generatrici, che risultano perpendicolari tra loro.

4) Se $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 0$, con $\alpha > \beta > \gamma$, è l'equazione cartesiana ortogonale di un cono, e quindi $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0$ è l'equazione plückeriana del cono (o meglio della sua conica all'infinito), i coni confocali con esso sono rappresentati dall'una o dall'altra delle due equazioni:

$$(\alpha + \lambda)u^2 + (\beta + \lambda)v^2 + (\gamma + \lambda)w^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{\alpha + \lambda} + \frac{y^2}{\beta + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma + \lambda} = 0,$$

dove λ è un parametro. Si esamini la posizione e la natura dei coni, che corrispondono ai valori di λ compresi negli intervalli aventi per estremi $(-\infty, -\alpha, -\beta, -\gamma, +\infty)$.

5) Alla schiera dei coni confocali appartengono tre coni, di cui ciascuno degenera in due fasci di piani; gli assi di tali fasci escono da O, e

si trovano distribuiti a coppie sui tre piani principali della schiera. Una sola di queste coppie si compone di rette reali

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{\alpha - \beta} - \frac{z^2}{\beta - \gamma} = 0.$$

A queste rette (e talvolta anche alle rimanenti quattro) si dà il nome di *rette focali* della schiera, o di ciascun cono componente la schiera (MAGNUS).

6) Dato un cono, le sue rette focali sono completamente determinate, e possono definirsi direttamente mediante una delle seguenti proprietà: *a)* i piani tangenti ad un cono condotti per una retta focale toccano il cerchio assoluto; *b)* per una retta focale passano infinite coppie di piani coniugati rispetto al cono e perpendicolari tra loro (CHASLES).

7) Dalla proprietà *b)* segue che un piano, perpendicolare ad una retta focale di un cono, sega questo lungo una conica, avente un fuoco su quella retta.

8) Le coppie di piani tangenti, che si possono condurre ai coni confocali da una retta p passante per O, formano una involuzione simmetrica, cui appartiene la coppia congiungente p coi due raggi focali (reali) della schiera. I piani doppi, perpendicolari tra loro, della involuzione sono tangenti, lungo p, ai due coni della schiera passanti per p.

9) Segue che il piano tangente ad un cono lungo una generatrice biseca il diedro dei piani congiungenti quella generatrice colle rette focali del cono.

10) Segue ancora che due coni confocali, aventi una generatrice in comune, si segano ortogonalmente lungo quella.

11) Le rette simmetriche di una retta focale di un cono, rispetto ai piani tangenti al cono, formano un cono rotondo, che ha per asse l'altra retta focale del cono primitivo.

12) Segue: « è costante la somma o la differenza degli angoli, che una generatrice qualsiasi di un cono forma colle due rette focali » (MAGNUS); comparisce la somma o la differenza, secondo che si adoperano certi angoli o gli angoli adiacenti.

13) L'ultimo teorema si dimostra per via analitica, cercando il luogo di una retta per O, che formi con due rette fisse, uscenti da O, angoli aventi una somma o differenza costante. Posto che le rette fisse si trovino nel piano $y = 0$, e formino coll'asse x gli angoli φ, $\pi - \varphi$, posto inoltre che la somma o differenza costante sia ω, l'equazione del luogo risulta

$$\frac{x^2}{\cos\omega - 1} + \frac{y^2}{\cos\omega + \cos 2\varphi} + \frac{z^2}{1 + \cos\omega} = 0;$$

si tratta effettivamente di un cono, il quale, al variare di ω, descrive una schiera di coni confocali.

14) I teoremi sulle rette focali si trasformano, mediante la polarità ortogonale nella stella O (es. 1)) in teoremi sui piani ciclici. Si dimostri, ad es., per questa via che « è costante la somma o la differenza dei diedri formati da un piano variabile tangente ad un cono coi due piani ciclici reali » (CHASLES).

II — 15) Il luogo dei poli di un piano π, rispetto ad una schiera di quadriche confocali, è una retta p normale al piano π nel punto, ove π è toccato da una quadrica della schiera; p è dunque normale a questa quadrica in quel punto. La retta p contiene, in particolare, i poli delle rette sezioni di π coi piani principali, rispetto alle coniche focali appartenenti a quei piani (n.° 369, es. 28)).

