FRANCESCO SEVERI
Professore ordinario dell' Università di Padova

LEZIONI
di
Geometria Algebrica

Geometria sopra una curva
Superficie di Riemann — Integrali abeliani

PADOVA
ANGELO DRAGHI
1908

FRANCESCO SEVERI
Professore ordinario nell'Università di Padova

LEZIONI

DI

Geometria Algebrica

Geometria sopra una curva
Superficie di Riemann — Integrali abeliani

PADOVA
ANGELO DRAGHI, EDITORE
[illegible]

FRANCESCO SEVERI
Professore ordinario dell' Università di Padova

LEZIONI

di

Geometria Algebrica

Geometria sopra una curva

Superficie di Riemann — Integrali abeliani

PADOVA
ANGELO DRAGHI
1908

INDICE

CAPITOLO PRIMO

Sistemi lineari di curve piane.

CAPITOLO SECONDO

Trasformazioni razionali e birazionali.

CAPITOLO TERZO

Le serie lineari sopra una curva algebrica. Curve algebriche sghembe e iperspaziali.

CAPITOLO QUARTO

Punti multipli d'una serie lineare. Genere d'una curva.

CAPITOLO QUINTO

Il teorema fondamentale di Noether e le sue applicazioni alla teoria delle serie lineari.

CAPITOLO SESTO

Corrispondenze tra i punti di una o di due curve algebriche. Formola di Zeuthen. Principî di corrispondenza di Cayley-Brill e di Hurwitz.

CAPITOLO SETTIMO

Le funzioni algebriche come funzioni analitiche. Superficie di Riemann.

CAPITOLO OTTAVO

Integrali abeliani.

CAPITOLO NONO

Teorema d' Abel. Il teorema di Riemann-Roch dal punto di vista trascendente. Integrali riducibili. Applicazioni.

Introduzione.

1°) Le operazioni algebriche si distinguono in *operazioni razionali* e *operazioni irrazionali*. L'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione, sono operazioni razionali; l'estrazione di radice (d'indice qualunque) e più in generale le operazioni che occorre eseguire sui coefficienti per risolvere un'equazione algebrica di grado n, sono operazioni irrazionali.

Si dice che una variabile y è *funzione algebrica* di una variabile (indipendente) x, quando, dato un valore di x si costruiscono i valori corrispondenti di y mediante operazioni algebriche.

La funzione y è *monodroma* o *uniforme*, se ad un valore generico di x, risponde un sol valore di y; è *polidroma* o *poliforme* se un valore generico di x dà luogo a più valori di y. Dalla definizione stessa risulta che y ha necessariamente un *numero finito* di valori corrispondenti ad un generico x.

La dipendenza tra la variabile x e la variabile y, funzione algebrica di x, può sempre esprimersi mediante un'equazione algebrica in y, i cui coefficienti siano funzioni razionali (od anche polinomii) in x.

Infatti se da x si passa alle variabili $x_1\, x_2 \dots x_s, y$ mediante una successione di operazioni algebriche, queste saranno rappresentate da equazioni del tipo

$$\varphi_1(x, x_1) = 0$$
$$\varphi_2(x_1, x_2) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_s(x_{s-1}, x_s) = 0$$
$$\varphi(x_s, y) = 0\ ,$$

ove le φ son polinomî. Eliminando tra queste equazioni le variabili intermediarie $x_1\ x_2 \dots x_s$, si ottiene un'equazione risultante

$$f(xy) = 0,$$

ove f designa un polinomio in x, y.

Ne segue facilmente che:

<u>Una funzione algebrica uniforme y di una variabile indipendente x è necessariamente una funzione razionale di x.</u>

Sia

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots\dots + a_n(x) = 0\ ,$$

l'equazione algebrica che esprime la dipendenza tra x ed y, le a essendo polinomî in x. Se ad un valor generico di x risponde un sol valore di y, due casi potranno darsi:

1°) L'equazione che lega y ad x è di grado $n=1$, cioè si ha

$$a_0(x)y + a_1(x) = 0$$

donde si trae $y = -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$, cioè y funzione razionale di x.

2°) L'equazione ha le sue n radici coincidenti. In tal caso designando con $f(xy)$ il 1° membro della equazione, le

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,\ \dots\dots,\ \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} = 0,$$

che sono equazioni dei gradi $n-1, n-2, \dots, 1$ avranno, per un generico valore di x, una sola radice y, eguale alla radice della $f(xy) = 0$. Poichè:

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} = n!\, a_0(x)y + (n-1)!\, a_1(x)$$

avremo ancora:

$$y = -\frac{a_1(x)}{n\,a_0(x)}$$

cioè y funzione razionale di x.

II°) Il concetto di funzione algebrica si estende anche alle funzioni di più variabili.
Si dice che y è funzione algebrica delle variabili indipendenti $x, x_2 \ldots x_n$, se da un gruppo generico di valori attribuiti alle x si passa ai valori corrispondenti di y, mediante operazioni algebriche.
In altri termini si può dire che y è funzione algebrica delle x, quando il legame tra y e le x è espresso da un certo numero di equazioni algebriche in cui compajono delle variabili intermediarie. Eliminando queste variabili si ottiene il legame tra y e le x sotto la forma

$$a_0(x_1 x_2 \ldots x_n)y^n + a_1(x_1 x_2 \ldots x_n)y^{n-1} + \ldots + a_n(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

Come nel caso delle funzioni di una variabile, si vede facilmente che "una funzione algebrica uniforme y delle" "variabili $x, x_2 \ldots x_n$ è una funzione razionale delle varia-" "bili stesse."

III°) Si può estendere ulteriormente il concetto di funzione algebrica. Sia

$$f(xy) = 0,$$

l'equazione di una curva algebrica piana d'ordine n.
Si dirà che una variabile z è funzione algebrica della

coppia (x, y) soddisfacente all'equazione $f=0$, o più brevemente funzione algebrica del punto variabile sulla curva $f=0$, quando dalla coppia (x, y) si passa al, od ai valori corrispondenti di z, mediante operazioni algebriche. Da quanto precede risulta che la dipendenza tra z e il punto variabile sulla curva può esprimersi eguagliando a 0 un conveniente polinomio in z ed in x, y:

$$\varphi(z\,;\,x, y)=0.$$

In questa relazione le variabili x, y dovranno naturalmente intendersi legate dalla $f=0$

Ne deriva al solito che una funzione algebrica uniforme di un punto variabile sopra una curva algebrica, è una funzione razionale del punto stesso (cioè delle sue coordinate)

IV°) Si potrà parlare più generalmente di funzioni algebriche di un punto variabile sopra una superficie algebrica, o, ricorrendo alla rappresentazione in un iperspazio (quando il numero delle variabili sia maggiore di 3) di funzioni algebriche di un punto variabile sopra una varietà algebrica qualunque.

Ma limitiamoci per ora a questi pochi cenni, che ci serviranno per gli scopi più prossimi, riserbandoci di tornare in seguito sopra le proposizioni esposte e sopra altre della stessa natura e di considerarle dal punto di vista più generale e più fecondo della teoria delle funzioni analitiche.

Capitolo primo.

§ 1. Sistemi lineari di curve piane.

1. Consideriamo un'equazione del tipo

$$(1) \qquad \lambda_0 f_0(x_1 x_2 x_3) + \lambda_1 f_1(x_1 x_2 x_3) + \cdots\cdots + \lambda_r f_r(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

ove le f sono forme del medesimo ordine n e le λ son parametri non tutti nulli. Nel piano in cui $x_1 x_2 x_3$ sono coordinate omogenee di punto, questa equazione, per dati valori delle λ rappresenta una curva algebrica d'ordine n. Al variare delle λ si ottiene dunque una famiglia di curve algebriche che dicesi un <u>sistema lineare</u>, appunto perchè i parametri che determinano la posizione di una curva entro al sistema, compaiono linearmente nella (1).

Diciamo f la curva del sistema corrispondente ai valori $(\lambda_0' \lambda_1' \ldots \lambda_r')$ dei parametri λ: è chiaro che ai valori $(\rho\lambda_0' \rho\lambda_1' \ldots \rho\lambda_r')$ corrisponde la medesima curva f. Sicchè in sostanza la determinazione della f dipende dai valori dei rapporti di r delle λ alla rimanente. Ma si può dire, viceversa, che una data curva del sistema, determina i valori di tali rapporti?

Supponiamo che una curva del sistema lineare risponda a due diversi gruppi di valori per le λ, e cioè ai gruppi $\lambda_0' \lambda_1' \ldots \lambda_r'$, $\lambda_0'' \lambda_1'' \ldots \lambda_r''$. Allora le due equazioni

$$\lambda_0' f_0 + \lambda_1' f_1 + \cdots + \lambda_r' f_r = 0 \qquad \lambda_0'' f_0 + \lambda_1'' f_1 + \cdots + \lambda_r'' f_r = 0$$

ammettono le stesse soluzioni e quindi i loro primi membri differiscono per un fattore costante ρ, cioè si ha identicamente rispetto alle variabili x:

$$\lambda'_0 f_0 + \lambda'_1 f_1 + \cdots + \lambda'_r f_r = \rho\lambda''_0 f_0 + \rho\lambda''_1 f_1 + \cdots + \rho\lambda''_r f_r$$

ossia:

$$(2) \qquad \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r \equiv 0$$

ove si è posto $\alpha_i = \lambda'_i - \rho\lambda''_i$. Ora qui sono possibili due casi: o le α son tutte nulle ed allora si ha $\lambda'_i = \rho\lambda''_i$, oppure non tutte le α sono eguali a 0. Se è p. es. $\alpha_0 \neq 0$ si dedurrà

$$f_0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} f_1 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_0} f_r$$

cioè una delle forme si esprimerà come combinazione lineare delle altre. In tal caso si dice che le date forme f son linearmente dipendenti od anche che son linearmente dipendenti le curve $f_0 = 0 \cdots f_r = 0$.

Si dice invece che più curve sono linearmente indipendenti quando una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei primi membri delle loro equazioni, non è mai identicamente nulla.

Si può dunque enunciare che: Se le curve date $f_0 = 0 \ldots f_r = 0$ sono linearmente indipendenti ogni curva del sistema (1) determina in modo unico i rapporti di r delle λ alla rimanente.

In tal caso dunque ad ogni gruppo di valori arbitrari di certi r numeri, risponde con continuità una curva del sistema, e viceversa una tal curva individua i valori di quegli r numeri. Si dice perciò che il sistema lineare è ∞^r oppure di dimensione r. Una sola curva può considerarsi come un sistema lineare di dimensione 0.

Assumendo $\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_r$ come coordinate omogenee di un punto variabile in uno spazio ad r dimensioni S_r,

si ha in tal caso una corrispondenza biunivoca continua tra le curve del sistema lineare ed i punti dello S_r. Ma esaminiamo il caso generale in cui tra le f esistano delle relazioni del tipo (2) a coefficienti α non tutti nulli. Cominciamo allora a scegliere nel gruppo $f_0 f_1 \dots f_r$ una forma arbitraria e sia la f_0. Due casi potranno presentarsi: o tutte le altre f sono dipendenti da f_0, cioè differiscono da f_0 per un fattore costante, oppure nel gruppo $f_1 f_2 \dots f_r$ è possibile trovare una forma, e sia f_1, linearmente indipendente da f_0. Ma allora di nuovo potranno presentarsi due casi: o tutte le $r-1$ forme rimanenti son linearmente dipendenti da f_0, f_1 oppure nel gruppo $f_2 \dots f_r$ si può trovare una forma, e sia f_2, linearmente indipendente da f_0, f_1; ecc. Così proseguendo si vengono a trovare entro al gruppo $f_0 f_1 \dots f_r$ certe $h+1$ forme, e siano $f_0, f_1 \dots f_h$ linearmente indipendenti e tali che le $r-h$ forme rimanenti sono combinazioni lineari di esse.
Sicchè si avranno le identità:

$$(3)\quad \begin{cases} f_{h+1} \equiv \varepsilon'_0 f_0 + \varepsilon'_1 f_1 + \dots + \varepsilon'_h f_h \\ f_{h+2} \equiv \varepsilon''_0 f_0 + \varepsilon''_1 f_1 + \dots + \varepsilon''_h f_h \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_r \equiv \varepsilon^{(r-h)}_0 f_0 + \varepsilon^{(r-h)}_1 f_1 + \dots + \varepsilon^{(r-h)}_h f_h \end{cases}$$

ove le ε son costanti.
Se ora si sostituiscono queste espressioni delle $f_{h+1} \dots f_r$ nell'equazione (1) si ottiene un'equazione del tipo:

$$(4)\quad \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_h f_h = 0,$$

cioè ogni curva del sistema lineare (1) appartiene al sistema lineare (4). Viceversa è chiaro che ogni curva del sistema (4) appartiene al sistema lineare (1), perchè l'equazione(4) rientra nel tipo (1) per $h_{r+1}=0$, $h_{r+2}=0, \dots h_r=0$

Dunque le equazioni (1)(4) rappresentano la stessa famiglia di curve, cioè i due sistemi lineari (1)(4) coincidono.

In tal caso dunque il sistema lineare dato (1) è ∞^h, e i suoi elementi (curve) sono riferibili biunivocamente ai punti di uno spazio S_h, ove si prendano $\mu_0 \mu_1 \dots \mu_h$, come coordinate omogenee di un suo punto.

Sicchè, in ogni caso, le curve di un sistema lineare si possono far corrispondere biunivocamente, e in modo continuo, ai punti di uno spazio lineare (di dimensione eguale alla dimensione del sistema).

Questa corrispondenza è tale che curve linearmente indipendenti vengono rappresentate da punti linearmente indipendenti e viceversa.

Infatti se le curve

$$(5) \sum_{i=0}^{h} \mu'_i f_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{h} \mu''_i f_i = 0, \quad \dots\dots \sum_{i=0}^{h} \mu_i^{(s)} f_i = 0$$

e $f_0 \dots f_h$ independenti

del sistema ∞^h (4) son linearmente indipendenti, non dovrà esser possibile per valori non tutti nulli delle η un'identità del tipo:

$$\eta_1 \Sigma'_i \mu'_i f_i + \eta_2 \Sigma'_i \mu''_i f_i + \dots + \eta_s \Sigma'_i \mu_i^{(s)} f_i \equiv 0$$

cioè:

$$f_0 \sum_{j=1}^{s} \mu_0^{(j)} \eta_j + f_1 \sum_j \mu_1^{(j)} \eta_j + \dots + f_h \sum_j \mu_h^{(j)} \eta_j \equiv 0$$

Poichè le $f_0, f_1, \dots f_h$, son linearmente indipendenti, non dovranno dunque esser possibili per valori non tutti nulli delle η le relazioni:

$$\mu_0' \eta_1 + \mu_0'' \eta_2 + \cdots + \mu_0^{(s)} \eta_s = 0$$
$$\mu_1' \eta_1 + \mu_1'' \eta_2 + \cdots + \mu_1^{(s)} \eta_s = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu_h' \eta_1 + \mu_h'' \eta_2 + \cdots + \mu_h^{(s)} \eta_s = 0$$

e ciò appunto significa che i punti di coordinate $(\mu_0', \mu_0'' \cdots \mu_0^{(s)})$ $(\mu_1' \mu_1'' \cdots \mu_1^{(s)}) \cdots (\mu_h' \mu_h'' \cdots \mu_h^{(s)})$ son linearmente indipendenti. Viceversa se questi punti son indipendenti, invertendo il ragionamento si vede che sono indipendenti le (5).

Questa proposizione permette di trasportare molte proprietà degli spazî lineari, ai sistemi lineari di curve piane. Così il fatto che "lo S_k individuato da $k+1$ punti indipendenti di un "S_h $(k \leq h)$ è contenuto tutto nello S_h" dà luogo al teorema che:
Un sistema lineare $\Sigma^{(h)}$ contiene tutto il sistema lineare individuato da un certo numero di curve linearmente indipendenti tolte da $\Sigma^{(h)}$.

Ne deriva in particolare che entro un sistema lineare ∞^h, non si possono trovare più di $h+1$ curve linearmente indipendenti, e che un sistema lineare ∞^h è individuato da $h+1$ qualunque delle sue curve, purchè linearmente indipendenti.

Queste proprietà del resto, si dimostrano anche per via diretta.

Un'altra proposizione che deriva dalla considerazione dello spazio d'intersezione e dello spazio congiungente di due spazî S_K, $S_{K'}$, cioè dello spazio (lineare) di dimensione massima contenuto in entrambi e dello spazio (lineare) di dimensione minima che li contiene, è la seguente:
Se è c la dimensione del sistema lineare meno ampio che contiene due sistemi lineari Σ e Σ' di dimensioni k e k', (sistema congiungente) ed $\underline{v}$ la dimensione del sistema

lineare più ampio che è contenuto in entrambi, (sistema intersezione) si ha

$$k + k' = c + i,$$

ove si deve porre $i = -1$ quando manchi il sistema intersezione.

Una dimostrazione diretta di questo teorema (dovuta a Segre) può vedersi nella Memoria del Bertini, La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico (Annali di Matematica, s. II, t. XXII, 1894; a piè della p. 8).

2. Una condizione imposta ad una curva di dato ordine n si dice algebrica quando è traducibile in un certo gruppo di equazioni algebriche tra i coefficienti dell'equazione della curva. La condizione si dice di dimensione d, quando vi sono $\infty^{\frac{n(n+3)}{2} - d}$ curve d'ordine n che ad essa soddisfano, cioè quando l'insieme di queste curve si può riferire, mediante una corrispondenza continua d'indici finiti, ai valori di $\frac{n(n+3)}{2} - d$ parametri arbitrarî. L'insieme di due condizioni di dimensioni d, d' è una condizione di dimensione $\leq d + d'$.

Dai teoremi sulle matrici jacobiane le quali dànno le condizioni di dipendenza di più funzioni, si può trarre che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una data condizione algebrica espressa mediante le equazioni:

$$\varphi_1(a_0 a_1 \dots a_{\frac{n(n+3)}{2}}) = 0, \dots, \varphi_s(a_0 a_1 \dots a_{\frac{n(n+3)}{2}}) = 0,$$

sia di dimensione d, e che la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_0} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_0} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial a_0} & \frac{\partial \varphi_s}{\partial a_1} & \end{matrix} \right\|$$

abbia la caratteristica d e non maggiore per una soluzione generica delle $\varphi = 0$.

L'insieme delle curve che soddisfano ad una data condizione algebrica, dicesi un sistema algebrico.

Tra le condizioni algebriche hanno particolare importanza le condizioni lineari, che sono traducibili in sistemi di equazioni lineari.

Le curve che soddisfano ad una condizione lineare formano un sistema lineare.

Una condizione algebrica di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}$ è soddisfatta da un gruppo di un numero finito di curve.

Dicasi Σ un sistema algebrico ∞^r. Si scelga un punto P_1 del piano, per cui non passino tutte le curve di Σ: imponendo alle curve del sistema di passare per P_1, s'impone loro una condizione lineare, indipendente dalla condizione algebrica che determina il sistema. Le curve di Σ per P_1 formeranno un nuovo sistema algebrico Σ_1, ∞^{r-1}. Si assuma un punto P_2 per cui non passino tutte le curve di Σ_1. Le curve di Σ_1 per P_2 formano allora un sistema algebrico Σ_2, ∞^{r-2}. Così proseguendo, dopo aver imposto il passaggio per r punti che diano condizioni indipendenti, si ha un sistema algebrico ∞^0, cioè un gruppo di un numero finito di curve.

Dunque:

Se un sistema algebrico ha la dimensione r, per r punti generici del piano passa un numero finito di curve del sistema. Questo numero dicesi indice del sistema.

È ben chiaro che il numero delle curve di un sistema algebrico ∞^r passanti per r punti variabili del piano, si conserva costante (se non diviene infinito), purchè ciascuna curva si conti il debito numero di volte. Esso si presenta infatti come il numero delle soluzioni di un sistema di equazioni algebriche aventi certi coefficienti variabili.

In particolare se si tratta di un sistema lineare Σ, ∞^r, noi possiamo scegliere nel modo suddetto r punti che presentano condizioni lineari indipendenti di dimensione 1 alle curve di Σ. Poichè già queste si erano ottenute imponendo alle curve d'ordine n, una condizione lineare di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}-r$, aggiungendo le nuove condizioni indipendenti tra loro e dalle precedenti si ha una condizione lineare di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}$. Essa è soddisfatta da una sola curva del piano. Si conclude che:

Per r punti generici del piano, passa una sola curva di un sistema lineare ∞^r.

Vediamo altri esempi di condizioni lineari oltre a quella già considerata del passaggio per punti.

Se in particolare, alcuni dei punti dati, variano sopra una curva fissata, tendendo a coincidere in un unico punto di questa, durante la variazione continua, la condizione espressa dal passaggio per quei punti, resta lineare. Al limite noi abbiamo la condizione affinchè una curva di da=

to ordine abbia con una curva fissata, un contatto t-punto. Le condizioni di contatto più o meno intimo con curve date in punti dati, sono dunque condizioni lineari.

Del resto ciò si vede anche osservando che se si vuole che una curva $f=0$ abbia con una curva fissata Γ un contatto d'ordine $t-1$ in un punto dato P, occorre assoggettare i coefficienti di f alle relazioni che traducono analiticamente la condizione geometrica assegnata. Tali relazioni si ottengono scrivendo che in P è nullo il polinomio f e che le successive derivate di f (sino all'ordine t) hanno valori assegnati. Tutte queste relazioni sono lineari nei coefficienti di f.

È una condizione lineare anche l'imposizione di un punto s-plo in un punto dato del piano, perchè si traduce analiticamente uguagliando a zero le derivate d'ordine $s-1$ della forma f_n in cui si sieno sostituite le coordinate (omogenee) del punto dato. Tali derivate contengono linearmente i coefficienti di f.

Osserveremo in ultimo che la condizione di contenere come parte una curva data Γ imposta alle curve di un sistema lineare Σ, è pure una condizione lineare.

Cominciamo infatti ad imporre alle curve del sistema lineare Σ il passaggio per un punto generico P_1 di Γ. Di casi Σ' il sistema lineare così ottenuto. Se le curve di Σ' contengono come parte Γ, il teorema è dimostrato; altrimenti si potrà scegliere su Γ un punto P_2 per cui non passino tutte le curve di Σ'. Le curve di Σ' per P_2 formano un sistema Σ'', e anche qui due casi possono darsi: o le curve di Σ'' contengono tutte come parte Γ, oppure su

Γ si può scegliere un punto P_3 per cui non passino tutte le curve di Σ''; e così continuando.
Poichè ogni passaggio per un nuovo punto P diminuisce di una unità la dimensione del sistema lineare che si considera, si arriverà finalmente ad un sistema lineare, le cui curve conterranno come parte Γ, oppure si arriverà ad una sola curva di Σ' passante per r punti $P_1 P_2 \dots P_r$ di Γ e non contenente come parte Γ. In tal caso non esisterà alcuna curva di Σ contenente come parte Γ.

3. Un punto che sia comune a tutte le curve di un sistema lineare Σ dicesi un punto base di Σ. Se p. e. Σ è rappresentato dall'equazione (1) e le curve $f_0=0$ $f_1=0 \dots f_r=0$ hanno in comune il punto P, è chiaro che questo punto apparterrà ad ogni curva di (1), cioè sarà base per Σ.
Se il sistema Σ è un fascio ($r=1$) esso avrà certo dei punti base che saranno in numero di n^2, se le due curve $f_0=0$, $f_1=0$ che individuano il fascio, non hanno parti comuni e sono d'ordine n.
Ma in generale una rete ($r=2$) e a più forte ragione un sistema di dimensione superiore a 2 non ha punti base, perchè tre o più curve non hanno in generale punti comuni.
Può anche darsi che un sistema lineare abbia infiniti punti base; questi punti costituiranno una curva algebrica irriducibile o riducibile, facente parte di tutte le curve del sistema. Così p. e. il sistema lineare

$$\lambda_0 \varphi f_0 + \lambda_1 \varphi f_1 + \dots + \lambda_r \varphi f_r = 0$$

ha infiniti punti base distribuiti lungo la curva $\varphi=0$.
È chiaro che, se un punto P è comune ad $r+1$ curve linearmente indipendenti di un sistema lineare ∞^r, esso è un punto base del sistema, perchè una curva qualunque del sistema, ha per equazione una combinazione lineare delle equazioni delle $r+1$ curve indipendenti.

4. Il teorema esprimente che per r punti generici del piano passa una curva di un sistema lineare ∞^r si può invertire nel modo seguente:
Se un sistema algebrico ∞^r di curve piane d'ordine n, gode della proprietà che per r punti generici del piano, passa una sola curva del sistema, esso è lineare.

5 Per dimostrare questo teorema, conviene premettere il Lemma. Se sopra una retta si ha una serie algebrica Σ_1 di gruppi di n punti, tale che un punto generico della retta appartenga ad un sol gruppo, la serie Σ_1 è lineare, cioè i suoi gruppi sono rappresentati da una equazione del tipo

$$f(x)+\lambda g(x)=0$$

ove f, g, sono polinomî dati, di grado n, e λ è un parametro variabile.
Dire che una serie è algebrica, significa dire che il suo gruppo generico, è rappresentato in coordinate x, da un'equazione del tipo

$$\varphi(x)=0$$

ove φ è un polinomio di grado n, i cui coefficienti sono legati da alcune equazioni algebriche il cui insieme denoteremo con A. L'ipotesi da cui partiamo è che un punto generico appartenga ad un sol gruppo $\varphi=0$.
Dato un punto x_0, per determinare il gruppo di cui fa parte x_0 occorre eliminare i coefficienti variabili di φ tra le equazioni A e le equazioni

$$\varphi(x)=0 \qquad \varphi(x_0)=0 \ .$$

Come è noto dall'Algebra, queste operazioni di eliminazione si compiono razionalmente, sicchè i coefficienti dell'equazione risultante, che è di grado n, e viene soddisfatta dagli n punti del gruppo cercato (ivi compreso il punto x_0) sono funzioni razionali di x_0. L'equazione cercata sarà dunque del tipo

$$\psi_0(x_0)x^n+\psi_1(x_0)x^{n-1}+\dots+\psi_n(x_0)=0,$$

ove le ψ son funzioni razionali di x_0. Moltiplicando per un conveniente polinomio in x_0 passeremo ad una equazione del tipo

$$(6)\quad F(x_0x)\equiv a_0(x_0)x^n+a_1(x_0)x^{n-1}+\dots+a_n(x_0)=0,$$

le $\underline{a}$ essendo ora polinomi in x_0
Al variare di x_0 abbiamo così un legame algebrico tra x_0 e gli n punti del gruppo individuato da x_0.
Dato x l'equazione (6) sarà soddisfatta da tutte quelle posizioni di x_0 per cui passano gruppi contenenti il punto x. In altri termini, dato x, l'equazione (6) sarà soddisfatta da tutti i punti x_0 che appartengono al gruppo individuato da x.
L'equazione (6) è dunque simmetrica rispetto ad x, x_0.

Facciamo ora le seguenti osservazioni:

1ª) Il polinomio $a_0(x_0)$ non può essere identicamente nullo, se, come supponiamo, gli n punti del gruppo individuato da x_0, variano tutti con x_0. Invero se fosse $a_0=0$, ciò significherebbe che per ogni x_0 passerebbe un gruppo di cui farebbe parte il punto $x=\infty$ della retta. I gruppi di Σ avrebbero dunque un punto fisso. Ora è chiaro che pel nostro scopo noi possiamo astrarre dai punti fissi, comuni a tutti i gruppi della serie.

2ª) Le funzioni razionali $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots \frac{a_n}{a_0}$ non possono ridursi tutte quante a delle costanti, perchè nell'ipotesi contraria avremmo:

$$F(x_0 x) \equiv a_0(x_0)\left\{x^n + k_1 x^{n-1} + \ldots + k_n\right\},$$

colle k costanti. Preso allora un punto x_0 della retta che non annullasse il polinomio a_0, i punti del gruppo individuato da x_0, soddisfarebbero all'equazione

$$x^n + k_1 x^{n-1} + \ldots + k_n = 0,$$

e quindi resterebbero tutti fissi al variare di x_0; il che è assurdo, perchè tra questi punti c'è il punto x_0 stesso.

Ciò premesso sia p.e. $\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)}$ una funzione razionale dipendente effettivamente da x_0. Pongasi

$$\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} = t.$$

È noto dall'Algebra che questa è una funzione simmetrica delle radici dell'equazione (6). Queste radici sono le coordinate $x_0 x_1 \ldots x_{n-1}$ dei punti del gruppo individuato da x_0. Nel caso presente è anzi

$$\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} = -(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1})$$

Poichè il 2° membro non s'altera scambiando tra loro le x, avremo:

$$\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} = \frac{a_1(x_1)}{a_0(x_1)} = \dots\dots = \frac{a_1(x_{n-1})}{a_0(x_{n-1})}$$

Ciò significa che l'equazione

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = t, \quad \text{ovvero} \quad a_1(x) - t\,a_0(x) = 0,$$

per un dato valore di t, è soddisfatta dagli n punti $x_0\, x_1 \dots x_{n-1}$, di un gruppo di Σ.

D'altronde a_0, a_1 non possono esser di grado superiore ad n, perchè altrimenti il polinomio F avrebbe grado n rispetto ad x e grado $> n$ rispetto ad x_0, contrariamente alla conclusione cui siamo già pervenuti, ch'esso sia simmetrico rispetto ad x, x_0. Si conclude pertanto che l'equazione

$$a_1(x) - t\,a_0(x) = 0,$$

al variare del parametro t, rappresenta tutti i gruppi di Σ. Resta così dimostrato che Σ è una serie lineare.

6. Prima di passare ad applicare il Lemma alla dimostrazione del teorema enunciato al n.° 4, presenteremo il Lemma stesso sotto una forma un po' diversa che è utile notare fin da ora.

Suppongasi che le coordinate x, y dei punti di una curva algebrica piana C sieno funzioni razionali di un parametro t; che si abbia cioè

$$(7) \qquad x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t),$$

φ, ψ essendo funzioni razionali. L'equazione $f(x\,y) = 0$ della curva si ottiene eliminando $\underline{t}$ tra le (7). Ad ogni valore di t risponde mediante le (7) un punto di C; ma, viceversa, si può dire che ogni punto di C provenga da un sol valore di t?

È facile persuadersi sopra esempi che non sempre ad un punto di C risponde un sol valore di t. Si consideri ad es. la curva

$$x = t^2 \qquad y = 1 + t^4 \quad \text{(parabola in coordinate cartesiane)}$$

Ad un punto della curva rispondono evidentemente <u>due</u> valori di t, che differiscono tra loro soltanto nel segno.
Nell'ipotesi più generale si potrà dire che dato in modo generico un punto di C, cioè data una soluzione generica (xy) dell'equazione $f=0$, tra le soluzioni dell'equazione $x=\varphi(t)$ ve ne sono un certo numero $t_1, t_2, \dots t_n$ che soddisfano pure all'equazione $y=\psi(t)$.
Assumiamo la variabile t come coordinata di un punto sopra una retta <u>u</u>.
Mentre il punto (xy) si muove descrivendo la C, i punti di coordinate $t_1 t_2 \dots t_n$ si muovono sulla <u>u</u> descrivendo una serie algebrica Σ, la quale gode evidentemente della proprietà che un punto generico della retta <u>u</u> appartiene ad un sol gruppo di Σ. In virtù del Lemma dimostrato, i gruppi di Σ potranno dunque rappresentarsi mediante un'equazione del tipo

$$a(t) - \lambda b(t) = 0,$$

ove λ è un parametro variabile col gruppo che descrive Σ, e <u>a</u> e <u>b</u> son polinomî di grado n.
Tra i punti (xy) della curva C ed i valori del parametro λ havvi un legame algebrico tale che ad un punto generico di C risponde un sol valore di λ, e viceversa ad un valore generico di λ risponde un sol punto (xy) di C. Infatti i punti di C e i valori di λ sono in corrispondenza biunivoca coi gruppi di Σ. Ne deriva che le coordinate x, y di un punto variabile su C sono <u>funzioni algebriche ad un sol valore</u>, cioè <u>funzioni razionali</u>, del parametro λ. (Ved. l'introduzione)
Onde si potrà scrivere

$$(8) \qquad x=\xi(\lambda), \quad y=\eta(\lambda),$$

ξ, η essendo funzioni razionali, tali che un punto (xy) della curva C proviene da un sol valore di λ.

La curva C risulta così riferita biunivocamente mediante una corrispondenza algebrica (cioè mediante una corrispondenza data da operazioni algebriche) ad una retta sulla quale si distenda come coordinata il parametro λ.

Una curva che goda di tale proprietà dicesi razionale.

Possiamo enunciare il risultato ottenuto, nel modo seguente:

Se le coordinate dei punti di una curva algebrica si possono esprimere come funzioni razionali di un parametro t, tali che un medesimo punto della curva provenga da $n>1$ valori del parametro, si possono altresì esprimere le coordinate mediante funzioni razionali di un nuovo parametro λ – funzione razionale di t – in guisa che un punto della curva provenga da un sol valore di λ.

Sotto forma geometrica:

Se tra i punti di una curva C e di una retta u può porsi una corrispondenza algebrica tale che ad un punto di C rispondano n punti di u e ad un punto di u un sol punto di C, la curva C si può altresì riferire ad u mediante una corrispondenza algebrica biunivoca.

Questo teorema è dovuto al Lüroth (Math. Ann. Bd. 9. p 163)

Nella nota di Lüroth è assegnato il modo di costruire effettivamente il nuovo parametro λ come funzione razionale di t. A noi ciò non occorre. Rimandiamo perciò il lettore al lavoro originale di Lüroth oppure al trattato di Appell e Goursat sopra la "Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales" (Paris, Gauthier-Villars 1895, pag 288.)

7. E veniamo finalmente alla dimostrazione del teorema enunciato al n° 4.

Cominciamo dal caso di un fascio. L'ipotesi da cui noi partiamo è che il sistema algebrico Σ, ∞^1, di curve ~~di curve~~ piane d'ordine n, goda della proprietà che per un punto generico del piano passi una sola curva del sistema. Seghiamo il sistema Σ con una retta generica. Avremo ivi una serie algebrica di gruppi di $\underline{n}$ punti, tale che un punto della retta apparterrà ad un sol gruppo della serie. Dunque (n° 5) questa serie sarà lineare, cioè i suoi gruppi si potranno far corrispondere algebricamente e biunivocamente ai valori di un parametro λ.

Ora io dico che v'è pure una corrispondenza algebrica biunivoca tra i valori di λ e le curve di Σ. Invero, dato un valore di λ si costruisce algebricamente il gruppo corrispondente a questo valore (cioè le coordinate dei punti del gruppo), e dal gruppo si risale algebricamente alla curva di Σ che passa per esso (perchè si tratta di imporre ad una curva di un sistema algebrico la condizione lineare del passaggio per punti). Dunque con operazioni algebriche si passa da un valore di λ ad una curva ben determinata di Σ. Viceversa data una tal curva si determinano, colla risoluzione di un'equazione algebrica, le coordinate dei punti del gruppo da essa staccato sulla retta secante, e da questo gruppo si risale algebricamente ad un valore ben determinato di λ.

Si può anche osservare che per passare da una curva di Σ al valore corrispondente di λ bastano le operazioni razionali, perchè λ è una funzione <u>razionale</u> simmetrica dei punti del gruppo staccato dalla curva sulla retta segante.

Dire che una curva di Σ dipende algebricamente da λ in tal guisa che un valore di λ determina <u>una sola</u> curva in Σ, equivale a dire che i coefficienti dell'equazione di una curva variabile in Σ sono funzioni algebriche ad un sol valore, cioè funzioni razionali del parametro λ. Sicchè le curve di Σ potranno rappresentarsi, coll'equazione

$$f(xy;\lambda)=0$$

ove f è un polinomio in x, y in cui i coefficienti contengono razionalmente λ. Moltiplicando i due membri dell'equazione per un conveniente polinomio in λ si fanno sparire le frazioni, e si ha l'equazione sotto la forma

$$\lambda^k\varphi_0(xy)+\lambda^{k-1}\varphi_1(xy)+\dots\dots\dots+\varphi_k(xy)=0,$$

ove le φ son polinomî di grado $\leq n$ (Il grado di <u>tutte</u> le φ risulterebbe proprio $\underline{n}$ se si introducesse l'omogeneità nelle coordinate).

Per ottenere l'equazione della curva di Σ passante per un punto generico (x_0y_0) del piano si dovrà prendere per λ un valore che soddisfi all'equazione

$$\lambda^k\varphi_0(x_0y_0)+\lambda^{k-1}\varphi_1(x_0y_0)+\dots\dots\dots+\varphi_k(x_0y_0)=0.$$

Poichè per (x_0y_0) passa una sola curva di Σ, questa equazione in λ dovrà avere una sola radice, cioè dovrà essere di 1° grado, oppure dovrà ridursi ad una potenza k-esima di un'espressione del tipo

$$\lambda\psi_0(xy)+\psi_1(xy)\ ,$$

ψ_0, ψ_1 essendo polinomî di grado $\leq \frac{n}{k}$ (<u>Ambedue</u> questi polinomî risulterebbero di grado $\frac{n}{k}$ in coordinate omogenee).

Ma in quest'ultima ipotesi una curva qualunque di Σ, avrebbe un'equazione del tipo

$$(\lambda\psi_0+\psi_1)^k=0;$$

e si cadrebbe in un caso di riducibilità che noi escluderemo.
Si conclude pertanto che $k=1$, cioè che l'equazione di una curva qualunque di Σ è del tipo:

$$\lambda\varphi_0(xy)+\varphi_1(xy)=0.$$

Resta così dimostrato che il sistema Σ è un fascio.
Estendiamo il teorema ad un sistema algebrico Σ, ∞^r, procedendo per induzione, cioè ammettendo già acquisito il teorema pei sistemi ∞^{r-1}.
Le curve di Σ che passano per un punto generico P formano un sistema algebrico Σ', ∞^{r-1}, il quale gode della proprietà che per $r-1$ punti generici del piano passa una sola sua curva.
Dunque, pel teorema ammesso, Σ' è un sistema lineare rappresentabile coll'equazione

$$\lambda_1 f_1(xy)+\lambda_2 f_2(xy)+\cdots\cdots+\lambda_r f_r(xy)=0,$$

ove le $f_1, f_2, \ldots, f_r$ son linearmente indipendenti.
Assumasi in Σ una curva $f_0(xy)$ non passante per P, cioè non appartenente a Σ'.
Fissato un punto generico Q della curva f_0, per esso passano ∞^{r-1} curve di Σ le quali, pel teorema ammesso, formano un sistema lineare Σ''; ed ∞^{r-2} curve di Σ' formanti pure un sistema lineare, contenuto nel sistema Σ''. Una curva f del sistema ∞^{r-2} insieme ad f_0, individua un fascio tutto contenuto in Σ'' e quindi in Σ. Indicheremo con A questo fascio. Si noti che il sistema Σ' e il fascio A non hanno altre curve comuni all'infuori di f_1 perchè altrimenti A starebbe in Σ' e quindi f_0 passerebbe per P.
Per un punto generico X del piano passano ∞^{r-2} curve di Σ', cioè $r-1$ curve linearmente indipendenti di tale sistema, ed una curva del fascio A. Quest'ultima curva sarà indi-

pendente dalle precedenti $r-1$ curve. Infatti nell'ipotesi contraria, essa apparterrebbe al sistema Σ' e quindi coinciderebbe con f, ch'è la sola curva comune al fascio A e al sistema Σ'. Allora X giacerebbe in f, il che è da escludersi per la genericità del punto X.

Le $r-1$ curve suddette, insieme alla curva di A dànno dunque r curve indipendenti passanti per X, le quali appartengono contemporaneamente al sistema lineare ∞^r

$$(9) \quad \lambda_0 f_0(xy) + \lambda_1 f_1(xy) + \cdots\cdots + \lambda_r f_r(xy) = 0,$$

(che congiunge il fascio A ed il sistema Σ') e al sistema algebrico dato Σ. Poichè le curve di Σ passanti pel punto X formano un sistema lineare ∞^{r-1}, si conclude che questo sistema è individuato dalle r curve indipendenti considerate, cioè coincide col sistema ∞^{r-1} delle curve (9) passanti per X. – Ne deriva che la totalità delle curve di Σ passanti per un punto generico del piano, coincide colla totalità delle curve (9) passanti per lo stesso punto.

Facendo variare il punto nel piano, si vede che Σ coincide col sistema lineare (9).

Osservazione. Nel corso di questa dimostrazione si sottintende più volte che il sistema dato Σ non contenga parti di dimensione inferiore ad r. Abbiamo adunque le seguenti restrizioni per la natura del sistema algebrico, cui riferiscesi il teorema del n° 4:

a) Che le sue curve non siano tutte multiple, cioè che non si ottengano tutte ripetendo un certo numero di volte le curve di un sistema algebrico.

b) Che il sistema non si possa riguardare come l'insieme di un sistema algebrico ∞^r e di un altro sistema di dimensione inferiore.

Queste restrizioni sono evidentemente necessarie.

8. Passeremo ora a dimostrare una proprietà differenziale delle curve piane (anche non algebriche), della quale ci gioveremo poi per stabilire un teorema del Bertini sui sistemi lineari di curve.

Consideriamo un sistema continuo di curve. Sia

$$f(xy;t)=0,$$

l'equazione di una curva qualunque della famiglia, ove t è un parametro che individua la posizione di una curva entro al sistema. Supporremo per la f tutte le proprietà analitiche che ci occorreranno nel seguito.

La curva $f=0$ sia dotata di alcuni punti doppî variabili al variare del parametro t. Fissiamo una particolar curva $f(xy,t_0)=0$ della famiglia e diciamo $P(x_0y_0)$ uno dei punti doppî della curva che variano al variare di t. Vogliamo dimostrare che la curva

$$f(xy,t_0+dt)=0$$

infinitamente vicina alla $f(xy,t_0)=0$, passa pel punto P, cioè che il valore assunto dalla funzione $f(x,y,t_0+dt)$ per $x=x_0$, $y=y_0$, è un infinitesimo di ordine superiore, rispetto a dt assunto come infinitesimo principale.

L'ipotesi fatta pel punto doppio P si traduce in ciò che la curva infinitamente vicina a $f(xy,t_0)$ ha un punto doppio $\overline{P}$ infinitamente vicino a P, o in altri termini che esistono delle funzioni continue uniformi $\varphi(t)$, $\psi(t)$ definite nell'intorno di $t=t_0$, tali che il punto di coordinate $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ è doppio per la curva $f(xy,t)=0$.

Se nell'equazione $f(xy,t)=0$ sostituiamo al posto di x,y le funzioni φ,ψ, si ottiene dunque un'identità in t. Derivando quest'identità rispetto a t viene

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

ov'è inteso che x, y rappresentano le funzioni φ, ψ.
Ma per l'ipotesi che il punto di coordinate x, y sia doppio per f risulta anche $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Si conclude pertanto che nel punto di coordinate $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ si annulla la $\frac{\partial f}{\partial t}$ per qualunque valore dell'intorno considerato di $t=t_0$.
In particolare per $t=t_0$ si hanno le relazioni

$$f(x_0 y_0, t_0)=0 \qquad f'_t(x_0 y_0, t_0)=0$$

Ciò premesso si sviluppi $f(x_0 y_0, t_0+dt)$ mediante la formola di Taylor. Avremo:

$$f(x_0 y_0, t_0+dt)=f(x_0 y_0, t_0)+f'_t(x_0 y_0, t_0)dt+\frac{1}{2}f''_{t^2}(x_0 y_0, t_0)dt^2+\ldots$$
$$\ldots\ldots=\frac{1}{2}f''_{t^2}(x_0 y_0, t_0)dt^2+\frac{1}{6}f'''_{t^3}(x_0 y_0, t_0)dt^3+\ldots\ldots,$$

la quale prova che $f(x_0 y_0, t_0+dt)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dt.
Si può dunque enunciare il teorema:
Se una curva piana variabile in un sistema continuo, ha un punto doppio variabile P, ogni curva del sistema infinitamente vicina a C passa per P.
Nella dimostrazione abbiamo considerato il caso di una curva variabile in un sistema semplicemente infinito (dipendente cioè da un sol parametro t); ma il risultato si trasporta subito ai sistemi più volte infiniti, facendo variare la curva entro sistemi semplicemente infiniti contenuti nel dato.
Osservazione. Si noti che il teorema resta vero anche se P è più che doppio per C, giacchè ciò che occorre nella dimostrazione è che in x, y si annullino le $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
Come si può enunciare il risultato precedente in termini

finiti?

Allorquando si ha una curva C variabile in un sistema continuo ∞^1, e si fissa una posizione C_0 della C, per gruppo caratteristico di C_0 s'intende il gruppo dei punti (in numero finito o infinito) verso cui tende l'insieme delle intersezioni di C e di C_0 allorquando C si avvicina a C_0. L'insieme dei gruppi caratteristici delle curve del sistema, riempie una curva che si dice la curva inviluppo del sistema. Quando si considera un sistema più volte infinito si possono ancora definire i gruppi caratteristici: soltanto in tale caso sopra una curva fissata ve ne saranno infiniti. Ogni sistema ∞^1 contenuto nel dato genererà una curva inviluppo.

Il teorema precedente si può ora enunciare sotto la forma:

Se una curva piana C variabile in un sistema continuo ha un punto doppio variabile, questo punto fa parte di ogni gruppo caratteristico di C.

9. Il teorema dimostrato si può estendere anche a punti di molteplicità maggiore di 2, e si giunge così alla proposizione seguente:

Se una curva piana C, variabile con continuità, ha un punto s-plo variabile P, ogni curva infinitamente prossima a C, ha il punto P come $(s-1)$-plo (almeno).

Facciamo il caso di $s=3$.

Si tratterà di provare che se in un certo intorno di $t=t_0$ il punto di coordinate $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ è triplo per la curva $f(x,y,t)=0$, la curva $f(x,y,t_0+dt)=0$, infinitamente prossima alla $f(x, y, t_0)=0$, ha come doppio (almeno) il punto $(x_0=\varphi(t_0),\ y_0=\psi(t_0))$ triplo per $f(xy, t_0)=0$.

L'ipotesi che il punto (x, y) sia triplo per $f(x, y, t)=0$, si traduce analiticamente in ciò: che in x, y si annulla la f, le sue prime derivate rispetto ad x, y e le sue seconde derivate rispetto alle stesse variabili. – Ne deriva che il punto (x, y) è doppio per ciascuna delle curve

$$f'_x(xy, t)=0\ ,\quad f'_y(xy, t)=0$$

Applicando allora il teorema del n° precedente si ha che le curve

$$f'_x(xy, t_0+dt)=0\ ,\quad f'_y(xy, t_0+dt)=0$$

infinitamente prossime alle

$$f'_x(xy, t_0)=0,\quad f'_y(xy, t_0)=0$$

passano pel punto $P(x_0 y_0)$. Ma per lo stesso punto passa anche la curva $f(xy, t_0+dt)=0$, dunque P risulta doppio per quest'ultima curva.

Il ragionamento s'estende subito ad s qualunque.

10. Le considerazioni precedenti sono fecondissime e nel seguito avremo molto spesso occasione di ricorrere ad esse. Mostriamo intanto come se ne possa far derivare il seguente teorema di Bertini:(*)

La curva generica di un sistema lineare di curve algebriche piane non ha punti multipli fuori dei punti base del sistema.

Sia Σ il dato sistema lineare e C la sua curva generica. Se P è un punto multiplo di C, ogni curva $\overline{C}$ di Σ, infinitamente vicina a C, avrà un punto multi-

(*) Sui sistemi lineari (Rend. del R. Istituto lombardo; s. 2, t. 15, 1880)

plo $\bar{P}$ infinitamente prossimo o coincidente con P. In ogni caso pel teorema del n° 9 la $\bar{C}$ passerà per P.
Ciò posto si consideri in Σ una curva qualunque C_0 diversa da C, ed il fascio H individuato dalle curve C_0, C. Una curva variabile in questo fascio sega C soltanto nei punti base del fascio stesso, che sono i punti comuni a C, C_0. Ma la curva infinitamente vicina a C nel fascio H, passa per P, dunque P è un punto base del fascio, cioè anche la curva C_0 passa per P. Essendo C_0 una curva qualunque di Σ, ciò significa che P è un punto base del sistema.(x)

11. Non vogliamo tacere di un' altra elegante applicazione del teorema stabilito al n° 8. Si tratta di una dimostrazione della <u>formola di Plücker</u> che dà la <u>classe</u> di una curva piana dotata di un numero finito δ di nodi (punti doppî colle tangenti distinte) e di un numero finito k di cuspidi (punti doppî colle due tangenti coincidenti).
Per <u>classe</u> di una curva algebrica C, d'ordine n, s'intende il numero delle tangenti a C che escono da un punto generico P del piano. Con una conveniente projezione della curva data da un centro sopra un piano, si può passare alla ricerca del numero di tangenti che son parallele ad una direzione fissa (punto P all'infinito).

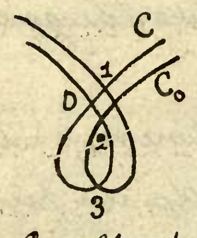
(x) Questa dimostrazione sintetica del teorema di Bertini trovasi incidentalmente sotto ipotesi assai più generali in una mia Nota (Atti della R. Acc. di Torino, dicembre 1905)

Si assoggetti la nostra curva trasformata - che diremo ancora C - ad una traslazione infinitesimale nella direzione P_∞ e dicasi $\bar{C}$ la curva dopo la traslazione. Se A, B son i due punti infinitamente prossimi comuni a C e ad una tangente che abbia la direzione P_∞, è chiaro che dopo la traslazione infinitesima, A vien trasportato in B, sicchè i punti di contatto delle tangenti richieste si trovano tra le intersezioni delle curve C, $\bar{C}$.

Le altre intersezioni cadono:

a) Negli n punti all'infinito di C, perchè la traslazione lascia fisso ciascuno dei punti all'infinito.

b) Nei δ nodi di C. Infatti pel teorema del n° 8 la $\bar{C}$ passa per ciascuno di questi nodi. Anzi ciascuno di essi conta 2 volte tra le intersezioni di C, $\bar{C}$ perchè è doppio per C. Del resto si può vedere intuitivamente come lo mostra la figura qui accanto, che se la C si assoggetta ad una traslazione finita portandola nella posizione C_0, vi sono due intersezioni di C, C_0 (quelle segnate 1 e 2 nella figura) che tendono al punto doppio D quando C_0 ritorna verso C colla traslazione inversa.



c) Nelle k cuspidi di C, giacchè per ciascuna di esse in forza del teorema del n° 81, passa la $\bar{C}$. Si può anzi vedere intuitivamente che ciascuna delle cuspidi assorbe tre intersezioni. Basta pensare la cuspide come un nodo D che si vada stringendo indefinitamente. Sono allora 3 le intersezioni di C_0 e C che si avvicinano all'origine D della cuspide col tendere di C_0 a C (i tre punti segnati in figura con 1, 2, 3,).

Questo fatto dice che la curva infinitamente vicina a C non solo passa per la cuspide D, ma ivi ha la stessa tangente di C.

Indicando con m la classe di C, avremo in conclusione:

$$m+n+2\delta+3k=n^2,$$

cioè:

$$m=n(n-1)-2\delta-3k$$

che è la 1ª formola di Plücker.

La dimostrazione esposta, che dà un significato intuitivo alla relazione di Plücker, è dovuta a Beck (Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen, Math. Annalen, Bd. XIV°, 1878.).

12. Se la curva generica di un sistema lineare di curve algebriche è riducibile (cioè spezzata in più parti) il sistema lineare, con locuzione poco appropriata, si dice riducibile.(x)

Un primo esempio di sistema lineare riducibile si ottiene aggregando ad ogni curva di un sistema di curve irriducibili, una parte fissa. Se

$$\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_r f_r=0$$

è l'equazione del dato sistema, e $\varphi=0$ è l'equazione della curva fissa, avremo il sistema lineare riducibile

$$\lambda_0\varphi f_0+\lambda_1\varphi f_1+\cdots\cdots+\lambda_r\varphi f_r=0.$$

Un altro esempio si ottiene nel modo seguente:

(x) Meglio sarebbe dire "sistema lineare di curve riducibili". La locuzione usata non può dar luogo ad ambiguità per un sistema lineare, mentre è ambigua se si riferisce ad un sistema algebrico qualunque.

Sia

$$\lambda u(xy) - \mu v(xy) = 0$$

un fascio di curve algebriche C, d'ordine n. Le curve del fascio si possono rappresentare biunivocamente coi punti di una retta, prendendo λ, μ come coordinate omogenee del punto variabile sulla retta stessa. Ebbene consideriamo su questa retta una <u>serie lineare</u> ∞^r di <u>gruppi di k punti</u>, cioè un sistema di gruppi di punti rappresentati da un'equazione del tipo

$$\nu_0 \varphi_0(\lambda,\mu) + \nu_1 \varphi_1(\lambda,\mu) + \cdots\cdots + \nu_r \varphi_r(\lambda,\mu) = 0$$

ove le $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ son forme d'ordine k linearmente indipendenti.

Ai gruppi della serie corrispondono nel fascio gruppi di k curve variabili in una serie lineare ∞^r. Le curve di quest'ultima serie (sistema) son date dall'equazione

$$\nu_0 \varphi_0(v,u) + \nu_1 \varphi_1(v,u) + \cdots\cdots + \nu_r \varphi_r(v,u) = 0$$

e formano un sistema lineare ∞^r, le cui curve son tutte spezzate in k parti variabili entro un fascio.

Orbene un altro teorema di <u>Bertini</u> afferma che i due esempî addotti sono i due soli casi di riducibilità di un sistema lineare. Si ha cioè la proposizione:

<u>Se ogni curva di un sistema lineare si spezza in più parti, o tutte le curve del sistema hanno una parte comune, oppure esse si spezzano in k curve variabili in un medesimo fascio</u> (x) (i due fatti naturalmente possono verificarsi anche insieme).

Escludiamo che tutte le curve del nostro sistema lineare

(x) <u>Bertini</u>, loco. cit. a pag. 28 . . Ved pure <u>Lüroth</u> (Math. Annalen 42 e 44)

Σ, posseggano una parte comune, e diciamo $C_1, C_2, \ldots, C_k$, le k curve tutte variabili in cui si spezza la generica curva C di Σ.

Osserviamo, in primo luogo, che le componenti $C_1 C_2 \ldots C_k$ della generica C, sono tra loro distinte, perchè nell'ipotesi contraria la C avrebbe punti multipli fuori dei punti base. – Ciò posto, diciamo $C_1', C_2', \ldots, C_k'$ le componenti di un'altra curva C' di Σ, ed osserviamo che il teorema sarà dimostrato allorquando avremo provato che le curve $C_1, C_2, \ldots, C_k, C_1', C_2', \ldots, C_k'$ appartengono tutte ad un medesimo fascio. Infatti allora tenendo fissa la C questo fascio rimarrà fisso, perchè sarà individuato da due delle componenti di C (p.e. C_1 e C_2), e le componenti della C' variabile verranno ad appartenere al fascio fisso. Ora le C, C' individuano entro Σ un fascio, che indicheremo con H. Diciamo $H_1, H_2, \ldots, H_k$ i sistemi algebrici descritti dalle componenti $C_1, C_2, \ldots, C_k$ quando C descrive il fascio H. Si tratterà di provare che questi sistemi algebrici coincidono in un unico fascio. Invero se il sistema H_1 fosse diverso da H_2, una curva di H_1 ed una curva di H_2 uscenti da un medesimo punto generico P del piano, non potrebbero esser parti di due distinte curve del fascio H, perchè per P passa una sola curva di H; nè potrebbero esser parti di una medesima C, perchè altrimenti questa avrebbe in P – cioè fuori dei punti base – un punto doppio. È dunque assurdo ammettere che due qualunque dei sistemi $H_1, H_2, \ldots, H_k$ sieno distinti; dunque, ecc.

13. Introduciamo ancora il concetto di <u>sistema lineare semplice</u> e di <u>sistema lineare composto</u>.

Si dice che un sistema lineare Σ, ∞^2, è <u>semplice</u>, quando tutte le curve di Σ che passano per un punto generico P del piano, non passano di conseguenza per altri punti variabili con P, cioè diversi dagli eventuali punti base di Σ; mentre si dice <u>composto</u> nel caso contrario.

Il sistema di tutte le rette del piano, il sistema di tutte le coniche, sono sistemi semplici; la rete di tutte le cubiche piane passanti per 7 punti generici, è un sistema composto.

Consideriamo un sistema Σ composto, le cui curve si seghino a due a due, fuori dei punti base in D punti, o, come si dice brevemente, che abbia il <u>grado</u> D.

Se tutte le curve di Σ per un punto generico P si tagliano, fuori di P, in altri punti, diversi dai punti base, è chiaro che il numero $i-1$ di queste intersezioni non può mutare variando con continuità P: dal che segue che le D intersezioni di due curve, fuori dei punti base si distribuiscono in $\frac{D}{i}$ gruppi di $\underline{i}$ punti tali che tutte le curve passanti per uno qualunque dei punti di uno di questi gruppi, passano per gli altri $i-1$ punti.

Ad un sistema lineare composto vien dunque associato un sistema di ∞^2 gruppi di $\underline{i}$ punti, tali che un punto del piano appartiene ad uno solo di questi gruppi: un sistema siffatto dicesi un'<u>involuzione piana di ordine</u> i.

È ben chiaro che ogni rete di grado $D>1$ è un sistema composto, il quale genera un'involuzione di ordine D.
Una rete di grado $D=1$ dicesi una rete omaloidica.
Sono reti omaloidiche: il sistema di tutte le rette, il sistema delle coniche passanti per tre punti; il sistema delle quartiche passanti doppiamente per tre punti generici e semplicemente per altri tre, ecc.

Capitolo secondo.

Trasformazioni razionali e birazionali.

14. Trasformazione razionale di un piano in un altro. Consideriamo le formole

$$(1)\quad \begin{cases} \rho x_1' = f_1(x_1 x_2 x_3) \\ \rho x_2' = f_2(x_1 x_2 x_3) \\ \rho x_3' = f_3(x_1 x_2 x_3) \end{cases}$$

ove f_1, f_2, f_3 son tre forme algebriche del medesimo ordine nelle x_1, x_2, x_3. Interpretando x_1, x_2, x_3 come coordinate omogenee di un punto x variabile in un piano X, ed x_1', x_2', x_3' come coordinate omogenee di un punto x' variabile in un altro piano X', mediante le (1) ad un punto generico x di X viene a corrispondere un sol punto x' di X'.

Cosa accadrà del punto x' quando x descrive il piano X? Ci proponiamo di vedere sotto quali condizioni il punto x' descrive l'intero piano X'.

Escludiamo anzitutto il caso in cui le f_1, f_2, f_3 differiscano per fattori costanti, giacchè in tal caso ad un punto qualunque del piano X risponde un punto fisso x'. Si vede anzi che questo è il solo caso in cui, al variare di x, il punto x' resta fermo; perchè, se per valori arbitrarî delle x_1, x_2, x_3 si mantengono costanti i rapporti $\frac{f_1}{f_3}, \frac{f_2}{f_3}$, ciò significa che

$$f_1 = a f_3, \quad f_2 = b f_3$$

a, b essendo fattori costanti.

Si potrà inoltre escludere che le forme f_1, f_2, f_3 abbiano dei fattori comuni, perchè se tali fattori esistono si possono sopprimere senza alterare i mutui rapporti delle f, dai quali dipende la posizione di x'.

Ciò posto, ricerchiamo quand'è che due punti $\alpha(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$, $\beta(\beta_1 \beta_2 \beta_3)$ del piano X dànno lo stesso punto x'. Perciò occorrerà e basterà che sia

$$f_i(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \sigma f_i(\beta_1 \beta_2 \beta_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

σ essendo un fattore di proporzionalità. Dicendo Σ il sistema lineare (almeno ∞^1)

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0,$$

ogni curva di Σ passante per α corrisponderà a valori dei parametri λ soddisfacenti all'equazione

$$\lambda_1 f_1(\alpha) + \lambda_2 f_2(\alpha) + \lambda_3 f_3(\alpha) = 0,$$

cioè all'equazione

$$\lambda_1 f_1(\beta) + \lambda_2 f_2(\beta) + \lambda_3 f_3(\beta) = 0,$$

e quindi passerà anche per β.

Resta sottinteso che nei punti α, β non si annullano simultaneamente tutte le f, cioè che α, β sono diversi dai punti base di Σ. Il corrispondente x' di un punto base riesce infatti indeterminato, perchè le sue tre coordinate omogenee son nulle.

Viceversa: se due punti α, β del piano X (diversi dai punti base di Σ) son tali che tutte le curve di Σ passanti per l'uno passano anche per l'altro, ad essi corrisponderà un medesimo punto x'.

Infatti l'equazione lineare

$$\lambda_1 f_1(\alpha) + \lambda_2 f_2(\alpha) + \lambda_3 f_3(\alpha) = 0,$$

dovrà porre tra le λ lo stesso legame dell'equazione

$$\lambda_1 f_1(\beta) + \lambda_2 f_2(\beta) + \lambda_3 f_3(\beta) = 0,$$

cioè queste due equazioni dovranno essere equivalenti, o, in altri termini, i loro coefficienti dovranno essere proporzionali.

Possiamo ora distinguere due ipotesi:

1) Le curve di Σ passanti per un punto generico α hanno di conseguenza infiniti punti comuni (costituenti una curva algebrica)

2) Le curve di Σ passanti per α hanno comuni complessivamente t punti (compreso α) esterni ai punti base ($t \geq 1$)

Nella 1ª ipotesi o il sistema Σ riducesi addirittura ad un fascio - per il che occorre che due sole delle f_1, f_2, f_3 sieno linearmente indipendenti, - oppure le curve di Σ sono tutte quante spezzate. E poichè lo spezzamento non può portare una parte fissa comune a tutte le curve di Σ (chè altrimenti le f avrebbero un fattore comune), in forza del teorema di Bertini dimostrato al n° 12, si conclude che ogni curva di Σ si spezza in l curve variabili in un medesimo fascio H. Tutte le curve di Σ passanti per α hanno per ipotesi comune una curva algebrica: questa sarà evidentemente costituita da h ($1 \leq h \leq l$) curve di H tra le quali se ne troverà una passante per α.

Se

$$u(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad , \quad v(x_1 x_2 x_3) = 0$$

sono le equazioni di due curve distinte del fascio H, l'equazione di una curva composta da l curve di H si otterrà eguagliando a zero una forma binaria d'ordine l nelle u, v; sicchè nel caso in esame avremo

$$f_1(x) = \varphi_1(u,v) \quad , \quad f_2(x) = \varphi_2(u,v) \quad , \quad f_3(x) = \varphi_3(u,v)$$

le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ essendo forme binarie d'ordine l.

Dato un punto x di X e detto x' il punto corrispondente di X' i punti di X cui corrisponde lo stesso x' sono i punti comuni a tutte le curve di Σ per x, cioè si distribuiscono in h curve del fascio H, aventi per equazioni:

$$v = \lambda_1 u \;,\quad v = \lambda_2 u, \;\ldots\ldots,\; v = \lambda_h u .$$

Questo gruppo di h curve è tale che ogni curva determina le $h-1$ associate, cosicchè variando la curva entro al fascio H si ha una semplice infinità di gruppi di h curve, e ogni curva di H appartiene ad un sol gruppo.

A ciascuno di questi gruppi di h curve viene a corrispondere un sol punto x': dunque nel piano X' il luogo del punto x' è una curva C', i cui punti corrispondono biunivocamente ai gruppi suddetti.

La curva C' viene rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$\rho x'_1 = \varphi_1(u,v) \;,\quad \rho x'_2 = \varphi_2(u,v),\; \rho x'_3 = \varphi_3(u,v)$$

o, togliendo l'omogeneità nei parametri, dalle equazioni

$$\rho x'_1 = \varphi_1(1,\lambda) \;,\quad \rho x'_2 = \varphi_2(1,\lambda),\; \rho x'_3 = \varphi_3(1,\lambda)$$

Ad ogni valore di λ corrisponderà un sol punto di C', ma viceversa ad un punto di C' risponderanno h valori di λ. La curva C' è razionale (n° 6).

Si osservi che nel caso particolare in cui il sistema Σ riducesi addirittura ad un fascio, le forme $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ risultano lineari, e quindi la curva C' è una retta.

Passiamo ad esaminare l'ipotesi 2). È allora facile vedere che il punto x' può assumere una posizione qualunque nel piano X'.

Infatti mentre un punto x si muove in X descrivendo una curva C

$$(2) \quad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$$

del sistema Σ, il punto x' corrispondente non può restar fisso, perchè per una data posizione generica di x sulla curva C vi sono soltanto $t-1$ punti di C che dànno lo stesso punto x': dunque il punto x' si muoverà descrivendo la retta

$$(3) \quad \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0 \; .$$

Al variare della curva C entro al sistema Σ - che sarà necessariamente una rete - varierà la retta (3) descrivendo tutto il piano X' e quindi il punto x' omologo di un punto variabile x, potrà assumere qualunque posizione in X'.
Concludendo: tra i piani X, X' avremo una corrispondenza algebrica (rappresentata da equazioni algebriche) di indici $t, 1$, tale cioè che ad un punto generico di X risponde un punto di X', mentre ad un punto generico di X' rispondono t punti di X, i quali, al variare del punto nel piano X', descrivono sul piano X un'involuzione d'ordine t.
Si ha dunque il teorema seguente:
Sieno x_1, x_2, x_3 le coordinate omogenee di un punto x del piano X, ed x_1', x_2', x_3' le coordinate omogenee di un punto x' del piano X'.
Poniamo tra i punti dei due piani la corrispondenza espressa dalle formule

$$\rho x_i' = f_i(x_1 x_2 x_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ove le f_i sono forme dello stesso ordine, prive di fattori comuni.
Allora, se le f_i si possono riguardare come forme binarie

dello stesso ordine di due altre forme $u(x_1 x_2 x_3)$, $v(x_1 x_2 x_3)$, al variare del punto x sul piano X, il punto x' descrive una curva razionale del piano X'; se invece le f_i non hanno la forma particolare suddetta, ad un punto generico x risponde un sol punto x', e ad un punto generico x' un numero finito t $(t \geq 1)$ di punti del piano X.
In quest'ultimo caso si dice che tra i piani X, X' intercede una trasformazione razionale, perchè le coordinate non omogenee x', y' dei punti di X' risultano funzioni razionali delle coordinate non omogenee x, y dei punti di X. Si ha precisamente

$$(4) \qquad x' = \frac{f_1(x,y,1)}{f_3(x,y,1)} \qquad y' = \frac{f_2(x,y,1)}{f_3(x,y,1)}.$$

Viceversa è chiaro che ogni corrispondenza tra i due piani X, X', la quale sia rappresentata da formole del tipo (4), può venir rappresentata da formole del tipo (1) introducendo l'omogeneità nelle coordinate.
È appena necessario avvertire che in coordinate non omogenee i polinomi f_1, f_2, f_3 non avranno necessariamente lo stesso ordine.
Come si potrà esprimere in coordinate non omogenee la condizione affinchè il punto x' descriva l'intero piano X'?
Sieno

$$(5) \qquad x' = \varphi(x,y), \quad y' = \psi(x,y)$$

le formole della trasformazione, ove φ, ψ denotano due funzioni razionali (non costanti). Occorrerà esprimere che al variare di x, y, le x', y' non soddisfano ad alcuna equazione; cioè che le due funzioni φ, ψ sono funzionalmente indipendenti: o in altri termini che non è identicamente nullo il loro determinante funzionale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Dunque le formole (5), ove φ, ψ sieno due funzioni razionali indipendenti, definiscono una trasformazione razionale del piano (xy) nel piano $(x'y')$.

L'equivalenza di questa condizione a quella già trovata precedentemente, risulta da ciò, che se le due funzioni φ, ψ sono dipendenti, ogni curva

$$\varphi = \text{costante}$$

è una curva

$$\psi = \text{costante}.$$

Ora $\varphi = \text{cost.}$ rappresenta un fascio di curve algebriche: dunque le curve del sistema lineare Σ debbon esser composte collo stesso fascio.

15 Punti e curve fondamentali. Poniamoci nell'ipotesi che il punto variabile x' descriva tutto il piano X'.

Finora abbiamo escluso che i punti che consideravamo nel piano X coincidessero con qualcuno dei punti base eventuali della rete Σ: ci siamo soltanto limitati a dire che gli omologhi dei punti base non sono determinati.

Esaminiamo ora un po' più davvicino la natura di questi punti eccezionali, che hanno grande importanza per la conoscenza della trasformazione, così come ha grande importanza nello studio delle funzioni la conoscenza del loro comportamento nell'intorno dei punti singolari.

Immaginiamo un punto x variabile nel piano X, il quale descriva una retta o una curva uscente da un punto base O. Per ogni posizione di x, diversa da O, resta determinato un fascio di curve del sistema Σ, passanti pel punto x; ed a questo fascio risponde nel piano X' un fascio di rette passanti pel punto x' corrispondente ad x. Mentre x tende ad O, il punto x' tende ad una posizione limite determinata, che è precisamente il centro del fascio di rette omologo al fascio delle curve aventi in O una tangente assegnata (data dalla direzione con cui x si approssima ad O). Si può dunque dire che ad ogni punto x infinitamente vicino ad O viene a corrispondere un punto x' del piano X': la totalità di questi punti x' è generalmente una curva Ω'. Ma di più si vede che questa curva è razionale perchè i suoi punti corrispondono univocamente alle direzioni uscenti da un punto, e quindi possono farsi corrispondere univocamente anche ai punti di una retta (n.° 6). Il punto O dicesi un punto fondamentale e la curva Ω' una curva fondamentale della corrispondenza.

Tutto ciò si può controllare facilmente sulle formole. Usiamo coordinate omogenee e poniamo il punto ($x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$) nel punto fondamentale O.

Se questo punto è un punto base s-plo per le curve della rete Σ, e quindi per le $f_1=0, f_2=0, f_3=0$, che sono tre curve generiche della rete, avremo:

$$f_j(x_1 x_2 x_3) = x_3^{n-s}\,\theta_s^{(j)}(x_1 x_2) + x_3^{n-s-1}\,\theta_{s+1}^{(j)}(x_1 x_2) + \cdots,$$

n essendo l'ordine della f e le θ essendo forme binarie degli ordini indicati dai loro indici.

Le coordinate del punto x variabile sopra una retta u-

uscente da O, son della forma

$$x_1 = \lambda\xi_1\ ,\quad x_2 = \lambda\xi_2\ ;\quad x_3 = 1$$

ove $\xi_1\,\xi_2$ son costanti date e λ è un parametro variabile. Il punto O si ottiene per $\lambda = 0$.

Sostituendo nelle formole (1) che rappresentano la trasformazione razionale, avremo:

$$\rho x'_j = \lambda^s\theta_s^{(j)}(\xi_1\xi_2) + \lambda^{s+1}\theta_{s+1}^{(j)}(\xi_1\xi_2) + \cdots\cdots,\quad (j = 1,2,3)$$

ossia, sopprimendo il fattore λ^s che è comune ai secondi membri delle tre eguaglianze:

$$\tau x'_j = \theta_s^{(j)}(\xi_1\xi_2) + \lambda\,\theta_{s+1}^{(j)}(\xi_1\xi_2) + \cdots\cdots,\quad (j = 1,2,3)$$

ove τ è un fattore di proporzionalità.

Col tendere di λ a 0 il punto x' tende al punto di coordinate

$$(6)\qquad \tau x'_j = \theta_s^{(j)}(\xi_1\xi_2)\ .\quad (j = 1,2,3)$$

Al variare della retta attorno ad O, cioè al variare del rapporto delle $\xi_1\,\xi_2$, si ha il luogo dei punti x' omologhi dei punti x infinitamente vicini ad O. Questo luogo è una curva rappresentata parametricamente dalle formole (6): dunque una curva razionale (n 3).

Si vede anche mediante le (6) quand'è che la curva fondamentale corrispondente ad O manca, sicchè gli omologhi dei punti infinitamente vicini ad O, invece di esser distribuiti sopra una curva son situati nell'intorno di un punto O'. – Bisognerà che le $\theta_s^{(1)}(\xi_1\xi_2)$, $\theta_s^{(2)}(\xi_1\xi_2)$, $\theta_s^{(3)}(\xi_1\xi_2)$ abbiano rapporti costanti (indipendenti da $\xi_1\,\xi_2$) cioè che le forme $\theta_s^{(1)}$, $\theta_s^{(2)}$, $\theta_s^{(3)}$ differiscano per fattori costanti. Ora l'equazione

$$\theta_s^{(j)}(x_1 x_2) = 0$$

rappresenta le s tangenti alla curva f_j nel punto O:

dunque bisognerà che le tre curve f_1, f_2, f_3 abbiano le stesse s tangenti, e quindi che <u>tutte</u> le curve della rete Σ abbiano in O le s tangenti fisse.

Si conclude che:

<u>Mediante la trasformazione razionale</u>

$$\rho x'_j = f_j(x_1 x_2 x_3) \qquad (j = 1,2,3)$$

<u>ai punti infinitamente vicini ad un punto fondamentale del piano (x_1, x_2, x_3), rispondono sul piano (x'_1, x'_2, x'_3) i punti di una curva razionale; fa eccezione soltanto il caso in cui le curve $f_j = 0$ abbiano le stesse tangenti nel punto fondamentale: allora ad un punto generico infinitamente vicino al punto fondamentale risponde un punto fisso del piano $(x'_1\, x'_2\, x'_3)$.</u>

L'analisi potrebbe proseguirsi esaminando il caso in cui le f_1, f_2, f_3 hanno alcune o tutte le tangenti comuni. Un punto x che si avvicinasse ad O lungo una di queste tangenti, a priori non avrebbe l'omologo determinato perchè si annullerebbero simultaneamente le $\theta_s^{(j)}$; ma un esame più accurato permetterebbe di concludere qualcosa di più preciso anche in questo caso. Ma su ciò non ci arrestiamo perchè ormai si intravede la natura degli ulteriori risultati.

Osserviamo piuttosto che si può calcolare facilmente <u>l'ordine della curva Ω'</u> nel modo seguente:

Ad una retta generica del piano X' risponde sul piano X una curva f del sistema Σ e ad un punto comune alla retta e alla Ω', risponde un punto infinitamente vicino ad O e situato sulla curva f: poichè al variare della retta, variano tutte le sue intersezioni colla Ω', così i punti infinitamente vicini ad O e corrispondenti a queste intersezioni dovranno essere tutti variabili al variare della f. Ne deriva che le intersezioni cercate saranno tante quante le tangenti variabili in O di una curva generica della rete Σ'. Dunque:

L'ordine di una curva fondamentale è dato dal numero delle tangenti variabili ad una curva della rete Σ, nel punto fondamentale corrispondente.

16° Trasformazioni birazionali o cremoniane tra due piani.
Suppongasi che la rete Σ di cui finora si è parlato, sia omaloidica $(t=1)$. Allora non soltanto ad un punto generico x del piano X risponde un sol punto x' del piano X'; ma ad un punto generico di quest'ultimo piano risponde un sol punto del primo, cioè la corrispondenza risulta biunivoca tra i punti generici dei due piani.

Sieno

$$(7) \qquad x' = \varphi(x,y) \quad , \quad y' = \psi(x,y)$$

le formole che definiscono la trasformazione in coordinate non omogenee, φ e ψ denotando due funzioni razionali indipendenti.

Nell'ipotesi attuale, le due equazioni (7) per valori generici attribuiti alle x', y', hanno a comune una sola soluzione (x, y), variabile col variare delle x', y'. Sicchè x ed y risultano funzioni algebriche ad un valore e quindi funzioni razionali delle x', y'; cioè si hanno le formole:

$$(8) \qquad x = \lambda(x', y') \, , \quad y = \mu(x', y')$$

ove λ, μ son funzioni razionali indipendenti.

Le (8) permettono il passaggio dai punti del piano X'

ai punti del piano X, e rappresentano quindi l'operazione inversa di quella rappresentata dalle (7).
La corrispondenza tra i due piani, dicesi in tal caso birazionale, appunto perchè le coordinate dei punti di ciascuno dei due piani son funzioni razionali delle coordinate dei punti corrispondenti dell'altro.
Tali corrispondenze diconsi anche cremoniane in onore al nostro Cremona che pel primo le considerò dal punto di vista più generale, mettendone in evidenza la grande importanza per lo sviluppo della geometria algebrica (1863-65).
Date le formole (7) la costruzione esplicita delle funzioni λ, μ si ottiene subito con operazioni razionali di eliminazione. Se, invero, tra le (7) si elimina y si ottiene come risultato un'equazione in x a coefficienti razionali rispetto ad $x'y'$; e poichè questa equazione deve avere una sola radice variabile al variare di x', y'; così essa darà immediatamente x come funzione razionale di x', y'.
Similmente si calcola l'espressione di y come funzione razionale di x', y'.
Nel caso di una trasformazione cremoniana, quel che si è detto del piano X si può ripetere pel piano X': esisterà cioè su quest'ultimo piano una rete omaloidica Σ' corrispondente alle rette del piano X, e in X' avremo come punti fondamentali i punti base della rete Σ'.
Si noti che la corrispondenza tra le curve

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$$

del sistema Σ e le rette

$$\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3 = 0$$

del piano X', resta stabilita chiamando omologhe una curva di Σ e una retta del piano X', quando provengano dagli stessi valori dei parametri λ. Sicchè se si prendono questi parametri λ come coordinate (omogenee) di una curva nell'interno della rete Σ e come coordinate (omogenee) di una retta di X', la corrispondenza verrà rappresentata scrivendo che le coordinate dello stesso indice sono eguali. Avremo così un particolar tipo di trasformazione lineare, facente passare dalle coordinate di una curva di Σ alle coordinate della retta corrispondente in X'.

Si dice perciò che la corrispondenza tra le curve di Σ e le rette del piano X' è una <u>projettività</u>.

Del resto avendo già osservato (n°1) che un sistema lineare di curve si può rappresentare biunivocamente coi punti di uno spazio lineare, resta senz'altro fissato cosa deve intendersi per corrispondenza projettiva tra un sistema lineare ed uno spazio della stessa dimensione.

Così p. e. nel caso che c'interessa di una rete Σ e del sistema delle rette del piano X', si tratterà di una corrispondenza facente passare da <u>ogni</u> curva di Σ ad <u>una</u> retta di X', e da ogni retta di X' ad <u>una</u> curva di Σ, colla condizione ulteriore che mentre una retta varia nel piano X' descrivendo un fascio qualunque, la curva corrispondente si muova in Σ descrivendo un fascio.

Si possono enunciare queste varie considerazioni nell'enunciato che segue:

<u>Una trasformazione razionale tra due piani si ottiene</u>

riferendo projettivamente le rette di uno dei due piani alle curve di una rete omaloidica dell'altro. In tal modo ad un fascio generico di rette del primo piano, viene a corrispondere nel 2° piano un fascio di curve avute un ulteriore punto base oltre a quelli della rete. La corrispondenza tra i punti dei due piani si definisce assumendo come omologhi il centro del fascio di rette, e quest'ulteriore punto base.

Alle rette del secondo piano, corrispondono nel primo, le curve di un'altra rete omaloidica.

Una trasformazione cremoniana è generalmente biunivoca; le eccezioni alla biunivocità si presentano soltanto nei punti fondamentali per la corrispondenza, cioè nei punti base delle reti omaloidiche esistenti sui due piani.

Fra le trasformazioni cremoniane ve ne sono però di quelle biunivoche senza alcuna eccezione: le trasformazioni omografiche.

Si può inversamente dimostrare che:

Una trasformazione cremoniana, la quale sia biunivoca senza eccezioni, è necessariamente un'omografia.

Invero se le due curve f, g della rete Σ corrispondenti a due rette generiche f', g' del piano π', hanno altri punti (base) comuni, oltre al punto omologo del punto $f'g'$, dovrà esistere un punto su f' ed un altro su g', aventi il medesimo punto corrispondente sul piano π: e quindi si dovranno ivi trovare dei punti che fanno eccezione alla biunivocità della corrispondenza.

Se la corrispondenza è biunivoca senza eccezioni, la rete Σ dovrà dunque essere priva di punti base, cioè due curve qualunque della rete si dovranno segare solamente in un punto. Ne segue che la rete Σ è il sistema di tutte le rette del piano X. La corrispondenza data, risulta perciò omografica.

Un'ultima osservazione: <u>Le curve corrispondenti alle rette dei due piani riferiti birazionalmente, hanno il medesimo ordine.</u> Diciamo infatti g, f' due rette generiche appartenenti ai piani X, X' e g', f le curve rispettivamente corrispondenti sui piani X', X. Se la curva g' è d'ordine n, essa verrà tagliata da f' in n punti tutti variabili con f'. A questi punti risponderanno altrettanti punti comuni alla retta g e alla curva f, e tali punti varieranno tutti con f. Ne segue che f ha lo stesso ordine di g'.

17. <u>Trasformazioni quadratiche</u>. Dopo le trasformazioni omografiche, che mutano una retta dell'un piano in una retta dell'altro, le trasformazioni cremoniane più semplici son le trasformazioni quadratiche, le quali mutano una retta generica dell'un piano in una conica dell'altro.

Ci proponiamo ora di studiare in modo particolare le trasformazioni quadratiche.

Alle rette del piano X' noi vogliamo intanto che corrispondano nel piano X le coniche di una rete omaloidica Σ. Poichè due coniche qualunque di un piano si tagliano in 4 punti; 3 delle intersezioni saranno fisse, cioè la rete Σ risulterà costituita da tutte le coniche passanti per tre punti assegnati.

S'intende che questi punti base di Σ potranno non es

sere tutti distinti: la rete Σ risulterà allora o dall'insieme delle coniche passanti per 2 dati punti e aventi una tangente assegnata in uno di essi; oppure dall'insieme di tutte le coniche che osculano in un punto assegnato una conica fissa.
Similmente sul piano X' avremo una rete di coniche Σ', corrispondenti al sistema delle rette di X. (vedi la fine del n° prec.)
Quali sono le formole che rappresentano la trasformazione?
Consideriamo il caso generale in cui la rete Σ ha i tre punti base distinti A_1, A_2, A_3. Per ottenere le formole sotto l'aspetto più semplice, conviene assumere sul piano X i punti A_1, A_2, A_3 come punti fondamentali di un sistema di coordinate projettive (omogenee) x_1, x_2, x_3.
Allora l'equazione di una conica qualunque circoscritta al triangolo $A_1 A_2 A_3$ cioè appartenente alla rete Σ, è della forma

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3 x_1 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0;$$

sicchè le tre funzioni f_1, f_2, f_3, che si consideravano nel caso di una trasformazione razionale qualunque, si possono ora assumere rispettivamente eguali a $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$.
La corrispondenza viene così rappresentata dalle formole:

$$(9) \quad \rho x_1' = x_2 x_3 \quad , \quad \rho x_2' = x_3 x_1 \quad , \quad \rho x_3' = x_1 x_2$$

equivalenti alle

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} .$$

La trasformazione inversa delle (9) è evidentemente data dalle formole

$$(10) \quad \sigma x_1 = x_2' x_3' \; , \; \sigma x_2 = x_3' x_1' \; , \; \sigma x_3 = x_1' x_2' \, ,$$

cioè:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_3'}$$

Le (10) mostrano che ad una retta

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0$$

del piano X, risponde in X' una conica

$$\mu_1 x'_2 x'_3 + \mu_2 x'_3 x'_1 + \mu_3 x'_1 x'_2 = 0$$

circoscritta al triangolo $A'_1 A'_2 A'_3$ formato dai punti ($x'_1 = 1$, $x'_2 = x'_3 = 0$)($x'_2 = 1$, $x'_3 = x'_1 = 0$)($x'_3 = 1$, $x'_1 = x'_2 = 0$).

Dunque <u>se sul piano X la rete Σ ha i tre punti base distinti</u>, <u>lo stesso accade della rete Σ' esistente sul piano X'</u>.

Nel punto fondamentale A_1 le coniche di Σ hanno l'unica tangente variabile; dunque i punti omologhi dei punti infinitamente prossimi ad A_1 saranno distribuiti sopra una <u>retta</u> fondamentale (curva del 1° ordine - ved. la fine del n° 15). È facile vedere che questa retta fondamentale è la $A'_2 A'_3$.

Infatti un punto variabile sopra una retta uscente da A_1 ha le coordinate del tipo

$$(11) \qquad x_1 = 1 \ , \quad x_2 = \varepsilon \xi_2 \ , \quad x_3 = \varepsilon \xi_3 \ ,$$

con ε variabile. A questo punto risponde dunque su X' il punto di coordinate ($x'_1\, x'_2\, x'_3$) date dalle

$$\rho x'_1 = \varepsilon^2 \xi_2 \xi_3 \ , \ \rho x'_2 = \varepsilon \xi_3 \ , \ \rho x'_3 = \varepsilon \xi_2 \ ,$$

ossia

$$(12) \quad \tau x'_1 = \varepsilon \xi_2 \xi_3 \ , \ \tau x'_2 = \xi_3 \ , \quad \tau x'_3 = \xi_2 \ .$$

Per $\varepsilon = 0$ abbiamo dunque il punto $(0, \xi_3, \xi_2)$ che è situato sulla retta $x'_1 = 0$ cioè sulla $A'_2 A'_3$.

Si osservi che <u>ad una retta uscente dal punto fondamentale A_1 - rappresentata parametricamente dalle (11) - corrisponde una retta uscente dal punto fondamentale A'_1, rappresentata parametricamente dalle (12)</u>.

Si noti inoltre che <u>la corrispondenza tra le direzioni</u>

per A_1 ed i punti di $A'_2A'_3$ è projettiva perchè una direzione per A_1 è determinata dal rapporto tra ξ_2 e ξ_3 e il punto corrispondente su $A'_2A'_3$ si ottiene prendendo $\frac{x'_2}{x'_3} = \frac{\xi_3}{\xi_2}$.

Tra i punti infinitamente vicini ad A_1, quelli situati sui lati A_1A_2, A_1A_3, del triangolo base si ottengono rispettivamente per $\xi_3 = 0$, $\xi_2 = 0$. Ciò significa che al punto infinitamente vicino ad A_1 nella direzione A_1A_2 risponde il punto $(0, 0, \xi_2)$, cioè A'_3; mentre al punto infinitamente prossimo ad A_1 nella direzione A_1A_3 risponde il punto A'_2.

Le stesse cose si possono ripetere per gli altri punti A_2, A_3: basta permutare circolarmente gl'indici.

Scambiando le lettere con apici in lettere senza apici, si ottengono le proprietà dei punti fondamentali A'_1, A'_2, A'_3, del piano X'.

Consideriamo ora sul piano X una curva algebrica di ordine n, C, e proponiamoci di determinare l'ordine della curva corrispondente C'.

Per maggior generalità si supporrà che la C passi pei punti fondamentali A_1, A_2, A_3 colle molteplicità rispettive s_1, s_2, s_3. (Si porrà una $s = 0$ quando C non passa pel relativo punto A.)

Le intersezioni della curva C' con una retta variabile g' del piano X' sono tante quante le intersezioni variabili della curva C, corrispondente a C', colla conica g corrispondente a g', cioè $2n - s_1 - s_2 - s_3$. Dunque:

Una curva C del piano X la quale sia d'ordine n e abbia la molteplicità s_i nel punto fondamentale A_i

$(i=1,2,3)$ La come omologa sul piano X' una curva C' d'ordine $2n-s_1-s_2-s_3$.

È facile vedere che la curva C' passa pei punti fondamentali $A'_1 A'_2 A'_3$ colle molteplicità rispettive $n-s_2-s_3$, $n-s_3-s_1$, $n-s_1-s_2$.

Infatti una retta generica g' uscente da A'_1 sega la C' fuori di A'_1 in $2n-s_1-s_2-s_3-x$ punti, x essendo la molteplicità di A'_1 per C'. Alla g' risponde una retta g uscente da A_1, e ad ogni punto comune a g' e C', fuori di A'_1, risponde uno degli $n-s_1$ punti in cui g sega C fuori di A_1; e viceversa. Dunque

$$2n-s_1-s_2-s_3-x = n-s_1$$

e quindi

$$x = n-s_2-s_3 .$$

Analogamente per i punti A'_2, A'_3.

Allo stesso risultato si giunge osservando che ad ogni punto comune alla C e alla retta fondamentale A_2A_3, fuori delle s_2, s_3 intersezioni che cadono rispettivamente in A_2, A_3, risponde un punto infinitamente vicino ad A'_1 e situato sulla curva C'. Sicchè la C' avrà in A'_1 un punto $(n-s_2-s_3)$-plo le cui tangenti corrisponderanno projettivamente al gruppo delle $n-s_2-s_3$ intersezioni (distinte o coincidenti) in cui C sega la retta A_2A_3 fuori dei punti A_2, A_3, contati rispettivamente s_2, s_3 volte.

Dunque tra le tangenti a C' nel punto A'_1 si avranno le stesse coincidenze che si hanno tra gli $n-s_2-s_3$ punti in cui C sega A_2A_3, fuori dei punti fondamentali.