16) Segue: « sopra un piano principale di una quadrica rimane determinata una polarità, in cui si corrispondono le tracce di ogni piano π, e della retta p perpendicolare e coniugata con π rispetto alla quadrica; la curva fondamentale della polarità piana è la conica focale giacente su quel piano principale » (Chasles, Reye; cfr. n.° 254).

17) Segue pure dal teorema 15): « due piani perpendicolari e coniugati rispetto ad una quadrica, sono coniugati rispetto ad ogni quadrica confocale; essi segano sopra un piano principale coppie di rette coniugate rispetto alla relativa conica focale ».

18) Un triedro trirettangolo autoconiugato rispetto ad una quadrica è pure autoconiugato rispetto alle quadriche confocali. Ogni punto generico S dello spazio è vertice di un siffatto triedro; esso è formato dai piani principali del cono circoscritto da S ad una (qualsiasi) quadrica della schiera, o dai piani tangenti alle tre quadriche della schiera passanti per S. Se però S appartiene ad una conica focale, esistono infiniti triedri siffatti di vertice S, aventi, come spigolo comune, la tangente a quella conica in S.

19) Una retta, per cui passino (due e quindi) infinite coppie di piani coniugati rispetto ad una quadrica, dicesi *asse focale* di quella quadrica (e di ogni quadrica confocale). Le tangenti alle coniche focali sono, ad es., assi focali (Plücker). Un asse focale è retta focale per il cono circoscritto da un suo punto ad una qualsiasi quadrica della schiera; e viceversa.

20) Per ogni punto generico S dello spazio passano sei assi focali, tra cui due soli reali, che sono le rette focali dei coni confocali circoscritti da S alle quadriche della schiera.

21) Gli assi focali reali di una schiera di quadriche confocali sono le rette degli iperboloidi rigati appartenenti alla schiera (Chasles).

III — 22) Il cono circoscritto ad una quadrica da un fuoco F, cioè da un punto di una conica focale, tocca la quadrica lungo una conica situata nel piano polare di F, che è perpendicolare al piano principale contenente F. Quel cono è rotondo (n.° 401, h)) e, tocca quindi il cono assoluto di vertice F lungo due generatrici aventi direzioni assolute; il piano di queste è normale all'asse del primo cono, cioè alla tangente in F alla conica focale. Segue: « il cono assoluto, che ha per vertice un fuoco F di una quadrica, è tangente alla quadrica in due punti, la cui congiungente f (*direttrice* relativa al fuoco F) è perpendicolare al piano principale contenente F, e sta nel piano normale in F alla conica focale, cui F appartiene. Questo piano sega la quadrica lungo una conica, di cui F è un fuoco ed f è la relativa direttrice » (Chasles).

23) Il cono assoluto di centro F sega la quadrica lungo due coniche (n.° 369, es. 15)) (cerchi immaginari) appartenenti ai due piani ciclici passanti

per la direttrice f. Indicando brevemente le equazioni di questi due piani con $U = 0$, $V = 0$, se sono reali, o con $U \pm i\,V = 0$, se sono immaginari, e scegliendo come origine il fuoco F, si conclude: « la equazione di una quadrica avente un fuoco nella origine può scriversi sotto una delle forme:

$$(\alpha) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = UV,$$

$$(\beta) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = U^2 + V^2,$$

dove U e V sono polinomi reali lineari in x, y, z ». La (α), o la (β), corrispondono alle ipotesi che l'origine appartenga ad una conica focale secante la superficie in ombelichi reali. o rispettivamente immaginari; ad es., nell'ellissoide la (α) si riferisce alla iperbole focale, la (β) alla ellisse focale.

24) L'equazione (α), nel caso di un ellissoide, esprime che « il quadrato della distanza di un punto generico di un ellissoide da un fuoco, appartenente all'iperbole focale, sta in un rapporto costante col prodotto delle distanze di quel punto dai due piani ciclici, condotti per la direttrice corrispondente al fuoco ». (Salmon, Amiot). Il rapporto vale $b^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)$, e non dipende quindi dal fuoco, che si fissa sulla iperbole focale. Proprietà analoghe valgono per le altre quadriche.