In particolare se la retta A_2A_3 e la curva C hanno in

A_2 molteplicità d'intersezione s_2+h — cioè se la retta A_2A_3 è una delle tangenti a C nel punto A_2 — la curva C' tocca la retta fondamentale $A'_1A'_3$, e questa conta h volte tra le tangenti a C' in A'_1.

Aggiungiamo ancora qualche altra osservazione:

a) Ad ogni punto P, non appartenente alle rette fondamentali il quale sia s-plo per la curva C, risponde un punto P', — esterno alle rette fondamentali, — il quale è s-plo per la curva C'.

Infatti alle rette per P rispondono le coniche della rete Σ' passanti per P', sicchè se una retta generica g uscente da P, sega C, fuori di P, in $n-s$ punti, la conica g', omologa di g, taglierà C' in $n-s$ punti diversi da P' e dai tre punti fondamentali. Per la genericità della conica g', sono

$$(n-s_2-s_3)+(n-s_3-s_1)+(n-s_1-s_2)=3n-2s_1-2s_2-2s_3$$

le intersezioni che cadono nei punti fondamentali; onde le intersezioni assorbite da P' risultano in numero di

$$2(2n-s_1-s_2-s_3)-(3n-2s_1-2s_2-2s_3)-(n-s)=s.$$

Il punto P' è perciò s-plo per C'.

b) Se il punto P, di cui sopra, è un punto s-plo ordinario per la C, il punto P' è pure un punto s-plo ordinario per la C'. (x)

Infatti a due rette distinte per P rispondono due coniche non tangenti per P', e quindi tante sono le tangenti distinte a C in P, quante le coniche tangenti a

(x) Si ricordi che per punto s-plo ordinario di una curva, s'intende un punto in cui le s tangenti sono distinte.

C' in P'. Ne segue che C' passa per P' con s rami non tangenti tra loro.

Ciò premesso, si consideri un punto s-plo qualunque O di una curva algebrica C d'ordine n situata sul piano π, e si conducano per O due rette tali che ciascuna di esse tagli C, fuori di O, in $n-s$ punti distinti tra loro. Sopra queste rette si assumano rispettivamente i punti P, Q in guisa che la retta PQ tagli C in n punti distinti tra loro e da P, Q.

Ponendo una corrispondenza projettiva tra le coniche di π passanti per O, P, Q e le rette di un altro piano π', si viene a stabilire tra i due piani una trasformazione quadratica, per la quale i punti O, P, Q son fondamentali. Dicansi O', P', Q' i punti fondamentali esistenti sul piano π'. Pel modo generico con cui furono scelti i punti O, P, Q, risulta, dalle osservazioni precedenti, che la curva C' omologa di C, ha due punti $(n-s)$-pli ordinarî in P', Q' ed un punto n-plo ordinario in O'. Inoltre ad ogni punto multiplo M di C, esterno alle rette fondamentali, risponde un punto M' di C', esterno alle rette fondamentali, avente la stessa molteplicità di M, con lo stesso numero di tangenti distinte.

Riserbandoci di studiare tra poco il modo di operare della trasformazione pel punto multiplo O, che abbiamo assunto come fondamentale, si può dire che nel passaggio da C a C' si sono conservate le molteplicità dei punti di C esterni alle rette fondamentali, e in corrispondenza ai punti di C situati sulle rette fondamentali (astrazione fatta da O) si sono in-

trodotti tre punti multiplì ordinarî di C'.
Nel seguito una trasformazione quadratica come quella ora considerata tra π e π' si chiamerà una "trasformazione quadratica generica avente un punto fondamentale in un punto multiplo O di C."

18. Scomposizione delle singolarità di una curva algebrica piana. Riprendiamo ancora la curva algebrica C, d'ordine n, situata sul piano π, ed osserviamo quale effetto produca pel punto multiplo O una trasformazione quadratica generica avente in O un punto fondamentale.
Come al n° precedente indicheremo con P, Q gli altri due punti fondamentali della trasformazione, appartenenti al piano π, e con O', P', Q' i punti fondamentali esistenti sul piano π' della curva trasformata C'; in tal guisa che ai punti dell'intorno di O rispondano i punti della retta fondamentale $P'Q'$; ai punti dell'intorno di P quelli della retta fondamentale $Q'O'$; ecc.
Sieno $o_1, o_2, \dots o_l$ $(l \leq s)$ le tangenti distinte della curva C nel punto O. A queste rette risponderanno l punti O'_1, $O'_2, \dots, O'_l$ della retta $P'Q'$, distinti tra loro e da P', Q'; e come le tangenti o_i corrispondono ai passaggi della C per O, in direzioni diverse dalle due rette fondamentali uscenti da O, così i punti O'_i daranno le intersezioni della curva C' colla retta fondamentale $P'Q'$, fuori dei punti P', Q'.
Precisamente: se la tangente o_i conta τ_i volte nel gruppo complessivo delle s tangenti a C in O - cioè se la radice corrispondente a questa tangente è τ_i-pla per l'equazione complessiva (di grado s) rappresentante

le tangenti a C in O - sicchè si abbia $\sum_{i=1}^{l} \tau_i = s$, il punto O'_i conterà τ_i volte tra le intersezioni di C' colla retta $P'Q'$.

Indicando con s_i la molteplicità del punto O_i per la curva C', avremo certamente

$$s_i \leq \tau_i,$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{l} s_i \leq s.$$

Questa diseguaglianza è già abbastanza espressiva perchè ci dice che <u>se $l>1$, cioè se la curva C ha in O almeno due tangenti distinte, la trasformazione quadratica considerata scioglie il punto s-plo O in più punti che hanno molteplicità minori di s per la curva trasformata C'.</u>

Si noti che in ogni caso la trasformazione quadratica <u>generica</u> considerata, muta la C in C' lasciando inalterate le molteplicità dei punti esterni alle rette fondamentali, introducendo tre nuovi punti multipli <u>ordinari</u>, e sostituendo al punto O un punto della stessa molteplicità o più punti di molteplicità inferiore.

Si operi ora sulla curva C' come si è operato sulla C, ponendo in O'_i un punto fondamentale di una trasformazione quadratica generica. Allora il punto O'_i si muterà in uno o più punti $O''_{i1}, O''_{i2}, \ldots$ della curva trasformata C'': ed anzi, nel caso in cui i punti O'' sieno almeno 2, ciascuno avrà per C'' molteplicità inferiore ad s_i. Indicheremo con $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$ le molteplicità dei punti $O''_{i1}, O''_{i2}, \ldots$ per la C''. E così potremo proseguire.

In ogni caso, dopo una serie di trasformazioni quadratiche, la curva C primitiva e la curva ottenuta per ultimo, risultano omologhe in una trasformazione birazionale tra i loro piani, la quale è il prodotto delle successive trasformazioni quadratiche operate. E questa trasformazione può bensì sciogliere un punto multiplo di C in più punti di minore molteplicità; ma non introduce nuovi punti multipli che non siano ordinarî.

Alle considerazioni precedenti è legata la nozione di composizione di un punto multiplo di una curva algebrica, mediante le singolarità infinitamente vicine; nozione importante e feconda che è dovuta al Noether.

Ritorniamo alla prima trasformazione quadratica che mutava la curva C nella C' e il punto O nei punti $O_1', O_2', \ldots, O_e'$. Suppongasi di spostare di poco la curva C', in guisa che, dopo lo spostamento, i punti $O_1', O_2', \ldots, O_e'$ non sieno più situati sulla retta $P'Q'$, ma sieno vicinissimi a punti di questa. Dopo lo spostamento, alla curva C' non risponderà più la C, ma una curva $\bar{C}$ prossima a C; e poichè, come sappiamo, punti esterni alle rette fondamentali si mutano in punti di egual molteplicità, così nei punti $O_1, O_2, \ldots, O_e$ prossimi ad O ed omologhi ai punti $O_1', O_2', \ldots, O_e'$, la $\bar{C}$ avrà molteplicità rispettive $s_1, s_2, \ldots, s_e$. Si osservi inoltre che la curva $\bar{C}$ ha in O un punto s-plo: infatti dopo lo spostamento la $P'Q'$ viene a tagliare C' in s punti, di cui s_1 prossimi ad O_1',

τ_2 prossimi ad O'_2, ecc.

La C si può dunque considerare come limite di una curva $\bar{C}$ che ha in O un punto s-plo e nei punti $O_1, O_2, \ldots, O_l$ prossimi ad O, le molteplicità rispettive $s_1, s_2, \ldots, s_l$. La stessa considerazione si può ripetere per la curva C' in relazione ad uno dei punti multipli O'_i, e così proseguendo.

Questi fatti si esprimono sotto una forma che li sintetizza chiaramente dicendo che *il punto multiplo O è composto di un punto s-plo, al quale sono infinitamente vicini nell'intorno di 1° ordine i punti s_i-pli O_i* ($i=1,2,\ldots,l$)*, nell'intorno di 2° ordine i punti s_{ik}-pli O_{ik}* ($i,k=1,2,\ldots$), e così via.

Le successive trasformazioni quadratiche non hanno in sostanza altro ufficio che quello di sostituire all'intorno di 1° ordine del punto O i punti di una retta (fondamentale), all'intorno di 2° ordine gl'intorni di 1° ordine dei punti di questa retta: e successivamente ad un numero finito di questi ultimi intorni di 1° ordine, altrettante rette e così via.

In tal modo la singolarità che risultava dall'insieme di varie singolarità infinitamente vicine, si viene a *scomporre* o a *sciogliere*.

Risulta ben chiaro dal significato geometrico attribuito alle singolarità infinitamente vicine, che *la composizione di un punto multiplo non è affatto legata alla scelta delle successive trasformazioni quadratiche colle quali il punto si scioglie*, cioè i numeri s, s_i, s_{ik} .... sono caratteristici pel punto multiplo stesso.

Le trasformazioni quadratiche appariscono così più uno strumento di analisi, che un elemento essenziale nella determinazione del concetto di composizione d'una singolarità.

19. Trasformazione birazionale di una curva piana dotata di singolarità qualunque, in una dotata di singolarità ordinarie.

Suppongasi che la curva C considerata finora sia priva di parti multiple.

Il procedimento indicato nel numero precedente per determinare la composizione del punto multiplo O, avrà allora termine dopo un numero finito di operazioni; nel senso che si arrivi finalmente a trovare un intorno di ordine abbastanza elevato (ma finito) in cui non esistano che punti semplici di C, oppure si potrà proseguire indefinitamente incontrando sempre punti multipli?

Poichè un punto multiplo con almeno 2 tangenti si risolve in due o più punti di molteplicità minore, il caso dubbio è soltanto quello in cui si abbia da analizzare un punto con una sola tangente. Ma noi ci proponiamo di provare che in ogni caso con un numero finito di operazioni si arriva sempre a punti semplici. A tal uopo occorre premettere la valutazione della molteplicità d'intersezione di due curve algebriche piane in un loro punto comune.

Sieno C, D le due curve ed O il punto ad esse comune il quale sia s-plo per C e t-plo per D. È noto dalla teoria elementare delle curve algebriche piane, che il punto O assorbe precisamente <u>st</u> o un numero maggiore d'intersezioni delle due curve, secondo che queste non hanno od hanno in comune qualcuna delle tangenti. Dicasi I la molteplicità d'intersezione incognita, sicchè si abbia

$$I = st + I_1 \qquad (I_1 \geq 0),$$

e si operi una trasformazione quadratica generica con un punto fondamentale in O.

S'indichino con O'_1, O'_2, ... i punti della retta fondamentale $P'Q'$ corrispondenti alle tangenti comuni in O, e con I'_1, I'_2, ... le molteplicità d'intersezione in O'_1, O'_2, ... delle curve trasformate C', D'.

Sostituendo alla curva C una curva abbastanza prossima $\overline{C}$, la quale pur avendo in O un punto s-plo, non tocchi la curva D, il punto O assorbirà precisamente st intersezioni delle due curve $\overline{C}$, D, e vi saranno inoltre I_1 punti comuni a $\overline{C}$, D, i quali tenderanno ad O col tendere di $\overline{C}$ verso C.

La curva $\overline{C}'$ trasformata di $\overline{C}$, essendo vicinissima a C', pel significato stesso di "molteplicità d'intersezione„ taglierà D' in I'_1 punti vicinissimi ad O'_1; in altri I'_2 punti vicinissimi ad O'_2, ecc; cioè taglierà D' in $I'_1 + I'_2 + \cdots$ punti vicinissimi alla retta fondamentale $P'Q'$ (ma non ai punti fondamentali P', Q'). Poichè a queste intersezioni di $\overline{C}'$ con D' rispondono le I_1 intersezioni di $\overline{C}$ e D prossime al punto O avremo

$$I_1 = I'_1 + I'_2 + \cdots$$

Ragionando similmente per ciascuno dei punti O'_i comuni alle curve C', D', avremo

$$I'_i = s_i t_i + \sum_k I''_{ik} ,$$

ove s_i, t_i son le molteplicità di C', D' nel punto O'_i ed I''_{ik} è la molteplicità d'intersezione in O''_{ik} delle curve C'', D'' trasformate di C', D' mediante una trasformazione quadratica generica avente il punto fondamentale O'_i.

Così proseguendo risulterà la formola fondamentale

$$I = st + \sum_i s_i t_i + \sum_{ik} s_{ik} t_{ik} + \cdots\cdots ,$$

ove il primo sommatorio è esteso a tutti i punti multipli comuni alle due curve C, D nell'intorno di 1° ordine del punto comune O, il secondo a tutti i punti multipli comuni situati nell'intorno di 2° ordine; e così via.

Ciò premesso, ritorniamo alla questione posta in principio del n°.

Assoggettiamo la curva C d'ordine n ad uno spostamento infinitesimo, portandola nella posizione $\overline{C}$, ed osserviamo che le due curve $C, \overline{C}$ non possono avere una parte comune, chè altrimenti tra le componenti della curva C — supposto pure che questa sia spezzata — vene sarebbero due infinitamente vicine, e quindi la C conterebbe una parte contata due o più volte: ciò che abbiamo escluso fin dal principio.

Ne deriva che la somma delle molteplicità d'intersezione delle curve $C, \overline{C}$ nei punti (in numero finito) ad esse comuni, dev'essere eguale al prodotto n^2 dei loro ordini (teorema di Bézout). Si osservi inoltre che la curva $\overline{C}$ non soltanto passa colla molteplicità $s-1$ (almeno) pel punto O s-plo per C (n°.), ma passa ancora colle moltepliciltà $s_i - 1$ (almeno) pei punti O_i situati nell'intorno di 1° ordine di O, colle moltepliciltà $s_{ik} - 1$ (almeno) pei punti O_{ik} situati nell'intorno di 2° ordine; ecc.

Infatti una trasformazione quadratica generica avente un punto fondamentale in O, muta le curve $C, \overline{C}$ in due curve infinitamente vicine $C', \overline{C}'$ la prima delle quali ha le moltepliciltà s_i nei punti O_i corrispondenti ai punti multipli di C situati nell'intorno di 1° ordine di O, e la 2.ª ha le stesse moltepliciltà in punti infinitamente prossimi ad punti O_i'. Pel teorema dimostrato al n.° 9, ne segue ancora che la $\overline{C}'$ passa colle moltepliciltà $s_i - 1$ (almeno) pei punti O_i', e quindi che $\overline{C}$ passa colle stesse moltepliciltà pei punti O_i. Mutando le $C', \overline{C}'$ nelle curve $C'', \overline{C}''$ mediante una trasformazione quadratica generica avente un punto fondamentale in O_i', si vede facilmente che $\overline{C}'$ passa colle moltepliciltà $s_{ik} - 1$ (almeno) pei punti multipli O_{ik}'' situati nell'intorno di 1° ordine di O_i', e quindi che $\overline{C}$ passa colle stesse moltepliciltà pei punti multipli O_{ik} situati nell'intorno di 2° ordine di O; e così proseguendo.

Si conclude pertanto che il punto O comune alle curve $C, \overline{C}$ assorbe almeno

$$s(s-1) + \sum_i s_i(s_i - 1) + \sum_{ik} s_{ik}(s_{ik} - 1) + \cdots$$

delle n^2 intersezioni delle due curve.

La somma precedente dovendo esser finita, dopo un numero finito di termini si dovrà giungere a termini nulli, cioè in un intorno di ordine abbastanza elevato, ma finito, del punto multiplo O, si dovranno trovare soltanto punti semplici ($s_i k e\ldots = 1$) della curva C, priva di parti multiple.

Ne deriva che con un numero finito di trasformazioni quadratiche, cioè colla trasformazione cremoniana prodotto di esse, si riesce a sciogliere in punti semplici un punto multiplo qualsiasi della curva C, priva di parti multiple.

Se si ricorda che in ognuna delle trasformazioni quadratiche che occorre operare per sciogliere una data singolarità, non s'introducono nuove singolarità straordinarie nella curva trasformata, ma soltanto dei punti multipli ordinarî, si vede che con un numero finito di trasformazioni quadratiche si possono ad una ad una sciogliere tutte le singolarità straordinarie, arrivando infine ad una curva datata di soli punti multipli a tangenti distinte.

Si ottiene così il classico teorema di Noether:

Ogni curva piana, datata di singolarità qualunque, si può trasformare, con una conveniente trasformazione cremoniana, in un'altra curva piana, datata di soli punti multipli ordinarî (a tangenti distinte).

20. Rami o cicli di una curva algebrica. Sia O un punto multiplo qualunque di una curva piana C, priva di parti multiple. Operiamo con una trasformazione cremoniana la quale muti la curva C in una curva Γ risolvendo il punto multiplo O, in un certo numero finito l di punti semplici P, Q, ... della curva trasfor-

alla totalità dei punti di C situati nell'intorno di O (cioè la cui distanza da O non superi un limite assegnato) rispondono gl'intorni dei punti semplici P, Q .... della curva Γ. Ciascuno di questi intorni si dirà un ramo (Cayley) o un ciclo (Halphen) della curva stessa, e i punti $P, Q, \ldots$ si diranno le origini di tali rami. Per ricordare inoltre che l'intorno del punto O di C si può risolvere in l intorni di punti semplici sopra una conveniente curva birazionalmente identica a C, si dirà che sulla curva C il punto O è origine di l rami.

Ciascuno di questi rami resta ben definito; è l'insieme dei punti di C che corrispondono ai punti di Γ situati in uno degl'intorni dei punti P, Q .....

Il concetto di ramo apparisce in tal modo come una nozione invariante rispetto alle trasformazioni birazionali.

Cioè: Mediante una trasformazione birazionale, ad un ramo, corrisponde un ramo.

La definizione di ramo vien meglio precisata dalle seguenti considerazioni analitiche.

Dicansi t, u le coordinate cartesiane di un punto della curva Γ, sicchè l'equazione di questa curva sia

$$f(t,u)=0.$$

Si possono supporre scelti gli assi coordinati in tal guisa che l'origine $t=u=0$ cada nel punto semplice P, di cui sopra, e che inoltre l'asse $t=0$ non sia tangente a Γ, ma anzi tagli la curva in m punti al finito, tra loro distinti. Allora l'equazione

$$f(0,u)=0,$$

che ha già per ipotesi la radice $u=0$, sarà di grado m ed ammetterà in tutto m radici distinte.

Distendiamo in un piano la variabile complessa t alla maniera di Argand e Gauss, e segniamo in questo piano (che diremo brevemente il piano t) il punto $t=0$. Similmente rappresentiamo i valori di u coi punti di un altro piano - il piano u - e segniamo ivi il punto $u=0$. L'equazione $f(t,u)=0$ pone tra i due piani una corrispondenza tale che ad ogni punto t rispondono m punti u (tra loro distinti oppure coincidenti). Al punto $t=0$ rispondono m punti u distinti, tra cui havvi il punto $u=0$. Si segnino sul piano t i punti critici della funzione implicita u di t definita dall'equazione $f=0$, cioè quei valori di t corrispondentemente ai quali si hanno due o più valori di u tra di loro coincidenti. Avendo supposto la C priva di parti multiple, questi punti sono evidentemente in numero finito, perchè corrispondono a quei valori di t pei quali si ha o un punto multiplo di C, o una tangente parallela all'asse delle u. Si segnino pure sul piano t i punti - in numero finito - corrispondentemente a cui la funzione u diviene infinita.

Tutti questi punti sono distinti dal punto $t=0$, perchè per ipotesi a $t=0$ rispondono m valori finiti e distinti di u: onde si potrà tracciare sul piano t un circolo A di raggio abbastanza piccolo, che lasci fuori i punti singolari segnati. Dicansi

$$u_0=0\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ \dots\ u_{m-1}$$

gli m valori di u corrispondenti a $t=0$.

Mentre un punto del piano t si muove nell'interno del circolo segnato, gli m punti corrispondenti si muovono sul piano u descrivendo certe aree finite $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ comprendenti i punti $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, nè mai vengono tra loro a coincidere.

Sicchè se si fissa l'attenzione sopra quella determinazione di u che in $t=0$ assume il valore $u_0=0$, allorquando la variabile t descrive il circolo A, resta definita una funzione $u(t)$ avente un sol valore in corrispondenza ad ogni punto del circolo stesso, perchè mai la determinazione fissata viene a scambiarsi colle altre. Questa funzione monodroma soddisfa alle condizioni di monogeneità. (*)

Se infatti si sostituisce al posto di u nell'equazione $f=0$, la funzione $u(t)$ ora definita, e se si osserva che esistono le derivate di f rispetto a t e ad u, e che la $\frac{\partial f}{\partial u}$ non è mai nulla in corrispondenza di punti del circolo A (perchè la $\frac{\partial f}{\partial u}$ si annulla solo nei punti critici), se ne trae, per la regola di derivazione delle funzioni implicite, che esiste la $\frac{du}{dt}$ e che è data da

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial u}}$$

Quest'espressione della $\frac{du}{dt}$ prova che tale derivata è una funzione continua avente in ogni punto del circolo A un valore indipendente dalla direzione

(*) Cfr. p. e Bianchi Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche (Pisa Spoerri 1901) §2. Vedi pure, Appel e Goursat, op. citata, pag 168 secondo cui è calcolata, e quindi che $u(t)$ è una funzione monogena. Si potrà dunque sviluppare la $u(t)$ colla formola di Taylor-Cauchy in una serie di potenze di t convergente nell'interno del circolo A

$$u = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots\ldots \quad (*).$$

Accoppiando ad ogni valore di t, interno al circolo A, il corrispondente valore di u, dato da questa serie; si ottiene un insieme di punti (u,t) della curva Γ, i quali costituiscono il ramo di cui il punto semplice P è l'origine.

Dicansi x, y le coordinate di un punto variabile sulla curva primitivamente data C. Avremo

$$\begin{cases} x = \text{funz. rasionale}\,(t,u) \\ y = \text{funz. rasionale}\,(t,u) \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \text{funz. raz.}\,(x,y) \\ u = \text{funz. raz.}\,(x,y) \end{cases}$$

(x,y) e (t,u) denotando le coordinate di due punti corrispondenti nella trasformazione birazionale che lega le due curve C, Γ.

Sostituendo ad u la serie di potenze, ed eseguendo le varie operazioni indicate nelle funzioni rasionali che dànno le espressioni di x, y avremo in definitiva gli sviluppi

$$\begin{cases} x = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots\ldots \\ y = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \ldots\ldots \end{cases}$$

che rappresentano un ramo di C avente per origine il punto multiplo O: è il ramo corrispondente a quello che sulla curva Γ ha per origine il punto semplice P.

Si conclude pertanto che

(*) Ved. ad es. Bianchi, op. citata, § 41

I punti di una curva algebrica appartenenti all'intorno di un suo punto O dato, si distribuiscono in un numero finito di rami aventi per origine O: le coordinate dei punti di un ramo si possono esprimere mediante una serie di potenze (intere) di un parametro ausiliario t, che alla sua volta è funzione razionale delle coordinate stesse. Al variare di t nel circolo ove queste serie son convergenti, si ottengono tutti i punti del ramo.

Definiamo ora due caratteri projettivi appartenenti ad un ramo di una curva algebrica piana C: l'ordine e la classe.

L'origine O del ramo si assuma come origine delle coordinate ($x = y = 0$), sicchè gli sviluppi in serie che dànno le coordinate dei punti del ramo, manchino dei termini indipendenti da t. Si abbia cioè

$$\begin{cases} x = a_\alpha t^\alpha + a_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \dots \\ y = b_\alpha t^\alpha + b_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \dots \end{cases}$$

dove una almeno delle costanti a_α b_α è diversa da zero.

Sia $\lambda x + \mu y = 0$, una retta uscente dall'origine O, e si sostituiscano nell'equazione della retta le serie di potenze che rappresentano il ramo. Avremo:

$$\varphi(t) = (\lambda a_\alpha + \mu b_\alpha) t^\alpha + (\lambda a_{\alpha+1} + \mu b_{\alpha+1}) t^{\alpha+1} + \dots = 0.$$

Se I ($\geq \alpha$) è il minimo esponente a cui comparisce t in quest'equazione, si dice che il ramo e la retta hanno nell'origine molteplicità d'intersezione I.

È chiaro che quando la retta passa genericamente per O, cioè in guisa che

$$\lambda a_\alpha + \mu b_\alpha \neq 0$$

risulta precisamente $I = \alpha$; mentre havvi una determinata retta di equazione

$$b_\alpha x - a_\alpha y = 0,$$

per cui I risulta maggiore di α. Questa retta dicesi la tangente al ramo nell'origine.

Se la molteplicità d'intersezione della tangente è $\alpha + \alpha_1$ $(\alpha_1 \geq 1)$, α si chiama l'ordine del ramo ed α_1 la classe.

Questi due numeri hanno un significato geometrico ben netto, che dà pure ragione del loro carattere projettivo.

Cerchiamo anzitutto il significato geometrico della "molteplicità d'intersezione" di un ramo con una retta qualunque per l'origine. Si consideri la retta

$$\lambda x + \mu y + \varepsilon = 0,$$

che per ε abbastanza piccolo può ritenersi prossima quanto si vuole alla retta

$$\lambda x + \mu y = 0.$$

Sostituendo nell'equazione della nuova retta gli sviluppi in serie di x, y, avremo:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon + \varphi(t) = 0$$

Poichè per $\varepsilon = 0$ l'equazione $\varphi(t, \varepsilon) = 0$ ha I radici nulle (o, più precisamente, poichè $\varphi(t, 0)$ è infinitesima d'ordine I rispetto a t), per ε abbastanza piccolo, l'equazione $\varphi(t, \varepsilon) = 0$ avrà I radici distinte prossime a zero (*). Geometricamente ciò significa che la retta $\lambda x + \mu y + \varepsilon = 0$ taglia il ramo in I punti distinti

(*) Ved. Bianchi, op citata, § 71

prossimi all'origine (cioè che col tendere di ε a 0 tendono a coincidere coll'origine).
Dunque l'ordine è il numero dei punti distinti in cui il ramo vien segato da una retta prossima a passare per l'origine con una direzione diversa da quella della tangente, mentre la classe è l'eccesso sull'ordine del numero delle intersezioni distinte con una retta prossima alla tangente.
Si dimostra che la classe può anche definirsi come il numero duale dell'ordine. Considerando il ramo non come insieme di punti, ma come inviluppo di rette (le tangenti alla curva nei punti del ramo stesso), la classe risulta cioè eguale al numero delle tangenti distinte che passano per un punto prossimo alla tangente origine, ma non al punto origine del ramo. (*)

21. Sulle varie specie di punti doppî. Facciamo un esempio delle generalità esposte sul concetto di punti multipli infinitamente vicini, e sul concetto di ramo, considerando in particolar modo i punti doppî di una curva algebrica.
Un punto doppio O di una curva algebrica C può avere le due tangenti distinte o coincidenti. Nel primo caso una trasformazione quadratica generica, avente in O un punto fondamentale, cioè

(*) Veggasi p.e. l'Appendice sulle curve algebriche e loro singolarità nell'opera di Bertini, Introduzione alla geometria projettiva degl'iperspazî (Pisa Spoerri 1907).

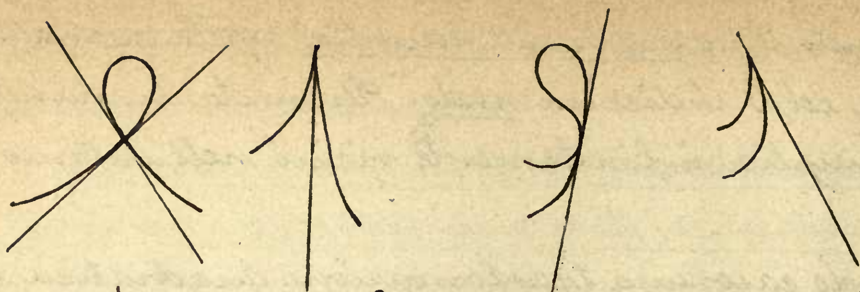
gli il punto O in due punti semplici della curva trasformata, ed O si dice un nodo. Un nodo ha dunque due punti semplici infinitamente vicini nell'intorno di 1° ordine.

Nel secondo caso una trasformazione quadratica generica col punto fondamentale O, può far corrispondere ad O un punto semplice o un punto doppio. Allorquando O dà luogo ad un punto semplice della curva trasformata, sicchè insomma nell'intorno di 1° ordine di O vi sia un sol punto semplice, il punto doppio in questione chiamasi una cuspide di 1ª specie o ordinaria.

Quando invece la curva trasformata possiede un punto doppio O', corrispondente ad O, se O' è un nodo, il punto doppio O dicesi un tacnodo o nodo di 2ª specie. Un tacnodo è dunque composto da un punto doppio, nei cui intorni di 1° e di 2° ordine si trovano rispettivamente, un altro punto doppio, e due punti semplici.

Se invece O' è una cuspide di 1ª specie il punto O dicesi una cuspide di 2ª specie. Nell'intorno di 1° ordine di una cuspide di 2ª specie si ha una cuspide di 1ª specie, e nell'intorno di 2° ordine un punto semplice.

Le forme di una curva algebrica nelle vicinanze di un nodo, o di una cuspide ordinaria, o di un tacnodo, o di una cuspide di 2ª specie (origini di rami reali) sono indicate nelle figure seguenti:



nodo cuspide di 1ª specie tacnodo cuspide di 2ª specie

In generale dicesi nodo di specie k un punto doppio a cui siano infinitamente vicini: nell'intorno di 1° ordine un nodo di specie k-1, nell'intorno di 2° ordine un nodo di specie k-2, ..., nell'intorno di ordine k-1 un nodo ordinario, nell'intorno di ordine k due punti semplici.

E si dice cuspide di specie k un punto doppio a cui siano infinitamente vicini: nell'intorno di 1° ordine una cuspide di specie k-1, nell'intorno di 2° ordine una cuspide di specie k-2, ..., nell'intorno di ordine k-1 una cuspide ordinaria, nell'intorno di ordine k un punto semplice.

Dal punto di vista dei cicli un nodo (di specie qualunque) è origine di due rami, mentre una cuspide (di specie qualunque) è origine di un sol ramo; cioè per rappresentare completamente l'insieme dei punti appartenenti all'intorno di un nodo occorrono due coppie di serie di potenze distinte, mentre nel caso di una cuspide basta una sola coppia di sviluppi in serie.

Quanto ai valori dell'ordine e della classe dei rami che compongono le varie specie di punti doppî, si può dir subito che un nodo (di specie qualunque) è origine di due rami di 1° ordine, giacchè una retta

abbastanza prossima al punto doppio deve incontrare ciascuno dei due rami, e complessivamente deve incontrare la curva in <u>due</u> punti prossimi al punto doppio. La classe di ciascuno dei due rami può esser qualunque, ma in generale ha anch'essa il valore 1.–
Quanto ad <u>una cuspide</u>, (<u>di specie qualunque</u>) si può dire che essa <u>è origine di un ramo di 2° ordine</u>, perchè le due intersezioni prossime alla cuspide in cui una retta abbastanza vicina alla cuspide stessa incontra la curva, debbono stare in un sol ramo.–. La classe, se si tratta di una <u>cuspide ordinaria</u>, è eguale ad 1.

Capitolo terzo.

Le serie lineari di gruppi di punti sopra una curva algebrica. Curve algebriche sghembe e iperspaziali.

22. Serie lineari semplicemente infinite. Abbiasi in un piano la curva algebrica irriducibile

$$(1) \qquad f(x,y)=0,$$

ed un fascio di curve algebriche C di equazione

$$(2) \qquad \phi(xy) - \lambda\psi(xy) = 0.$$

Se la curva C variabile nel fascio, sega la f in punti variabili, se cioè le intersezioni di f e di C non cadono tutte nei punti base del fascio, si dice che il gruppo delle intersezioni delle due curve, descrive su f una serie lineare semplicemente infinita o di dimensione 1. È infatti legittimo considerare la totalità dei gruppi suddetti come un insieme di dimensione 1, perchè i gruppi stessi risultano in corrispondenza biunivoca colle curve del fascio, cioè coi valori del parametro λ.

Se tra le intersezioni della curva variabile C colla f ve ne sono alcune fisse, queste si potranno intendere indifferentemente comprese od escluse dai gruppi della serie lineare, giacchè esse non avranno alcuna influenza sullo studio che stiamo per intraprendere, eccezione fatta per alcune speciali proprietà. In questi casi avremo sempre cura di precisare se si tratti di una serie lineare con punti fissi o con tutti i punti variabili.

Il numero dei punti di un gruppo di essi ordine della serie lineare. Se n è l'ordine, la serie s'indica (seguendo una notazione di Brill e Noether) col simbolo g_n^1, ponendo in basso l'ordine n, e in alto la dimensione 1.

Una serie lineare g_n^1 gode della proprietà seguenti:

a) I suoi gruppi costituiscono una totalità razionale, cioè si possono porre in corrispondenza birazionale coi valori di un parametro.

Infatti, dato su f un gruppo della g_n^1 il valore di λ corrispondente alla curva C che segna su f il gruppo fissato, si ottiene risolvendo l'equazione di 1° grado

$$(3) \qquad \varphi(x_0 y_0) - \lambda \psi(x_0 y_0) = 0,$$

ove $x_0 y_0$ è un punto variabile del gruppo considerato. Viceversa, dato un valore di λ, e quindi una curva C del fascio, si costruiscono con operazioni algebriche le coordinate dei punti del gruppo segnato su f dalla C.

I gruppi di g_n^1 risultano dunque riferiti ai valori di λ mediante una corrispondenza algebrica biunivoca, cioè birazionale.

b) Per un punto generico della curva f passa un sol gruppo della serie.

Infatti dato su f il punto $(x_0 y_0)$, un gruppo della g_n^1 che passi pel punto dato, dovrà esser segato dalla curva C corrispondente alla soluzione dell'equazione (3), e quindi C risulterà perfettamente determinata se non è contemporaneamente

$$\varphi(x_0 y_0) = \psi(x_0 y_0) = 0,$$

cioè se $x_0 y_0$ non trovasi tra i punti base del fascio, ovvero tra i punti fissi della g_n^1.

È importante di osservare che le due proprietà a), b) caratterizzano una g_n^1: cioè che sopra una curva algebrica una serie semplicemente infinita di gruppi di n punti soddisfacente alle condizioni a), b), è necessariamente una serie lineare.

Infatti la condizione a) fa sì che si possano determinare i singoli gruppi della data serie per mezzo dei valori di un parametro λ, in guisa che vi sia corrispondenza birazionale tra i gruppi della serie e i valori di λ. La condizione b) ci pone in grado di asserire che ad un punto generico della curva f risponde un sol gruppo della serie e quindi un sol valore di λ, onde λ risulta funzione algebrica ad un sol valore, cioè funzione razionale del punto variabile sulla f (ved. l'Introduzione). Avremo dunque

$$\lambda = \frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)},$$

e la funzione razionale $\frac{\varphi}{\psi}$ assumerà lo stesso valore λ in tutti i punti di un gruppo della data serie. Ne deriva che il gruppo stesso sarà staccato su f, fuori eventualmente di punti fissi, dalla curva

$$\varphi(xy) - \lambda\psi(xy) = 0.$$

Al variare di λ si ottengono i gruppi della serie la quale risulta perciò lineare.

Se si astrae dai punti fissi della serie lineare, i quali, annullando il numeratore ed il denominatore della funzione $\frac{\varphi}{\psi}$, sono d'indeterminazione per la funzione stessa, i punti di un gruppo della g_n^1 appariscono come quelli in cui una data funzione razionale, la $\frac{\varphi}{\psi}$, assume lo stesso valore, o come si dice brevemente: i gruppi di una serie lineare semplicemente infinita, sono gruppi di livello costante per una funzione razionale del punto variabile sulla curva sostegno della serie.

Da ciò segue che il concetto di serie lineare di gruppi di punti, è invariante rispetto alle trasformazioni birazionali della curva, cioè che se si passa dalla curva

$$f(x,y)=0 \quad \text{alla} \quad F(X,Y)=0,$$

con una trasformazione tale che le coordinate di un punto variabile su f siano funzioni razionali delle coordinate del punto corrispondente di F, e viceversa, una serie lineare di gruppi di punti g_n^1 appartenente alla curva f, si muta in una serie lineare g_n^1 dello stesso ordine, appartenente alla F.

Infatti se la g_n^1 esistente sulla f è data dai gruppi di livello costante della funzione razionale $R(xy)$, per mezzo della sostituzione razionale che esprime le x, y mediante le X, Y, la $R(xy)$ si muta in una funzione razionale $S(XY)$ (la quale dà nuovamente le $R(x,y)$ mediante la sostituzione razionale inversa). Se $(x,y)(X,Y)$ son le coordinate di due punti corrispondenti delle f, F si ha

$$R(x,y) = S(X,Y)$$

e quindi ai punti di un dato livello di una di queste funzioni, corrispondono biunivocamente i punti di egual livello dell'altra funzione, cioè la serie lineare relativa all'una funzione si muta nella serie lineare relativa all'altra, in tal guisa che si corrispondono biunivocamente i punti di gruppi omologhi. Da ciò segue che le due serie hanno lo stesso ordine.

La invarianza delle serie lineari rispetto alle trasformazioni birazionali, può anche stabilirsi osservando che nel passaggio da f a F una serie di gruppi di $\underline{n}$ punti, soddisfacente alle condizioni a) b), si muta in una serie di gruppi di $\underline{n}$ punti, soddisfacenti alle stesse condizioni.

23 <u>Serie lineari di dimensione qualunque</u>. Consideriamo più in generale l'insieme dei gruppi di punti segnati sulla curva (1) dalle curve del sistema lineare

$$\lambda_0 \varphi_0(x,y) + \lambda_1 \varphi_1(xy) + \dots \dots + \lambda_k \varphi_k(xy) = 0.$$

Si suppone naturalmente che non tutte le curve di Σ contengano come parte la f, e che tra le intersezioni di f con una curva C variabile in Σ, ve ne siano alcune variabili. I punti fissi, se vi sono, si potranno o no considerare come facenti parte dei gruppi in esame. L'insieme di questi gruppi dicesi una <u>serie lineare d'ordine n</u>, ove n è il numero dei punti costituenti un gruppo generico.

Se r è la dimensione della serie, cioè se la determinazione dei gruppi di questa può farsi dipendere dai valori di r parametri indipendenti, la serie si rappresenta col simbolo g_n^r.

È ben chiaro che r non può superare la dimensione R del sistema Σ_1 che serve a segnare la serie; ma non si può affermare che sia precisamente $r = R$.

Tale eguaglianza sussiste però quando ogni gruppo della serie sia segnato da una sola curva di Σ_1, perchè allora viene ad aversi una corrispondenza biunivoca continua tra i gruppi della g_n^r e le curve C.

Cosa accade invece quando un gruppo della g_n^r è segnato su f da due o più curve di Σ_1? Se p.e il gruppo G_n vien segato su f (fuori dei punti fissi da cui si voglia fare astrazione) dalle due curve C distinte

$$\varphi = 0 \quad , \quad \varphi' = 0,$$

G_n apparterrà al gruppo dei punti base del fascio

$$\varphi + \lambda \varphi' = 0,$$

e quindi tutte le curve di questo fascio (le quali stanno in Σ_1) staccheranno su f il medesimo gruppo G_n.

Si noti che tra queste curve ve n'è una che contiene come parte la f. Invero una curva generica del fascio, sega f in quei punti base di Σ_1 che si sono esclusi dai gruppi di g_n^r, e ulteriormente nei punti di G_n. Poichè questi punti esauriscono le intersezioni della f colla curva variabile $\varphi + \lambda \varphi' = 0$, la curva del fascio passante per un altro punto di f, avrà con f più intersezioni di quante ne assegni il teorema di Bézout, cioè conterrà come parte la f (che, si ricordi, è irriducibile)

Viceversa, allorchè nel sistema Σ vi è una curva $\varphi=0$ che contiene come parte f, un gruppo G_n della serie può venir segato da infinite curve di Σ.

Se infatti $\varphi'=0$ è una curva di Σ la quale stacchi su f il gruppo G_n, ogni curva del fascio $\varphi+\lambda\varphi'=0$ stacca su f lo stesso gruppo, che è costituito da punti base del fascio. Si noti che nel fascio stesso non vi sono altre curve, diverse da φ, le quali contengano come parte f, perchè se ve ne fosse un'altra tutte le curve del fascio conterrebbero come parte f, e quindi la φ' non potrebbe staccare il gruppo G_n.

Dunque la dimensione della serie g_n^r risulta minore della dimensione del sistema lineare Σ che serve a segnarla, soltanto allorchè in Σ vi sono delle curve contenenti come parte f.

Diciamo ora h la dimensione del sistema lineare H costituito da tutte le C di Σ che contengono come parte f. (vedi a pag. 13). Allora, per un gruppo G_n della serie g_n^r passeranno almeno ∞^{h+1} curve di Σ, formanti il sistema lineare che congiunge H ad una curva di Σ la quale stacchi G_n; nè per G_n potranno passare più di ∞^{h+1} curve C, perchè una curva generica del sistema lineare di tutte le C che passano per G_n, non ha intersezioni variabili, con f, e quindi le curve di questo sistema soggette alla condizione semplice di passare per un punto generico di f delbono contenere come parte la f, cioè debbono costituire il sistema H.

Ciò posto, scegliamo, entro al sistema Σ, $R+1$ curve linearmente indipendenti, di cui $h+1$, tra loro linearmente indipendenti appartengano ad H. Le $R-h$ curve ulteriori individuano un sistema lineare K ∞^{R-h-1} (pag. 9), il quale non può avere curve comuni con H, perchè altrimenti i due sistemi H, K, in virtù della relazione che lega le dimensioni di due sistemi alle dimensioni dei sistemi intersezione e congiungente, sarebbero contenuti in un sistema lineare di dimensione $\leq h+R-h-1$, cioè $\leq R-1$, e quindi le $R+1$ curve scelte non sarebbero indipendenti.

Le curve del sistema K tra le quali non ve n'è alcuna che contenga come parte f, staccano su f gruppi della data g_n^r (poichè ogni curva di Σ non contenente come parte f determina un gruppo di questa serie); anzi è facile vedere che ogni gruppo G_n di g_n^r può venir segato da una curva di K. Infatti le C per G_n formano un sistema lineare ∞^{h+1}, che ha comune con K una curva ($h+1+R-h-1=R$), la quale stacca G_n.

Dunque la serie lineare segata su f, fuori dei punti fissi, dalle curve del sistema K, coincide colla g_n^r; e poichè per un gruppo della serie segata passa una ed una sola curva di K, (chè altrimenti, come abbiam visto vi sarebbero in K delle curve contenenti f), si conclude che

$$r = R-h-1$$

Possiamo pertanto enunciare il teorema seguente:

Tra la dimensione r di una serie lineare staccata sopra una curva f da un sistema lineare Σ ∞^R, e la dimensione h del sistema lineare di tutte le curve di Σ contenenti come parte f passa la relazione

$$r = R - h - 1$$

La serie lineare può sempre intendersi segnata su f da un sistema lineare ∞^r contenuto in Σ.
Da questo teorema discendono varî corollarî:
a) Per r punti generici della curva f passa un sol gruppo di una g_n^r.
Infatti, per r punti generici di f — diversi cioè dagli eventuali punti base di Σ — passa una sola curva del sistema K e quindi un sol gruppo della g_n^r segato da questo sistema.
b) I gruppi della g_n^r passanti per un punto generico P di f, formano una serie lineare di dimensione $r-1$. (aventi quel punto come fisso).
Infatti le curve di K per un punto generico P di f formano un sistema lineare ∞^{r-1} le cui curve non contengono f. Questo sistema segna dunque su f una serie di dimensione $r-1$. Se il punto P coincidesse con qualcuno dei punti fissi della serie g_n^r, i gruppi di g_n^r per P darebbero la serie lineare medesima. È quindi sempre vero che i gruppi di una serie lineare passanti per un punto qualunque di f, formano una serie lineare.
L'applicazione replicata di questa proposizione dà luogo alla seguente:

<u>I gruppi di una serie lineare g_n^r passanti per s punti qualunque ($s \leq n$) formano una serie lineare.</u>
La dimensione di questa serie risulta eguale ad $r-s$ soltanto se gli s punti son generici.
Una serie lineare più volte infinita può pure concepirsi come l'insieme dei gruppi di livello costante di una funzione razionale del punto variabile sopra la curva f; senonchè, allorquando si tratta di una serie di dimensione r, bisogna considerare una funzione razionale in cui compajono linearmente $r-1$ parametri essenziali. Infatti se i gruppi della g_n^r sono dati dalle curve del sistema ∞^r:

$$\varphi_0(x,y)+\lambda_1\varphi_1(x,y)+\cdots+\lambda_r\varphi_r(x,y)=0,$$

si posson considerare i gruppi stessi come gruppi di livello costante della funzione razionale

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_r}+\lambda_1\frac{\varphi_1}{\varphi_r}+\cdots+\lambda_{r-1}\frac{\varphi_{r-1}}{\varphi_r},$$

la quale dipende dalle $\lambda_1 \dots \lambda_{r-1}$, che non possono ridursi a un minor numero di parametri essenzialmente distinti, poichè altrimenti la dimensione della serie risulterebbe minore di r.

24. <u>Equivalenza di due gruppi di punti. Serie complete</u>. Sopra una curva algebrica f due gruppi A, B costituiti di un egual numero n di punti, diconsi <u>equivalenti</u> allorquando essi appartengono ad una medesima serie lineare g_n^r. Simbolicamente l'equivalenza di due gruppi s'indica scrivendo

$$A \equiv B$$

<u>Due gruppi equivalenti posson sempre considerarsi</u>

rispettivamente come l'insieme degli zeri, e dei poli (punti d'infinito) di una funzione razionale del punto scorrente su f.

Invero, se la g_n^r che contiene A, B, è segata su f, fuori di eventuali punti fissi, dalle curve di un sistema Σ, ∞^r, e se $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ son le due curve di questo sistema che staccano i due gruppi suddetti, la funzione razionale $\frac{\varphi}{\varphi'}$ si annulla soltanto nei punti di A ($\varphi = 0$), e diviene infinita soltanto nei punti di B ($\varphi' = 0$). S'intende che se A, B hanno dei punti comuni, questi sono punti d'indeterminazione della funzione razionale, sicchè, se ci piace, si possono includere contemporaneamente nel gruppo dei poli e in quello degli zeri.

Dimostriamo ora l'importante teorema:

Due gruppi equivalenti ad un terzo sono equivalenti tra loro. In simboli:

Se $A \equiv B$ e $B \equiv C$ risulta $A \equiv C$.

Questo teorema è contenuto evidentemente in quest'altro:

Se due serie lineari g_n^r, g_n^s hanno un gruppo comune, esiste una serie lineare che le contiene entrambe.

La prima serie sia segata su f fuori del gruppo K, dal sistema

$$(4) \quad \lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r = 0$$

e la seconda, fuori del gruppo L, dal sistema

$$(5) \quad \mu_0 \psi_0 + \mu_1 \psi_1 + \cdots\cdots + \mu_s \psi_s = 0.$$

Il gruppo A, comune alle due serie, sia staccato dalla $\varphi_0 = 0$ in quanto lo si consideri come un gruppo della serie g_n^r, e dalla $\psi_0 = 0$ in quanto lo si consideri come un gruppo di g_n^s.

Fissiamo l'attenzione sul sistema lineare

$$(6) \quad \varepsilon\varphi_0\psi_0 + \lambda_1\psi_0\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\psi_0\varphi_r + \mu_1\varphi_0\psi_1 + \cdots + \mu_s\varphi_0\psi_s = 0.$$

Ogni curva generica di questo sistema sega f nel gruppo K, perchè i punti di questo gruppo annullano $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_r$, e sega pure f nel gruppo L, perchè i punti di questo gruppo annullano $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_s$. Inoltre essa sega f nei punti del gruppo A, i quali annullando φ_0 e ψ_0, annullano tutti i termini della somma precedente.

Si noti però, che, mentre tra le intersezioni di f con una curva generica del sistema (6), il gruppo A conta una volta sola, tra le intersezioni di f colla particolar curva $\varphi_0\psi_0 = 0$, il gruppo stesso conta due volte.

Premesso questo, nel considerare la serie lineare segata su f dal sistema (6), si faccia astrazione dai punti fissi dei gruppi K, L, A: fuori di questi gruppi il sistema (6) sega su f una g_n che contiene tanto g_n^r che g_n^s. Infatti le curve del sistema (6) corrispondenti a valori nulli dei parametri μ avendo per equazione

$$\psi_0(\varepsilon\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r) = 0$$

segano f nei punti dei gruppi K, L, A e ulteriormente nei gruppi della g_n^r. Similmente si ottengono i gruppi della g_n^s in corrispondenza a valori nulli delle λ.

Osservazione. Il ragionamento precedente si può presentare sotto quest'altra forma. La g_n^r sia costituita dai gruppi di livello della funzione razionale

$$\Phi = \lambda_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \dots + \lambda_r \frac{\varphi_r}{\varphi_0},$$

e la g_n^s dai gruppi di livello della funzione razionale

$$\Psi = \mu_1 \frac{\psi_1}{\psi_0} + \dots + \mu_r \frac{\psi_r}{\psi_0},$$

le due funzioni avendo lo stesso gruppo A di poli. I gruppi di livello della funzione razionale $\Phi + \Psi$ che ha gli stessi poli delle Φ, Ψ, e che dipende dai parametri λ, μ, comprendono i gruppi di livello delle Φ, Ψ prese separatamente, onde è vero che le due serie lineari aventi un gruppo comune sono contenute in una medesima serie lineare più ampia.

Dal teorema dimostrato discende una conseguenza importantissima.

Diciamo completa una serie lineare g_n^r quando non è contenuta in una serie lineare più ampia, dello stesso ordine; parziale nel caso contrario.

È chiaro anzitutto che, ampliando successivamente una serie lineare si deve giungere ad una serie completa, perchè la dimensione r della serie, essendo eguale al numero dei punti di un gruppo che si possono scegliere ad arbitrio, dovrà certo risultare non superiore all'ordine n.

Ma ciò che non è evidente a priori, è che una serie data sia contenuta in una sola serie lineare completa. Orbene il teorema dimostrato ci pone in grado di asserire che:

È unica la serie lineare completa che contiene una data serie g_n^r.

Infatti se la g_n^r fosse contenuta in due serie complete diverse g_n^R, g_n^S; queste serie, avendo in comune dei gruppi (tutti quelli di g_n^r), apparterrebbero ad una medesima serie più ampia, e quindi non sarebbero complete, contro il supposto.

In particolare un gruppo A di punti individua su f una serie lineare completa, che s'indica spesso col simbolo $|A|$.

La serie lineare completa $|A|$ individuata dal gruppo A può anche definirsi come l'insieme di tutti i gruppi equivalenti ad A, giacchè se fuori di $|A|$ vi fosse un gruppo $B \equiv A$, esisterebbe una serie, diversa da $|A|$, contenente i due gruppi A, B.

Trasformando birazionalmente una curva algebrica, gruppi equivalenti si mutano in gruppi equivalenti, e quindi la totalità dei gruppi equivalenti ~~ad~~ un gruppo dato, si muta nella totalità dei gruppi equivalenti al gruppo trasformato, il che significa che: Mediante una trasformazione birazionale ad una serie lineare completa corrisponde una serie lineare completa.

— Il teorema relativo all'unicità della serie lineare completa contenente una data serie, trovasi dimostrato per via algebrica (facendo capo ad un teorema che avremo occasione di stabilire in seguito) nella classica memoria di Brill e Noether: Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie (Math. Ann. Bd. 7). Noi qui abbiamo potuto anticipare di molto la dimostrazione del teorema, seguendo la via indicata da Enriques (*). Si tratta in sostanza di un ragionamento che, sotto forma diversa, si faceva già nella teoria riemanniana delle funzioni algebriche.

25. Serie residue. — Operazioni sulle serie (Somma e differenza). Sia g_n^r una serie completa di gruppi di punti sulla curva f, e sia B un gruppo di m punti che appartenga a qualche gruppo della serie (od anche a tutti, se i punti del gruppo B sono fissi per la serie).

I gruppi della g_n^r contenenti il gruppo B, formano una serie lineare (ved. la fine del n° 23): astraendo dai punti del gruppo stesso si avrà una g_{n-m}^{r-s}, ove s è il numero delle condizioni imposte ai gruppi della data serie dai punti di B $(0 \leq s \leq m)$. Orbene, dico che la g_{n-m}^{r-s} è essa pure completa. Infatti, se la g_{n-m}^{r-s} fosse contenuta in una serie più ampia dello stesso ordine, aggiungendo ai gruppi di tale serie i punti di B, si avrebbe una serie di ordine n, avente infiniti gruppi comuni con g_n^r e non contenuta in questa serie: contro il supposto che la g_n^r sia completa. Si conclude che: La serie costituita dai gruppi di una serie completa che passano per dati punti, risulta com-

(*) Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche (Atti della R. Acc. di Torino, 1901) pleta, quando si faccia astrazione dai punti dati.

La serie completa g_{n-m}^{r-s} si chiama la serie residua del gruppo B rispetto a g_n^r. Si dice pure che la g_{n-m} è contenuta parzialmente nella g_n, volendo alludere al fatto che i gruppi della 1ª serie sono parti dei gruppi della 2ª. Si dice invece che una g_n è contenuta totalmente in una serie lineare, quando quest'ultima è dello stesso ordine della prima.

Date due serie lineari $|A|$, $|B|$, di ordini n, m si vede facilmente che i gruppi di $n+m$ punti, ciascuno dei quali è formato dalla riunione di un gruppo della 1ª serie con un gruppo della 2ª, sono tra loro equivalenti.

Infatti, se A', B' sono altri due gruppi qualunque delle serie individuate dai gruppi A, B, denotando con $A+B$, $A+B'$, ecc i gruppi risultanti dalla riunione dei gruppi A, B o A, B', ecc, si hanno le relazioni di equivalenza

$$A+B \equiv A+B' \quad , \quad A+B' \equiv A'+B',$$

la prima delle quali esprime che i gruppi $A+B$, $A+B'$ appartengono alla serie che si ottiene da $|B|$ aggregando a tutti i suoi gruppi i punti di A, e la seconda che i gruppi $A+B'$, $A'+B'$ appartengono alla serie ottenuta da $|A|$ aggregando a tutti i gruppi i punti di B'.

Le due relazioni confrontate dànno

$$A+B \equiv A'+B' \qquad \text{c.d.d.}$$

Quest'osservazione conduce spontaneamente al con=

cetto di serie lineare somma di due serie lineari date $|A|$, $|B|$. Per serie somma delle $|A|$, $|B|$ s'intende la serie lineare completa che contiene i gruppi di $n+m$ punti del tipo $A+B$, cioè la serie $|A+B|$ individuata dal gruppo $A+B$.

Dal concetto di serie lineare somma segue poi subito il concetto di serie lineare differenza di due serie $|C|$, $|A|$.

Suppongasi che esistano dei gruppi di $|C|$ contenenti come parte A, cioè che esista la serie residua di A rispetto a $|C|$. Sia $|B|$ questa serie: si avrà

$$|C| \equiv |A+B|,$$

e la serie $|B|$ si chiamerà la serie residua di $|A|$ rispetto a $|C|$, ovvero la differenza $|C-A|$ tra le due serie date.

Si noti che la serie $|B|$ resta determinata indipendentemente dal gruppo A da cui siamo partiti per definire la serie stessa. Infatti la $|C|$ contiene tutti i gruppi risultanti dall'insieme di un gruppo di $|A|$ e di uno di $|B|$, e quindi la serie residua di un gruppo qualunque di $|A|$ rispetto a $|C|$, contiene tutti i gruppi di $|B|$, cioè coincide con questa serie che è completa.

Chiamando resti del gruppo A rispetto alla serie $|C|$ i gruppi della serie $|B|$, si può dunque dire che:

I resti di un gruppo dato rispetto ad una serie lineare, sono pur resti rispetto alla stessa serie di un altro gruppo qualunque equivalente al dato.

Questa proposizione costituisce una parte del così=

detto teorema del resto (Restsatz) di Brill e Noether. Ritroveremo più tardi questo teorema sotto forma completa.

La definizione della somma si può estendere a più serie $|A_1|, |A_2|, |A_3|, \ldots$, giacchè anche in questo caso più generale, i gruppi del tipo $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$ appartengono ad una medesima serie lineare $|A_1 + A_2 + A_3 + \cdots|$, come si vede subito per induzione.

In particolare se le serie $|A_1|, |A_2|, \ldots$, coincidono, la loro somma chiamasi un multiplo della serie $|A_1|$, e precisamente un multiplo secondo k se le serie date sono in numero di k.

È chiaro che le nozioni di serie somma, di serie differenza, serie multipla, sono invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali della curva.

2 6 Curve sghembe e iperspaziali. Sulla curva piana

$$f(x_0 x_1 x_2) = 0$$

consideriamo la serie lineare g_n^r segnata dal sistema

$$(7) \quad \lambda_0 \varphi_0(x_0 x_1 x_2) + \lambda_1 \varphi_1(x_0 x_1 x_2) + \cdots + \lambda_r \varphi_r(x_0 x_1 x_2) = 0,$$

fuori eventualmente da alcuni punti fissi.

Supponiamo anzi di astrarre completamente dai punti fissi, in guisa che un gruppo generico di g_n^r abbia tutti i suoi punti variabili.

In uno spazio S_r stabiliamo un sistema di coordinate omogenee $y_0, y_1, \ldots, y_r$, e poniamo

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0 x_1 x_2) \quad (i = 0, \ldots, r)$$

Mentre il punto $x(x_0 x_1 x_2)$ descrive la curva f, il punto

$y(\varphi_0 y_1 \dots \varphi_r)$ non può rimaner fisso, perchè in tale ipotesi le φ differirebbero tra loro per fattori costanti e il sistema (7) risulterebbe ∞^0, il che escludiamo. Il punto y descrive dunque una curva C, talechè ad ogni punto di f risponde un sol punto di C. Viceversa quanti sono i punti di f corrispondenti ad un punto di C?

Perchè due punti x, x' di f diano come corrispondente lo stesso punto y di C, occorre e basta che sia

$$\varphi_i(x) = \sigma\, \varphi_i(x'),$$

e quindi che il passaggio di una curva qualunque del sistema (7) pel punto x, tragga di conseguenza il passaggio per x' e viceversa (*). In altri termini occorrerà e basterà che tutti i gruppi di g_n^r per x passino di conseguenza per x'.

Se, dato un punto generico x della curva f, i gruppi della g_n^r passanti per x non hanno in conseguenza altri punti comuni si dice che la <u>serie lineare è semplice</u>; se invece i gruppi passanti per un punto x variabile, hanno in comune $\mu-1$ altri punti, variabili con x, si dice che <u>la serie lineare è composta con un'involuzione di ordine μ</u>.

Questa locusione è giustificata dalle considerazioni seguenti. Dato un punto x rimangono associati ad esso altri $\mu-1$ punti $x', x'', \dots, x^{(\mu-1)}$, tali che il gruppo di μ punti $x, x', x'', \dots, x^{(\mu-1)}$ gode della proprietà di esser determinato da uno qualunque dei punti ch' esso contiene, perchè i gruppi di g_n^r

(*) Si confrontino queste considerazioni con quelle svolte più diffusamente al n° 14.

che passano per un punto qualunque del gruppo passano per tutti gli altri.
Variando x sulla curva f, il gruppo di μ punti descrive un sistema semplicemente infinito γ^1_μ, che chiamasi un'<u>involuzione di ordine μ</u> (e dimensione 1), appunto perchè i punti di un gruppo si trovano in condizione simmetrica, e per ogni punto di f passa un sol gruppo di γ_μ. È chiaro che un gruppo della g^2_n risulta composto da $\frac{n}{\mu}$ gruppi di γ_μ.
Esaminiamo il caso in cui la g^2_n è semplice. Allora i punti delle due curve f, C vengono riferiti biunivocamente in tal guisa che le coordinate non omogenee $\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_r}{y_0}\right)$ del punto y variabile su C, son funzioni razionali delle coordinate non omogenee $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ del punto x corrispondente su f. Viceversa le coordinate del punto x sono funzioni razionali delle coordinate del punto y variabile su C, giacchè esse debbono risultare funzioni algebriche ad un sol valore di queste ultime variabili.
In tal caso adunque, <u>le due curve f, C risultano riferite mediante una corrispondenza birazionale</u>; ma a differenza della corrispondenza subordinata tra due curve omologhe in una trasformazione cremoniana tra due piani, attualmente <u>la corrispondenza è birazionale tra i punti delle due curve, ma non si estende necessariamente agli spazi che le contengono</u>. Tale estensione non è naturalmente possibile quando questi spazi hanno dimensioni diverse; ma anche quando C è

una curva piana ($r=2$), le formole

$$(8) \qquad \rho y_i = \varphi_i(x_0 x_1 x_2) \quad (i=0,1,2)$$

posson benissimo definire una corrispondenza birazionale tra i punti delle curve f, C e non già tra i punti dei due piani $(x_0 x_1 x_2)(y_0 y_1 y_2)$. Invero supponiamo che le formole (8) definiscano una corrispondenza $(1, \nu)$ tra i punti del piano $(y_0 y_1 y_2)$ ed i punti del piano $(x_0 x_1 x_2)$, cioè una corrispondenza tale che ad un punto y rispondano ν punti x, e ad un punto x, un sol punto y, sicchè si abbia sul piano $(x_0 x_1 x_2)$ un'involuzione doppiamente infinita I_ν, generata dalla rete delle curve corrispondenti alle rette del piano $(y_0 y_1 y_2)$ (vedi a pag. 40). Assumiamo sul piano $(x_0 x_1 x_2)$ una curva f che non appartenga all'involuzione I_ν, cioè una curva tale che i $\nu-1$ coniugati di un suo punto generico rispetto all'involuzione I_ν non appartengano ad essa (*): allora al variare del punto su f il punto y descrive una curva piana C, riferita birazionalmente ad f, perchè dei ν punti x corrispondenti ad un punto y di C uno solo trovasi sulla curva f. Le formole (8) definiscono dunque una corrispondenza birazionale tra i punti delle curve f, C, mentre definiscono una corrispondenza che è razionale in un sol senso tra

(*) Una tale curva si può ottenere evidentemente fissando un gruppo $x, x', x'', \ldots, x^{\nu-1}$ dell'involuzione I_ν, e considerando una curva che passi per x, ma non per alcuno dei punti coniugati.

i punti dei due piani contenenti le f, C.
È opportuno osservare che le formole (8) potrebbero definire anche una corrispondenza $(1, \nu')$ tra i punti delle due curve, con $\nu' \leq \nu$: ciò accadrebbe quando ad un punto y variabile su C rispondessero ν punti x, dei quali ν' variabili su f e $\nu - \nu'$ variabili fuori di f.
Ritorniamo ora al caso in cui r è qualunque e le due curve f, C son riferite birazionalmente.
È facile vedere che la curva C è contenuta effettivamente nello S_r e non in uno spazio di dimensione inferiore $(\leq r-1)$. Infatti nell'ipotesi contraria esisterebbe almeno un iperpiano

$$\xi_0 y_0 + \xi_1 y_1 + \cdots + \xi_r y_r = 0,$$

contenente la curva C, cioè si avrebbe identicamente

$$(9) \quad \xi_0 \varphi_0 (x_0 x_1 x_2) + \cdots + \xi_r \varphi_r (x_0 x_1 x_2) = 0,$$

ove $x_0\, x_1 x_2$ son le coordinate di un punto variabile su f. Se la relazione (9) fosse identicamente soddisfatta (per valori non tutti nulli delle ξ) non soltanto quando si tratta di un punto $(x_0\, x_1 x_2)$ variabile su f, ma per un punto arbitrario del piano, le forme φ risulterebbero linearmente legate, e il sistema lineare (7) non potrebbe essere ∞^r; che se poi la relazione (9) fosse un'identità soltanto nei punti di f, dovrebbe essere identicamente

$$\xi_0 \varphi_0 + \cdots + \xi_r \varphi_r = \varphi(x_0 x_1 x_2) f(x_0 x_1 x_2),$$

cioè esisterebbe una curva del sistema lineare (7) contenente come parte f, e la serie g_n non avrebbe la dimensione r. Queste conclusioni contraddicono entrambe all'ipotesi di partenza: si deve perciò concludere che non esiste alcun iperpiano contenente la C.

Dimostriamo ora che ai punti d'un gruppo della g_n^r esistente su f rispondono mediante la corrispondenza birazionale tra f e C, i punti d'intersezione di C con un determinato iperpiano, variabile insieme al gruppo considerato.

Infatti le coordinate dei punti d'un gruppo della g_n^r verificano l'equazione (7) per convenienti valori non tutti nulli delle λ, e quindi le coordinate dei punti y corrispondenti soddisfano all'equazione

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r = 0,$$

cioè appartengono ad un determinato iperpiano.

Viceversa, ai punti di C le cui coordinate soddisfano quest'equazione, rispondono i punti del gruppo segnato su f fuori dei punti fissi, dalla curva (7).

Dunque *la curva C è segata da un iperpiano qualunque del suo spazio in n punti.*

Questo numero costante si dice ordine della curva C, la quale si chiama una curva algebrica iperspaziale.

Aggiungeremo che la corrispondenza tra i gruppi della serie g_n^r e le sezioni iperpiane di C è projettiva, perchè un gruppo ed un iperpiano corrispondenti provengono dagli stessi valori delle λ. Riassumendo si può dunque enunciare quanto segue:

Avendosi sopra una curva algebrica piana f una serie lineare semplice g_n^r, si può sempre costruire una curva algebrica d'ordine n, appartenente ad uno spazio S_r, la quale sia riferita birazionalmente ad f, in tal guisa che ai gruppi della g_n^r rispondano le sezioni iperpiane di C. — La costruzione della C si ottiene riferendo projettivamente i gruppi di g_n^r agl'iperpiani di uno spazio S_r: ai gruppi della g_n^r passanti per un punto x di f rispondono gl'iperpiani passanti per un punto y di S_r; mentre x descrive f, y descrive C.

Se la serie lineare g_n^r è composta con un'involuzione γ_μ, i punti di C risultano riferiti biunivocamente non già ai punti di f, ma ai gruppi della γ_μ. Si vede come prima che la C non può essere contenuta in uno spazio di dimensione inferiore ad r. Riprendendo il ragionamento che nel caso precedente ci ha condotti alla considerazione dell'ordine, si vede che nel caso attuale un iperpiano qualunque taglia C in $\frac{n}{\mu}$ punti; ogni punto di una sezione iperpiana corrispondendo a μ punti di un gruppo determinato di g_n^r. In tal caso adunque la C si dirà una curva algebrica iperspaziale d'ordine $\frac{n}{\mu}$. Si conclude che:

Quando la serie g_n^r esistente sulla curva f è composta con un'involuzione d'ordine μ, riferendo projettivamente i gruppi della g_n^r agl'iperpiani di uno spazio S_r, e prendendo come corrispondente di un punto x di f il punto y comune agli iperpiani omologhi dei gruppi di g_n^r uscenti da x, mentre x descrive f, y descrive una curva d'ordine $\frac{n}{\mu}$; la quale è riferita ad f mediante una corrispondenza algebrica $(1, \mu)$.

Riassumendo: in ogni caso per curva algebrica di uno spazio S_r deve intendersi la curva descritta da un punto le cui coordinate (non omogenee) sieno funzioni razionali delle coordinate di un punto variabile sopra una curva piana. La curva si dice appartenente allo S_r, quando questo è lo spazio di dimensione minima che la contiene. Ordine della curva è il numero delle sue intersezioni con un iperpiano generico.

In particolare quando lo spazio di appartenenza è un S_3, la C dicesi una <u>curva algebrica sghemba</u>.

Così restano definite le curve algebriche sghembe e iperspaziali <u>irriducibili</u>.

Per curva algebrica iperspaziale <u>riducibile</u>, s'intenderà l'insieme di un numero finito di curve algebriche irriducibili. L'ordine di una tal curva è la somma degli ordini delle curve componenti.

La considerazione dell'ordine di una curva iperspaziale dà luogo ad un teorema analogo al teorema di Bézout, che, nel piano, fornisce il mezzo di calcolare il numero dei punti comuni a due curve di dati ordini.

Si tratta del <u>numero dei punti comuni ad una curva algebrica C d'ordine n e ad una forma algebrica d'ordine m</u>.(×)

Per calcolare questo numero si stabilisce anzitutto il concetto di "molteplicità d'intersezione„ di una curva e di una forma in un

(×) Ricordiamo che per "forma„ o "ipersuperficie algebrica„ di uno spazio S_r intendesi l'insieme degli ∞^{r-1} punti le cui coordinate (omogenee) annullano una data forma algebrica (polinomio omogeneo). L'ordine della forma è il grado di questo polinomio.

Ved <u>Bertini</u>. <u>Introduzione alla geom. ecc...</u> pag 164.

punto comune. Se nel punto comune O la curva C e la forma F hanno la moltiplicità d'intersezione I, ciò significa che una forma F' abbastanza prossima ad F (cioè i coefficienti della cui equazione sieno poco differenti dai coefficienti dell'equazione di F), ha precisamente I intersezioni distinte con C, le quali col tendere di F' ad F tendono ad O.

Una volta stabilito questo significato geometrico della moltiplicità d'intersezione, ne segue evidentemente che la somma delle moltiplicità d'intersezione nei punti comuni ad F e a C, non muta variando con continuità la F, purchè, beninteso, in questa variazione continua, F non venga a contenere C o una sua parte. In particolare se si fanno variare i coefficienti dell'equazione di F, finchè il primo membro dell'equazione non si scinda in <u>m</u> fattori lineari (<u>m</u> essendo l'ordine di F), ciascuno dei quali eguagliato a zero rappresenti un iperpiano non contenente C od una sua parte, si avranno complessivamente m.n intersezioni. Dunque:

<u>Una curva algebrica d'ordine n ed una forma d'ordine m hanno in comune mn punti</u> (<u>contando ciascuno il debito numero di volte</u>), <u>oppure la forma contiene la cur-</u>

va o una sua parte. (x)

27. Serie lineari sopra una curva iperspaziale. Corrispondenze razionali tra due curve algebriche appartenenti a spazî qualunque.

Sia C una curva irriducibile appartenente allo spazio S_r ed f una curva piana in corrispondenza birazionale con C. Ad una g_m^s arbitraria della curva f, risponde su C un sistema ∞^s costituito da gruppi di m punti e tale che per s punti generici di C passa uno solo di questi gruppi. Detto sistema si chiamerà una serie lineare d'ordine m, – e dimensione s, – sulla curva iperspaziale C, e s'indicherà ancora col simbolo g_m^s.

È facile vedere che su C una serie lineare è segata, fuori eventualmente da punti fissi, da un sistema lineare di forme

$$(10) \quad \lambda_0 \alpha_0 (y_0 y_1 \cdots y_r) + \cdots + \lambda_s \alpha_s (y_0 y_1 \cdots y_r) = 0. \text{ (xx)}$$

Suppongasi infatti che sulla f la g_m^s sia segata, fuori di un certo gruppo fisso, dal sistema lineare ∞^s

$$(11) \quad \mu_0 \beta_0 (x_0 x_1 x_2) + \cdots + \mu_s \beta_s (x_0 x_1 x_2) = 0.$$

(x) Per maggiori dettagli ved. il libro del Bertini pag 358.

(x x). Se nell'equazione di una forma variabile compajono linearmente dei parametri, si dice che la forma descrive un sistema lineare.

Poichè le coordinate di due punti corrispondenti di f, C son legate dalle formole

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0 x_1 x_2) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

le quali (trattandosi di una trasformazione birazionale) permettono di esprimere le x come forme delle y:

$$\sigma x_j = \psi_j(y_0 y_1 \cdots y_r) \qquad (j = 0, 1, 2),$$

al gruppo degli m punti variabili segato su f dalla curva (11), risponderà un gruppo di altrettanti punti variabili, segati su C dalla forma

$$\mu_0 \beta_0(\psi_0 \psi_1 \psi_2) + \cdots + \mu_s \beta_s(\psi_0 \psi_1 \psi_2) = 0,$$

che è del tipo (10).

L'affermazione resta quindi giustificata quando la g_m^s data su f non ha punti fissi. Se tali punti esistessero e fossero in numero di h, si considererebbe la serie g_{m-h}^s che risulta astraendo da essi; ecc.

Riprendendo il ragionamento del n° 23 si vede subito che la dimensione s della serie lineare considerata sulla curva C, uguaglia la dimensione d del sistema lineare segante, soltanto se non esiste nel sistema alcuna forma contenente C; chè se invece nel sistema esistono ∞^t forme contenenti la curva, si ha la relazione

$$s = d - t - 1.$$

Invero, poichè per s punti generici di C deve passare un sol gruppo della g_m^s, la forma o le forme del sistema lineare segante, le quali passano per quegli s punti, non potranno tagliare C in punti variabili; sicchè una di queste forme obbligata a passare per un altro punto di C, diverso dalle intersezioni fisse, verrà ad avere con C più intersezioni di quante ne assegni il teorema di Bézout esteso (nº prec.), e quindi la forma stessa conterrà la C (che è irriducibile). Imponendo dunque $s+1$ condizioni semplici alle ∞^d forme del sistema lineare segante, si hanno ∞^t forme che contengono C: e quindi ha luogo la relazione

$$d-s-1=t, \text{ ossia: } s=d-t-1.$$

In particolare se la C, d'ordine n, appartiene allo S_r e non ad uno spazio di dimensione inferiore, gl'iperpiani dello S_r segano su C una g_n^r la quale corrisponde mediante la sostituzione birazionale

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0\, x_1\, x_2) \qquad (i=0,\dots,r)$$
$$\sigma x_j = \psi_j(y_0 \dots y_r) \qquad (j=0,1,2),$$

che lega le coordinate dei punti delle curve C, f, alla g_n^r segata su f dal sistema lineare

$$\lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_r\varphi_r=0,$$

fuori, eventualmente, d'intersezioni fisse(x)

Un facile corollario della proposizione dimo-

(x) Similmente alla serie lineare g_h^2 segnata sulla curva f, d'ordine h, dalle rette del suo piano, risponde la serie lineare segnata su C (all'infuori d'intersezioni fisse) dal sist. lineare di forme $v_0\psi_0+v_1\psi_1+v_2\psi_2=0$

strata è il seguente:

Sopra una curva iperspaziale C una g_m^s si può sempre intendere segata, fuori di punti fissi, da un sistema lineare ∞^s di forme algebriche.

Se infatti il sistema lineare Σ_1, che serve a segare la g_m^s, è di dimensione d, l'insieme Σ_1' di tutte le forme di Σ_1 che passano per C si ottiene, come abbiamo visto, considerando le forme di Σ_1 che contengono $s+1$ punti generici della curva. Ne deriva che il sistema Σ_1' è lineare, perchè il passaggio per punti si traduce in equazioni lineari tra i parametri variabili che compajono nell'equazione di Σ_1.
Si scelga in Σ_1 un sistema lineare Σ_1'' di dimensione $s=d-t-1$, il quale non abbia comune alcuna forma con Σ_1'. Ciò è sempre possibile, perchè la somma delle dimensioni dei sistemi Σ_1', Σ_1'', è minore della dimensione di Σ_1.(x) Il sistema Σ_1'' sega evidentemente su C la serie data g_m^s.

28. Sia ora C una curva algebrica irriducibile dello spazio S_r nel quale diciamo $(x_0 x_1 \dots x_r)$ le coordinate omogenee di punto. Consideria

(x) Qui si fa uso di proprietà che noi abbiamo dimostrato pei sistemi lineari di curve, ma che si estendono subito ai sistemi lineari di forme. Vedi ad es. Bertini. Introduzione ecc. Cap. 10°.

mo su C una g_n^r segnata (fuori di punti fissi) dal sistema lineare

$$\lambda_0 \varphi_0(x_0 x_1 \dots x_h) + \dots\dots + \lambda_r \varphi_r(x_0 x_1 \dots x_h) = 0,$$

e poniamo

$$(12) \qquad \rho y_i = \varphi_i(x_0 x_1 \dots x_h) \qquad (i = 0, \dots, r).$$

Mentre il punto $x(x_0 x_1 \dots x_h)$ descrive la curva C, il punto $y(y_0 y_1 \dots y_r)$ si muove in uno spazio S_r descrivendo una curva D. Si vede subito che questa curva è algebrica e irriducibile. Infatti la C, essendo algebrica, può riferirsi ad una conveniente curva algebrica piana irriducibile $f(\xi_0 \xi_1 \xi_2) = 0$, ponendo le x di un suo punto proporzionali ad $h+1$ forme algebriche delle variabili $\xi_0 \xi_1 \xi_2$; onde mediante le formole (12), le coordinate y di un punto variabile su D risultano esse pure proporzionali a forme algebriche delle coordinate $\xi_0 \xi_1 \xi_2$ del punto scorrente su f.

Come al n° 26 si vede:

a) Che il sistema

$$\lambda_0 \varphi_0 + \dots + \lambda_r \varphi_r = 0,$$

non contenendo alcuna forma che passi per C (poichè altrimenti la dimensione della serie segata sarebbe $< r$), nello spazio S_r non esisterà alcun iperpiano contenente la curva D, la quale <u>apparterrà</u> dunque allo S_r (e non ad uno spazio di dimensione inferiore).

b) che le formole (12) sono invertibili; cioè che esse permettono di esprimere le x come forme delle y, solo quando la serie g_n^r data su C non è composta con un'involuzione; cioè quando i gruppi di g_n^r passanti per un punto generico di C, non passano di conseguenza per altri punti variabili con quello. In tal caso, se la serie lineare g_n^r è priva di punti fissi, la curva D risulta d'ordine n.

c) Quando la g_n^r, priva di punti fissi, è composta con un'involuzione d'ordine μ, cioè quando i gruppi di g_n^r passanti per un punto generico di C passano di conseguenza per $\mu-1$ altri punti variabili; sicchè un gruppo di g_n^r risulti composto di $\frac{n}{\mu}$ gruppi dell'involuzione, l'ordine della D viene eguale ad $\frac{n}{\mu}$.

Nel caso b) le coordinate non omogenee di un punto di D sono funzioni razionali delle coordinate non omogenee del punto corrispondente di C e viceversa: si ha allora, una corrispondenza birazionale tra le curve iperspaziali C, D.

Nel caso c) si ha tra le C, D una corrispondenza razionale in un sol senso, cioè una corrispondenza che fa passare da un punto di C ad uno di D e da un punto di D a μ punti di C.

In quest'ultimo caso la curva D risulta riferita birazionalmente ai gruppi dell'involuzione mediante cui è composta la g_n^r. Non facciamo ora alcuna ipotesi sulla invertibilità o meno delle formole (12).

Come si trasforma una serie lineare g_m^s data su D, mediante la sostituzione lineare (12)? Se la g_m^s è segata su D, fuori di punti fissi dal sistema

$$\nu_0 \psi_0(y_0 \cdots y_r) + \cdots\cdots + \nu_s \psi_s(y_0 \cdots y_r) = 0,$$

i gruppi di $m\mu$ punti $(\mu \geq 1)$ corrispondenti ai gruppi di m punti della serie g_m^s, saranno segati su C, fuori di punti fissi dal sistema lineare

$$\nu_0 \psi_0(\varphi_0 \cdots \varphi_r) + \cdots\cdots + \nu_s \psi_s(\varphi_0 \cdots \varphi_r) = 0,$$

e quindi l'insieme di quei gruppi di $m\mu$ punti formerà su C una $g_{m\mu}^s$. Si conclude che:

<u>Se tra i punti delle curve algebriche iperspaziali D, C ha luogo una corrispondenza algebrica $(1, \mu)$, ad una serie lineare g_m^s esistente su D, risponde una serie lineare $g_{m\mu}^s$ esistente su C</u>.

Si noti che, se $\mu > 1$, quest'ultima serie lineare è composta coll'involuzione d'ordine μ con cui è composta la g_n^r data.

29. <u>Proiezioni di una curva iperspaziale. Curve normali</u>.

Sia C una curva d'ordine n, appartenente allo spazio S_r ed O un punto qualunque di questo spazio. La retta che va da O ad un punto generico di C sega la curva in uno o più punti; ma certamente in un numero finito, perchè è finito (eguale ad n) il numero dei punti in cui la curva stessa viene segata da un iperpiano per quella retta.

Anzi se il punto O si assume genericamente nello spazio, ogni retta uscente da O, appoggiantesi alla C in un punto variabile, non avrà altri punti comuni con C (tranne, eventualmente, per posizioni eccezionali della retta); e similmente se O si assume genericamente sulla curva C, il raggio che projetta da O un punto generico P della curva non intersecherà C fuori di O, P.

Tutto ciò si stabilisce mediante facili considerazioni elementari, sulle quali non ci arrestiamo.

Segando il cono che dal punto O projetta la curva C, con un iperpiano ω non passante per O, si ottiene in ω una curva C' che chiamasi la projezione della curva C dal centro di projezione O sull'iperpiano ω.

Se il raggio che projetta da O un punto generico di C, contiene i punti della curva (diversi eventualmente da O), tra le curve C, C' si ottiene una corrispondenza $(i,1)$ facente passare da un punto generico di C ad un punto di C'; e da un punto generico di C' ad i punti di C.

È facile dimostrare che questa corrispondenza è algebrica. Basterà a tal uopo provare che le coordinate di un punto variabile sulla C' son funzioni razionali delle coordinate del punto corrispondente di C.

Dato su C il punto P di coordinate $(x_0\, x_1, \dots x_r)$, le coordinate di un punto variabile sulla retta OP sono espresse dalle formole

$$\lambda x_j + \mu a_j \qquad (j = 0, 1, \dots, r),$$

ove $(a_0, a_1, \dots a_r)$ son le coordinate del centro di proiezione O e λ, μ son parametri. Il punto P' comune alla retta OP e all'iperpiano ω di equazione

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_r y_r = 0,$$

ove $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$ son coefficienti dati e le y rappresentano le coordinate di un punto variabile su ω, si ottengono determinando $\frac{\lambda}{\mu}$ in guisa che

$$\lambda(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r) + \mu(\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_r a_r) = 0.$$

Si hanno dunque le seguenti espressioni per le coordinate del punto P' comune ad OP ed ω:

$$x_j(\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_r a_r) - a_j(\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_r x_r) \quad (j = 0, \dots, r).$$

E, come si vede, queste espressioni contengono razionalmente le coordinate del punto P.

Si conclude pertanto che le coordinate del

punto P', che descrive la curva C', son funzioni razionali delle coordinate del punto P, che descrive la curva C data.
E poichè la curva C è per ipotesi algebrica, le coordinate di un suo punto variabile si potranno esprimere per funzioni razionali delle coordinate di un punto variabile sopra una conveniente curva algebrica piana Γ; e quindi anche le coordinate di un punto variabile su C' risulteranno funzioni razionali del punto variabile su Γ.
Ne consegue per la definizione di curva algebrica iperspaziale che:
La projezione di una curva algebrica, è ancora una curva algebrica.
Si aggiunga che se la curva data è irriducibile, lo è anche la sua projezione, perchè risulta irriducibile la curva Γ.
Queste proposizioni valgono anche quando le projezioni di cui trattasi son fatte non già da un punto, ma da una retta o da un piano o da uno spazio di dimensione superiore.
Allorquando il centro di projezione è uno spazio O di dimensione d $(\leq r-2)$ che può incontrare la curva data C in uno o più punti, per projezione della curva C s'intende la curva C' che si ottiene sopra uno spa-

zio ω, di dimensione $r-d-1$, non incombente O, intersecandolo cogli spazi, di dimensione $d+1$, che congiungono O ad un punto variabile su C.
Estendendo il semplice ragionamento sopra esposto, si vede che le coordinate di un punto variabile su C' son funzioni razionali delle coordinate del punto corrispondente di C.
Del resto ciò si stabilisce pure osservando che la projezione da un centro di dimensione qualunque, si può ridurre ad una successione di projezioni da punti.
Questa è cosa notissima nella geometria iperspaziale.
Così p.e. per projettare la curva C da una retta O, sopra uno spazio ω ad $r-2$ dimensioni, si possono scegliere due punti arbitrari O_1, O_2 sulla retta O; projettare C nella curva C_1, dal punto O_1 sull'iperpiano $O_2\omega$; eppoi projettare C_1 in C' dal punto O_2 sullo S_{r-2} ω. La curva C' che così si ottiene è la stessa di quella che si otterrebbe projettando direttamente C dalla retta O sullo spazio ω.
In particolare se il centro di projezione O è di dimensione $r-3$, lo spazio ω su cui si projetta è di dimensione 2, e quindi la curva C' risulta una curva algebrica piana.
Anzi se lo spazio O si assume genericamente rispetto a C, cioè in tal guisa che un S_{r-2} generico congiungente O ad un punto P di C,

non incontri la curva fuori di P la curva piana C' risulta in corrispondenza algebrica biunivoca (birazionale) colla curva C.
Si vede in tal modo come si può costruire, con una semplice projezione, una curva algebrica piana riferita birazionalmente ad una data curva algebrica iperspaziale.
Notiamo alcune conseguenze di questa proposizione, che ci serviranno in seguito.
Lo spazio O, di dimensione d, sia disposto comunque rispetto a C: dico che un iperpiano generico per O, sega C in punti variabili distinti, che cioè esso sega C, fuori dagli eventuali punti d'appoggio di O su C, in punti tra loro distinti.
Si osservi infatti:
a) Che gl'iperpiani tangenti a C son quelli che contengono le rette tangenti a questa curva.
b) Che le rette tangenti a C non possono tutte appoggiarsi ad O (appena sia $d \leq r-2$). Nel caso contrario, projettando C sopra un S_{r-d} da un S_{d-1} contenuto in O, si otterrebbe una curva colle tangenti concorrenti in un punto, e projettando questa da un S_{r-d-2} del suo spazio, sopra un piano, si otterrebbe una curva piana dotata della proprietà analoga. Ora ciò è assurdo, come si vede mediante la considerazione duale.

c) Che una tangente generica di C non appoggiandosi ad O, per es.. passano ∞^{r-d-3} iperpiani contenenti anche O, e quindi per O passano soltanto ∞^{r-d-2} iperpiani tangenti a C.

Si conclude pertanto che:

<u>Una curva C appartenente allo spazio S_r, è segata in punti variabili distinti da un iperpiano variabile in un sistema lineare.</u>

30. In che relazione si trovano l'ordine n della curva C e l'ordine n' della curva C', projezione di C dallo spazio O, a d dimensioni, sullo spazio ω ad $r-d-1$ dimensioni?

Il lettore dimostrerà agevolmente che se lo spazio O taglia C in h punti ed un S_{d+1} projettante da O un punto generico di C projetta in conseguenza altri $i-1$ punti della curva, l'ordine di C' è

$$n' = \frac{n-h}{i}.$$

31. Passiamo piuttosto a studiare il legame che intercede tra due curve, di cui l'una sia projezione dell'altra, in relazione alla teoria delle serie lineari. Supponganisi che le curve C, C' sieno riferite birazionalmente, cioè che un S_{d+1} projettanto da O un punto generico di C, non projetti in conseguenza altri punti della curva stessa.

Facciamo inoltre l'ipotesi che le C, C' abbiano il medesimo ordine n e quindi che lo spazio O non incontri la C. Nella corrispondenza birazionale che intercede tra le C, C', alla serie lineare g_n^{r-d-1} segnata su C' dagli iperpiani del proprio spazio (cioè dagli S_{r-d-2} contenuti in ω), corrisponde la serie lineare g_n^{r-d-1} segnata su C dagli iperpiani passanti per O, e quest'ultima serie è contenuta nella serie lineare più ampia, g_n^r, segnata su C da <u>tutti</u> gl'iperpiani di S_r. Dunque:

<u>Dire che una curva C' è projezione di C, equivale a dire che nella corrispondenza birazionale tra C' e C, alla serie lineare delle sezioni iperpiane di C', risponde una serie contenuta in quella delle sezioni iperpiane di C.</u>

Se le C, C' son dello stesso ordine, si sottintende che la serie lineare di C corrispondente alla serie delle sezioni iperpiane di C' è <u>contenuta totalmente</u> nella serie delle sezioni iperpiane di C; in caso diverso - quando cioè il centro O di projezione si appoggia in uno o più punti a C, - quella serie è <u>contenuta parzialmente</u> in questa.

La proprietà osservata si può in certo modo invertire. Ed ecco come:

Suppongasi anzitutto che le due curve C, C' appartenenti a spazî (distinti o coincidenti) della stessa dimensione r, siano riferite birazionalmente, in guisa che ai gruppi segati su

C dagl'iperpiani del proprio spazio, rispondano i gruppi analoghi su C'.