25) L'equazione (β), nel caso dell'ellissoide, può interpretarsi così: « la distanza di un punto variabile di un ellissoide da un fuoco, preso sulla ellisse focale, sta in un rapporto costante colla distanza del punto dalla direttrice corrispondente a quel fuoco, purchè questa distanza venga valutata parallelamente ad un piano ciclico »; (si intenda cioè la distanza tra il punto nominato e la intersezione della direttrice con un piano ciclico reale condotto per il punto). Analogamente per le altre quadriche. (Mac Cullagh). I teoremi 24), 25) conducono, invertiti, a generazioni delle quadriche analoghe alla nota generazione di una conica mediante un fuoco e la direttrice (n.° 162, b)).

IV — 26) Sopra due ellissoidi confocali $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1$, si dicono *corrispondenti* due punti $P(x, y, z)$, $P'(x, y, z)$, tali che

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{A}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{B}, \quad \frac{z}{c} = \frac{Z}{C}.$$

I punti P, P' si corrispondono effettivamente in una affinità, che trasforma un ellissoide nell'altro. Ora si dimostri che le due quadriche confocali all'ellissoide, che passano per P, passano anche per P'. Se dunque il secondo ellissoide si porta, variando, sugli infiniti ellissoidi confocali col primo, il luogo del punto P' è un tratto della curva intersezione dei due iperboloidi confocali passanti per P. Definizioni e proprietà analoghe valgono per due iperboloidi confocali dello stesso nome.

27) Se (P, P') e (Q, Q') sono due coppie di punti corrispondenti di due ellissoidi confocali, vale la relazione $PQ' = P'Q$ (Ivory).

28) Se P, Q sono due punti di una generatrice di un iperboloide rigato, e P', Q' sono i due punti corrispondenti di una generatrice di un iperboloide rigato confocale, vale pure la relazione $PQ = P'Q'$; in altre parole, l'affinità sopra nominata, che muta l'una superficie nell'altra, sta-

bilisce una uguaglianza sopra le generatrici corrispondenti (cfr. n°. 339, es. 9)). Od anche: sono uguali i segmenti di due generatrici corrispondenti dei due iperboloidi, compresi tra due ellissoidi confocali con quelli.

29) Segue che, se con due generatrici e due direttrici di un iperboloide rigato si forma un quadrilatero semplice sgembo $PQRS$, i lati di questo risultano uguali ai lati $P'Q'R'S'$ del quadrilatero corrispondente sopra un iperboloide confocale. Se si suppone che i due iperboloidi corrispondano a due valori vicinissimi del parametro λ, che entra nell'equazioni delle quadriche confocali, i due quadrilateri possono riguardarsi come due configurazioni successive assunte da uno stesso quadrilatero, formato da quattro aste rigide articolate nei vertici. Estendendo questa considerazione a tutta la superficie, risulta che « un iperboloide rigato, il quale si immagini costituito da due serie di aste rigide, articolate nei punti ove si segano, può deformarsi con continuità, assumendo la posizione e la forma degli infiniti iperboloidi rigati confocali con esso » (Henrici). Le due configurazioni estreme sono costituite dagli inviluppi delle tangenti alla ellisse ed alla iperbole focale.

V — 30) Se due quadriche si toccano lungo una conica, il piano tangente ad una di esse in un ombelico sega l'altra quadrica in una conica, che ha un fuoco nell'ombelico e la corrispondente direttrice sul piano della conica.

31) In particolare: se una quadrica (rotonda; n.° 381, es. 11)) tocca una sfera lungo un cerchio, ogni piano tangente a questa sega quella lungo una conica, che ha un fuoco nel punto di contatto.

32) La conica, lungo cui un cono rotondo è segato da un piano, ha i fuochi nei punti ove il piano è toccato da sfere iscritte nel cono (Dandelin). Esistono due sfere siffatte, come si vede segando la figura solida col piano di simmetria condotto per l'asse del cono normalmente al piano della conica. Nel caso della ellisse, una delle due sfere sta dalla banda del vertice rispetto al piano della conica, e l'altra dalla banda opposta. Nel caso della iperbole, le sfere stanno dalla banda del vertice. E nel caso della parabola?

33) La definizione elementare di fuoco di una sezione del cono rotondo, che di qua si ricava, conduce (in base alle note proprietà delle tangenti condotte da un punto ad una sfera) a stabilire, per via elementare, le principali proprietà dei fuochi di una conica. Ma le stesse considerazioni conducono pure a proprietà notevoli delle coniche mutuamente focali. Supposto infatti, ad es., che la sezione del cono di vertice S sia una ellisse, di fuochi F, F', e presi sulla curva due punti arbitrari M, N, segue facilmente che $SM - SN = FM - FN$. Di qua, nella ipotesi che M, N coincidano coi vertici dell'asse focale della ellisse, si deduce il risultato noto (n.° 404): « il luogo dei vertici dei coni rotondi proiettanti una ellisse data è una iperbole (focale), che ha per vertici e fuochi i fuochi ed i vertici dell'asse focale della ellisse, e che sta in un piano normale al piano di questa ».

34) Si deduce pure che « è costante la differenza delle distanze di un punto variabile della iperbole focale da due punti fissi (arbitrari) della ellisse focale ». Ed analogamente si dimostra che « è costante la somma, o la differenza, delle distanze di un punto variabile lungo la ellisse focale da

due punti fissi della iperbole, situati sopra rami diversi, o sopra uno stesso ramo » (DUPIN).

35) Rappresentando parametricamente i punti della ellisse mediante le formole

$$x = \alpha \cos\varphi, \quad y = \beta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = 0,$$

ed i punti della iperbole focale mediante le formole

$$x' = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} : \cos\psi, \quad y' = 0, \quad z' = \beta \operatorname{tg}\psi,$$

dove φ e ψ sono due parametri, si calcoli la distanza tra i due punti (x, y, z), (x', y', z'), e si dimostrino analiticamente le proprietà sopra enunciate.

VI — 36) Dicesi *tangente di curvatura* ad una quadrica, in un punto, una tangente, che sia perpendicolare alla tangente coniugata (n.° 354). Ogni punto generico di una quadrica possiede due determinate tangenti di curvatura, reali, le quali sono parallele agli assi di una sezione della quadrica con un piano parallelo al piano tangente in quel punto. Ma, se il punto è un ombelico, ogni tangente in esso è tangente di curvatura.

37) Preso sopra una quadrica un punto P, le due quadriche confocali con essa, passanti per P, hanno ivi piani tangenti, che contengono le tangenti di curvatura alla prima quadrica in P. In altre parole: la curva intersezione di due quadriche confocali ha come tangente, in ogni suo punto, una tangente di curvatura di ciascuna delle due quadriche (n.° 369 es. 32)). Una curva siffatta dicesi *linea di curvatura* della superficie, cui appartiene. Dunque: « la intersezione di due quadriche confocali è linea di curvatura per ambedue » (MONGE).

Raccolta di alcune formole di Geometria Analitica dello spazio.

(Le coordinate si suppongono cartesiane ortogonali. Con P, P', ... si indicano punti di coordinate (x, y, z), (x', y', z'), ...; con π, π'... piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + \cdots = 0$, $\cdots$).

Punti, piani e rette.

1) Varie forme dell' equazione di un piano:

(1) $$ax + by + cz + d = 0,$$

(1') $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

(1'') $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - n = 0;$$

ove p, q, r sono i valori dei segmenti staccati dal piano sugli assi, a partire dall' origine; α, β, γ gli angoli, che una retta normale al piano forma cogli assi, ed n la distanza dell'origine dal piano.

2) Equazione di un piano per un punto P':

(2) $$a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0.$$

3) Equazione del piano che passa per tre punti P_1, P_2, P_3:

(3) $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4) Piano generico del fascio determinato da due piani π, π':

(4) $$ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

5) Piano generico della stella determinata da tre piani π, π', π'':

(5) $$ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') + \mu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0.$$

6) Condizione, perchè quattro piani π, π_1, π_2, π_3 passino per un punto:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7) Condizioni di parallelismo tra due piani π, π':

$$(7)\qquad a : a' = b : b' = c : c'.$$

8) Condizione di ortogonalità fra due piani π, π':

$$(8)\qquad aa' + bb' + cc' = 0.$$

9) Diedro di due piani π, π':

$$(9)\qquad \cos \pi\pi' = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

$$(9')\qquad \operatorname{sen} \pi\pi' = \sqrt{\frac{(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}.$$