Dimostreremo allora che le due curve son projettive, cioè che la corrispondenza birazionale che tra esse intercede, può intendersi subordinata da un'omografia tra gli spazî che le contengono.

Detti Σ, Σ' gli spazî rispettivi di C, C', ad ogni iperpiano di Σ rimane associato uno ed un sol iperpiano di Σ' – quello che segna su C' il gruppo corrispondente alla sezione di C coll'iperpiano dato in Σ – e viceversa: cosicchè dalla corrispondenza tra i punti delle due curve risulta definita una corrispondenza biunivoca tra gl'iperpiani dei loro spazî.

Si consideri in Σ un sistema lineare H, ∞^{r-h-1} d'iperpiani, cioè il sistema di tutti gl'iperpiani passanti per un S_h dato $(h \geq 0)$. Questo sistema sega su C una serie lineare, cui corrisponde una serie lineare di dimensione $r-h-1$ costituita da sezioni iperpiane di C'. Al sistema lineare H, risponde perciò nello spazio Σ' un sistema algebrico H' d'iperpiani, tale che per $r-h-1$ punti generici di C' passa <u>un solo</u> iperpiano del sistema. Se ne deduce che H' è esso stesso un sistema lineare. Basterà a tal uopo provare che per $r-h-1$ punti generici dello spazio Σ' passa un solo iperpiano di H'. (vedi nota alla pagina seguente)

Si scelgano, su C', $r-h-2$ punti generici e si consideri il sistema ∞^1 costituito da tutti gl'iper=piani di H' che passano pei punti fissati. Per un ulteriore punto generico di C' passa un sol iperpiano del sistema ∞^1, onde due ipotesi so=no possibili: o per un punto generico dello spa=zio Σ' passa un sol iperpiano del sistema ∞^1 e questo è perciò un fascio; oppure per un pun=to generico di Σ' passano più iperpiani del si=stema stesso ed allora C' fa necessariamente parte dell'inviluppo di H'. L'ultima ipotesi con=duce a concludere, per una nota proprietà dif=ferenziale, che un iperpiano variabile in H' toc=ca C' in punti variabili, e quindi, in virtù del=la corrispondenza tra C' e C, che un iperpiano variabile in H gode della proprietà analoga rispetto a C. Ora ciò contraddice alla proposi=zione dimostrata alla fine del n° 29; dunque la prima ipotesi è la sola possibile.

Si scelgano su C' $r-h-3$ punti generici e un ul=teriore punto generico fuori di C'. Per la con=clusione a cui ora siamo pervenuti, il sistema ∞^1 costituito da tutti gl'iperpiani di H', che passano pei punti fissati, è tale che per un punto generico di C' passa un solo iperpia=no del sistema. Col ragionamento sopra

Nota (vedi la fine della pag. prec.) Qui si fa uso della e=stensione ai sistemi algebrici di forme (e in partico=lare d'iperpiani) del teorema dimostrato al n° 7 pei si=stemi algebrici di curve. Vedi ad es. Bertini op. cit. pag 222

esposto, si deduce che il sistema considerato è un fascio. Così si prosegua finchè si concluda che è un fascio il sistema degl'iperpiani di H' passanti per $r-h-2$ punti generici dello spazio, e quindi che il sistema H' è lineare.
Segue dalle considerazioni precedenti che la corrispondenza biunivoca tra gl'iperpiani di Σ, Σ' fa passare da un sistema lineare d'iperpiani contenuto nell'uno spazio, ad un sistema lineare d'iperpiani contenuto nell'altro, e quindi da un punto, che può considerarsi come sostegno d'un sistema lineare ∞^{r-1}, ad un punto; da una retta - sostegno di un sistema ∞^{r-2} - ad una retta; da un piano ad un piano, da un S_3 ad un S_3, e così via. Ne deriva che la corrispondenza algebrica biunivoca che nasce tra i punti dei due spazi è omografica. (x)
Passiamo ora a considerare un caso più generale. Si tratti di due curve C, C' appartenenti rispettivamente agli spazi $S_r, S_{r'}$ $(r'<r)$ e riferite birazionalmente in tal guisa che ai gruppi segnati su C' dagl'iperpiani di $S_{r'}$, rispondano su C gruppi contenuti (parzialmente o totalmente) nella serie delle sezioni iperpiane di C.
Per precisare, supponga si che la C sia d'ordine n, e la C' sia d'ordine $n-i$.

(x) Bertini. op. citata pag 45, n° 4.

Gl'iperpiani contenenti i gruppi che corrispondono alle sezioni iperpiane di C', dovranno segare C in i punti fissi (distinti o coincidenti) e altrove in $n-i$ punti variabili. Poichè mediante la corrispondenza birazionale tra C, C', ad una serie lineare dell'una corrisponde una serie lineare dell'altra, i suddetti iperpiani formeranno un sistema $\infty^{r'}$ tale che per r' punti generici di C passerà un solo iperpiano del sistema. Pel ragionamento sopra esposto, il sistema $\infty^{r'}$ d'iperpiani sarà lineare, cioè sarà costituito da tutti gl'iperpiani per uno spazio $S_{r-r'-1}$ fisso (appoggiato a C in i punti).

Aggiungasi che, come la serie segnata su C' dagli iperpiani del suo spazio non è composta con un'involuzione, così non può esser composta la serie $g_{n-i}^{r'}$ segata su C, fuori dei punti fissi, dagl'iperpiani del sistema $\infty^{r'}$. Si potrà dunque projettare biunivocamente la curva C dallo spazio $S_{r-r'-1}$ sopra uno $S_{r'}$ contenuto in S_r. Si avrà in tal modo una curva C_1 riferita birazionalmente a C, e quindi a C', in tal guisa che le sezioni iperpiane delle C_1, C' si corrisponderanno. Queste curve risulteranno perciò omografiche.

Concludendo si ha il teorema seguente:

<u>Se tra due curve C, C' intercede una corrispondenza birazionale tale che alle sezioni iperpiane di C' rispondano gruppi contenu=</u>

ti (parzialmente o totalmente) nella serie formata dalle sezioni iperpiane di C, la curva C' può sempre riferirsi omograficamente ad una projezione di C: e precisamente ad una projezione da un centro non incontrante C, se quei gruppi son contenuti totalmente in questa serie, da un centro appoggiato a C in uno o più punti, nel caso contrario.

32. Consideriamo ancora una curva algebrica irriducibile C d'ordine n, appartenente allo S_r. Se la serie g_n^r segata su C dagl'iperpiani dello spazio, è completa, la C, per quanto precede, non potrà ottenersi mediante projezione di una curva dello stesso ordine appartenente ad uno spazio di dimensione superiore. Si dirà in tal caso che la curva C è normale.
Se invece la g_n^r non è completa, dico che si può sempre costruire una curva C_0, d'ordine n, di cui la C sia projezione. Per chiarezza, procederemo per gradi, considerando anzitutto una serie g_n^{r+1} (forse completa) contenente la g_n^r suddetta. Fissato un punto O, esterno allo S_r, si riferiscano projettivamente i gruppi della g_n^{r+1} agl'iperpiani dello S_{r+1}, che congiunge O allo S_r, in tal guisa che ai gruppi di g_n^r, cioè agl'iperpiani di S_r, vengano a corrispondere gli S_r che li projettano da O. Ciò è sempre

possibile, potendosi assegnare ad arbitrio $r+2$ coppie di elementi corrispondenti tolti rispettivamente da g_n^{r+1} e dallo S_{r+1}.

Ad un punto P di C, per cui passano ∞^r gruppi di g_n^{r+1} formanti una serie lineare, corrisponde un punto P_0 di S_{r+1} come sostegno degl'iperpiani corrispondenti. Poichè la g_n^{r+1} è semplice (che altrimenti non lo sarebbe la g_n^r), al variare di P il punto P_0 descrive una curva algebrica C_0, la quale risulta d'ordine n, perchè dev'esser tagliata da un iperpiano del suo spazio in tanti punti variabili quanti sono i punti variabili in un gruppo di g_n^{r+1} (cfr. al n°).- Tenendo conto che ai gruppi di g_n^r rispondono gli S_r che li projettano da O, si vede subito che la curva C è projezione della C_0 dal centro O.

Se neppure la C_0 è normale, cioè se la serie g_n^{r+1} non è completa, si costruirà similmente in uno spazio S_{r+2} una curva C_1, d'ordine n, la quale projettata da un punto O_1 darà per projezione C_0. La C_1, projettata dalla retta OO_1 darà per projezione nello S_r primitivo la curva C.

Così proseguendo si vede che, se la serie completa che contiene g_n^r ha la dimensione $r+d$, la C si può considerare come projezione di una curva dello stesso ordine n, da uno spazio S_{d+1}.

Chiamando <u>normale</u> una curva algebrica che non possa considerarsi come projezione di una dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore, si ha il teorema:
<u>La condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva sia normale, è che la serie delle sue sezioni iperpiane sia completa.</u>

33. Facciamo un'applicazione ~~esempio~~ delle cose esposte alle curve razionali, cioè alle curve (piane o iperspaziali) che si possono riferire birazionalmente ad una retta.
Osserviamo anzitutto che sopra una retta l'insieme di tutti i gruppi di n punti costituisce una g_n^n, la quale può intendersi segata p. e dal sistema lineare di tutte le curve d'ordine $\underline{n}$ tracciate in un piano che contenga la retta data
Ne deriva che una g_n^r esistente sulla retta non è completa finchè sia $r<n$, chè essa è contenuta nella g_n^n di tutti i gruppi di n punti.
Ciò che si dice per le serie lineari della retta, vale anche per le serie lineari esistenti sopra una qualunque curva razionale, perchè mediante una trasformazione birazionale le serie lineari si mutano in serie lineari e le serie lineari complete in serie lineari complete (n°   )

Viceversa dico che "se sopra una curva C esiste "una serie lineare g_n^n, la curva è razionale."

Si osservi, in primo luogo, che la g_n^n non può avere punti fissi, poichè astraendone si avrebbe una serie di dimensione maggiore dell'ordine, il che, come altra volta rilevammo, è assurdo. Nè può darsi che la g_n^n sia composta, poichè in tal caso tutti i gruppi della serie passanti per un punto P di C, passerebbero per altri punti $Q, R, \ldots$ e togliendo dai gruppi che contengono $P, Q, R, \ldots$ i punti medesimi, si avrebbe una serie la cui dimensione $n-1$ supererebbe l'ordine.

Si potrà adunque costruire una curva C' d'ordine n dello spazio S_n, la quale sia riferita birazionalmente a C in tal guisa che alla g_n^n data risponda la serie delle sezioni iperpiane di C'. - La C' si può alla sua volta riferire birazionalmente ad una retta $\underline{u}$, projettandola su questa dallo S_{n-2} che congiunge $n-1$ punti generici di C'. Infatti ogni S_{n-1} per lo S_{n-2} considerato sega ulteriormente C' in un punto A e la retta $\underline{u}$ in un punto A', che rimane associato ad A. Viceversa, data su $\underline{u}$ una posizione di A', lo S_{n+1}, che congiunge A' col centro di projezione, sega C' in A, fuori dei punti fissi.

Concludendo:

<u>Sopra una curva algebrica la dimensione</u>

r di una serie lineare g_n^r, non può superare l'ordine n; e si ha $r = n$ soltanto quando la curva data è razionale.

Ed anche:

Se una curva C d'ordine n appartiene ad uno S_r, si ha $r \leq n$, e il segno uguale, ha luogo solo quando la C è razionale. Una curva razionale d'ordine n appartenente ad uno spazio S_r, con $r < n$, è sempre projezione di una curva (normale) dello stesso ordine appartenente ad un S_n.

Capitolo quarto.

Punti multipli d'una serie lineare. Genere d'una curva.

34. Punti doppi e multipli d'una serie lineare semplicemente infinita. Sopra una curva algebrica C consideriamo una serie lineare g_n', priva di punti fissi. È facile vedere che un gruppo generico di g_n' è costituito da n punti tra loro distinti. La g_n' può infatti considerarsi in infiniti modi come parzialmente contenuta in una serie semplice g^r_{n+m}. Per ottenere una tal serie basta fare la somma di g_n' con una g_m semplice.

Ciò posto consideriamo una curva C' riferita birazionalmente a C in guisa tale che alla g^r_{n+m} risponda su C' la serie delle sezioni iperpiane. Allora la serie corrispondente alla g_n' verrà segata su C', fuori di m punti fissi, distinti o coincidenti, da un fascio di iperpiani. E quindi i punti di un gruppo generico di g_n' saranno distinti (n. 29).

Vi è dunque un numero finito di gruppi di g_n', contenenti due o più punti coincidenti.

Un punto in cui ne coincidano due apparte-

nenti ad un gruppo di g'_n, dicesi doppio per questa serie; triplo se ve ne coincidono tre; multiplo in generale.
Similmente si posson considerare punti doppî, tripli, ecc per una serie lineare più volte infinita.
A proposito dei punti multipli di una serie lineare, è opportuno rilevare in modo esplicito che due o più punti appartenenti ad un gruppo della serie data e coincidenti in un medesimo punto P della curva C sostegno della serie, si debbono considerare come costituenti un punto multiplo della serie, solo se essi appartengano ad un medesimo ramo avente l'origine in P; cioè soltanto allorquando il gruppo di cui essi fanno parte, può considerarsi come limite di un gruppo variabile nella serie e nel quale vi sieno altrettanti punti che tendano a P movendosi sopra uno stesso ramo.
Infatti, ove la molteplicità di un punto P per un gruppo della serie data, si valutasse considerando semplicemente quanti punti del gruppo cadono in P, senza preoccuparsi dei varî rami di cui P può essere origine, una trasformazione birazionale che mutasse la curva in un'altra avente tanti rami con origini distinte in corrispondenza ai rami che escono da P, potrebbe alterare la mol-

teplicità considerata, rispetto alla serie lineare trasformata. La molteplicità di un punto per un gruppo di una serie, non risulterebbe perciò invariante di fronte alle trasformazioni birazionali, mentre invece, coll'avvertenza sopra espressa, mediante una trasformazione birazionale un punto multiplo di una serie lineare, si muta in un punto della stessa molteplicità.

Facciamo qualche esempio. Sopra una curva piana d'ordine n dotata di un nodo nel punto P, il gruppo di punti segato da una retta generica per P (gruppo che fa parte della g_n^2 segnata sulla curva dalle rette del piano), ha due punti coincidenti con P; ma questi si debbono riguardare come distinti dal nostro punto di vista. Se invece si considera una delle due tangenti in P, si avrà un gruppo con un punto doppio, (o di molteplicità superiore se la tangente ha un contatto più elevato), e con un punto semplice coincidente col punto doppio.

Quando P fosse una cuspide, una retta generica per P darebbe un gruppo con un punto doppio ivi; ecc.

Generalmente una g_n^r non ha punti doppî (e non punti di molteplicità superiore). Così ad es. sopra una curva piana d'ordine n, dotata di singolarità ordinarie, la g_n^1

la g_n^1 segata dal fascio di rette avente il centro in un punto generico O del piano, ha soli punti doppî nei punti di contatto delle tangenti mandate da O alla curva.

Il gruppo dei punti doppî di una g_n^1 si chiama il gruppo jacobiano della serie.

Questo gruppo jacobiano gode di una proprietà molto importante di cui andiamo ad occuparci.

Ai gruppi della g_n^1 data, priva di punti fissi, si aggiungano gli m punti tra loro distinti di un gruppo K. Suppongasi dapprima

a) che la serie $g_n^1 + K$ sia contenuta in una serie g^2_{n+m} priva di punti fissi e semplice,

b) che i punti di K siano distinti dai punti doppî della g_n^1.

Si potrà allora prendere come modello projettivo della nostra curva, una curva piana C d'ordine n+m, sulla quale la serie imagine della g^2_{n+m} data venga segata dalle rette del piano.(x) La serie imagine di $g_n^1 + K$ verrà segata dalle rette di un fascio avente per centro un punto O m-plo per C: e come sulla curva primitivamente data i punti di K erano distinti, così il punto O sarà origi-

(x) Questa è una forma abbreviata per significare che si considera una curva piana riferita birazionalmente alla data, in tal guisa che alla g^2_{n+m} risponda la serie delle sezioni rettilinee della curva piana.

ne di m rami (lineari) della curva C. Inoltre, poichè i gruppi della serie imagine di g_n' vengono segati, fuori di O, dalle rette del fascio nominato, e tra questi gruppi, per l'ipotesi b), non ve n'è alcuno con un punto doppio in O, le tangenti ai singoli rami uscenti da O avranno contatto bipunto coi relativi rami, i quali risulteranno dunque di 1° ordine e di 1ª classe (n°20).

Si pensi ora la serie imagine di $g_n'+K$ come limite della g_{n+m}, priva di punti fissi, segata su C da un fascio di rette avente il centro in un punto Q, esterno a C, che si approssimi indefinitamente ad O. Quando Q è abbastanza prossimo ad O, dei punti doppî della serie g_{n+m} variabile, due sono prossimi ad O su ciascuno dei rami uscenti da O, perchè da un punto che sia abbastanza prossimo all'origine di un ramo lineare di 1ª classe, escono due tangenti al ramo medesimo. Ne deriva che considerando la serie $g_n'+K$ come limite di una serie priva di punti fissi, il gruppo jacobiano della $g_n'+K$ si attiene aggiungendo al gruppo jacobiano della g_n' il gruppo K contato due volte.

Osservazione. La stessa conclusione vale anche quando la serie g_{n+m} semplice, priva di punti fissi, che contiene la $g_n'+K$ la la dimensione $r>2$. Infatti allora si potrà supporre che la suddetta g_{n+m} sia segata dagl'iperpiani dello S_r, sopra una curva C d'ordine $n+m$ appartenente a questo spazio. La g_n' risulterà staccata su C dagl'iperpiani passanti per un certo S_{r-2}, O, appoggiato a C in m punti, distinti o coincidenti; ma, in ogni caso, origini di m rami distinti. Vale il ragionamento sopra esposto, considerando, invece del punto Q, un S_{r-2} (che chiameremo pure Q) e invece delle tangenti mandate dai punti O, Q, le tangenti appoggiate agli spazi O, Q.

35. Passiamo ora a dimostrare un altro teorema relativo ai gruppi jacobiani:

<u>I gruppi jacobiani delle serie g_n' estratte da una medesima serie g_n^r, sono tra loro equivalenti.</u>

Ciò si verifica facilmente se la g_n^r è semplice. Infatti se $r=2$ si può supporre senza restrizioni che la g_n^r sia segnata sopra una curva piana C d'ordine n, dalle rette del piano. Allora i gruppi jacobiani delle g_n' segnate sulla C dai fasci di rette, cioè i gruppi formati dai punti di contatto delle tangenti mandate a C dai centri dei fasci stessi, sono staccati sulla curva, fuori dai punti multipli, dalle prime polari dei punti del piano. E quindi quei gruppi costituiscono la serie segnata su C dal sistema lineare di queste polari.

Suppongasi ora che, pure essendo la g_n^2 semplice, sia $r>2$; sicchè la g_n^2 possa intendersi segnata sulla curva C d'ordine n, dello spazio S_r, dagl'iperpiani di questo spazio. Sieno Σ_1, Σ_2 gli S_{r-2} sostegni di due fasci d'iperpiani staccanti su C due g_n^1. Questi S_{r-2} hanno in comune generalmente un S_{r-4}; ma in ogni caso è facile costruire un terzo S_{r-2}, Σ_3, appoggiato a Σ_1, Σ_2 secondo spazi a $r-3$ dimensioni. Basta perciò assumere un punto P_1 di Σ_1 esterno allo S_{r-4} comune a $\Sigma_1 \Sigma_2$, un punto P_2 esterno allo stesso S_{r-4}, e assumere come spazio Σ_3 quello che congiunge lo S_{r-4} nominato, ai punti P_1, P_2.

Le serie g_n^1 segate dagl'iperpiani per Σ_1, Σ_3 essendo contenute nella serie g_n^2 segata dagl'iperpiani per lo spazio S_{r-3} comune a Σ_1, Σ_3, dànno luogo, per quanto precede, a gruppi jacobiani equivalenti. E similmente dicasi dei gruppi jacobiani relativi alle g_n^1 staccate dai fasci $(\Sigma_2)(\Sigma_3)$. Ma due gruppi equivalenti ad un terzo lo sono pure tra loro: adunque i gruppi jacobiani delle g_n^1 segnate da $(\Sigma_1)(\Sigma_2)$, che sono poi due g_n^1 arbitrarie estratte dalla g_n^2, son tra loro equivalenti.

Suppongasi infine che la g_n^2 sia composta mediante un'involuzione γ_μ d'ordine μ. Assumasi una curva Γ i cui punti corrispondano birazionalmente ai gruppi di γ_μ e si consideri la serie lineare g_m^2 $(m=\frac{n}{\mu})$ di Γ che corrisponde a la serie g_n^2 data sulla curva C. Ad una serie g_m^1 contenuta in g_m^2, risponde una g_n^1 contenuta in g_n^2, e al gruppo jacobiano della g_m^1 risponde evidentemente parte del gruppo jacobiano della g_n^1, il quale dev'essere completato aggiungendo il gruppo dei punti doppî dell'involuzione γ_μ.

Ciò posto, si tenga conto che, la serie g_m^2 essendo semplice, i gruppi jacobiani delle sue g_m^1 sono equivalenti; e che a gruppi equivalenti, mediante la corrispondenza $(1,\mu)$ tra le curve algebriche Γ, C, rispondono gruppi equivalenti. Ne seguirà che i gruppi jacobiani delle g_n^1 contenute in g_n^2 appartengono essi pure ad una medesima serie lineare.

La serie lineare (completa) che contiene i gruppi jacobiani delle g_n^1 estratte da una medesima g_n^2, si chiama la <u>serie jacobiana</u> della data. Se G è un gruppo della g_n^2 sicchè questa si possa indicare col simbolo $|G|$, la serie jacobiana s'indicherà col simbolo $|G_j|$.

Dimostriamo infine il seguente <u>teorema fondamentale sulle serie jacobiane</u>:

<u>Se $|A|$, $|B|$ son due serie lineari esistenti sopra una curva algebrica C, la serie jacobiana della somma $|A+B|$, è la somma della serie jacobiana di una delle serie date, e del doppio dell'altra.</u> In simboli:

$$|(A+B)_j| = |A_j + 2B| = |2A + B_j|$$

Suppongasi in primo luogo che la serie $|A+B|$ sia semplice, priva di punti fissi, e almeno ∞^2. La relazione da dimostrarsi risulta allora senz'altro dai teoremi stabiliti nei due ultimi numeri.

Ciò posto, non facciamo alcuna ipotesi restrittiva sulla serie lineare $|A+B|$. Si può evidentemente considerare una terza serie lineare $|K|$ tale che la serie somma $|S| = |A+B+K|$ sia semplice, priva di punti fissi, e almeno ∞^2. Basta a tal uopo considerare una serie $|S|$ soddisfacente a queste condizioni, e così ampia ch'essa contenga parzialmente la serie $|A+B|$. La serie K risulterà allora definita dalla differenza $|S-A-B|$. Alla serie $|S|$ si può applicare il teorema enunciato e si ottiene

$$|S_j| = |(A+B)_j + 2K| = |A_j + 2(B+K)| = |A_j + 2B + 2K|,$$

donde si trae

$$|(A+B)_j| = |A_j + 2B| .$$

Similmente si trova

$$|(A+B)_j| = |2A + B_j|, \quad \text{c.d.d.}$$

36. Dal teorema fondamentale discende un primo corollario notevole.

Dicasi n l'ordine della serie $|A|$, m l'ordine della serie $|B|$, x l'ordine di A_j, y l'ordine di B_j. La relazione espressa dal teorema fondamentale dà luogo alla seguente relazione numerica

$$x + 2m = y + 2n,$$

cioè

$$x - 2n = y - 2m$$

Ponendo:

$$x - 2n = 2p - 2$$

sicchè sia
$$p = \frac{1}{2}x - n + 1$$
il numero p risulta indipendente dalla serie lineare che serve a definirlo, perchè partendo da un'altra serie d'ordine m avente la jacobiana d'ordine y, si ha pure
$$p = \frac{1}{2}y - m + 1.$$
Il numero p chiamasi il genere della curva considerata.
Il genere gode delle seguenti proprietà:
a) Esso è invariante rispetto alle trasformazioni birazionali della curva.
b) Esso è un numero intero ≥ 0.
La proprietà a) si dimostra in modo immediato. Avendosi due curve algebriche C, C' in corrispondenza birazionale, ad una serie lineare g_n^1 esistente su C, risponde una g_n^1 su C', e al gruppo jacobiano della prima serie risponde il gruppo jacobiano della seconda, sicchè i generi delle curve C, C' calcolati col sussidio delle g_n^1 corrispondenti, risultano eguali.
Ciò posto, per calcolare il genere di una data curva algebrica, ci possiamo riferire ad una particolare curva appartenente alla classe delle trasformate birazionali della curva data; e poichè a questa classe appartiene in ogni caso (n° 19) una curva piana f dotata di singolarità ordinarie, ci possiamo riferire appunto a questo modello.
Sia n l'ordine della f, possedente t punti multipli ordinari (cioè a tangenti distinte) di molteplicità $s_1, s_2, \dots s_t$. Il gruppo jacobiano della serie g_n^1

staccata su f da un fascio di rette aventi il centro in un punto generico O del piano, non è altro che il gruppo dei punti di contatto delle tangenti mandate da O ad f: sicchè il numero dei punti di questo gruppo jacobiano, coincide colla classe m della curva.

Ora la classe di f si calcola agevolmente sia colla considerazione della prima polare di O, la quale passa colla molteplicità $s_i - 1$ pel punto s_i-plo per f, avendo ivi le $s_i - 1$ tangenti distinte da quelle di f (x); sia estendendo il ragionamento del n° 11. (Una traslazione infinitesima della f conduce questa curva in un'altra che ha un punto $(s_i - 1)$-plo nel punto s_i-plo di f, in tal guisa che il punto stesso assorbe precisamente $s_i(s_i - 1)$ intersezioni della curva cercata). - Si trova così:

$$m = n(n-1) - \sum_{i=1}^{t} s_i(s_i - 1) \quad ;$$

e poichè

$$p = \frac{1}{2}m - n + 1 \quad ,$$

si ha

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum' \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

la quale prova intanto che p è intero.

Si vede di più facilmente che $p \geq 0$. Infatti poichè $\underline{m}$ è un numero di sua natura positivo o nullo, (nullo soltanto quando la f riducesi ad una retta), avremo

$$n(n-1) - \sum' s_i(s_i - 1) \geq 0, \text{ cioè } \frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum' \frac{s_i(s_i-1)}{2} \geq n - 1 \geq 0.$$

Se dunque $n > 1$ si potrà profittare degli $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ parametri da cui dipende una curva d'ordine $n-1$,

(x). Cfr. p.e Bertini Introduzione alla geometria projettiva, ecc. Cap. 8° n° 10.

per costruire una curva D di quest'ordine passante s_i-1 volte per ogni punto s_i-plo di f e per altri $\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\sum_i\frac{s_i(s_i-1)}{2}$ punti semplici di f. Essendo la f irriducibile, essa taglierà D in $n(n-1)$ punti, sicchè risulterà

$$n(n-1)\geq\sum s_i(s_i-1)+\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\sum\frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

cioè

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}\geq\sum\frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

ossia $p\geq 0$.

Osservazione. Quando sia $p=0$, si potranno costruire ∞^1 curve D d'ordine $n-1$ passanti con moltiplicità s_i-1 pei punti s_i-pli di f e contenenti ulteriormente

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\sum\frac{s_i(s_i-1)}{2}-1=2n-1$$

punti semplici di f. Una D segherà f, fuori dei punti fissi, in

$$n(n-1)-\sum_i s_i(s_i-1)-(2n-1)=1 \text{ punto},$$

in tal guisa che i punti di f risulteranno riferiti biunivocamente, e quindi birazionalmente, alle curve del fascio costruito, cioè ai valori di un parametro. La f sarà perciò razionale. Viceversa prendendo come imagine di una curva razionale una retta, si trova subito, mediante la formola data, $p=0$.

Si conclude che tra le curve algebriche irriducibili, le curve razionali son caratterizzate dalla condizione di avere il genere nullo.

37\. Consideriamo ora sopra una curva algebrica C, una serie lineare g_n^1, priva di punti fissi, e dotata di punti di molteplicità qualunque. Ci proponiamo di trovare un'espressione del genere p

di C mediante la considerazione del gruppo jacobiano della g_n^1 (gruppo formato dai punti multipli della serie), estendendo così la formula che permette di calcolare il genere, col sussidio di una serie dotata di soli punti doppi.

Sulla curva C fissiamo una serie lineare g_m^1 priva di punti fissi e dotata di soli punti doppi, la quale non abbia alcun particolare legame colla g_n^1, sicchè i gruppi di g_n^1 e g_m^1 che passano per un punto generico di C non abbiano in conseguenza altri punti comuni.

Le serie lineari suddette, essendo due varietà razionali semplicemente infinite di elementi, si potranno riferire birazionalmente a due fasci di raggi (P) (Q) di un medesimo piano π, in tal guisa che ogni gruppo della g_m^1 sia rappresentato da un raggio pel punto P ed ogni gruppo della g_n^1 da un raggio per Q.

Al punto M variabile su C, risponde nel piano π il punto R comune ai raggi imagini dei gruppi di g_n^1 e di g_m^1 che passano per M; ed il punto variabile R descrive una curva algebrica piana f, la quale risulta riferita birazionalmente a C. Infatti ad una posizione di M risponde una posizione di R, e viceversa (per l'ipotesi che i due gruppi passanti per M non abbiano altri punti comuni).

Si noti che la costruzione esposta fa nascere una corrispondenza algebrica di indici (n, m) tra i due fasci (P), (Q); ove si chiamino omologhi due raggi che rappresentino due gruppi aventi un punto comune. Un raggio generico per P sega f, fuori di Q, in tanti punti quante sono le intersezioni del raggio stesso coi raggi che gli corrispondono nel fascio (Q), onde chiamando x l'ordine di f, ed s la molteplicità di f nel punto P, avremo

$$x = m + s \; .$$

Similmente si ha

$$x = n + s' ,$$

ove s' è la molteplicità di f in Q.

Se (com'è lecito supporre) la retta PQ non è unita nella corrispondenza, e inoltre pensata come raggio del fascio (P), (o (Q)), ha $\underline{m}$ (o risp $\underline{n}$) raggi corrispondenti distinti nell'altro fascio; mentre un raggio si muove attorno a P (o Q) tendendo a passare per Q (o P), gli $\underline{m}$ (o $\underline{n}$) punti in cui il raggio stesso sega f, fuori del punto fisso, tendono a P (o Q) se ndo $\underline{m}$ (o d $\underline{n}$) direzioni distinte tra loro e dalla retta PQ: dal che segue che la PQ non incontra f fuori dei punti P, Q e che in questi punti non è tangente alla curva medesima.

Ne deriva che $x = s + s'$, e quindi, in forza delle precedenti relazioni risulta:

$$s' = m \; , \quad s = n \; , \quad x = m + n \; .$$

Si conclude pertanto che il punto P è un punto n-plo ordinario per f, giacchè si hanno ivi come tangenti le n rette, tra loro distinte, che corrispondono a PQ pensata come retta del fascio Q. E similmente dicasi del punto Q.

Quanto alla molteplicità d'intersezione della curva f e di una tangente t in P, è chiaro ch'essa sarà eguale ad n aumentato del numero dei raggi corrispondenti a t e coincidenti colla retta PQ. Ma poichè, senza introdurre restrizioni, si può supporre che uno solo di questi raggi coincida con PQ (ciò infatti si ottiene disponendo i centri dei due fasci in posizione mutuamente generica), così si conclude che la tangente t ha molteplicità d'intersezione $n+1$ colla f. Analogamente dicasi per le altre tangenti in P e in Q. Si conclude pertanto che la f è una curva d'ordine $n+m$ avente rispettivamente in P, Q punti di molteplicità n, m. Questi punti sono ordinari e senza particolarità tangenziali.

Alle serie g^1_m, g^1_n della curva C, rispondono su f le serie segate fuori dei rispettivi centri, dai fasci (P), (Q), cosicchè i gruppi della g^1_m dotati di punti doppi si ottengono in corrispondenza alle rette uscenti da P e aventi ulteriormente molteplicità d'intersezione 2 con un medesimo ramo di f; e similmente si ottengono i gruppi della g^1_n dotata di punti multipli, dalle rette per Q, che hanno molteplicità d'intersezione > 1 con un medesimo ramo di f.

Si osserverà che la f non può avere rami d'ordine > 2 perchè altrimenti la g^1_m segata dalle rette per P avrebbe punti più che doppi. Sicchè, fissando l'attenzione sulla serie g^1_{n+m} segata su f

dalle rette per un punto O generico, poichè questa g'_{n+m} non ha che punti doppi, potremo calcolare il genere p di f mediante la formola

$$p = \frac{1}{2}(z+y) - (n+m) + 1,$$

ove z è il numero dei rami di 2° ordine di f, ed y è il numero delle tangenti (a contatto bipunto) condotte da O alla curva.

Ora si faccia approssimare O a Q secondo una direzione generica e si osservi che il gruppo jacobiano della g'_{n+m} suddetta tende a ridursi al doppio del gruppo formato dagli m punti fissi (tutti coincidenti con Q) della g'_{n+m} limite, aumentato del gruppo jacobiano, T, della serie g'_n segata ulteriormente su f dalle rette per Q. In questo gruppo jacobiano ogni punto R dovrà essere contato tante volte quanti sono i punti doppi della serie variabile g'_{n+m} che tendono ad R col tendere di O a Q.

Indicando con t il numero dei punti del gruppo T, contati ciascuno colla debita molteplicità, avremo dunque

$$p = \frac{1}{2}(t+2m) - (n+m) + 1 = \frac{1}{2}t - n + 1 :$$

Si tratta ora di valutare l'ordine di molteplicità con cui va contato ogni punto del gruppo T. Fissiamo l'attenzione sopra un punto R che sia ν-plo per la g'_n $(\nu > 1)$ sicchè la retta QR abbia con un ramo di f, avente l'origine in R, molteplicità d'intersezione ν.

Due ipotesi sono possibili:

a) Il ramo di cui trattasi è lineare (cioè del 1° ordine)

b) Il ramo stesso è di 2° ordine.

Nella 1ª ipotesi la retta QR toccherà il ramo, il quale risulterà dunque di classe $\nu-1$ (nº 20) e quindi la retta QR sarà limite di $\nu-1$ tangenti uscenti dal punto variabile O, cioè il punto R conterà $\nu-1$ volte nel gruppo J.

Nella seconda ipotesi; se $\nu=2$, il punto R risulterà doppio e conterà una volta nel gruppo J; se $\nu>2$ la retta QR sarà tangente al ramo il quale risulterà di classe $\nu-2$ e come tale assorbirà altrettante tangenti uscenti da O. Sicchè il punto R sarà limite di $\nu-2$ punti doppî variabili della g'_{n+m} relativa ad O e di un punto doppio fisso della stessa serie. Onde anche in tal caso R conterà $\nu-1$ volte nel gruppo J.

Si conclude pertanto che le proposizioni precedentemente stabilite sul gruppo jacobiano d'una serie lineare ∞^1 dotata di soli punti doppî, valgono anche per il gruppo jacobiano d'una serie dotata di punti di moltiplicità qualunque purchè ogni punto ν-plo di quest'ultima serie si conti come $\nu-1$ punti doppî. In particolare si ha

$$p = \frac{1}{2}\sum(\nu-1) - n + 1,$$

ove il sommatorio è esteso a tutti i punti multipli della g'_n, ν denotando la moltiplicità d'uno generico tra essi.

Capitolo quinto.

Il teorema fondamentale di Nœther e le sue applicazioni alla teoria delle serie lineari.

38. Il teorema $Af+B\varphi$. Abbiansi in un piano due curve

$$f(x_0 x_1 x_2)=0\ ,\ \varphi(x_0 x_1 x_2)=0$$

degli ordini rispettivi m, n. Diremo ch'esse presentano il caso semplice in un punto P r-plo per l'una ed s-plo per l'altra, allorquando le r tangenti ad f in P sono tutte distinte dalle s tangenti a φ nello stesso punto. Il teorema che noi intendiamo dimostrare e che citeremo brevemente chiamandolo "teorema $Af+B\varphi$„ si enuncia nel modo seguente: Se le curve $f=0$, $\varphi=0$ presentano il caso semplice in ognuno dei loro punti comuni, una curva algebrica passante colla molteplicità $r+s-1$ (almeno) per ogni punto P che sia r-plo per f ed s-plo per φ, ha necessariamente un'equazione del tipo

$$Af+B\varphi=0,$$

ove A, B son forme algebriche delle $x_0 x_1 x_2$ degli ordini rispettivi $l-m$, $l-n$, l essendo l'ordine della curva considerata. Si possono anzi scegliere le A, B in tal guisa che le curve $A=0$, $B=0$ passino per ogni P colle molteplicità rispettive $s-1$ ed $r-1$ (almeno).

Si osservi in primo luogo che le due curve f, φ non possono avere che un numero finito di punti comuni, perchè se avessero una curva comune in ciascun punto di questa possederebbero una medesima tangente e quindi non presenterebbero il caso semplice.

Ciò posto, dimostriamo il teorema allorquando l'ordine l della curva $\psi=0$ passante colla molteplicità $r+s-1$ per ogni punto P r-plo per f ed s-plo per φ, è abbastanza elevato.

Le curve rappresentate dall'equazione

$$Af+B\varphi=0,$$

ove le $A=0$, $B=0$ son due curve variabili soddisfacenti alla sola condizione di presentare la molteplicità $s-1$, $r-1$ in ogni punto P r-plo per f ed s-plo per φ, formano evidentemente un sistema lineare Σ, giacchè i parametri variabili nell'equazione $Af+B\varphi=0$ sono i coefficienti delle A, B legati da un certo numero di equazioni lineari, esprimenti il comportamento delle A, B nei punti comuni alle f, φ.

Cerchiamo qual'è la dimensione del sistema Σ. A prima vista sembrerebbe che bastasse contare quanti sono i coefficienti che restano arbitra rii nell'equazione $Af+B\varphi=0$ e diminuire questo numero di un'unità per ottenere la dimensione cercata; ma occorre avvertire che un tal procedimento sarebbe fondato sull'ipotesi che ogni curva di Σ corrispondesse ad <u>una sola</u> equazione del tipo considerato (a meno di un fattore costante). Chè se invece ogni curva di Σ è rappresentabile sotto la forma $Af+B\varphi=0$ in ∞^i modi distinti, per ottenere la dimensione cercata occorrerà diminuire di $i+1$ unità il numero dei coefficienti arbitrarii dell'equazione $Af+B\varphi=0$.

Cerchiamo adunque se ad una curva di Σ possano corrispondere più equazioni del tipo considerato (che non differiscano soltanto per un fattore costante).

Siano

$$Af+B\varphi=0\ , \qquad A'f+B'\varphi=0$$

due rappresentazioni d'una stessa $\varphi=0$, cosicchè risulterà a meno di un fattore costante

$$Af+B\varphi \equiv A'f+B'\varphi\ ,$$

identicamente rispetto alle $x_0\, x_1\, x_2$. Ne segue

$$(A-A')f \equiv (B'-B)\varphi$$

e poichè il polinomio φ è primo con f (chè altrimenti le curve $f=0$, $\varphi=0$ avrebbero una parte comune), dovrà $A-A'$ esser divisibile per φ, cioè:

$$A-A' \equiv X\varphi\ ,$$

X essendo una forma d'ordine $l-m-n$ (e quindi $X\equiv 0$ se $l<m+n$). Sostituendo nella precedente identità viene

$$X\varphi f \equiv (B'-B)\varphi, \text{ cioè } B'-B \equiv Xf\ .$$

Dunque:

$$A' \equiv A - X\varphi \quad , \quad B' \equiv B + Xf.$$

E poichè qualunque sia X le curve $A - X\varphi = 0$, $B + Xf = 0$ passano colle molteplicità $s-1$, $r-1$ (almeno) per ogni punto P r-plo per f ed s-plo per φ, così si conclude che da una rappresentazione $Af + B\varphi = 0$ si deducono tutte le rappresentazioni corrispondenti alla medesima curva $g = 0$, scrivendo l'equazione

$$(A - X\varphi)f + (B + Xf)\varphi = 0,$$

e lasciando variare i coefficienti della forma X d'ordine $l-m-n$. Se dunque $l \geq m+n$ ogni curva di Σ sarà suscettibile di $\infty^{\binom{l-m-n+2}{2}}$ rappresentazioni distinte del tipo $Af + B\varphi = 0$, cioè il numero i cui sopra si alludeva viene eguale ad $\binom{l-m-n+2}{2}$.

Quanto ai coefficienti arbitrari di $Af + B\varphi = 0$, è facile trovarne il numero, giacchè se l, e quindi $l-m$, $l-n$, sono abbastanza grandi le condizioni imposte alle $A = 0$, $B = 0$ volendo che passino per ogni P colle molteplicità rispettive $s-1$, $r-1$ sono tra loro indipendenti.(x) In A compaiono dunque $\binom{l-m+2}{2} - \sum_P \binom{s}{2}$ coefficienti arbitrari e in B ne compaiono $\binom{l-n+2}{2} - \sum_P \binom{r}{2}$; sicchè in totale si hanno

$$\binom{l-m+2}{2} + \binom{l-n+2}{2} - \sum_P \left[\binom{r}{2} + \binom{s}{2}\right]$$

coefficienti variabili in $Af + B\varphi$. Ne deriva che Σ ha la dimensione

$$\binom{l-m+2}{2} + \binom{l-n+2}{2} - \binom{l-m-n+2}{2} - \sum_P \left[\binom{r}{2} + \binom{s}{2}\right] - 1 .$$

Si hanno ora le identità numeriche

$$\binom{l+2}{2} - \binom{l-m+2}{2} - \binom{l-n+2}{2} + \binom{l-m-n+2}{2} = nm$$

$$\binom{r+s}{2} = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + rs,$$

(x) Qui si applica una proprietà che si troverà dimostrata al n° 40.

e quindi la dimensione di Σ si può scrivere sotto la forma

$$\binom{l+2}{2} - i - nm - \sum_P \binom{r+s}{2} + \sum_P rs$$

ossia essendo $\sum_P rs = nm$ (per l'ipotesi che in ogni P si abbia il caso semplice):

$$\binom{l+2}{2} - 1 - \sum_P \binom{r+s}{2}.$$

Ma tale è pure la dimensione del sistema lineare Σ' formato dalle curve d'ordine l abbastanza alto che passano per ogni P, r-plo per $f=0$ ed s-plo per $\varphi=0$, colla molteplicità $r+s-1$, e poichè evidentemente, per ogni valore di l, Σ è contenuto in Σ', si conchiude che per l abbastanza alto Σ e Σ' coincidono. Il teorema di Noether è così dimostrato per le curve $g=0$ d'ordine abbastanza elevato.

Per dimostrare il teorema per ogni valore dell'ordine, basterà ora provare che se la proprietà è vera per le curve d'ordine l, lo è pure per le curve d'ordine $l-1$. Si può sempre supporre facendo eventualmente una trasformazione di coordinate, la quale non altera per nulla le condizioni del teorema da dimostrarsi, che la retta $x_0=0$ sia disposta genericamente rispetto alle $f=0$, $\varphi=0$; che non passi cioè per ciascuno dei P, (nella quale ipotesi è pur compresa l'altra che x_0 non divida nè f nè φ).

Sia $g(x_0 x_1 x_2)=0$ una curva d'ordine $l-1$ passante colle molteplicità $r+s-1$ per ogni P: allora la curva $x_0 g=0$ sarà d'ordine l e passerà colle debite molteplicità pei punti P, sicchè avremo am=

messo il teorema per le curve d'ordine l, risulterà identicamente

(1) $x_0 g(x_0 x_1 x_2) \equiv A(x_0 x_1 x_2) f(x_0 x_1 x_2) + B(x_0 x_1 x_2) \varphi(x_0 x_1 x_2)$,

ove $A=0$, $B=0$ passano colle molteplicità rispettive $s-1$, $r-1$ per ogni P, r-plo per $f=0$ ed s-plo per $\varphi=0$. Dalla (1) ponendovi $x_0=0$, si trae

(2) $A(0 x_1 x_2) f(0 x_1 x_2) + B(0 x_1 x_2) \varphi(0 x_1 x_2) \equiv 0$,

donde segue che la forma binaria (non identicamente nulla) $\varphi(0 x_1 x_2)$ divide il prodotto $A(0 x_1 x_2) f(0 x_1 x_2)$. E poichè $\varphi(0 x_1 x_2)$ non ha fattori comuni con $f(0 x_1 x_2)$, chè altrimenti la retta $x_0=0$ conterrebbe qualche P — così si conclude che

(3) $A(0 x_1 x_2) \equiv A_0(x_1 x_2) \varphi(0 x_1 x_2)$,

cioè

(4) $A(x_0 x_1 x_2) \equiv A_0(x_1 x_2) \varphi(x_0 x_1 x_2) + x_0 A_1(x_0 x_1 x_2)$,

ove A_1 è una forma d'ordine $l-m-1$.