10) Distanza di un punto P' da un piano π:

$$(10)\qquad \delta = \frac{ax' + by' + cz' + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

11) Varie forme delle equazioni di una retta r:

$$(11)\qquad x = lz + p, \qquad y = mz + q,$$

$$(11')\qquad \frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

$$(11'')\qquad \frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma};$$

dove x', y', z' sono coordinate di un punto della retta, e α, β, γ gli angoli, ch' essa forma cogli assi coordinati.

12) Retta passante per due punti P', P'':

$$(12)\qquad \frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{z - z'}{z' - z''}.$$

13) Coseni di direzione di una retta r, le cui equazioni siano date sotto la forma (11′):

(13) $$\cos rx = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos ry = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$
$$\cos rz = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (*).$$

14) Condizioni di parallelismo di due rette r, r'.

(14) $$l : l' = m : m' = n : n' \quad (*).$$

15) Angolo di due rette r, r':

(15) $$\cos rr' = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}} \quad (*).$$

(15′) $$\operatorname{sen} rr' = \sqrt{\frac{(mn' - m'n)^2 + (nl' - n'l)^2 + (lm' - l'm)^2}{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}} \quad (*).$$

16) Condizione di ortogonalità di due rette r, r':

(16) $$ll' + mm' + nn' = 0 \quad (*).$$

17) Equazione della normale ad un piano π per un punto P':

(17) $$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}.$$

18) Angolo di una retta r con un piano π:

(18) $$\operatorname{sen} r\pi = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (*).$$

19) Condizione di perpendicolarità fra una retta r e un piano π:

(19) $$a : l = b : m = c : n \quad (*).$$

20) Condizione di parallelismo tra una retta r ed un piano π:

(20) $$al + bm + cn = 0 \quad (*).$$

21) Condizioni perchè una retta r appartenga ad un piano π:

(21) $$\begin{cases} al + bm + cn = 0, \\ ax' + by' + cz' + d = 0, \end{cases}$$

essendo (x', y', z') un punto della retta (*).

(*) Se le equazioni della o delle rette, che si considerano, sono date sotto la forma (11), si ponga $n = 1$, $n' = 1$, ecc.

22) Area del triangolo $P_1 P_2 P_3$:

$$(22)\quad \Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\}}.$$

23) Volume del tetraedro $P_1 P_2 P_3 P_4$:

$$(23)\qquad V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Trasformazione di coordinate.

24) I nuovi assi X, Y, Z sieno paralleli agli antichi x, y, z, ed abbiano l'origine nel punto (a, b, c):

$$(24)\quad x = X + a, \qquad y = Y + b, \qquad z = Z + c.$$

25) I due sistemi x, y, z; X, Y, Z sieno ortogonali, ed abbiano la stessa origine:

$$(25)\qquad \begin{cases} x = X \cos Xx + Y \cos Yx + Z \cos Zx, \\ y = X \cos Xy + Y \cos Yy + Z \cos Zy, \\ z = X \cos Xz + Y \cos Yz + Z \cos Zz. \end{cases}$$

26) Relazioni fra i nove coseni, che entrano nelle (25).

Nel determinante dei nove coseni:

a) la somma dei quadrati degli elementi di una stessa orizzontale, o verticale, vale 1;

b) la somma dei prodotti degli elementi di una stessa orizzontale, o verticale, per gli elementi omologhi di una linea parallela vale 0;

c) il determinante stesso vale ± 1.

27) Formule di passaggio fra le coordinate polari ϱ, φ, ϑ e le coordinate cartesiane x, y, z, nel caso che l'asse z e l'origine coincidano coll' asse polare e il polo, e il piano polare sia il piano coordinato $y = 0$:

$$(27)\quad x = \varrho \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta, \qquad y = \varrho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta, \qquad z = \varrho \cos\vartheta.$$

$$(27')\quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Superficie particolari.