La (2) confrontata colla (3) porge

$$B(0 x_1 x_2) + A_0(x_1 x_2) f(0 x_1 x_2) \equiv 0,$$

cioè

(5) $B(x_0 x_1 x_2) + A_0(x_1 x_2) f(x_0 x_1 x_2) \equiv x_0 B_1(x_0 x_1 x_2)$,

B_1 essendo una forma d'ordine $l-n-1$. Mediante la (4) la (1) diviene

$$x_0 g \equiv x_0 A_1 f + (A_0 f + B) \varphi,$$

e ricordando la (5)

$$x_0 g \equiv x_0 A_1 f + x_0 B_1 \varphi \text{ ossia: } g \equiv A_1 f + B_1 \varphi .$$

Dunque la forma g d'ordine $l-1$ può esprimersi come combinazione lineare di f, φ. Quanto alle $A_1=0$, $B_1=0$ le identità (4), (5) ci mostrano ch'esse passano colle molteplicità rispettive $s-1$ ed $r-1$ (almeno) per ogni P r-plo per $f=0$ ed s-plo per $\varphi=0$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

39. Assai ampia è la bibliografia sul teorema ora dimostrato, ch'è fondamentale nella trattazione algebrica di Brill e Noether della teoria delle serie lineari. Si potranno trovare in proposito molte citazioni nella nota del Bertini « Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre » (Rendiconti del R. Istituto lombardo, s. 2ª t XXIV, 1891). Il teorema di Noether è stato anche esteso ad un numero qualunque di forme di quante si vogliano variabili (ved. le mie Note nei Rendiconti dei Lincei, seduta del 2 febbrajo 1902 e negli atti della R. Acc. di Torino, seduta 31 dicembre 1905, ove trovasi anche una Nota del Torelli sullo stesso argomento. Da tali note si rileveranno altre citazioni). Il concetto della dimostrazione sopra esposta deriva dalle mie dimostrazioni generali testè citate od anche dalla nota della sig.na Scott, A proof of Noether's fundamental theorem (Mathematische Annalen, Bd. 52, 1899) ove però trovasi una dimostrazione meno semplice nello sviluppo. Al n° 41 si vedrà come la stessa dimostrazione sopra esposta serva pure a stabilire il teorema $Af+B\varphi$ sotto una forma

assai più generale, che non lo altrove trovata.

40 Nel corso della dimostrazione abbiamo fatto uso della proprietà che segue:

<u>Essendo fissati nel piano i punti P_1 P_2 .... P_k (tra di loro distinti) le $\Sigma_i \binom{t_i+1}{2}$ condizioni lineari che s'impongono ad una curva algebrica dell'ordine l volendo che essa presenti nei punti P_i moltiplicità degli ordini dati t_i, sono tra di loro indipendenti, quando l è abbastanza grande.</u>

Anzitutto se $k=1$ ed $l \geq t_1 - 1$, la cosa è ben nota e si verifica subito ponendo in P_1 l'origine delle coordinate: con che la condizione che P_1 sia t_1-plo si esprime annullando i coefficienti dei termini fino al grado $t_1 - 1$ incluso. Condizioni che sono manifestamente indipendenti.

Se $k=2$ si può scegliere anzitutto l così grande che esistano curve d'ordine $l-t_2$ non passanti per P_2 e aventi in P_1 un punto t_1-plo equivalente a $\binom{t_1+1}{2}$ condizioni distinte. Poichè alle curve d'ordine t_2 il punto t_2-plo P_2 presenta condizioni distinte, si potrà costruire una curva d'ordine t_2 soddisfacente in P_2 a $\binom{t_2+1}{2} - 1$ delle condizioni relative a P_2 e non alla rimanente. In tal modo aggregando questa curva ad una delle curve d'ordine $l-t_2$ sopra considerate, si sarà costruita una curva d'ordine l soddisfacente a $\binom{t_1+1}{2}+\binom{t_2+1}{2}-1$ condizioni relative a P_1, P_2 e non alla rimanente. Il che prova che per le curve di quell'ordine o maggiore le condizioni relative a P_1, P_2 son distinte. E così continuando per $t = 3, 4 \ldots$.

Osservazione. Il teorema è vero anche quando alcuni dei punti P sono a gruppi infinitamente vicini. Basterà provare la cosa quando i punti P formano un sol gruppo di punti infinitamente vicini, perchè si potrà passare al caso in cui siano dati due tali gruppi, ripetendo il ragionamento sopra esposto per $k = 2$, ecc.

Se è dato dunque il punto t-plo P, i punti P_1, $P_2 \ldots$ multipli secondo $t_1, t_2 \ldots$ e situati nell'intorno di 1° ordine di P, i punti P_{11}, $P_{12}, \ldots$ multipli secondo $t_{11}, t_{12}, \ldots$ e situati nell'intorno di 2° ordine di P, e così di seguito, (*) si tratterà di provare che alle curve d'ordine l abbastanza alto, le suddette singolarità presentano

$$\binom{t+1}{2}+\binom{t_1+1}{2}+\ldots+\binom{t_{11}+1}{2}$$

condizioni lineari distinte.

Si operi infatti una trasformazione quadratica generica avente in P un punto fondamentale (gli altri due essendo Q, R) e siano P', Q', R' i punti fondamentali sul piano π' omologo del piano π (ove son date le singolarità).

Una curva variabile d'ordine l abbastanza grande, avente in P un punto t-plo (e quindi

(*) Per dare queste singolarità basterà dare una curva algebrica che le possegga soddisfacente a $\binom{t+1}{2}$ condizioni distinte) si trasforma in una curva d'ordine $2l-t$ avente nei punti fondamentali Q', R' due punti $(l-t)$-pli, in P' un punto l-plo e segante la retta $Q'R'$ in t punti variabili. Ai punti P_1, P_2 ..... rispondono i punti P'_1, P'_2.... della retta $Q'R'$. Quando $2l-t$ è abbastanza grande i punti distinti P'_1, P'_2..... presentano condizioni indipendenti ad una curva d'ordine $2l-t$ che già passi colle molteplicità l, $l-t$, $l-t$, per P', Q', R' e che debba avere in P'_1, P'_2..... singolarità degli ordini rispettivi t_1, t_2, ...: dal che segue che alla curva corrispondente d'ordine l, i punti multipli P, P_1, P_2, ... presentano condizioni indipendenti. - Ponendo in P'_1 un punto fondamentale di una nuova trasformazione quadratica, si dimostra similmente che i punti multipli P, P_1, P_2, ..., P_{11}, P_{12}, ... presentano condizioni indipendenti ad una curva d'ordine l abbastanza alto, e così proseguendo.

41. L'osservazione precedente permette di estendere notevolmente il teorema dimostrato al n° 38. Infatti in due soli punti della dimostrazione interviene l'ipotesi che in ogni intersezione delle curve $f=0$, $\varphi=0$ si abbia il caso semplice: e cioè quando si calcola l'infinità delle curve $A=0$, o $B=0$, o $g=0$ che hanno nei punti P date singolarità, e quando si profitta della relazione $\sum_P rs = nm$. In forza dell'osservazione precedente le formole

$$\binom{l-m+2}{2}+\binom{l-n+2}{2}+\binom{l-m-n+2}{2}-\Sigma\left[\binom{r}{2}+\binom{s}{2}\right]-1,$$

$$\binom{l+2}{2}-1-\Sigma\binom{r+s}{2}$$

continuano ad esprimere le dimensioni dei sistemi $\Sigma\,\Sigma'$ definiti al n° 38 purchè le $f=0$, $\varphi=0$ abbiano in comune un numero finito di punti e i sommatori s'intendano estesi a tutti i punti (distinti e infinitamente vicini) comuni alle curve stesse.
Quanto alla dimensione di Σ, essa potrà pure scriversi sotto la forma $\binom{l+2}{2}-1-\Sigma\binom{r+s}{2}$, perchè anche in tal caso si ha la relazione $\Sigma rs=nm$, purchè il sommatorio si estenda nel modo suddetto. (vedi pag. 63). Ne deriva che i sistemi Σ, Σ' coincidono, ecc, ecc.
Si conclude che il teorema di Nöther vale anche quando le due curve $f=0$, $\varphi=0$ – non aventi parti comuni – si comportano comunque in ciascuna delle loro intersezioni, purchè si consideri una curva algebrica che passi colle moltepIicità $r+s-1$ (almeno) per tutti i punti distinti o infinitamente vicini, r-pli per f ed s-pli per φ.

42. Il teorema del resto (Restsatz)
Una importantissima conseguenza del teorema di Nœther si ottiene in relazione alle curve aggiunte della curva $f(x_0\,x_1\,x_2)=0$, dotata di singolarità qualunque. Per curva aggiunta ad f s'intenderà ogni curva che abbia la moltepIicità $s-1$ (almeno) in ogni punto s-plo di f (considerandosi beninteso i punti multipli distinti e infinitamente

vicini. Orbene si ha il teorema:

<u>Ogni curva aggiunta che passi per un dato gruppo generico di una g_n^r fa parte di un sistema lineare di aggiunte col quale può segarsi la serie.</u>

Sia $\lambda_0\psi_0 + \dots + \lambda_r\psi_r = 0$ il sistema lineare segante su f la g_n^r, che supponiamo priva di punti fissi, e sia $\psi = 0$ <u>la</u> curva che stacca un gruppo generico G della serie, per guisa che in ogni punto base del sistema lineare segante, un'altra curva (particolare) del sistema stesso abbia moltiplicità non inferiori a quelle che presenta $\psi = 0$. Si può addirittura supporre che le curve ψ siano aggiunte ad f, aggregandolo eventualmente alle curve stesse, come parte fissa, un'aggiunta alla f.

Sia $\varphi = 0$ un'aggiunta passante pel gruppo G (e segante ulteriormente f nel gruppo H), e sia G' un altro gruppo generico della g_n^r, segnato su f dalla curva $\psi' = 0$. La curva composta $\psi'\varphi = 0$ ha le moltiplicità $s+r-1$ (almeno) in <u>ogni</u> punto s-plo per f ed r-plo per ψ, giacchè la ψ' ha moltiplicità eguale a ψ nei punti base del sistema segante, e la φ ha almeno moltiplicità $s-1$ in ogni punto s-plo per f, e passa inoltre per G. Avremo dunque, pel teorema di Noether (n° prec)

$$(1) \qquad \psi'\varphi \equiv \psi\varphi' + \theta f,$$

ove φ' passa colla moltiplicità $s-1$ per ogni punto s-plo di f col r-plo per ψ, con $r \geq 1$. Ma essendo ψ un'aggiunta ad f tra questi punti s-pli per f e almeno semplici per ψ, vi sono <u>tutti</u> i punti multipli di f, dunque la curva φ' sarà essa stesso un'aggiunta ad f. Dico di più che la curva φ' passa pel gruppo G'. Infatti un punto del gruppo G' appartiene alle curve $\psi'\varphi=0$, $\theta f=0$ e quindi, se non è sopra ψ, deve appartenere a φ'. Che se poi il punto considerato fosse sopra ψ esso apparterrebbe anche al gruppo G, cioè, essendo G, G' generici, la g_n^r avrebbe quel punto come fisso, il che è contrario all'ipotesi da cui siamo partiti.

Scrivendo l'identità (1) per $r+1$ posizioni indipendenti $\psi_0=0, \psi_1=0, \dots, \psi_r=0$ di $\psi'=0$ e chiamando $\varphi_0=0$, $\varphi_1=0, \dots, \varphi_r=0$ le posizioni corrispondenti di $\varphi'=0$, si ricava

$$\varphi(h_0\psi_0+\cdots\cdots+h_r\psi_r)\equiv\psi(h_0\varphi_0+\cdots\cdots+h_r\varphi_r)+\eta f,$$

ove le curve variabili $h_0\psi_0+\cdots+h_r\psi_r=0$ e $h_0\varphi_0+\cdots+h_r\varphi_r=0$ passano per lo stesso gruppo variabile G' di g_n^r. E poichè la curva $h_0\varphi_0+\cdots+h_r\varphi_r=0$ non può avere fuori di G' intersezioni variabili con f - chè tali intersezioni starebbero sulla curva fissa $\varphi=0$ - così il sistema $h_0\varphi_0+\cdots+h_r\varphi_r=0$ staccherà su f la g_n^r data (fuori dei punti multipli e del gruppo H).

<u>Osservazione</u>. Si è escluso che la g_n^r abbia punti fissi ma se esistessero di tali punti il teorema varrebbe ancora. Infatti questi punti verrebbero a comparire nel gruppo H, di cui sopra, se si conducesse un'aggiunta $\varphi=0$ per un gruppo generico G di g_n^r, e si svilupasse quindi la dimostrazione riferendosi alla serie $g_{n'}^r$ $(n'<n)$ che si ottiene dalla data astraendo dai

punti fissi. Alla fine i punti fissi di g_n^r, comparendo nel gruppo base del sistema lineare di aggiunte che segna g_n^r, si potrebbero di nuovo aggregare ai gruppi di questa serie.

43. Due gruppi di punti, come i gruppi G, H del numero precedente che insieme costituiscono la completa intersezione di f con una sua aggiunta, astraendo dalle $\Sigma_i\, s(s-1)$ intersezioni assorbite dai punti multipli, si dicono mutuamente residui o resti l'uno dell'altro. Il teorema precedente si può, dopo ciò, enunciare sotto la forma:

Una serie lineare si può sempre segare su f con un sistema lineare di aggiunte d'ordine l, che passino per il resto di un gruppo della serie rispetto ad un' aggiunta dello stesso ordine.

In altri termini:

Qualunque resto di un gruppo di una serie rispetto alle aggiunte di un dato ordine, è resto di ogni altro gruppo della serie rispetto alle aggiunte dello stesso ordine.

In ciò consiste il teorema del resto (Restsatz) di Brill e Noether. Questa proposizione ha forma projettiva, essendo legata alla considerazione di uno speciale modello della f: sotto forma invariantiva si ha la proposizione, meno comprensiva, di pag. 92. Il teorema del resto porge una nuova dimostrazione del teorema relativo all'unicità della serie completa cui appartiene un dato gruppo G, giacchè ogni serie contenente G deve esser segata da un sistema lineare d'aggiunte d'ordine l, passanti pel resto H di G rispetto ad una di queste aggiunte; di guisa che la serie più ampia contenente G sarà segata dal sistema di tutte le aggiunte passanti pel resto H, e quindi questa serie risulterà perfettamente determinata.

In particolare, quando manchi il resto H, si ha il teorema:

Le aggiunte di un dato ordine segano su f, fuori delle $\Sigma\, s(s-1)$ intersezioni assorbite dai punti s-pli della curva, una serie lineare completa.

L'importanza della considerazione delle curve aggiunte sta appunto in ciò che esse forniscono nel modo più semplice i sistemi lineari atti a segnare su una data curva le serie lineari complete.

44. Dimensione di una serie completa. Serie canonica.

Cerchiamo anzitutto la dimensione della serie lineare segata sulla curva f, d'ordine m, che ora supponiamo dotata di singolarità ordinarie, dalle aggiunte d'ordine l. Conviene distinguere due ipotesi:

1ª) L'ordine l non è minore di m, cosicchè esistono delle curve aggiunte spezzate nella f e in una parte residua d'ordine l-m, la quale non è soggetta ad alcuna condizione.

2ª) L'ordine l è minore di m e quindi non esistono nel sistema lineare delle aggiunte d'ordine l, ~~curve~~ contenenti come parte f.

Nella 1ª ipotesi la dimensione r della serie segata su f dalle aggiunte d'ordine l, si otterrà diminuendo l'infinità delle curve aggiunte, del numero delle curve linearmente indipendenti che contengono come parte f, sicchè si avrà

$$(1) \quad r \geq \frac{l(l+3)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2} - \frac{(l-m)(l-m+3)}{2} - 1 ,$$

il segno = valendo soltanto quando i punti multipli di f presentano condizioni indipendenti alle aggiunte d'ordine l, il che sappiamo deve certamente accadere per l abbastanza grande (n.º 40).

Nella 2ª ipotesi la dimensione r della serie considerata sarà eguale alla dimensione del sistema segante, cioè

$$(2) \qquad r \geq \frac{l(l+3)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2}$$

Si osserverà che il secondo membro della (1) coincide col 2º membro della (2) anche per $l = m-1$, $m-2$, cosicchè si può dire che la (1) vale per $l \geq m-2$, mentre la (2) vale per $l \leq m-3$.

Quanto all'ordine n della serie segata su f dalle aggiunte d'ordine l, fuori delle $\sum s(s-1)$ intersezioni assorbite dai punti multipli di f, esso è in ogni caso espresso da

$$n = ml - \sum s(s-1)$$

Introducendo il genere p di f, che come sappiamo (nº 36) è dato dalla formola

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2} ,$$

si ha, per $l \geq m-2$:

$$(1') \qquad r \geq p - 2 + m(l-m+3) ,$$

e per $l = m-3-\alpha$ ($\alpha \geq 0$)

$$(2') \qquad r \geq p - 1 - m\alpha + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} ,$$

mentre è sempre

$$(3) \qquad n = 2p - 2 + m(l-m+3) .$$

Confrontando le (1'), (2') colla (3), si ha:

per $l \geq m-2$: $r \geq n-p$

per $l = m-3-\alpha$: $r \geq n-p+1+\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$.

In ogni caso dunque "tra la dimensione r, l'ordi-"ne n della serie lineare completa segata su f "(di genere p) dalle aggiunte d'ordine arbitrario "si ha la disuguaglianza $r \geq n-p$".

È facile dedurre da ciò che sopra una curva algebrica qualunque di genere p, tra la dimensione r e l'ordine n di ogni serie lineare completa, sussiste la disuguaglianza $r \geq n-p$.

Infatti sulla curva f, cui si possono riferire le nostre considerazioni, pel teorema di Noether relativo alle singolarità, una g_n^r qualunque vien segata dalle aggiunte di un certo ordine l, che passano pel resto H di un gruppo della serie. Ora, se n' è il numero dei punti costituenti il gruppo H, cosicchè $n+n'$ sia l'ordine della serie segata su f dalle aggiunte d'ordine l, la dimensione R di quest'ultima serie sodisfa alla disuguaglianza

$$R \geq n + n' - p .$$

Poichè i gruppi della g_n^r si ottengono dai gruppi della $g_{n+n'}^R$ imponendo loro di contenere il gruppo H, il quale può presentare al più n' condizioni (tante quanti i punti del gruppo), avremo $r \geq R - n'$ e quindi $r \geq n - p$.

La serie lineare completa segata su f, fuori dei punti multipli, dalle curve aggiunte d'ordine $m-3$ (che denoteremo brevemente con φ_{m-3}) si chiama la serie canonica di f. Per ora si può dire che l'ordine di questa serie è $2p-2$ e la dimensione è $\geq p-1$. In seguito si mostrerà che la dimensione uguaglia $p-1$.

Poichè il gruppo jacobiano della serie lineare g_m^1 staccata su f da un fascio generico di rette, è segnato, fuori dei punti multipli, da una curva aggiunta d'ordine $m-1$ (n° 36), che è la prima polare del centro del fascio, così la serie jacobiana completa della serie segata su f dalle rette del suo piano, sarà staccata da tutte le aggiunte d'ordine $m-1$, e quindi le aggiunte d'ordine $m-3$, se esistono, segneranno la differenza (n° 25) tra la suddetta serie jacobiana e il doppio della serie segata dalle rette. In virtù del teorema dimostrato al n° 35 questa differenza uguaglia la differenza tra la serie jacobiana di un'altra serie qualunque e il doppio di questa serie ($|A_j - 2A| = |B_j - 2B|$), dunque si può dire che:

La serie canonica di una curva è la differenza tra la serie jacobiana di una serie lineare qualunque data sulla curva, ed il doppio di questa serie. Da ciò segue che la serie canonica è invariante per trasformazioni birazionali della curva f; ma vedremo ciò più tardi anche per altra via.

45. Serie speciali e non speciali. Teorema di riduzione. Teorema di Riemann-Roch.

Una distinzione importante può farsi tra le serie lineari di una curva f, d'ordine m, chiamando speciali quelle che son segabili con sistemi lineari di aggiunte d'ordine $m-3$ (o minore), e non speciali le altre. Le serie speciali si posson dunque definire come quelle che son contenute (parzialmente o totalmente) nella serie canonica; non speciali le altre. Dall'invarianza della serie canonica seguirà quindi che la distinzione suddetta ha carattere invariantivo, cioè che mediante una trasformazione birazionale della curva sostegno, una serie speciale si muta in una serie speciale (e quindi una non speciale in una non speciale).

Si osservi che una serie speciale ha certamente l'ordine $\leq 2p-2$ (ma non viceversa), cosicchè una serie avente l'ordine $> 2p-2$ è non speciale.

Teorema di riduzione (Noether). Se g_n^r è una serie speciale completa e P è un punto che non si trovi su tutte le φ_{m-3} passanti per un gruppo G della serie data, la serie completa individuata dal gruppo $G+P$ ha il punto fisso P.

Conducasi infatti per P una retta arbitraria a e dicasi A il gruppo formato dalle $m-1$ ulteriori intersezioni di $\underline{a}$ con f, ed H un resto dei gruppi di g_n^r rispetto alle aggiunte d'ordine $m-3$. Per ipotesi è possibile considerare un'aggiunta φ_{m-3} passante per $G+H$ e non per P. Questa φ_{m-3} insieme ad $\underline{a}$ dà un'aggiunta d'ordine $m-2$ passante per $P+G+H+A$, cioè la serie completa $|G+P|$ si potrà segare col sistema di tutte le aggiunte d'ordine $m-2$ passanti pel gruppo $H+A$. D'altronde queste φ_{m-2} segano $\underline{a}$ negli $m-1$ punti A e quindi contengono come parte la retta stessa: dal che segue che il punto P è fisso per la serie $|G+P|$.

<u>Osservazione</u>. L'ipotesi del teorema di riduzione si verifica sempre quando P è generico.

Chiameremo <u>indice di specialità</u> $\underline{i}$ di una serie lineare appartenente alla curva f, il numero delle φ_{m-3} linearmente indipendenti passanti per un gruppo G della serie, o, in altri termini, il numero dei gruppi canonici linearmente indipendenti che contengono G (cosicchè la serie residua della data rispetto alla serie canonica avrà la dimensione $i-1$). Le serie non speciali si ottengono per $i=0$. Sussiste il seguente

<u>Teorema di Riemann-Roch. Una serie lineare completa d'ordine n e d'indice di specialità i, sopra una curva di genere p, ha la dimensione</u>

$$r = n-p+i.$$

Dimostriamo anzitutto il teorema per $i=0$ (serie non speciali). Ricordando che per una serie completa qualunque è sempre $r \geq n-p$ (n°44), basterà dimostrare che, se $r>n-p$ la serie g_n^r è certo speciale; cioè che per un suo gruppo passa qualche φ_{m-3}. Se $r=0$, e quindi $n = p-1$, la cosa è evidente, perchè, essendo almeno $p-1$ la dimensione della serie canonica, si posson certo assegnare ad arbitrio n punti di un gruppo canonico. Si può dunque procedere per induzione, supponendo dimostrato il teorema per le g_{n-1}^{r-1} aventi $r-1 > n-1-p$ e dimostrandolo per le g_n^r. Si consideri infatti la serie g_{n-1}^{r-1} residua della data g_n^r rispetto ad un punto P, che non sia fisso per g_n^r. Essendo per ipotesi $r > n-p$, sarà pure $r-1 > n-1-p$ e quindi la g_{n-1}^{r-1} sarà speciale e tutte le φ_{m-3} passanti per un gruppo di g_{n-1}^{r-1} dovranno contenere anche P (cioè un gruppo di g_n^r), perchè in caso diverso, pel teorema di riduzione, la serie g_n^r avrebbe il punto fisso P. Dunque un gruppo di g_n^r è contenuto in qualche φ_{m-3}, cioè g_n^r è speciale.

Suppongasi ora $i > 0$ (serie speciali). Essendo $i-1$ la dimensione della serie residua di un gruppo G della g_n^r data rispetto alla serie canonica, per $i-1$, ma non per i, punti generici di f passa una φ_{m-3} contenente G. Se $i = 1$ segue che la serie completa $|G+P|$, ove P è un punto generico di f, è non speciale, e poichè, in forza del teorema di riduzione, ha il punto fisso P, la sua dimensione $(n+1-p)$ uguaglierà la dimensione di $|G| = g_n^r$, cioè si avrà $r = n-p+1$. Suppongasi pertanto dimostrato il teorema per le serie d'indice di specialità $i-1$, e stabiliamolo per quelle d'indice di specialità i.

Se P è un punto generico di f, e G un gruppo della g_n^r d'indice di specialità i, la serie $|G+P|$ ha l'indice di specialità $i-1$ sicchè la sua dimensione è espressa da $(n+1)-p+(i-1)$. D'altra parte, pel teorema di riduzione, P è fisso per la serie stessa: dunque la dimensione di $g_n^r = |G|$ sarà eguale alla dimensione di $|G+P|$, cioè

$$r=(n+1)-p+(i-1) = n-p+i \;, \qquad \text{c.d.d.}$$

A Riemann è dovuta la diseguaglianza $r \geq n-p$, nonchè la relazione $r=n-p$ per le serie non speciali complete. Il metodo di Riemann (poggiato sull'uso degl'integrali abeliani appartenenti alla curva f) si prestava bene anche a calcolare la dimensione delle serie speciali $(i>0)$. È ciò che fece il Roch (Giornale di Crelle, t. 64), ed è perciò che il teorema sopra stabilito fu chiamato di Riemann-Roch. - La dimostrazione esposta è dovuta a Noether.

Una prima conseguenza del teorema di Riemann-Roch è che la serie canonica ha la dimensione $p-1$, giacchè per essa $n=2p-2$, $i=1$. Dunque la serie canonica è una g_{2p-2}^{p-1}.

È facile dimostrare che la serie canonica è l'unica g_{2p-2}^{p-1} esistente sulla curva. Infatti una g_{2p-2}^{p-1}, avendo la dimensione maggiore della differenza tra il suo ordine e il genere della curva f, è certamente speciale e quindi è contenuta (totalmente), anzi coincide colla serie canonica. Di più si vede che la serie canonica è priva di punti fissi. Invero se la serie canonica avesse un punto fisso P, astraendone si otterrebbe una g_{2p-3}^{p-1}, e aggregando ai punti di questa un punto Q diverso da P, si otterrebbe una g_{2p-2}^{p-1} diversa dalla serie canonica.

Si osserverà pure che, dalle cose precedenti, si desu ne una nuova dimostrazione dell'invarianza del genere rispetto alle trasformazioni birazionali della curva. Infatti il genere p apparisce come il limite inferiore (raggiunto per le serie non speciali) della differenza tra l'ordine n e la dimensione r delle g_n^r appartenenti alla curva; e una tal definizione del genere è evidentemente invariantiva.

E una volta stabilita l'invarianza del genere, dal momento che la serie canonica è l'unica g_{2p-2}^{p-1}, ne segue ch'essa è invariante rispetto alle trasformazioni birazionali della curva (cfr. colla fine del n° 44).

Ancora qualche altra osservazione. a) La relazione di Riemann-Roch $r = n-p+i$, ovvero $i = p-(n-r)$, od anche $i-1 = p-1-(n-r)$, si può interpretare dicendo che un gruppo di una g_n^r completa presenta precisamente $n-r$ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerlo. - Naturalmente questo risultato è espressivo soltanto quando la serie è speciale ($n-r<p$).

b) Tenendo presente il teorema di Riemann-Roch la disuguaglianza (1) del n° 44 si trasforma in un'uguaglianza, e la (2) dà un'uguaglianza fino ad $l=m-3$. Ciò si può enunciare dicendo che i punti multipli della curva f d'ordine m presentano condizioni indipendenti alle aggiunte d'ordine $l \geq m-3$; mentre prima si sapeva soltanto che questo fatto si verificava per l abbastanza grande.

c) Si può domandare come vien segata la serie canonica - e per conseguenza le serie speciali - quando la curva è dotata di singolarità qualunque. Il gruppo jacobiano della g_n^1 segata su f da un fascio

generico di rette, viene ancora staccato dalla prima polare del centro O del fascio, ma non bisogna ritenere che il gruppo jacobiano stesso sia costituito soltanto dai punti di contatto delle tangenti mandate da O, perchè debbono riguardarsi come punti multipli della g_m' tutte le origini degli eventuali rami superlineari di f (il punto origine d'un ramo d'ordine ν è un elemento $(\nu-1)$-plo del gruppo jacobiano - n° 37).
Quando f è dotata di rami superlineari si dimostra che il numero delle intersezioni di f colle prime polari di un punto generico, assorbite dai punti multipli di f, è eguale a

$$\sum s(s-1)+\sum(\nu-1),$$

il primo sommatorio essendo esteso a tutti i punti multipli distinti o infinitamente vicini di f, ed il secondo a tutti i punti origini di rami superlineari (d'ordine ν).
Ne deriva che il gruppo jacobiano della g_m' si ottiene astraendo non da tutte le intersezioni assorbite dai punti multipli di f, ma soltanto da $\sum s(s-1)$ di queste intersezioni. E per conseguenza sta ancora che ogni gruppo canonico è segato su f, fuori delle $\sum s(s-1)$ intersezioni assorbite dai punti multipli di f, da una curva aggiunta d'ordine $m-3$.
Il genere risulta dunque espresso da

$$p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-\sum\frac{s(s-1)}{2},$$

essendo il sommatorio esteso a tutti i punti multipli di f, distinti o infinitamente vicini.

46. Serie canonica composta. Curve ellittiche ed iperellittiche. Teorema di Clifford.

La serie canonica di una curva f può esser composta con un'involuzione γ_μ^1 (pag 94)? Può cioè accadere che tutti i gruppi canonici passanti per un punto generico di f passino di conseguenza per altri $\mu - 1$ punti (variabili col primo)?

Vediamo in generale cosa può dirsi quando una g_n^r è composta con una γ_μ^1. Rappresentando i gruppi di γ_μ^1 coi punti di una curva algebrica Γ, alla g_n^r viene a corrispondere su Γ una $g_{\frac{n}{\mu}}^r$ (pag 100) e quindi sarà $\frac{n}{\mu} \geq r$, il segno = valendo soltanto quando la curva Γ è razionale (pag 125), cioè quando la γ_μ^1 è una g_μ^1 lineare (n° 22).

Sia ora $n = 2r$, come accade in particolare per la serie canonica. Essendo $\frac{n}{\mu} \geq r = \frac{n}{2}$, risulterà $\mu = 1$ o 2, e, se $\mu = 2$, verrà $\frac{n}{\mu} = r$, cioè la γ_2^1 sarà una g_2^1. Dunque: <u>Sopra una curva f una g_{2r}^r qualunque (in particolare la serie canonica) può esser composta soltanto con una serie lineare g_2^1.</u>

Viceversa, se sopra una curva f (di genere $p > 1$), esiste una g_2^1, questa è certo speciale ($r > n - p$) e quindi i suoi gruppi presentano $2 - 1 = 1$ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerli (n° 45, Oss a)), cioè tutti i gruppi canonici per un punto generico di f passano di conseguenza pel punto coniugato di quello nella g_2^1. Ne segue che <u>la condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie canonica d'una curva f di genere $p > 1$ sia composta, è che la f contenga una g_2^1.</u>

Se $p>1$ e la curva f possiede una g_2^1, poichè evidentemente la g_{2p-2}^{p-1} canonica non può esser composta con due diverse g_2^1, la g_2^1 esistente su f sarà unica, cioè:
Una curva f contenente più d'una g_2^1 ha necessariamente il genere $p=0$ oppure $p=1$.
Effettivamente quando $p=0$, cioè quando la curva è razionale, vi sono ∞^2 g_2^1: tutte le g_2^1 contenute nella g_2^2 formata dalle coppie di punti della curva.
Quando $p=1$ vi sono ∞^1 g_2^1. Infatti sopra una curva f di genere 1 ogni serie lineare g_n^r $(n>0)$, è non speciale $(n>2p-2=0)$, e quindi in particolare una coppia di punti di f individua una g_2^1 completa.
Fissando un punto A di f e facendo variare il punto B, la serie variabile $|A+B|$ viene evidentemente a coincidere con ogni g_2^1 di f. Dunque le g_2^1 corrispondono biunivocamente alle posizioni di B.
Una curva di genere 1 si chiama ellittica; una curva di genere >1 contenente una g_2^1 si chiama iperellittica. Le curve di genere 2 son sempre iperellittiche perchè la loro serie canonica è una g_2^1.
Si può dunque dire che: Eccepito il caso delle curve iperellittiche, la serie canonica è una serie semplice.

Dimostriamo ora il seguente
Teorema di Clifford. Se g_n^r è una serie speciale ha luogo la disuguaglianza $n\geq 2r$. Sia H un resto della serie completa g_n^r rispetto alla serie canonica: ai gruppi canonici passanti per H un gruppo della g_n^r presenta precisamente r condizioni; mentre invece (n° 45 oss a)) esso presenta $n-r$ con=

dizioni ad un gruppo canonico qualunque. D'altra parte è chiaro che il numero delle condizioni presuntate da un gruppo di g_n^r ai gruppi della serie canonica, può soltanto decrescere quando si considerino i gruppi di una serie subordinata, e ciò pel fatto che rispetto alla serie meno ampia non sieno più indipendenti le condizioni che lo erano rispetto all'intera serie canonica. Ne segue $n-r \geq r$, cioè $n \geq 2r$.

<u>Osservazione</u>. È chiaro che il teorema vale anche se la serie g_n^r è parziale ma <u>il segno = può valere soltanto se la g_n^r è completa</u>. Infatti se la g_n^r è contenuta in $g_n^{r'}$ $(r'>r)$, sarà $n \geq 2r' > 2r$. Vedremo più tardi con <u>maggior precisione</u> quand'è che vale il segno =.

47. <u>La curva canonica</u>.

Poichè sopra una curva f non iperellittica $(p>1)$, la serie canonica è una g_{2p-2}^{p-1} semplice e priva di punti fissi (n.i 45, 46), si potrà sempre costruire in un iperspazio a $p-1$ dimensioni una curva C birazionalmente identica ad f, sulla quale la serie canonica venga segata dagl'iperpiani (pag. 99.). La C sarà dunque una curva d'ordine $2p-2$. - Viceversa è chiaro che una curva C di genere p e d'ordine $2p-2$ appartenente ad un S_{p-1} ha per serie delle sezioni iperpiane la serie canonica. Perciò si dirà che la C è una <u>curva canonica</u>.

Fissato lo spazio S_{p-1}, ove si vuol costruire la C, rimane arbitraria la scelta di una projettività tra i gruppi della serie canonica e gl'iperpiani di S_{p-1} (pag 99), sicchè si possono ottenere nello S_{p-1} infinite curve analoghe a C. Ma è facile vedere che due qualunque di queste curve sono omografiche cioè che tra due curve canoniche (dello stesso genere) una corrispondenza birazionale è certo omografica. Infatti poichè la serie canonica è invariante per trasformazioni birazionali, la corrispondenza tra le due curve dovrà esser tale da mutare la serie delle sezioni iperpiane dell'una nella serie analoga dell'altra, cioè sarà un'omografia (ved. la fine della pag. 120).

Fissato dunque lo S_{p-1} in cui si vuol costruire una curva canonica C identica ad f, la C risulta determinata a meno d'un'omografia dello spazio; e perciò spesso invece di parlare di una curva canonica, si parlerà della curva canonica birazionalmente identica ad f.

La curva canonica è normale (pag 123), cioè non è projezione di una dello stesso ordine appartenente ad S_p.

48. Vediamo come son rappresentati i gruppi speciali sulla curva canonica C. Se G_n è un gruppo di n punti di C che individui una serie speciale g_n^r, ai gruppi canonici, cioè agl'iperpiani di S_{p-1}, G_n presenterà precisamente $n-r$ condizioni (n^o 45), cioè per G_n passerà un sistema lineare $\infty^{p-1-n+r}$ d'iperpiani, o in altri termini G_n apparterrà allo spazio S_{n-r-1} comune a quegl'iperpiani. Vice=

versa, se G_n appartiene ad un tale spazio, l'indice di specialità del gruppo è eguale a $p-n+r$ e quindi la serie individuata da G_n ha la dimensione r. Dunque i gruppi d'una serie speciale completa g_n^r sono segnati su C da spazî S_{n-r-1}.

49. Possiamo ora stabilire facilmente quand'è che nella relazione data dal teorema di Clifford (n° 46) vale il segno $=$. Se per una g_n^r speciale esistente su C è $n=2r$ (il che porta la completezza della serie), tutti gl'iperpiani passanti per $r=n-r$ punti generici di C debbono contenere di conseguenza gli r punti completanti il gruppo di g_n^r, individuato da quegli r punti generici.

Cioè lo spazio S_{r-1} determinato da r punti generici, deve incontrare la C in altri r punti. Ora ciò è assurdo per $r<p-1$ (*): d'altra parte r — dimensione d'una serie speciale — non può superare $p-1$, dunque sarà $r=p-1$, $n=2p-2$, cioè si tratterà della serie canonica. Quindi:

Per una serie speciale non canonica g_n^r sopra una curva non iperellittica, è sempre $n>2r$.

(*) Qui si fa uso di una proposizione di cui profittammo già implicitamente alle pag 110, 113, cioè che: Un S_{i-1} determinato da i punti generici di una curva C dello S_r non incontra ulteriormente la curva. Supponendo dimostrata la cosa per $i<k$ (e per r qualunque) la si prova subito per $i=k$ considerando la projezione di C da un suo punto generico sopra un iperpiano. Sicchè basterà dimostrare la proprietà per $i=2$: cioè

l'ipotesi che la curva non sia iperellittica, interviene allorquando si costruisce la curva canonica C. Effetti=vamente sopra una curva iperellittica per ogni se=rie speciale completa – priva di punti fissi – g_n^r, ha luogo la relazione $n = 2r$. Infatti la g_n^r avrà ogni suo gruppo composto da $\frac{n}{2}$ gruppi della g_2^1 esi=stente sulla curva iperellittica f, (n° 46), sicchè sul=la curva razionale T, immagine della g_2^1 alla g_n^r dovrà corrispondere una $g_{\frac{n}{2}}^r$ completa, e quindi sarà $r = \frac{n}{2}$.

Una conseguenza notevole del teorema di Clifford, com=pletato nel modo ora visto, è la seguente:

La curva canonica è priva di punti multipli.

Infatti se un punto P della curva canonica C dello S_{p-1}, è s-plo per la curva, la serie completa segata ulterior=mente su C dagl'iperpiani per P, sarà una g_{2p-2-s}^{p-2} speciale non canonica e quindi pel teorema sopra stabilito, dovrà risultare $2p-2-s > 2(p-2)$, cioè $s < 2$, ossia $s = 1$.

50 Trasformazione birazionale di una curva algebrica in una priva di punti multipli appartenente ad un iperspazio, od in una curva piana con soli nodi.

Quando la curva piana non è iperellittica ($p > 1$), si provare che non ogni corda di C può esser trisecante ($r > 2$). Infatti, se AB è una corda generica di C e P un punto ov'essa si appoggi altrove a C, da P la C sarebbe projettata doppiamente (almeno) (perchè ogni corda di C sarebbe almeno trisecante); e poichè AB non potrebbe essere generatrice multipla del cono pro=jettante, le tangenti alla curva in A, B giacendo sul piano tan=

ottiene una sua trasformata birazionale priva di punti multipli, considerando la corrispondente curva canonica; ma in ogni caso una trasformazione, valida anche per le curve iperellittiche, si ottiene in virtù del teorema seguente:

Sopra una curva algebrica qualunque f di genere p, una g_n^r completa — non speciale — d'ordine $n > 2p$ è semplice; e mediante essa la f può trasformarsi birazionalmente in una curva C normale d'ordine n dello S_r, priva di punti multipli.

Ricordiamo (ved. il principio del n° 46) che quando una g_n^r è composta con un'involuzione γ_μ, si ha $n \geq r\mu$. Se la g_n^r è completa non speciale risulta $r = n-p$, e quindi $n \geq (n-p)\mu$, da cui, essendo $\mu \geq 2$ segue che $n \geq 2(n-p)$, ossia $2p \geq n$. Ne deriva che quando $n > 2p$ la serie è certamente semplice. Proviamo inoltre ch'essa è priva di punti fissi. Supponga si che la g_n^r abbia i punti fissi. Essendo $n > 2p$, cioè $n < 2(n-p)$ ovvero $n < 2r$, risulterà a fortiori $n-i < 2r$, e quindi, pel teorema di Clifford, la g_{n-i}^r completa ottenuta astraendo dai punti fissi, sarà non speciale. Ciò porta $n-i-p = r$, e quindi $i = 0$.

Si potrà dunque trasformare birazionalmente f in una curva C d'ordine n dello S_r, su cui la g_n^r corrispondente alla data sia segata dagl'iperpiani (pag 99). Ci resta da dimostrare che una

gente al cono lungo AB si taglierebbero. Dunque due generiche tangenti si incontrerebbero. Le tangenti di C non potendo passar tutte per un punto giacerebbero in un piano, cioè la C sarebbe piana mentre si è supposto $r > 2$ (ragionamento di Castelnuovo) curva normale C di genere p, dello S_r, avente l'ordine $n > 2p$, è priva di punti multipli.

Suppongasi infatti che P sia un punto s-plo di C, ($s \geq 2$), di guisa tale che gl'iperpiani per P seghino altrove su C una g_{n-s}^{r-1} completa. Essendo $n > 2p$ è anche come abbiamo visto $n < 2r$, e sarà perciò a più forte o a ugual ragione $n - s < 2(r-1)$, e quindi, pel teorema di Clifford, la g_{n-s}^{r-1} risulterà non speciale. Ne deriva che $r - 1 = n - s - p$: d'altra parte $r = n - p$, dunque $s = 1$. L'ipotesi che C abbia un punto almeno doppio è pertanto assurda.

Proiettando C da un S_i che non incontri la varietà a tre dimensioni formata dalle corde di C ($i \leq r - 4$), sopra uno spazio S_{r-i-1}, si ottiene una curva (non normale) ancora priva di punti multipli e birazionalmente identica alla data. In particolare per $i = r - 4$ si viene a trasformare birazionalmente la curva data in una curva sghemba priva di punti multipli.

Sia Γ questa curva sghemba priva di punti multipli. Assumendo nello spazio S_3 un punto O esterno alla sviluppabile delle tangenti della curva e alla rigata delle sue trisecanti (ved. la nota (*) a piè della pag 171), da O escirà soltanto un numero finito h di corde di Γ appoggiate alla curva in due punti distinti, cosicchè la projezione di Γ da O sopra un piano generico avrà h nodi e nessun altro punto multiplo.

In tal modo dunque si viene a trasformare birazionalmente la curva data in una curva piana dotata soltanto di nodi. (*)

Sia f una curva piana di genere p dotata di singolarità qualunque. Si può evidentemente considerare un sistema lineare di aggiunte d'ordine l così elevato, ch'esso seghi su f, fuori dei punti multipli una g_n^r non speciale con $n > 2p$, e contenente parzialmente la serie delle sezioni di f colle rette del piano. Si può di più separare entro al sistema di tutte le aggiunte d'ordine l, un tal sistema Σ, di dimensione r, che non contenga nessuna curva spezzata in f e in una parte residua, di modo che ogni gruppo di g_n^r sarà segato da una sola curva di Σ. Sia

$$\lambda_0 \varphi_0(x_0 x_1 x_2) + \cdots\cdots + \lambda_r \varphi_r(x_0 x_1 x_2) = 0$$

l'equazione di Σ. La curva C rappresentata parametricamente dalle formole

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0 x_1 x_2) \quad (i = 0, \dots, r),$$

$$f(x_0 x_1 x_2) = 0,$$

ove $(y_0, y_1, \dots, y_r)$ son le coordinate omogenee di un punto variabile in uno spazio S_r contenente il piano π di f, è, per quanto precede, birazionalmente identica ad f e priva di punti multipli. Dico di più che la f si può considerare come projezione di C.