28) Cilindro colle generatrici parallele alla retta $x = lz + p$, $y = mz + q$:

(28) $$f(x - lz,\ \ y - mz) = 0.$$

29) Cono col vertice nel punto P':

(29) $$f\left(\frac{x - x'}{z - z'},\ \ \frac{y - y'}{z - z'}\right) = 0.$$

30) Superficie rotonda intorno all'asse z, della quale un meridiano sia $f(x, z) = 0$, $y = 0$:

(30) $$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2},\ \ z) = 0$$

31) Sfera di raggio r, col centro nel punto P':

(31) $$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2,$$

oppure

(31′) $$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,$$

dove

$$x' = -\frac{a}{2},\ y' = -\frac{b}{2},\ z' = -\frac{c}{2},\ r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}.$$

Quadriche.

32) Equazione generale di una quadrica:

(32) $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

33) Condizione, perchè la quadrica sia un cono:

(33) $$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}).$$

34) Condizione, perchè sia un paraboloide:

(34) $$A_{44} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

35) Condizioni, perchè la quadrica sia una sfera:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0. \tag{35}$$

36) Equazione del piano tangente nel punto P' (o del piano polare di P', se P' non sta sulla quadrica):

$$\begin{aligned} &(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})x \\ &+ (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24})y \\ &+ (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})z \\ &+ (a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

37) Piano diametrale coniugato alla retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$:

$$\begin{aligned} &l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) \\ &+ m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) \\ &+ n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

38) Coordinate del centro della quadrica:

$$x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}}. \tag{38}$$

39) Equazione del cono asintotico di una quadrica a centro:

$$\begin{aligned} &a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33}(z - z_0)^2 \\ &+ 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + 2a_{13}(x - x_0)(z - z_0) \\ &+ 2a_{23}(y - y_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

40) Equazione di un piano principale.

Se k è una radice dell' equazione

$$\Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0,$$

ed l, m, n è la corrispondente soluzione del sistema

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)l + a_{12}m + a_{13}n &= 0, \\ a_{21}l + (a_{22} - k)m + a_{23}n &= 0, \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - k)n &= 0, \end{aligned}$$

un piano principale della quadrica ha l' equazione (37), od anche, se la quadrica ha il centro (x_0, y_0, z_0), la equazione

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0. \tag{40}$$

41) Equazione della quadrica (32) riferita ai propri assi, nell' ipotesi che si tratti di una quadrica a centro:

$$k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0, \tag{41}$$

dove k_1, k_2, k_3 sono le radici dell' equazione $\Delta(k) = 0$.

42) Equazione della quadrica (32) riferita ai due piani principali xz, yz ed al piano xy tangente nel vertice, nell'ipotesi che si tratti di un paraboloide:

(42) $$k_1x^2 + k_2y^2 + 2z\sqrt{-\frac{A}{k_1k_2}} = 0,$$

dove k_1, k_2 sono le due radici non nulle dell'equazione $\Delta(k) = 0$.

43) Equazione dell' ellissoide di semiassi a, b, c:

(43) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

44) Equazione dell' iperboloide ad una falda di semiassi trasversi a, b, non trasverso c:

(44) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

45) Equazione dell' iperboloide a due falde di semiasse trasverso a, non trasversi b, c:

(45) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

46) Piano tangente nel punto (x', y', z') alle quadriche (43), (44), (45):

(46) $$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} \pm \frac{zz'}{c^2} = 1,$$

i segni dovendo prendersi come nelle relative equazioni.

47) Equazioni ridotte del paraboloide ellittico (segno superiore) o iperbolico (segno inferiore):

(47) $$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p,\ q > 0).$$

48) Piano tangente al detto paraboloide nel punto (x', y', z'):

(48) $$\frac{xx'}{p} \pm \frac{yy'}{q} = z + z'.$$

INDICE

INTRODUZIONE

PARTE PRIMA

Forme di prima specie.

Cap. I. **Sistemi di coordinate sulle forme di prima specie.**

PARTE SECONDA

Geometria analitica del piano.

PARTE TERZA

Curve di secondo ordine.

Cap. I. Polarità definita dalla curva.

APPENDICE

alla Geometria piana.

PARTE QUARTA

Geometria analitica dello spazio.

PARTE QUINTA

Superficie di secondo ordine.

Venezia 1905. — Tipografia Sorteni e Vidotti.