(*) Tale risultato, contenuto implicitamente nelle proprietà delle serie lineari esposte da Brill e Noether trovasi sotto forma più esplicita in Veronese (Math Annalen, t. 19, 1881; t. 30, 1887) Una dimostrazione del teorema mediante trasformazione nel piano di una curva dotata di singolarità ordinarie fu data da Bertini (Rivista di Mat. 1894, e Math Annalen, t. 44)

Si fissi una curva aggiunta d'ordine $l-1$, $\varphi(x_0 x_1 x_2)=0$, non contenente come parte f. Allora si potrà assumere

$$\varphi_0 = \varphi x_0, \quad \varphi_1 = \varphi x_1, \quad \varphi_2 = \varphi x_2,$$

e inoltre si potranno scegliere come punti fondamentali $(y_0=1, y_1=y_2=\dots=y_r=0)(y_1=1, y_0=y_2=\dots=y_r=0)(y_2=1, y_0=y_1=y_3=\dots=y_r=0)$ delle coordinate in S_r, i punti $(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)$ del piano π. La C vien rappresentata dalle formole

$$\rho y_0 = \varphi x_0, \quad \rho y_1 = \varphi x_1, \quad \rho y_2 = \varphi x_2,$$

$$\rho y_i = \varphi_i \qquad (i=3,\dots,r),$$

$$f(x_0 x_1 x_2) = 0,$$

cioè le coordinate y_0, y_1, y_2 di un punto variabile su C son proporzionali alle $x_0\, x_1\, x_2$ di un punto variabile su f, e quindi soddisfano all'equazione $f(y_0\, y_1\, y_2)=0$. Ne deriva che projettando la C dallo spazio S_{r-3} $(y_0=y_1=y_2=0)$, sopra il piano $(y_3=y_4=\dots=y_r=0)$, cioè sopra π, si ha come projezione la curva f. Concludendo, si perviene al teorema:

<u>Una curva algebrica piana dotata di singolarità qualunque può sempre considerarsi come projezione di una curva algebrica iperspaziale priva di punti multipli.</u>

Ogni singolarità d'una curva piana è dunque generabile mediante projezioni.

51 <u>Il genere di una curva secondo Weierstrass. — Il teorema delle lacune</u> (Lückensatz)

Dal teorema di Riemann-Roch segue che un gruppo di p punti generici di una curva f di genere p, individua una g_p^0 completa, perchè l'indice di spe=

cialità del gruppo è $i = 0$ (essendo $p-1$ la dimensione della serie canonica). Mentre invece un gruppo di $p+1$ punti generici individua una g^1_{p+1} completa (non speciale) priva di punti fissi, cioè appartiene come gruppo di livello costante di una determinata funzione razionale del punto corrente su f. Dunque sopra una curva di genere p, l'ordine minimo di una funzione razionale di cui si possa assegnare ad arbitrio un gruppo di livello, è uguale a $p+1$.

La considerazione di questo ordine minimo è il punto di partenza della teoria delle funzioni algebriche di una variabile indipendente secondo Weierstrass (x) il quale chiamava rango (Rang) dell'ente algebrico f, il numero stesso p, che Riemann aveva chiamato genere (Geschlecht). Alla considerazione degli ordini delle funzioni razionali esistenti sopra una curva algebrica f (serie lineari prive di punti fissi) è legato un altro teorema (pure dovuto a Weierstrass) e che, secondo la denominazione del grande analista, è noto sotto il nome di teorema delle lacune. Per stabilire questo teorema - anzi un teorema più generale - seguiremo un procedimento indicato da Noether. (xx)

Siano sulla nostra curva f n punti qualunque $P_1, P_2, \dots, P_n$ formanti un gruppo non speciale, e

(x) Weierstrass, Math. Werke (IV Bd. II Kap).

(xx) Journal für Math., Bd. 97.

designamo in modo generico con G_i un gruppo del tipo $(P_1, P_2, \dots P_i)$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Cominciamo a scegliere tra i dati tanti punti $P_1, P_2, \dots, P_{\mu+1}$, tali che la serie completa $|G_{\mu+1}|$ sia ∞^1 e priva di punti fissi. La serie $|G_i|$ $(i = 1, 2, \dots \mu)$ risulterà dunque ∞^0, e pel teorema di Riemann-Roch (pag. 165 oss. a), i punti $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ imporranno μ condizioni distinte ai gruppi canonici obbligati a contenerli; e questi gruppi conterranno tutti $P_{\mu+1}$. Suppongasi che i gruppi canonici passanti per $G_{\mu+1}$ contengano di conseguenza i punti $P_{\mu+2}, P_{\mu+3}, \dots P_{\mu_1-1}$ degli n dati, sicchè insomma il gruppo G_{μ_1-1} presenti μ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerlo. Allora la serie completa $|G_i|$ $(i = \mu+2, \mu+3, \dots, \mu_1-1)$ risulterà di dimensione $i-\mu$. Dico che tale serie non può avere punti fissi. Si esclude infatti che punti fissi della $|G_i|$ possano cadere nel gruppo G_μ, perchè altrimenti anche la $|G_{\mu+1}|$, che è contenuta in $|G_i|$ avrebbe punti fissi; si esclude che punti fissi possano cadere tra i punti $P_{\mu+1}, P_{\mu+2}, \dots, P_{\mu_1-1}$, perchè altrimenti, astraendone, si otterrebbe una serie di dimensione $i-\mu$ e d'ordine $< i$ ed i gruppi di una tal serie imporrebbero meno di μ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerli: il che è assurdo perchè tra questi gruppi ce n'è uno che contiene G_μ. Sia ora P_{μ_1} un nuovo punto scelto tra i dati. Esistendo dei gruppi canonici passanti pel gruppo G_{μ_1-1} e non pel punto P_{μ_1}, il teorema di riduzione ci pone in grado di affermare che la serie $|G_{\mu_1}|$ ha il punto fisso P_{μ_1}. Suppongasi che tutti i gruppi canonici pel gruppo G_{μ_1} - che impone $\mu+1$ condizioni distinte - passino di conseguenza pei punti $P_{\mu_1+1}, \dots, P_{\mu_2-1}$. Si prova allora come prima che la serie $|G_i|$ $(i=\mu_1+1, \dots, \mu_2-1)$ non può avere punti fissi; mentre indicando con P_{μ_2} un nuovo punto scelto tra i dati, la serie $|G_{\mu_2}|$ avrà il punto fisso P_{μ_2} (e il gruppo G_{μ_2} imporrà $\mu+2$ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerlo). Poichè la costruzione precedente ci dà successivamente i gruppi G_μ, G_{μ_1}, G_{μ_2} che impongono μ, $\mu+1$, $\mu+2$ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerli (e che individuano una serie con un punto fisso), proseguendo si verrà a diminuire di un'unità alla volta l'infinità dei gruppi canonici che passano pei gruppi G_{μ_3}, G_{μ_4}, ... analogamente costruiti, e si perverrà infine ad un gruppo G_{μ_ℓ} appartenente ad un sol gruppo canonico, sicchè $\mu+\ell$ (numero delle condizioni che G_{μ_ℓ} presenta ai gruppi canonici) risulterà eguale a $p-1$. S'indichino con $P_{\mu_\ell+1}, \dots P_{\mu_{\ell+1}-1}$ i nuovi punti tra gli n dati che appartengono al gruppo canonico passante per G_{μ_ℓ} e con $P_{\mu_{\ell+1}}, \dots, P_n$ i rimanenti. Allora la serie $|G_i|$ $(i=\mu_\ell+1, \dots, \mu_{\ell+1}-1)$ non avrà punti fissi, mentre la serie $|G_{\mu_{\ell+1}}|$ avrà il punto fisso $P_{\mu_{\ell+1}}$ e sarà non speciale. Ne deriva che sarà pure non speciale e priva di punti fissi la serie $|G_i|$ $(i = \mu_{\ell+1}+1, \ldots, n)$.

Concludendo si vede che i gruppi G_i, che determinano serie complete con punti fissi, son quelli corrispondenti ai seguenti p valori di i:

$$1, 2, \ldots, \mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell, \mu_{\ell+1}.$$

Ciò si può enunciare dicendo che tra le varie funzioni razionali di un punto variabile sulla curva f, di genere p, per le quali i gruppi dei poli coincidono coi varî gruppi G_i $(i=1,2,\ldots,n)$ mancano soltanto quelle corrispondenti a certi p valori di i.

Il Lückensatz di Weierstrass si ottiene supponendo che gli n punti dati coincidano, e si può enunciare così: Tra le funzioni razionali i cui i poli coincidono in un dato punto di f (formando un polo d'ordine i), mancano soltanto quelle che corrispondono a certi p valori di i.

È facile vedere che un punto P corrispondentemente al quale esista una funzione razionale d'ordine $i \leq p$ avente in P un polo i-plo è un punto di molteplicità p (almeno) per la serie canonica. Infatti esisterà allora una g_p^1, avente il punto p-plo P, e quindi tale punto p-plo imporrà $p-1$ condizioni ai gruppi canonici che lo devono contenere (o meno di $p-1$ condizioni qualora la g_p' non fosse completa); cioè P sarà p-plo (almeno) per qualche gruppo canonico.

Poichè i punti p-pli della serie canonica - detti punti di Weierstrass - sono in numero finito.(x) possiamo enunciare che in un punto generico della curva la successione degli ordini mancanti è costituita dai primi p interi della serie naturale: si ha una successione diversa soltanto nei punti di Weierstrass.

(x) Se la curva non è iperellittica e quindi si può assumere come modello la curva canonica di S_{p-1}, la cosa risulta dall'osservare che un iperpiano osculatore generico non può avere che un contatto $(p-1)$-punto colla curva. (È questa una proprietà differenziale che si dimostra agevolmente anche per curve non algebriche: così il punto generico di una curva piana non può essere un flesso, ecc.) Se la curva è iperellittica i punti di Weierstrass sono i punti doppi della g_2^1

Capitolo sesto.

Corrispondenze tra i punti di una o due curve algebriche. - Formola di Zeuthen - Principii di corrispondensa di Cayley-Brill e di Hurwitz

52. Trasformazione birazionale di una curva in sè.
Le curve razionali ammettono ∞^3 trasformazioni birazionali in sè: - cioè trasformazioni che scambiano tra loro i punti della curva -: sono le immagini delle ∞^3 corrispondenze projettive esistenti tra i punti di una retta. Le curve ellittiche ammettono pure infinite (∞^1) trasformazioni birazionali in sè: esse son date dalle g_2^1 esistenti sulle curve stesse (n° 46) e dai prodotti di queste g_2^1 a due a due. Orbene noi qui ci proponiamo di dimostrare che allorquando il genere p della curva è maggior d'uno, non può esistere che un numero finito di trasformazioni birazionali che mutano la curva in sè.
Sia infatti P un punto di Weierstrass della curva C di genere $p>1$ e sia m il minimo ordine delle funzioni razionali aventi i poli riuniti in P, cosicchè esisterà una g_m^1 completa (e quindi unica) priva di punti fissi avente il punto m-plo P. Poichè i pun-

ti multipli della g^1_m hanno molteplicità $i \le m$, ciascuno di essi conterà al più $m-1$ volte nel gruppo jacobiano della serie stessa (n° 37.). Se si osserva che $m \le p$, ne risulta

$$2(m+p-1) > 4(m-1),$$

e quindi il numero dei punti multipli *distinti* della g^1_m sarà > 4.

Ora se sulla C esiste una trasformazione birazionale ω, al punto P dovrà corrispondere mediante ω un punto di Weierstrass P' (eventualmente coincidente con P) e quindi la g^1_m relativa a P si muterà nella g^1_m dotata di proprietà perfettamente analoghe rispetto al punto P'. Ai gruppi della prima g^1_m dotati di punti multipli, dovranno corrispondere i gruppi analoghi della seconda g^1_m, cosicchè tra le due g^1_m avremo una corrispondenza birazionale, e quindi projettiva tale che a più di 4 elementi (gruppi) assegnati dell'una rispondono certi elementi assegnati dell'altra. Ne deriva che le corrispondenze projettive che le eventuali trasformazioni birazionali di C mutanti P in P', subordinano tra le due g^1_m suddette, sono necessariamente in numero finito.

Ma si può da ciò dedurre che sono pure in numero finito le corrispondenze birazionali di C mutanti P in P'? Ciò sarebbe vero qualora due corrispondenze distinte ω, τ dovessero subordinare tra le g^1_m corrispondenze ze projettive diverse; mentre invece due corrispondenze distinte ω, τ possono anche subordinare tra le g_m la stessa projettività, purchè la corrispondenza non identica $\omega\tau^{-1}$ muti in sè ciascun gruppo della g_m relativa a P (cioè subordini l'identità tra gli elementi di tale g_m). Risulterà dunque provato che le corrispondenze birazionali di C portanti P in P' sono in numero finito, quando si sarà dimostrato che *le trasformazioni birazionali che mutano in sè ogni gruppo di una g_m son necessariamente in numero finito*.

Siano infatti α, β due trasformazioni che mutino in sè ogni gruppo della g_m, facendo corrispondere al punto A di C il medesimo punto A'; dico che le due trasformazioni coincidono.

S'indichi con G il gruppo della g_m', cui, per ipotesi, appartengono A, A', e si faccia variare con continuità il punto A p. e fino alla posizione B. Il punto A' si muoverà pure con continuità sino alla posizione B', appartenente al gruppo di g_m individuato da B. Per ogni posizione di A nel cammino percorso, la trasformazione α (o la β) deve far corrispondere quel punto ben determinato del gruppo variabile G, che deriva per continuità dalla posizione iniziale di A'; sicchè ad ogni punto del cammino percorso da A la α e la β fanno corrispondere lo stesso punto del cammino percorso da A', cioè la corrispondenza $\alpha\beta^{-1}$ lascia fisso ogni punto del cammino percorso da A. Poichè il cammino percorso da A si può far finire ad un punto qualunque di C (stante la irriducibilità della curva) ne consegue che $\alpha \equiv \beta$.

Si conclude pertanto che vi possono essere al più $m-1$ trasformazioni non identiche distinte che mutano in sè ogni gruppo della g^1_m, e quindi che è finito (≥ 0) il numero delle trasformazioni della C in sè, che mutano P in P'. Tenendo conto infine che è pur finito il numero dei punti di Weierstrass della curva C, si arriva al teorema enunciato al principio di questo n°.

Il primo passo verso il teorema dimostrato, fu fatto da <u>Schwarz</u> il quale provò che una curva di genere $p>1$ non può ammettere un'infinità <u>continua</u> di trasformazioni birazionali (Journal für Math., t. 87, 1879). Che la stessa cosa valga anche per un'infinità <u>discontinua</u> (e quindi che su una curva di genere >1 sia soltanto possibile l'esistenza di un numero finito di trasformazioni birazionali) fu dimostrato da <u>Klein</u> in una lettera del 1882 a <u>Poincaré</u>. — La dimostrazione da noi esposta deriva dalla "Introduzione" di Segre (Annali di Matematica, t. 22., 1894 n° 88): soltanto qui si è evitata una possibile obiezione alla dimostrazione là sviluppata, stabilendo che i gruppi di una g_m^1 non possono restare invarianti che di fronte ad un numero finito di trasformazioni birazionali.

Si noti che dal teorema dimostrato segue il corollario che "ogni trasformazione birazionale sopra una curva di genere > 1 è ciclica" e più generalmente che "l'insieme di tutte le trasformazioni birazionali esistenti sopra una curva di genere > 1, forma un gruppo finito."

53. Noteremo ancora a proposito delle trasformazioni birazionali che mutano in sè una curva che sopra una curva di genere p una corrispondenza birazionale non identica ω non può avere più di $2p+2$ punti uniti. Infatti considerando sopra la curva una g_{p+1}^1 che non sia mutata in sè da ω, si può porre una corrispondenza algebrica tra gli elementi (gruppi) di questo ente razionale ∞^1, chiamando omologhi due gruppi allorquando contengono punti omologhi nella data trasformazione. Si ha in tal modo tra gli elementi stessi una corrispondenza non identica $(p+1, p+1)$

che fa così passare in ambo i sensi da ogni gruppo a $p+1$ gruppi omologhi - e quindi esistono $2p+2$ gruppi uniti per la corrispondenza.(x) Poichè ogni punto unito U ci dà un gruppo unito (quello che passa per U), ne segue che il numero dei punti uniti di ω è $\leq 2p+2$.

Il limite superiore $2p+2$ è raggiunto quando $p=0$ e quando $p=1$ (per le corrispondenze generate dalle g_2^1 dell'ente ellittico); quando $p>1$ si può sostituire il limite più basso $2p$, giacchè basta applicare il ragionamento precedente ad una g_p^1 (speciale) non mutata in sè dalla data corrispondenza. Quest'osservazione relativa al numero dei punti uniti di una corrispondenza birazionale tra i punti di una curva, è il punto di partenza della dimostrazione data da Hurwitz (Math. Annalen, Bd 41, 1892) del teorema stabilito al n° prec.

Hurwitz dimostra infatti che il numero dei punti di Weierstrass distinti sulla curva di genere p è $\geq 2p+2$ (xx) (il segno

(x) Qui si applica il principio di corrispondenza di Chasles, di cui diremo in seguito.

(xx) Limiti più alti pel numero dei punti di Weierstrass distinti sopra una curva non iperellittica sono stati dati da Segre (Rendiconti dei Lincei, 1899) e dalla sig.na Cipolla (Rend. dei Lincei, 1905)

= valendo solo nel caso iperellittico) e da ciò trae il teorema con un procedimento che noi svilupperemo nel caso iperellittico, profittando del fatto che in tal caso ci è noto il numero dei punti di Weierstrass distinti (i $2p+2$ punti doppî, della g_2^1).

Ogni corrispondenza birazionale tra i punti di una curva iperellittica C deve mutare in sè l'unica g_2^1 della curva e quindi deve scambiare in sè il gruppo dei $2p+2$ punti doppî della g_2^1. - Se pertanto sono ω, τ due trasformazioni che producano la stessa sostituzione tra i suddetti $2p+2$ punti, la trasformazione $\omega\tau^{-1}$ lascierà fissi i punti stessi, e quindi sarà identica. Ne segue che $\omega \equiv \tau$.

Il numero delle corrispondenze birazionali distinte esistenti sulla curva C non potrà quindi superare il numero delle permutazioni tra i $2p+2$ punti doppî della g_2^1.

54. <u>Moduli di un ente algebrico semplicemente infinito.</u>

Un'applicazione notevolissima della teoria delle trasformazioni birazionali di una curva algebrica in sè, consiste nella determinazione del numero dei <u>moduli</u> di una curva algebrica, di dato genere p, cioè del numero dei parametri arbitra=

rü da cui dipende una tal curva, in quanto non si considerino come distinte due curve riferibili birazionalmente. L'uguaglianza di questi parametri (moduli) di cui noi vogliamo il numero, deve esprimere in sostanza la condizione affinchè due curve (dello stesso genere) siano riferibili birazionalmente. Nel campo delle trasformazioni projettive, i moduli hanno per analoghi gl'invarianti (projettivi).

Il caso delle curve razionali ($p=0$) è subito esaurito: giacchè queste curve, essendo birazionalmente identiche ad una retta, non possono avere alcun modulo.

Caso ellittico e iperellittico. Nel caso delle curve ellittiche ($p=1$) vedremo che si ha un sol modulo. Dimostreremo anzi più in generale che una curva di genere $p \geq 1$ possedente una g_2^1 (e quindi iperellittica, per $p>1$) dipende da $2p-1$ moduli.

Si può infatti supporre, senza alcuna restrizione, che la curva in questione sia piana e che su essa la g_2^1 sia segata dalle rette parallele all'asse delle y, (bastando a tal uopo considerare sulla curva una g_n^2 semplice contenente parzialmente la g_2^1; ecc, ecc) sicchè insomma l'equazione della curva sia

$$(1) \qquad y^2 = f(x)$$

f essendo un polinomio di grado n. Si osserverà subito che se $x = a$ è una radice di molteplicità $2k + h$ $(h = 0, 1)$ pel polinomio $f(x) = 0$, la (1) si può trasformare birazionalmente nella curva

$$(2) \quad y^2 = \varphi(x) \qquad \left(\varphi(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^{2k}}\right).$$

Basta perciò operare colla trasformazione birazionale data dalle formule

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y(x-a)^k \end{cases}$$

Dopo aver eseguito una conveniente trasformazione birazionale il polinomio f si potrà dunque supporre dotato di sole radici semplici.

Introduciamo qui una locuzione che è assai utile e suggestiva. Allorquando sopra una curva si ha una involuzione (razionale o irrazionale) di grado μ e si indica con Γ una curva i cui punti rappresentano i gruppi della involuzione, si dice che <u>la curva C vien rappresentata sulla curva μ-pla Γ</u>, in quanto ogni punto di Γ viene a rappresentare μ punti di C. Il gruppo dei punti di Γ che rappresentano i gruppi della involuzione dotati di punti multipli (generalmente doppi) chiamasi il <u>gruppo di diramazione</u>.

Nel caso nostro si potrà dire che la (1) è rappresentata sulla retta doppia $x = 0$; ai punti di tal retta corrispondendo i gruppi della

g_2^1 segata (fuori del punto all'infinito dell'asse y) dalle rette y = cost. Il gruppo di diramazione è staccato sull'asse x dall'equazione $f(x)=0$. Avendo ridotto il polinomio f ad avere soltanto radici semplici, ogni punto corrispondente ad una radice di $f=0$ è un punto di diramazione effettivo: cioè non è un punto imagine di un gruppo della g_2^1 costituito da due punti accidentalmente coincidenti sopra lo speciale modello projettivo considerato, ma sibbene l'imagine di un gruppo costituito da due punti coincidenti sullo stesso ramo.

Infatti, se $x=a$ è una radice (semplice) del polinomio f, di grado n, il punto $(x=a, y=0)$ della curva (1), è semplice (e quindi origine di un sol ramo) perchè la retta $x=0$ sega la curva (1) - d'ordine n - in $n-1$ punti distinti dal punto considerato.

Questa considerazione ci assicura anzi che, scrivendo l'equazione (1), ove f sia un polinomio privo di radici multiple, la curva rappresentata dalla (1) sarà irriducibile, perchè se fosse spezzata in due parti (razionali), queste s'incontrerebbero nei punti $f(x)=0$ dell'asse x, e tali punti risulterebbero dunque doppi per la curva complessiva.

Un'ultima osservazione prima di procedere al computo dei moduli. Il grado n del polinomio f apparisce a prima vista eguale al numero dei punti doppi della g_2^1, cioè a $2p+2$, p essendo il genere della (1). Ma tale osservazione contraddice apparentemente al fatto che il polinomio f può scegliersi ad arbitrio, e quindi che può anche assumersi di grado dispari. Ciò dipende dalla circostanza che quando n è dispari anche il punto all'infinito dell'asse x risulta di diramazione. Sicchè insomma quando la curva è di genere p si ha $n=2p+2$ oppure $n=2p+1$. Che il punto all'infinito dell'asse x risulti di diramazione per $n=2p+1$, si vede chiaramente operando sulla (1) colla trasformazione birazionale (involutoria)

$$y=\frac{y'}{x'^{p+1}}\ ,\quad x=\frac{1}{x'}$$

Il computo dei moduli dell'ente iperellittico (o ellittico) di genere $p\,(\geq 1)$, ed anzi la determinazione effettiva di tali moduli, risulta subito da ciò che <u>due curve rappresentate sopra la medesima retta doppia x con gruppi di diramazione tra loro projettivi sono birazionalmente identiche.</u> Se si hanno infatti le due curve

$$y^2=f(x)\qquad ,\ Y^2=F(X)\ ,$$

ed esiste una projettività (non degenere)

$$x=\frac{aX+b}{cX+d}\ ,$$

trasformante il gruppo $f(x)=0$ nel gruppo $F(X)=0$, una qualunque delle due trasformazioni birazionali

$$y=\frac{Y}{(cX+d)^{p+1}}\ ,\quad x=\frac{aX+b}{cX+d}\ !$$

muta l'una curva nell'altra.

Si avranno dunque tante curve di genere p iperellitti=che e birazionalmente distinte, quanti sono sopra una retta i gruppi projettivamente distinti di $2p+2$ punti. Anzi, poichè la condizione affinchè due ta=li gruppi sien projettivi, si esprime scrivendo l'e=guaglianza dei birapporti formati da ciascun gruppo tenendo fissi 3 punti e combinando que=sti coi $2p-1$ rimanenti, tali birapporti potran=no assumersi come moduli.

Il caso ellittico è particolarmente notevole: Potendosi sempre considerare sopra una curva ellittica una g^2_3 semplice (determinata da 3 pun=ti generici della curva) la curva potrà trasfor=marsi birazionalmente in una cubica piana sen=za punti doppî ($p=1$.). Una g'_2 è segata su tale cubica dal fascio di rette che ha per centro un pun=to qualunque P della curva. Il gruppo jacobia=no della g'_2 è formato dai punti di contatto delle 4 tangenti mandate da P alla curva. — Orbene le considerazioni che precedono ci permettono di af=fermare che la quaterna di queste tangenti ri=mane projettiva a se stessa variando P sulla curva (teorema di Salmon): il birapporto di tale quaterna è l'unico modulo della curva.

<u>Caso generale</u>. Cerchiamo ora di contare quan=ti sono i moduli di una curva di genere p, non iperellittica. Prendiamo come imagine la curva canonica C dello S_{p-1} e projettiamola da $p-3$ ge=

nerici dei suoi punti sopra un piano: avremo così una curva (normale) di ordine $2p-2-(p-3)=p+1$ dotata di $\frac{p(p-1)}{2}-p=\frac{p(p-3)}{2}$ punti doppi (curva normale di Clebsch). Le curve piane siffatte che si possono ottenere come projezione della medesima C, sono evidentemente ∞^{p-3}. Dico che due curve generiche di questa famiglia ∞^{p-3} non possono essere projettive. Infatti se tra esse intercedesse una corrispondenza birazionale mutante i gruppi segati dalle rette in gruppi analoghi, sulla curva canonica C avremmo una corrispondenza birazionale - e quindi un'omografia mutante le sezioni iperpiane per $p-3$ punti generici di C, nelle sezioni iperpiane per altri $p-3$ punti generici. Su C si potrebbero pertanto assegnare ad arbitrio due gruppi di $p-3$ punti omologhi in una trasformazione birazionale della curva: il che non è conciliabile col fatto che su C esiste soltanto un numero finito di corrispondenze birazionali.

Si deduce anzi da ciò che, data una curva Γ della famiglia ∞^{p-3}, vi può esser soltanto un numero finito di curve analoghe projettive a quella; sicchè considerando le ∞^8 curve del piano projettive a Γ, al variare di Γ nella famiglia ∞^{p-3}, si otterrà una famiglia più ampia M di dimensione $p+5$, formata tutta da curve birazionalmente identiche a C.

Ora consideriamo la totalità I delle curve piane d'ordine $p+1$ dotate di $\frac{p(p-3)}{2}$ punti doppi: essa ha la dimensione $\frac{(p+1)(p+4)}{2} - \frac{p(p-3)}{2} = 4p+2$. Dico che entro T la famiglia M è la più ampia possibile tra le famiglie di curve che sono birazionalmente identiche a C.

Sia infatti D una curva di T birazionalmente identica a C. Poichè la serie segata su D dalle rette del piano può sempre considerarsi come residua di un gruppo di $p-3$ punti convenienti rispetto alla serie canonica, si potrà costruire nello spazio S_{p-1} una curva canonica C' che dia come projezione la D da uno spazio S_{p-4} $(p-3)$-secante di C'. Tra le curve C, C' birazionalmente identiche, intercederà un'omografia, la quale trasformerà lo spazio S_{p-4} sudd etto, in uno spazio S_{p-4} $(p-3)$ secante di C, e quindi le sezioni prodotte su C' dagl'iperpiani pel primo S_{p-4} nelle sezioni di C cogl'iperpiani pel secondo S_{p-4}. Projettando C da questo S_{p-4} sul solito piano, avremo una curva della famiglia M riferita alla D in tal guisa che alle sezioni rettilinee dell'una curva rispondono le sezioni rettilinee dell'altra. Le due curve saranno dunque projettive e quindi, per la definizione stessa della famiglia M, la D apparterrà a tale famiglia. Si arriva così alla conclusione che le curve della totalità T si distribuiscono in tante famiglie ∞^{p+5} di curve tra loro birazionalmente identiche. L'infinità di queste famiglie

sarà data da $4p+2-(p+5)=3p-3$. Tanti saranno dunque i moduli della curva C.
Si perviene così al teorema seguente:
Una curva algebrica di genere $p>1$ dipende da $3p-3$ moduli.

Osservazione. Un'obiezione potrebbe farsi al ragionamento precedente. In esso infatti giuoca in modo essenziale la circostanza che le curve projezioni della C da spazi S_{p-4} $(p-3)$-secanti, sono ∞^{p-3}. Ma a dir vero per calcolare questa infinità ci siamo limitati al caso in cui i $p-3$ punti determinanti il centro di projezione, fossero generici, cioè che appartenessero ad uno e non ad infiniti S_{p-4} $(p-3)$-secanti, o in altri termini che la curva projezione fosse normale. Si potrebbe quindi pensare che la varietà delle curve piane non normali projezioni di C da S_{p-4} $(p-3)$-secanti, risultasse più ampia della varietà delle curve normali, dato che a gruppi particolari di $p-3$ punti rispondano infinite curve (non normali). Ma tale dubbio sarà rimosso quando avremo provato che in generale (cioè per le curve di genere p a moduli generali) le g^2_{p+1} parziali sulla curva di genere p, formano una varietà meno ampia di quella delle g^2_{p+1} complete.

Proveremo perciò di più che sopra una curva di genere p a moduli generali le serie linearri g_n^r (speciali o non speciali; complete o parziali) sono $\infty^{(r+1)(n-r)-rp}$.

Cominciamo dal contare le g_n^r complete non speciali ($r=n-p$). Fissato un gruppo di r punti generici della curva, vi sarà un gruppo di una (generica) delle suddette g_n^r, passante per quegli r punti, e rimarrà ulteriormente, a completare il gruppo della g_n^r, un gruppo di p punti. Viceversa dato un gruppo generico di p punti, esso insieme agli r punti fissati individua una g_n^r completa non speciale. Sicchè insomma la varietà delle g_n^r può riferirsi mediante una corrispondenza biunivoca (birazionale) alla varietà dei gruppi di p punti della curva. Ne deriva che le g_n^r non speciali complete sono ∞^p. ($p = (r+1)(n-r)-rp$).

Contiamo le g_n^r non speciali ma parziali. Ognuna di queste è contenuta in una g_n^{n-p} completa, la quale contiene in tutto $\infty^{(r+1)(n-p-r)}$ g_n^r parziali (tante quanti gli S_r di S_{n-p}). Poichè vi sono ∞^p g_n^{n-p} complete e due qualunque di esse non hanno comune nessuna serie parziale, il numero delle g_n^r parziali sarà $\infty^{(r+1)(n-r)-rp}$.

Passiamo a contare le g_n^r speciali complete (e qui interverrà l'ipotesi che l'ente sia a moduli generali). Fissiamo come imagine dell'ente ∞^1 una curva piana f d'ordine m, e detto x un punto variabile sulla f, indichia=

mo con

$$\varphi_1(x)=0\,, \ldots\ldots \varphi_p(x)=0\,,$$

le equazioni delle p aggiunte indipendenti d'ordine $n-3$. Dato un gruppo $G_n \equiv (x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n)})$ su f, per esprimere ch'esso individua una g_n^r completa speciale occorre esprimere che le equazioni

$$h_1\varphi_1(x^{(i)}) + \ldots + h_p\varphi_p(x^{(i)}) = 0 \quad (i=1,\ldots,n)$$

riduconsi ad $n-r$ indipendenti, cioè che la matrice delle $\varphi(x^{(i)})$ ha la caratteristica $n-r$. Sappiamo che dopo aver preso dalla matrice un determinante (non nullo) d'ordine $n-r$ - e sia quello formato dalle prime $n-r$ orizzontali e verticali - per esprimere che son nulli tutti i determinanti d'ordine $n-r+1$, basta annullare i determinanti ottenuti da quello d'ordine $n-r$ orlandolo con una delle $p-n+r$ verticali e con una delle r orizzontali rimanenti. Si ottengono in tal modo $r(p-n+r)$ equazioni di condizione, le quali sono generalmente indipendenti (*). I gruppi speciali G_n individuanti g_n^r complete sono pertanto $\infty^{n-r(p-n+r)}$; e poichè ogni g_n^r ne contiene ∞^r così avremo $\infty^{(r+1)(n-r)-rp}$ g_n^r speciali complete.

Contiamo infine le g_n^r speciali parziali. Limitiamoci a contar quelle che hanno un determinato indice di specialità i. Esse son contenute

(*) Qui occorrerebbe approfondire ulteriormente!

in serie complete g_n^{n-p+i}, ciascuna delle quali contiene alla sua volta $\infty^{(r+1)(n-p+i-r)}$ serie parziali. Essendo $(n-p+i+1)(p-i)-p(n-p+i)$ l'infinità delle g_n^{n-p+i} speciali complete, sarà dunque:

$$(n-p+i+1)(p-i)-p(n-p+i)+(r+1)(n-p+i-r)=$$
$$=(r+1)(n-r)-rp-i(n-p+i-r)$$

l'infinità richiesta. Poichè $r<n-p+i$ (qualunque sia i), l'infinità stessa è $<(r+1)(n-r)-rp$, e quindi l'aggiunta delle g_n^r parziali non altera la dimensione della varietà delle g_n^r complete.

Il teorema sul numero dei moduli è dovuto a Riemann.

55. Corrispondenze algebriche tra due curve. Corrispondenze a valenza.

Sieno C, C' due curve algebriche e suppongasi che il punto x variabile sulla curva C sia funzione algebrica ad α valori del punto x' variabile sulla curva C'. Con ciò s'intende dire che le coordinate del punto x sono legate alle coordinate del punto x' da un certo sistema di equazioni algebriche, tali che per assegnati valori delle coordinate di x', queste equazioni determinano α diversi gruppi di valori delle coordinate di x. Allora dato x, a meno che il sistema delle equazioni che vengono a legare le coordinate di x', non sia identicamente soddisfatto per ogni posizione di x' su C', nel qual caso tra C, C' si ha una corrispondenza degenere le equazioni stesse verranno a staccare su C' un gruppo di un certo numero α' di punti x'; cioè x' risulterà funzione algebrica, ad α' valori, del punto x variabile su C.

Si dice in tal caso che tra C, C' si ha una <u>corrispondenza</u> <u>algebrica</u> (α, α'), α ed α' essendo gl'<u>indici</u> della corrispondenza.

È ben chiaro che se tra C, C' si pone una corrispondenza mediante un certo complesso di operazioni geometriche facenti passare dai punti dell'una curva ai punti dell'altra, e se ciascuna di tali operazioni è traducibile in equazioni algebriche tra le coordinate, la corrispondenza risulta algebrica.

Così ad es. in un piano facendo corrispondere ad un punto generico x di una curva C i punti x' ove un'altra curva C' vien segata dalle tangenti in x alla C, si ha tra C, C' una corrispondenza algebrica (α, α'), α' essendo l'ordine di C' ed α la classe di C.

Un caso molto notevole che può presentarsi in una corrispondenza algebrica (α, α') tra due curve C, C', è quello in cui la serie ∞^1 dei gruppi di α' punti di C' corrispondenti ai singoli punti di C, è formata da gruppi equivalenti. In tal caso si dice che tra C, C' havvi una <u>corrispondenza a valenza zero</u>. Così ad esempio la corrispondenza sopra definita tra le curve piane C, C', è a valenza zero, in quanto i gruppi di punti di C'

rispondenti ai singoli punti di C, variano nella serie lineare segata su C dalle rette del piano. - Mentre invece avendosi tra due curve irrazionali C, C' una corrispondenza $(1, \alpha')$, tale corrispondenza non è a valenza zero.

Una proprietà assai importante delle corrispondenze a valenza zero è espressa dal teorema seguente:

<u>Avendosi tra due curve C, C' una corrispondenza (α, α') che sia a valenza zero in un senso (cioè che faccia corrispondere ai punti di C gruppi equivalenti su C'), essa è a valenza zero anche nel senso inverso (cioè fa corrispondere ai punti di C' gruppi equivalenti su C).</u>

Diciamo G' i gruppi equivalenti, di α' punti, che rispondono ai punti di C, e supponiamo dapprima che la serie ∞' dei G' e quindi la serie lineare $|G'|$, sia semplice, sicchè - dopo aver operato una conveniente trasformazione birazionale - essa possa imaginarsi segata addirittura dagl' iperpiani dello spazio S_r cui appartiene C'. Indichiamo con Σ' il sistema ∞' di iperpiani staccanti su C' i gruppi G' e diciamo ν il numero dei gruppi G' passanti per un punto generico di C', sicchè per un punto generico di C' passeranno ν iperpiani del sistema Σ'. Ne segue che per un punto generico dello spazio passano precisamente ν iperpiani del sistema Σ' (o, come si dice, che il sistema Σ' è di <u>classe</u> ν), perchè, se per un punto esterno a C' passassero più di ν iperpiani di Σ', la curva C' farebbe parte dell'inviluppo del sistema Σ' e quindi ogni iperpiano di questo sistema toccherebbe la C'; mentre per ipotesi gl'iperpiani di Σ' segano su C' i gruppi G' (*). Ciò si può esprimere dicendo che i gruppi di iperpiani di Σ' uscenti dai singoli punti di C', appartengono totalmente alla serie lineare g_ν^2 staccata sull'ente ∞^1 Σ' dai singoli punti dello spazio. Per rendersi chiaro conto di ciò, basta applicare la legge di dualità nello S_2, scambiando l'ufficio delle parole "punto" e "iperpiano". Allora l'ente Σ' viene ad essere una "curva" e i gruppi di ν iperpiani uscenti dai singoli punti dello spazio, vengono ad esser rappresentati dalle "sezioni iperpiane di questa curva". Insomma entro all'ente Σ' i gruppi di ν elementi uscenti dai punti di C', sono equivalenti.

Poniamo ora in relazione gli elementi del sistema Σ' coi punti di C. Ogni gruppo G' passante per un dato punto x' di C' - cioè ogni iperpiano di Σ' uscente da x' - vien rappresentato da un punto di C omologo di x' nella data corrispondenza: sicchè gli α punti x omologhi di x', si distribuiscono in ν gruppi di $\frac{\alpha}{\nu}$ punti tali che ad ogni punto di un tal gruppo di ordi=

(*) Cfr. colla pag. 118 ove abbiamo già usato di questa considerazione dovuta a Segre.

ne $\frac{\alpha}{\nu}$ risponderà un medesimo gruppo di α' punti su C': o, in altri termini, la serie ∞^1 formata dai gruppi H di α punti di C omologhi dei singoli punti di C', risulterà composta con un'involuzione $\gamma_{\frac{\alpha}{\nu}}$ birazionalmente identica a Σ'.

Il caso più semplice è che sia $\alpha = \nu$: allora il sistema Σ' risulta birazionalmente identico a C e quindi i gruppi H, che sono le imagini dei gruppi equivalenti del sistema Σ', risultano tra loro equivalenti; cioè la corrispondenza C, C' risulta a valenza zero anche nel passaggio da C' a C.

Alla stessa conclusione si arriva quando $\nu < \alpha$, perchè allora tra gli enti ∞^1 Σ', C si ha una corrispondenza $(1, \frac{\alpha}{\nu})$ la quale muta gruppi equivalenti di ν elementi del sistema Σ', in gruppi equivalenti di α punti della curva C (cfr. colla fine del n° 28).

Ci resta pertanto da considerare solamente l'ipotesi in cui la serie ∞^1 dei gruppi G' sia composta con un'involuzione $\gamma_{\frac{\alpha'}{\nu'}}$. Dicasi Γ una curva imagine di tale involuzione per modo che tra Γ, C' si abbia una corrispondenza $(1, \frac{\alpha'}{\nu'})$, mentre tra C, Γ si avrà una corrispondenza (α, ν'). Consideriamo la serie lineare che contiene i gruppi G'; ma non già la serie lineare più ampia, sibbene la più ampia tra quelle che son composte coll'involuzione $\gamma_{\frac{\alpha'}{\nu'}}$ (non è escluso che tale serie possa essa stessa esser completa).

ad essa risponderà su Γ una serie lineare (completa) g_ν, la quale conterrà totalmente i gruppi di ν punti di Γ rispondenti ai singoli punti di C. Sicchè tra C, Γ si avrà una corrispondenza a valenza zero nel passaggio da C a Γ. Dal momento che la serie ∞^1 dei gruppi di ν punti rispondenti ai punti di C, è semplice, in virtù del ragionamento precedente si potrà concludere che appartengono ad una medesima serie lineare i gruppi di α punti di C rispondenti ai singoli punti di Γ. Ma tali gruppi sono quelli stessi che rispondono ai singoli punti di C nel passaggio da C' a C, dunque il teorema risulta dimostrato anche in questo caso.

La considerazione di corrispondenze a valenza zero (e più in generale a valenza positiva) tra i punti di <u>una</u> curva è dovuta al <u>Brill</u>: di tali corrispondenze avremo campo di occuparci diffusamente più tardi. La considerazione delle corrispondenze a valenza zero tra i punti di due curve distinte (od anche tra i punti di una curva e di una varietà a più dimensioni) trovasi nelle mie Memorie, <u>Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica</u>.... (Acc. delle Scienze di Torino, (2), t. 54 delle Memorie, 1903; n° 14); <u>Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche</u> (Annali di Matematica, (3), t. 12, 1905: n° 2). Il ragionamento sopra esposto è tolto appunto da quest'ultima Memoria, ove trovasi anche l'applicazione di cui andiamo a parlare.

Un corollario notevole del teorema dimostrato è il seguente:

Sopra una curva algebrica C ogni serie razionale di gruppi di punti è contenuta totalmente in una serie lineare. (*)

Tale proposizione vale anche se la serie di cui si parla ha la dimensione $r>1$: in tal caso dicendo che la serie è "razionale" s'intende che i suoi "elementi" (gruppi) si possono rappresentare birazionalmente coi punti di uno spazio lineare S_r.

Sia $r=1$. Poichè la serie è razionale, i suoi gruppi potranno riferirsi ai punti di una retta T, e fra T, C nascerà una corrispondenza algebrica chiamandosi omologhi un punto P di T ed un punto Q di C, quando P rappresenta un gruppo passante per Q. Poichè sopra una retta i gruppi di un medesimo numero di punti sono equiva-

(*) Questa proprietà, racchiusa implicitamente nel teorema d'Abel (sotto forma inversa), è stata segnalata in modo esplicito da Enriques, che ne ha dato una dimostrazione geometrica avente alcuni punti di contatto con quella sviluppata pel teorema precedente. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. X, 1896).

lenti; la corrispondenza tra Γ, C sarà a valenza zero nel passaggio da C a Γ e quindi anche nel passaggio inverso: cioè i gruppi della nostra serie saranno tra loro equivalenti.

Se $r>1$, come lo spazio S_r può generarsi facendo variare una retta attorno ad un punto fisso, così la nostra serie potrà generarsi facendo variare una serie ∞^1 razionale avente un gruppo fisso; le posizioni assunte da tale serie variabile sono costituite da gruppi equivalenti (perchè hanno un gruppo comune), e quindi l'intera serie data risulta formata da gruppi equivalenti.

Un altro corollario notevole è il seguente (*):

<u>Se tra due curve C, C' si ha una corrispondenza algebrica d'indici qualunque, a gruppi equivalenti di punti dell'una curva rispondono gruppi equivalenti dell'altra.</u>

Supponiamo dapprima che fra C, C' abbiasi una corrispondenza $(1, \alpha')$. Si sa allora che ad una serie lineare di C risponde su C' una serie lineare (n. 28). Prendiamo invece su C' una serie lineare g_m e rappresentiamo con γ_m la serie algebrica che si ha su C come trasformata di g_m. Due gruppi qualunque Γ_1, Γ_2 di γ_m, i quali provengano da due gruppi G_1, G_2 di g_m, appartengono alla serie ∞^1 Σ formata dai

(*) <u>Severi</u>. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. 38, 1903, n° 4 della Nota.

gruppi corrispondenti a quelli della serie lineare g_m' che congiunge G_1, G_2. E poichè ad ogni gruppo di tale g_m' risponde un solo elemento (gruppo) della serie Σ, così questa serie, pel teorema di Lüroth, sarà razionale e quindi (cor. prec.) contenuta totalmente in una serie lineare. - Ne deriva che due qualunque gruppi di γ_m sono equivalenti tra loro.

Passiamo al caso generale d'una corrispondenza (α, α') d'indici qualunque. Si potrà allora considerare l'ente algebrico ∞^1 H costituito dalle coppie di punti omologhi nella corrispondenza data; sicchè tra C, H si avrà una corrispondenza $(1, \alpha')$ prendendo come omologhi di ogni punto di C gli elementi (coppie) di H di cui quel punto fa parte, ed una corrispondenza $(\alpha, 1)$ si avrà similmente tra gli elementi di H e i punti di C'. Volendo avere un'imagine concreta dell'ente H e delle corrispondenze che intercedono tra H e le curve C, C' si può supporre che queste curve siano immerse in uno spazio S_r: allora una curva imagine di H si ottiene segando con un iperpiano generico la rigata formata dalle rette che riuniscono i punti omologhi nella corrispondenza data fra C, C'.

Ciò posto consideriamo su C una serie lineare g_m: ad essa risponde su H, mediante la corrispondenza $(1, \alpha')$, una serie lineare $g_{m\alpha'}$, e a questa serie lineare di H in virtù di quanto precede risponde su C' mediante la corrispondenza $(\alpha, 1)$ tra H, C', una serie algebrica $\gamma_{m\alpha'}$ formata da gruppi equivalenti. Poichè la corrispondenza (α, α') tra C, C' si può generare come prodotto delle due corrispondenze $(1, \alpha')$ ed $(\alpha, 1)$; così la $\gamma_{m\alpha'}$ non è che la serie algebrica di C' rispondente alla serie lineare g_m di C, mediante la data corrispondenza.- Il teorema risulta pertanto dimostrato anche quando gli indici (α, α') sono entrambi maggiori di 1.

56. Formola numerativa di Zeuthen: sua interpretazione geometrica.

Consideriamo ora tra due curve C, C' una corrispondenza qualunque (α, α'): la formola di Zeuthen, di cui vogliamo occuparci, pone un legame fra i generi p, p' delle due curve, gl'indici della corrispondenza e i numeri γ, γ' che denotano rispettivamente quanti punti di diramazione della corrispondenza si trovano su C, C'. Per punto di diramazione sopra C, (o C') s'intende un punto tale che due (almeno) degli α' (o α) corrispondenti su C', (o C) coincidano.

Noi supporremo dapprima che la corrispondenza data presenti soltanto punti doppi, cioè che ad ogni punto di diramazione rispondano soltanto due punti coincidenti. Allora γ, γ' denoteranno rispettivamente il numero dei punti doppî esistenti su C', C.

Consideriamo in primo luogo il caso di $\alpha = 1$, α' qualunque. Una serie lineare g_n' - dotata di soli punti doppî - della curva C, trasformasi, mediante la corrispondenza, in una $g'_{\alpha' n}$ di C', e un punto doppio di tale $g'_{\alpha' n}$ o proviene da un punto doppio di g_n' o è un punto doppio per la involuzione $\gamma'_{\alpha'}$ i cui gruppi rispondono ai punti di C. Indicheremo con G un gruppo di g_n'; con J il gruppo jacobiano di g_n' (n° 34) con K un gruppo canonico di C, con D il gruppo dei punti di diramazione per la corrispondenza (tali punti, evidentemente, possono esistere soltanto su C), con G', J', K', D' i trasformati di G, J, K, D mediante la corrispondenza stessa, e infine con K^* un gruppo canonico di C'. In virtù della proprietà stabilita alla fine del n° 44, avremo:

$$J \equiv K + 2G \quad , \quad J' + D' \equiv K^* + 2G'.$$

Poichè ai gruppi di una serie lineare di C rispondono su C' gruppi di una serie lineare, sarà anche

$$J' \equiv K' + 2G',$$

che confrontata colle precedenti, porge

$$K^* \equiv K' + D'.$$

Dunque:

<u>Se fra due curve C, C' si ha una corrispondenza $(1, \alpha')$ un gruppo canonico di C' equivale al trasformato di un gruppo canonico di C, aumentato dei punti doppî per la corrispondenza.</u>

Vediamo ora, reciprocamente, in che relazione sta la trasformata della serie canonica di C', colla serie canonica di C.

La serie canonica di C' trasformandosi mediante la corrispondenza $(\alpha', 1)$ che si ha tra C', C, dà luogo su C ad una serie algebrica d'ordine $2p'-2$, contenuta totalmente in una serie lineare (ved l'ultima proposizione del n° prec.).

Per caratterizzare questa serie lineare possiamo osservare come si trasforma un particolare gruppo canonico di C', p. e uno formato da un gruppo K' insieme al gruppo D'. Poichè il gruppo K' è costituito da $2p-2$ gruppi dell'involuzione γ'_{α}, formanti un gruppo canonico della γ stessa, nel passaggio da C' a C esso si muta in un gruppo canonico di C, contato α' volte; alla sua volta il gruppo D' si muta nel gruppo di diramazione D. Dunque:

<u>Se tra due curve C', C si ha una corrispondenza $(\alpha', 1)$ il trasformato di un gruppo canonico di C' è equivalente al multiplo secondo α' di un gruppo canonico di C, aumentato del gruppo di diramazione per la corrispondenza.</u>

Per passare al caso generale di una corrispondenza cogl'indici arbitrari (α, α'), conviene considerare con <u>Segre</u>, l'ente algebrico ausiliario ∞' H costituito dalle coppie di punti omologhi nella data corrispondenza: si ha una corrispondenza $(1, \alpha')$ tra i punti di C e gli elementi di H ed una corrispondenza $(\alpha, 1)$ tra gli elementi di H e i punti di C'. - Applicando a queste due corrispondenze le due proposizioni sopra dimostrate, si ottiene immediatamente il teorema seguente:

<u>Allorquando tra due curve C, C' passa una corrispon-</u>

denza $(\alpha\alpha')$, il trasformato di un gruppo canonico di C aumentato dei punti doppî per la corrispondenza, esistenti sopra C', dà un gruppo equivalente al multiplo secondo α di un gruppo canonico di C', aumentato dei punti di diramazione per la corrispondenza esistenti sopra C'.

Interpretando numericamente il legame espresso da questa proposizione si ha la relazione

$$2\alpha'(p-1)+y = 2\alpha(p'-1)+y',$$

ossia:

$$y-y' = 2\alpha(p'-1)-2\alpha'(p-1)$$

che è la formola di Zeuthen.(*)

L'interpretazione geometrica della formola di Zeuthen nel caso di una corrispondenza $(1,\alpha')$ trovasi in Castelnuovo (Rendiconti dei Lincei, 1891, 1° semestre), il quale però giungeva al risultato con considerazioni diverse da quelle qui esposte. Dimostrazioni mediante gl'integrali abeliani - sempre nel caso $(1,\alpha')$ - trovansi in Painlevé (Annales de l'école normale supérieure, 1891, Journal de Math, 1894) e in Humbert (J. d. M. 1894). La trattazione generale secondo la via qui seguita è esposta in una mia Nota (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2), t. 36, 1903, p 495).

57. Una conseguenza della formola di Zeuthen è la seguente osservazione di Weber(**):

(*) Math. Annalen, Bd. 3, 1871; pag 150.

(**) Journ für Math., t. 76, 1873, pag 345.

tra due curve dello stesso genere $p>1$ una corrispondenza che sia razionale in un senso lo è anche nel senso opposto (cioè è birazionale).

Infatti se su una curva C di genere p si ha una involuzione γ_α^1 di genere π, dotata di y (≥ 0) punti doppi, ha luogo la relazione:

$$y = 2(p-1) - 2\alpha(\pi-1),$$

donde si trae

$$p-1 \geq \alpha(\pi-1)$$

e quindi, se $p>1$, $\alpha>1$, $\pi<p$.

58. Vediamo come debba modificarsi la formola di Zeuthen allorquando la corrispondenza (α,α') tra C, C' è dotata di punti più che doppi.

A tal uopo basta seguire il procedimento dimostrativo nel caso di una corrispondenza $(1,\alpha')$ tra C, C'. Conserviamo le notazioni introdotte, relativamente ad una tal corrispondenza, al principio del n° 56. Un punto ν-plo della involuzione γ_α^1, esistente su C' è pure un punto ν-plo per la serie $g_{\alpha n}^1$ e quindi (pag. 142) conta $\nu-1$ volte nel gruppo jacobiano di questa serie e precisamente nella parte di questo gruppo che designammo con D'. Ne deriva quindi che nella relazione finale $K^* \equiv K' + D'$ si deve intendere che il gruppo D' designi il complesso dei punti multipli della γ_α^1 ciascuno dei quali venga contato $\nu-1$ volte, se ν è il suo ordine di molteplicità. Si ha pertanto la formola

$$\Sigma(\nu-1) + 2\alpha'(p-1) = 2(p'-1)$$

ove il sommatorio è esteso ai punti multipli di $T_{\alpha'}$. Da questa, come al n° 56, si deduce la formola

$$\Sigma(\nu-1) - \Sigma(\nu'-1) = 2\alpha(p'-1) - 2\alpha'(p-1),$$

relativa al caso di una corrispondenza (α, α') tra C, C', i sommatori essendo estesi ai punti multipli della corrispondenza esistenti rispettivamente su C', C.

59. Corrispondenze algebriche tra i punti di una medesima curva. Prodotto e somma di due corrispondenze.

Avendosi una corrispondenza algebrica tra i punti di due curve sovrapposte, potremo sempre considerare una tal corrispondenza come l'insieme di due operazioni T, T^{-1} inversa l'una dell'altra applicate ad una medesima classe formata dai punti della curva C comune sostegno delle due serie sovrapposte.

Designeremo d'ordinario con a un punto variabile su C e con Y, X i gruppi costituiti dagli omologhi di a ottenuti rispettivamente colle operazioni T e T^{-1}.

Accanto alla nozione familiare di prodotto di due corrispondenze S, T, che si ottiene considerando l'operazione ST, derivante dall'applicare ai punti a successivamente le operazioni S, T, introdurremo il concetto di somma di due corrispondenze.

Per somma delle S, T – indicata col simbolo $S+T$, –

s'intende la corrispondenza che nasce associando al punto variabile a gli omologhi nella S e gli omologhi nella T. È ben chiaro che la corrispondenza così generata è algebrica, se tali sono le sue componenti. Le definizioni di somma e prodotto si estendono immediatamente a più corrispondenze. La somma di k corrispondenze identiche a T, dà luogo alla corrispondenza kT <u>multipla di T secondo k.</u>

La somma gode della proprietà commutativa, mentre in generale lo stesso non accade pel prodotto.

Sono evidenti le relazioni seguenti di cui avremo da profittare più tardi:

$$(3)\qquad (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}, \qquad (S+T)^{-1} = S^{-1}+T^{-1}; \qquad (kT)^{-1} = kT^{-1}.$$

60. Introduciamo qui alcune notazioni che ci saranno utili.

Se $A_1, A_2; \ldots; B_1, B_2, \ldots$ son gruppi di punti, sopra una curva C, il significato della relazione:

$$(4)\qquad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \cdots$$

ove λ, μ son interi positivi o negativi, risulta senz'altro quando λ, μ son tutti positivi o se, essendovene alcuni negativi, son possibili le eventuali sottrazioni indicate in ciascuno dei due membri; ma possiamo in ogni caso dare un senso alla (4) intendendo ch'essa non sia che una maniera diversa di scrivere la relazione che si ottiene dalla (4) trasportando da un membro all'altro i termini negativi e cambiandoli di segno. -

Talora la (4) verrà espressa in parole dicendo che i gruppi

$$h_1 A_1 + h_2 A_2 + \dots, \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \dots$$

sono "equivalenti" o che "appartengono ad una stessa serie lineare" per quanto, se h, μ non son tutti positivi, non sempre esistano gruppi effettivi corrispondenti a quei simboli. In tal caso diremo che si tratta di gruppi virtuali.

È ben chiaro come sia lecito moltiplicare per un intero i due membri della (4), e come avendosi due relazioni del tipo (4), si possano sommare o sottrarre membro a membro.

61. Corrispondenze a valenza: Definizione. Sia T una corrispondenza tra i punti di una curva C e sia Y il gruppo dei β punti y omologhi di a nella T. In generale al variare di a il gruppo Y non varia in una serie lineare d'ordine β; tuttavia può avvenire che il gruppo $Y + \gamma\alpha$, ove γ è un intero positivo o negativo o nullo, varî in una serie lineare d'ordine $\beta + \gamma$. Si dirà allora che la corrispondenza ha la valenza γ.

Nel caso in cui γ sia negativo può darsi che il simbolo $Y + \gamma a$ non rappresenti un effettivo gruppo di punti: ma ad ogni modo anche in tal caso noi sappiamo quale senso deve attribuirsi alla definizione precedente (n° 60).

Sotto forma diversa si può dire che T ha la valenza

γ, ove γ è un intero positivo o negativo o nullo, se denotando con Y, Y' i gruppi di punti omologhi nella T di due punti qualsiansi a, a' di C, sempre si ha

$$Y + \gamma\alpha \equiv Y' + \gamma a'.$$

Se la curva C non è razionale, la corrispondenza T non potrà ammettere una seconda valenza (diversa da γ). Supponiamo infatti che la T possegga un'altra valenza γ'. Allora avremo:

$$Y + \gamma' a \equiv Y' + \gamma' a',$$

che sottratta dalla precedente, dà:

$$(\gamma - \gamma') a \equiv (\gamma - \gamma') a',$$

ossia:

$$ka \equiv ka',$$

ove k è un intero positivo (non nullo).

La serie lineare g^r_k che contiene tutti i gruppi ka non sarà certo composta con un'involuzione, sicchè potrà imaginarsi segata sopra una curva Γ di ordine k, dagli iperpiani del suo spazio S_r. Poichè un iperpiano osculatore alla Γ in un punto generico di Γ, ha con questa un contatto r-punto, risulterà $k = r$, e la Γ sarà una curva razionale (normale).

Dunque è vero che <u>sopra una curva di genere > 0 una corrispondenza non può avere due diverse valenze</u>.

62. <u>Operazioni sulle corrispondenze a valenza.</u>

Dimostriamo che:

<u>La somma di due corrispondenze a valenze γ_1, γ_2</u>

ha la valenza $\gamma_1+\gamma_2$.

Sieno T_1, T_2 le due corrispondenze, Y_1, Y_2 i gruppi di punti omologhi di a, a' nella T_1, Y_2, Y_2' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_2. In base alla definizione avremo:

$$Y_1+\gamma_1 a \equiv Y_1'+\gamma_1 a'$$
$$Y_2+\gamma_2 a \equiv Y_2'+\gamma_2 a',$$

donde sommando si trae:

$$(Y_1+Y_2)+(\gamma_1+\gamma_2)a \equiv (Y_1'+Y_2')+(\gamma_1+\gamma_2)a' \quad . \qquad \text{c.d.d.}$$

Il prodotto di due corrispondenze a valenze γ_1, γ_2 ha la valenza $-\gamma_1\gamma_2$.

Continuando ad usare le notazioni di prima diciamo $y_1 \dots y_\beta$ i punti del gruppo Y_1, $y_1' \dots y_\beta'$ quelli di Y_1', e Y_{2i}, Y_{2i}' i gruppi degli omologhi di y_i y_i' nella T_2. Verrà allora:

$$Y_1+\gamma_1 a \equiv Y_1'+\gamma_1 a'$$
$$Y_{2i}+\gamma_2 y_i \equiv Y_{2i}'+\gamma_2 y_i' \qquad (i=1,\dots,\beta).$$

Da queste si traggono le relazioni

$$\gamma_2 Y_1+\gamma_1\gamma_2 a \equiv \gamma_2 Y_1'+\gamma_1\gamma_2 a'$$
$$\sum_{i=1}^{\beta} Y_{2i}+\gamma_2 Y_1 \equiv \sum_{i=1}^{\beta} Y_{2i}'+\gamma_2 Y_1'.$$

Sottraendo la 1ª dalla 2ª avremo come si voleva:

$$\sum Y_{2i}-\gamma_1\gamma_2 a \equiv \sum Y_{2i}'-\gamma_1\gamma_2 a'.$$

63. Determinazione del gruppo dei punti uniti nelle corrispondenze a valenza zero.

Sia T una corrispondenza a valenza zero: variando a su C il gruppo Y dei β punti y omologhi di a, varia in tal caso in una serie lineare d'ordine β.

Supponiamo che la curva C, dotata soltanto di nodi sia piana e che la serie lineare completa g^r_β che contiene i gruppi Y, sia segata da un sistema lineare Σ di curve $\varphi(y_1 y_2 y_3) = 0$ di un certo ordine m', passanti eventualmente per un gruppo Q di punti fissi (dei quali alcuni o tutti posson cadere su C). Senza introdurre restrizioni si può supporre che Σ sia r volte esteso, ossia che per un gruppo della g^r_β passi una sola φ.

I gruppi Y saranno segati da un sistema algebrico ∞^1 di curve φ, e poichè ad ogni punto di C risponde una sola φ di quel sistema ∞^1, i coefficienti di questa saranno funzioni razionali del punto scorrente su C. Sicchè l'equazione di una φ del sistema ∞^1 si potrà scrivere sotto la forma:

$$\Phi(x_1 x_2 x_3 | y_1 y_2 y_3) = 0,$$

ove Φ è il simbolo di un polinomio omogeneo di grado m nelle x, e omogeneo di grado m' nelle y.

Ne viene che gli omologhi nella T^{-1} di un dato punto y^0, saranno segati su C dalla curva:

$$\psi^0 \equiv \Phi(x_1 x_2 x_3 | y_1^0 y_2^0 y_3^0) = 0,$$

non passante per y^0, fuori eventualmente di certi punti appartenenti ad un gruppo R comune a tutte le ψ di ordine m analoghe ad essa. Da ciò intanto si trae che la inversa della T ha pure la valenza zero, ciò che abbiamo dimostrato altrimenti anche pel caso di due curve distinte al n° 55.

La curva $\Phi(x_1 x_2 x_3 | x_1 x_2 x_3) = 0$, di ordine $m+m'$, passa e.

videntemente pei punti dei due gruppi Q ed R, e quindi appartiene al sistema lineare somma dei due sistemi contenenti rispettivamente le φ e le ψ. Ne segue che essa, fuori dei punti fissi eventuali comuni alle φ o alle ψ, sega su C un gruppo appartenente alla somma delle due serie che contengono rispettivamente i gruppi omologhi dei punti di C nella corrispondenza T e nella T^{-1}.
Ma i punti comuni alla $\Phi(x_1 x_2 x_3 | x_1 x_2 x_3) = 0$, e alla C, fuori dei punti fissi suddetti, sono punti uniti per la T, dunque il gruppo U di questi punti è equivalente alla somma dei gruppi X e Y che contengono gli omologhi del punto <u>a</u> nella T^{-1} e nella T; ossia in simboli:

$$U \equiv X + Y.$$

64. <u>Esistenza sopra ogni curva di corrispondenze aventi una valenza data. - Inversa di una corrispondenza a valenza.</u>

Se sulla curva C si considera una g_n^1 e di un punto <u>a</u> variabile su C si chiamano omologhi i punti che insieme ad esso dànno un gruppo della g_n^1, si ha, secondo le definizioni poste, una corrispondenza involutoria a valenza 1 che per brevità chiameremo una <u>corrispondenza elementare</u> (a valenza).

Facendo la somma di $\gamma (>0)$ corrispondenze elementari, si ottiene una corrispondenza a valenza γ, e facendo il prodotto di una tal corrispondenza con una corrispondenza elementare, si ha una corrispondenza a valenza $-\gamma$ (n° 62). Infine se si fa la somma di una corrispondenza a valenza γ con una a valenza $-\gamma$, si ottiene una corrispondenza a valenza zero. Dunque:

<u>Sopra una curva esistono corrispondenze a valenza arbitraria (positiva, negativa o nulla).</u>

Dimostriamo inoltre che:

<u>Se una corrispondenza ha valenza, la sua inversa ha la stessa valenza.</u>

È evidente anzitutto che l'inversa della corrispondenza S, somma di k (>0) corrispondenze elementari, ha la valenza k, e che la inversa del prodotto di S per una corrispondenza elementare ha la valenza $-k$ (ved. le (3)). Ciò posto sia T una qualunque corrispondenza a valenza γ (positiva o negativa) e sieno X, X' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T^{-1}.

Componiamo per mezzo di corrispondenze elementari, una corrispondenza T_1 a valenza $-\gamma$ e diciamo X_1, X_1' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_1^{-1}. Poichè la somma $T+T_1$ ha la valenza zero, anche la corrispondenza $(T+T_1)^{-1} = T^{-1}+T_1^{-1}$ avrà la valenza nulla (n° 63), e quindi accanto alla

$$X_1 - \gamma a \equiv X_1' - \gamma a',$$

sussisterà la relazione

$$X + X_1 \equiv X' + X_1' .$$

Sottraendo dalla 2ª la 1ª, viene:

$$X + \gamma a \equiv X' + \gamma a' \quad . \quad \text{c. d. d}$$

65. Determinazione del gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza qualsiasi - Numero delle coincidenze

Torniamo per un momento ad una corrispondenza elementare T, che si sia ottenuta partendo da una g_n^1, e diciamo Y il gruppo degli $n-1$ punti omologhi di a nella T, e X il gruppo degli omologhi di a nella T^{-1}. Siccome $T=T^{-1}$ il gruppo X coinciderà con Y.

Il gruppo U dei punti uniti di T non è che il gruppo jacobiano della g_n^1, e come si sa questo gruppo è equivalente ad un gruppo canonico aumentato di un gruppo della serie $2g_n$. Perciò dicendo K un gruppo canonico di C, avremo la relazione:

$$U \equiv X+Y+2a+K$$

Servendoci di questa dimostriamo più in generale che:

Avendosi fra i punti di una curva una corrispondenza T a valenza γ (positiva negativa o nulla), il gruppo U dei punti uniti è equivalente alla somma dei gruppi Y, X, che contengono gli omologhi di a nella T e nella T^{-1}, di γ gruppi canonici e di 2γ volte il punto a: ossia in simboli:

$$(5) \qquad U \equiv X+Y+\gamma K+2\gamma a,$$

ove K rappresenta un gruppo canonico.

Interpretando numericamente la relazione geometrica data da questo teorema, si ha:

$$u = \alpha + \beta + \gamma(2p-2) + 2\gamma,$$

ove u è il numero dei punti uniti, α, β son gl'indici di T, e p è il genere della curva. Si può dunque dire:

<u>Il numero dei punti uniti nella corrispondenza T d'indici α, β, di valenza γ, data fra i punti di una curva di genere p, è espresso dalla formola</u>:

$$(6) \qquad \alpha + \beta + 2\gamma p \ .$$

Dimostriamo prima la (5) per una corrispondenza S somma di h (>0) corrispondenze elementari $T_1, T_2, \ldots T_h$.

Indicando con $Y_1, Y_2, \ldots, Y_h$ i gruppi degli omologhi di a nelle corrispondenze $T_1 T_2 \ldots T_h$, e con $X_1 X_2, \ldots, X_h$ i gruppi degli omologhi di a nelle inverse, si vede che la S fa corrispondere al punto a il gruppo $Y_0 = Y_1 + \cdots + Y_h$, e la S^{-1} fa corrispondere ad a il gruppo $X_0 = X_1 + \cdots + X_h$. Inoltre il gruppo V dei punti uniti di S sarà la somma dei gruppi $U_1 \ldots U_h$ dei punti uniti di $T_1 \ldots T_h$.

Dalle relazioni:

$$U_1 \equiv X_1 + Y_1 + K + 2a$$
$$U_2 \equiv X_2 + Y_2 + K + 2a$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_h \equiv X_h + Y_h + K + 2a,$$

sommando si trae

$$V \equiv X_0 + Y_0 + hK + 2ha,$$

la quale dimostra il teorema per la corrispondenza S.

Sia ora T una qualunque corrispondenza a valenza negativa γ, riferendoci alla quale conserviamo le notazioni dell'enunciato. Indicando con h il valore assoluto di γ, si costruisca come sopra una corrispondenza S somma di h corrispondenze elementari.

La somma delle due corrispondenze S, T, che è a valenza nulla, fa corrispondere ad $\underline{a}$ il gruppo $Y+Y_0$, mentre la sua inversa fa corrispondere ad $\underline{a}$ il gruppo $X+X_0$; e inoltre la S+T ha per gruppo dei punti uniti il gruppo $U+V$. Dunque avremo (n° 63):

$$U+V \equiv (X+X_0) + (Y+Y_0).$$

Sottraendo da questa la relazione precedentemente ottenuta, viene:

$$U \equiv X+Y+\gamma K+2\gamma a.$$

Così è dimostrata la proposizione per le corrispondenze a valenza negativa.

Avendosi una corrispondenza T a valenza positiva γ, si costruisca una corrispondenza T' a valenza negativa $-\gamma$ (il che è sempre possibile) e si dicano Y', X' i gruppi degli omologhi di $\underline{a}$ nella T' e nella T'^{-1} rispettivamente, e U' il gruppo dei punti uniti di T'. Conservando ancora per la T le notazioni dell'enunciato, poichè la somma T+T' è a valenza nulla, avremo:

$$U+U' \equiv (X+X') + (Y+Y'),$$

ed essendo T' a valenza negativa, per quanto albiamo prima dimostrata, sarà:

$$U' \equiv X' + Y' - \gamma K - 2\gamma a.$$

Da questa e dalla precedente per sottrazione si trae:

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a,$$

la quale dimostra il teorema per tutte le corrispondenze a valenza positiva.

Osservazione. Dal principio di corrispondenza già enunciato, tenendo conto della 2ª proposizione del n° 62, segue facilmente che:

Il numero dei punti uniti della corrispondenza prodotto delle corrispondenze $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1) \ldots\ldots (\alpha_k \beta_k \gamma_k)$, ove α, β, γ denotano rispettivamente gl'indici e le valenze, positive o negative, delle corrispondenze considerate, è dato da

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k + \beta_1 \ldots \beta_k + (-1)^{k+1} 2\gamma_1 \ldots \gamma_k p.$$

66. Estensione del concetto di valenza. Dipendenza tra più corrispondenze.

Sia T_1 una corrispondenza a valenza γ_1 sulla curva C, e sieno Y_1, Y_1' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_1. Allora si ha:

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y_1' + \gamma_1 a'$$

la quale ci mostra che al variare di a, il gruppo de' suoi omologhi nella corrispondenza T_1 aumentato di γ_1 volte l'omologo di a nella corrispondenza identica I varia in una serie lineare.(*) Ciò si esprimerà dicendo che le corrispondenze T_1 ed I sono dipendenti secondo i numeri $(1, \gamma_1)$.

(*) A proposito di questa locuzione cfr. il n° 60.

Sia T_2 un'altra corrispondenza a valenza γ_2. Avremo similmente:

$$Y_2+\gamma_2 a \equiv Y_2'+\gamma_2 a',$$

la quale combinata colla precedente dà:

$$\gamma_2 Y_1-\gamma_1 Y_2 \equiv \gamma_2 Y_1'-\gamma_1 Y_2'.$$

Dunque al variare di a il gruppo de' suoi omologhi nella T_1, contato γ_2 volte, aumentato di $-\gamma_1$ volte il gruppo de' suoi omologhi nella T_2, varia in una serie lineare. Perciò diremo che le corrispondenze T_1, T_2 son dipendenti secondo i numeri $\gamma_2, -\gamma_1$.

Si presenta ora spontaneamente l'idea che il concetto di dipendenza si possa stabilire anche fra più di due corrispondenze, prescindendo dall'ipotesi che le corrispondenze stesse sian dotate di valenza.

E noi infatti diremo che le corrispondenze $T_1,\dots,T_k$ date sopra una curva C sono dipendenti quando esistono k interi $h_1\, h_2 \dots h_k$ (positivi o negativi) non tutti nulli, tali che indicando con Y_i il gruppo degli omologhi di un punto qualunque a nella T_i, al variare di a il gruppo (virtuale) $h_1 Y_1+\dots+h_k Y_k$ varii in una serie lineare.

In altri termini se Y_i' è il gruppo degli omologhi del punto a' nella T_i, la condizione di dipendenza è espressa dalla relazione

(7) $$h_1 Y_1+\dots+h_k Y_k \equiv h_1 Y_1'+\dots+h_k Y_k'$$

Nel caso che una tal relazione non sia possibile se non quando le h son tutte nulle, le k corrispondenze si diranno indipendenti.

Quando più corrispondenze sono fra loro dipendenti, talora diremo che una qualunque di esse è dipendente dalle rimanenti. Allorchè poi occorra tener presenti gli interi pei quali la (7) è soddisfatta, diremo pure che le corrispondenze $T_1, \ldots. T_k$ son dipendenti secondo $(h_1, \ldots h_k)$.

È evidente che se $T_1 \ldots. T_k$ son dipendenti secondo $(h_1, \ldots h_k)$ lo sono anche secondo $(\mu h_1, \ldots. \mu h_k)$, ove μ è un intero positivo o negativo, arbitrario.

Le due asservazioni fatte al principio di questo numero si possono ora enunciare nel modo seguente:

Ogni corrispondenza a valenza dipende dall'identità.

Due corrispondenze a valenza son sempre dipendenti.

Estendendo una proposizione del n°64 dimostriamo che:

Se le corrispondenze $T_1 \ldots T_k$ son dipendenti secondo $(h_1, \ldots h_k)$, anche le loro inverse son dipendenti secondo gli stessi numeri.

Limitiamoci per brevità al caso $k=2$, e supponiamo che h_2, ad esempio, sia negativo $(=-h_2')$ e h_1 positivo. Fissiamo una serie g_n^r, convenientemente ampia, in modo che vi sia un solo suo gruppo passante per ogni gruppo Y_2 costituito dagli omologhi di a nella T_2 (si fissino, p. es., p punti generici della curva di genere p, e si consideri la serie, non speciale, individuata da quei p punti insieme ad un particolare gruppo Y_2). Chiamando Y_3 quel gruppo che insieme ad un dato Y_2 costituisce un gruppo della g_n^r fissata, e conservando pel resto le solite notazioni, avremo che la relazione:

$$h_1 Y_1 + h_2 Y_2 \equiv h_1 Y_1' + h_2 Y_2'$$

equivale alla:

$$(8) \qquad h_1 Y_1 + h_2' Y_3 \equiv h_1 Y_1' + h_2' Y_3'.$$

Se si chiamano omologhi di un punto variabile <u>a</u> i punti del gruppo Y_3 ad esso relativo, otterremo una corrispondenza algebrica S, tale che:

$$Y_2 + Y_3 \equiv Y_2' + Y_3'.$$

Da ciò deriva che se la inversa di S fa corrispondere ad a il gruppo X_3, e ad a' il gruppo X_3', sarà similmente (n° 63):

$$(9) \qquad X_2 + X_3 \equiv X_2' + X_3',$$

ove X_2 (o X_2') è il gruppo degli omologhi di a (o a') nella T_2^{-1}.

La corrispondenza $h_1 T_1 + h_2' S$, che si ottiene chiamando omologhi di a i punti del gruppo Y_1 contati ciascuno h_1 volte, e quelli di Y_3 contati h_2' volte, in virtù della (8), risulta a valenza zero, sicchè anche la sua inversa, che fa corrispondere ad <u>a</u> il gruppo $h_1 X_1 + h_2' X_3$, sarà a valenza zero. Quindi avremo:

$$h_1 X_1 + h_2' X_3 \equiv h_1 X_1' + h_2' X_3',$$

ove X_1 (o X_1') è il gruppo degli omologhi di a (o a') nella T_1^{-1}.

Moltiplicando per h_2' i due membri della (9), e sottraendola poi dall'ultima relazione, viene:

$$h_1 X_1 - h_2' X_2 \equiv h_1 X_1' - h_2' X_2',$$

ossia:

$$h_1 X_1 + h_2 X_2 \equiv h_1 X_1' + h_2 X_2' \qquad \text{c. d. d.}$$

Osservazione. Questo ragionamento non servirebbe più nel caso che una delle corrispondenze fosse l'identità, come accadeva al n° 64. Si può però osservare che anche in tal caso la proposizione rimane valida, come si vede appunto profittando del n° 64.

67. Relazione geometrica fra i gruppi dei punti uniti in più corrispondenze dipendenti – Formola di corrispondenza relativa.

Dimostriamo che:

Se nelle corrispondenze $T_1 \ldots T_k$ dipendenti secondo $(h_1, \ldots h_k)$, al punto a rispondono i gruppi di punti $Y_1 \ldots Y_k$, mentre nelle corrispondenze inverse al punto stesso rispondono i gruppi $X_1 \ldots X_k$, indicando con $U_1 \ldots U_k$ i gruppi dei punti uniti nelle $T_1 \ldots T_k$, si ha:

$$(10) \qquad h_1 U_1 + h_2 U_2 + \cdots + h_k U_k \equiv h_1 (X_1 + Y_1) + \cdots + h_k (X_k + Y_k)$$

Per semplicità svilupperemo la dimostrazione nel caso $k = 2$; si vedrà subito come si estenda al caso generale.

Supponiamo, come dianzi, che h_1 sia positivo e h_2 negativo $(= -h_2')$, e usiamo le stesse notazioni del numero precedente. Costruiscasi, come allora, la corrispondenza S tale che:

$$Y_2 + Y_3 \equiv Y'_2 + Y'_3$$

e ricordiamo che la corrispondenza $h_1 T_1 + h'_2 S$, che nasce dal chiamare omologhi di $\underline{a}$ i punti del gruppo $h_1 Y_1 + h'_2 Y_3$ è a valenza zero. I punti uniti di questa corrispondenza cadono nei punti del gruppo U_1, che sono uniti nella T_1, e nei punti del gruppo V costituito dai punti uniti di S. Giacchè in ogni punto del gruppo Y_1 omologo di $\underline{a}$ nella T_1 cadono h_1 punti omologhi di a nella corrispondenza $h_1 T_1 + h'_2 S$, un punto unito di T_1 equivarrà a h_1 coincidenze della corrispondenza $h_1 T_1 + h'_2 S$. Similmente ogni punto del gruppo V conterà h'_2 volte fra i punti uniti di $h_1 T_1 + h'_2 S$. Dunque le coincidenze di quest'ultima costituiscono il gruppo $h_1 U_1 + h'_2 V$, e perciò se chiamiamo X_3 il gruppo degli omologhi di $\underline{a}$ nella S^{-1}, in virtù del risultato del n° 63, avremo:

$$h_1 U_1 + h'_2 V \equiv h_1 (X_1 + Y_1) + h'_2 (X_3 + Y_3).$$

Dalla considerazione della corrispondenza $T'_2 + S$, pure a valenza zero, similmente si trae:

$$U_2 + V \equiv (X_2 + Y_2) + (X_3 + Y_3).$$

Moltiplicando questa per h'_2 e sottraendola dapoi dalla precedente, viene:

$$h_1 U_1 + h_2 U_2 \equiv h_1 (X_1 + Y_1) + h_2 (X_2 + Y_2). \quad \text{c.d.d.}$$

Interpretando numericamente la relazione geometrica ottenuta, si ha una formola di corrispondenza molto importante.

Se diciamo u_i il numero dei punti di V_i, α_i il numero dei punti di X_i, β_i il numero dei punti di Y_i, avremo:

$$h_1 u_1 + \dots + h_k u_k = h_1(\alpha_1+\beta_1) + \dots + h_k(\alpha_k+\beta_k).$$

Dunque:

Se sopra una curva si hanno k corrispondenze di indici $\alpha_1\beta_1, \dots \alpha_k\beta_k$ dipendenti secondo i numeri $h_1 \dots h_k$, positivi o negativi, le quali siano dotate di $u_1 \dots u_k$ punti uniti, ha luogo la relazione:

$$(11)\qquad h_1 u_1 + \dots + h_k u_k = h_1(\alpha_1+\beta_1) + \dots + h_k(\alpha_k+\beta_k).$$

La nota formola del Cayley (*), che è così utile nella risoluzione del problema dei contatti, si ottiene come caso particolare di questa relazione supponendo tutte le h positive.

La teoria delle corrispondenze sopra una curva algebrica nacque col principio di corrispondenza sopra una retta formulato esplicitamente da Chasles nel 1864. Due anni dopo lo Chasles medesimo faceva applicazioni del principio alle curve razionali e il Cayley enunciava il principio numerativo del n° 65 limitatamente ai valori positivi o nulli di γ e dando la dimostrazione del principio soltanto in caso particolare. La prima dimostrazione completa del principio di Cayley fu data da Brill (Math. Ann., Bd. 6, 1873 p. 33)

(*) "Transactions of the Royal Society", t 158. p 149 (1868). Vedasi anche Segre Introduzione, n° 49 il quale pervenne algebricamente al numero delle coincidenze d'una corrispondenza a valenza positiva o nulla. Fu anzi il Brill che diede la definizione di valenza positiva (Werthigkeit). Il principio di corrispondenza per le corrispondenze a valenza qualunque (anche negativa) fu poi trovato coll'uso degl'integrali abeliani e delle funzioni theta da Hurwitz in una bella Memoria del 1886 (Math. Ann., Bd. 28, p. 561). In questa Memoria viene studiato il sistema di tutte le corrispondenze esistenti sopra una curva, e si dimostra che quando la curva è a moduli generali le corrispondenze che su essa esistono son tutte a valenza. L'Autore riesce pure a rappresentare mediante una sola equazione (trascendente) che lega le coordinate di due punti corrispondenti, una corrispondenza data sopra una curva qualunque, e dimostra che si può scegliere un numero finito di corrispondenze tali che l'equazione di ogni altra corrispondenza si ottenga dalle equazioni di quella mediante moltiplicazioni.

La trattazione della teoria delle corrispondenze esposta in queste lezioni è tratta dalla mia Memoria, Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, ecc (Memorie della R. Acc. di Torino, (2). t 54, 1903), e oltre ad essere assai più semplice delle trattazioni algebriche svolte da vari autori (ved. altre indicazioni bibliografiche nell'introduzione della mia Memoria), ha il vantaggio di dare anche il significato geometrico del principio numerativo di Cayley-Brill. Il concetto di corrispondenze dipendenti, introdotto nella mia memoria, si riattacca al concetto analogo introdotto per via trascendente da Hurwitz. Il ponte di passaggio è dato dal teorema d'Abel, come è dimostrato al n° 11 della mia Memoria. Tale passaggio permette pure di dimostrare che sopra una curva il numero delle corrispondenze indipendenti (nel senso esposto) ammette un massimo finito. Questa proprietà geometrica si riattacca alla costruzione sopra accennata dell'equazione di una corrispondenza qualunque mediante le equazioni di un n° finito di corrispondenze fissate.

68. Applicazioni: Gruppo dei punti $(r+1)$ pli di una serie lineare g_n^r.

Abbiamo già avvertito altrove pel caso particolare della serie canonica (nota (*) a piè della pag 181) che una serie g_n^r non può avere che un numero finito di punti di molteplicità maggiore di r (generalmente di molteplicità $r+1$). Cerchiamo di caratterizzare il gruppo $M_{n,r}$ di questi punti $(r+1)$-pli in relazione ad un gruppo G della g_n^r e ad un gruppo canonico K della curva

Come è data la g_n^r:

Dato un punto generico $\underline{a}$ di C consideriamo il gruppo G (ben determinato, perchè altrimenti $\underline{a}$ sarebbe almeno $(r+1)$plo per la serie) che ha in $\underline{a}$ un punto r-plo, e chiamiamo punti y gli $n-r$ punti che, assieme ad a completano il gruppo G. L'operazione inversa di quella che fa passare da $\underline{a}$ ai punti y, consiste nell'associare ad $\underline{a}$ i punti x che sono r-pli per la g_{n-1}^{r-1} ottenuta dalla g_n^r considerandone i gruppi che passano per $\underline{a}$. Diremo H un gruppo di tale g_{n-1}^{r-1} ed $M_{n-1,r-1}$ il gruppo dei punti r-pli della serie stessa.

La corrispondenza definita è a valenza r, perchè, indicando con Y il gruppo degli y, il gruppo $Y+ra$ varia nella g_n^r data. Risulterà dunque:

$$M_{n,r} \equiv Y + M_{n-1,r-1} + 2ra + rK;$$

ossia:

$$M_{n,r} \equiv G + M_{n-1,r-1} + ra + rK. \tag{12}$$

Questa formola ricorrente permette di risolvere la questione che ci siamo proposti. Si sa infatti (pag 161) che

$$M_{n-1,1} \equiv 2H + K$$

e quindi si ottiene

$$M_{n,2} \equiv G + (2H+K) + 2a + 2K,$$

donde, essendo $H + a \equiv G$, si trae

$$M_{n,2} \equiv 3G + 3K.$$

Per $r = 3$ viene:

$$\mathcal{M}_{n,3} \equiv G + \mathcal{M}_{n-1,2} + 3a + 3K \equiv G + (3H + 3K) + 3a + 3K \equiv$$
$$\equiv 4G + 6K.$$

Così proseguendo s'intuisce la formola generale

$$\mathcal{M}_{n,r} \equiv (r+1)G + \binom{r+1}{2}K$$

che si dimostra mediante la relazione (2) supponendola stabilita per valori inferiori di r.

Interpretando numericamente la formola generale ottenuta si ha il numero

$$(r+1)(n+rp-r)$$

dei punti $(r+1)$pli della g_n^2.

In questo numero ciascuno dei punti più che $(r+1)$plì per la g_n^2 va contato colla debita molteplicità. Si dimostra precisamente (x) che se un punto P è i_1-plo per gli ∞^{r-1} gruppi di g_n^2 che lo contengono, i_2-plo per ∞^{r-2} gruppi della stessa serie, ..., i_{r-1}-plo per ∞^1 gruppi, e i_r-plo per un gruppo della serie ($i_r \geq r+1$) esso conta

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_r - \frac{r(r+1)}{2}$$

volte nel gruppo dei punti $(r+1)$-plì.

Non sarebbe difficile stabilire la cosa mediante il procedimento ricorrente sopra sviluppato: ma su ciò non c'indugiamo.

La formola che dà il n° dei punti $(r+1)$plì di una g_n^2 è un caso particolare della formola di Jonquières, che dà il numero dei gruppi di una g_n^2 aventi un punto multiplo secondo i_1, uno secondo i_2, ...,

(x) Segre "Introduzione", pag 40.

uno secondo ν_t, ove $\Sigma(\nu_i - 1) = r$ (Journal für Math., t 66, 1866). De Jonquières dimostra tale formola stabilendola prima per le curve razionali (piane) - curve dotate del massimo numero di punti doppî - e per curve spezzate in rette, e poi la estende alle curve di genere qualunque studiando l'influenza che ha sulle soluzioni improprie del problema, l'acquisto di punti doppî.
A Brill è dovuta una dimostrazione della formola di Jonquières coll'aiuto del principio di corrispondenza di Cayley. La caratterizzazione geometrica del gruppo dei punti ν_i-pli pei gruppi della g_n^r che hanno le assegnate moltepliçità, trovasi in una nota del Torelli (Rendiconti di Palermo 1906).
Un problema ancor più generale, che comprende quello di Jonquières, è relativo al numero dei gruppi neutri con elementi multipli di una g_n^r. Si tratta di calcolare il numero dei gruppi costituiti ognuno da un punto ν_1-plo, da un punto ν_2-plo, ..., da un punto ν_t-plo ($\nu_i \geq 1$) e che son neutri di specie q pei gruppi della g_n^r, cioè che presentano $\Sigma\nu_i - q$ condizioni ai gruppi di g_n^r obbligati a contenerli con quelle molteplicità. Posto $\Sigma\nu_i - q - 1 = k$, affinchè il problema abbia un numero finito di soluzioni occorre e basta (in generale) che sieno soddisfatte le due condizioni

$$(r-k)\sum \nu_i - t = (k+1)(r-k)$$

$$n \geq \sum \nu_i + r - k - 1.$$

Pel caso delle curve razionali la soluzione generale di questo problema trovai in una mia Nota (Rendiconti dei Lincei, t. 9, 1900). Pel caso del genere qualunque la formola generale non è stata scritta. Si può consultare in proposito la mia Memoria, Sopra alcune singolarità delle curve in un iperspazio (Memorie della R. Acc. di Torino, 1901).

69. Numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una serie (razionale o irrazionale) γ_m' d'indice $\nu \geq 1$. -

Indichiamo con $Z_{r,n}$ il numero incognito. Dato un punto generico P della curva C ove si considerano le due serie, chiamiamo punti Q quelli che appartengono ulteriormente ai ν gruppi di γ_m' passanti per P, e chiamiamo punti R gli ulteriori punti dei gruppi di g_n^r che passano per r punti Q tolti da un medesimo gruppo di γ_m'. La corrispondenza involutoria S in cui sono omologhi i punti P, Q ha gl'indici uguali a $\nu(m-1)$; la corrispondenza T in cui sono omologhi P, R ha gl'indici

$$Z_{r-1,n-1}(m-r), \quad \nu\binom{m-1}{r}(n-r).$$

Infatti dato un punto P vi sono ν gruppi di

$m-1$ punti Q che insieme a P dànno gruppi di γ_m^1. Ciascuno di questi gruppi di $m-1$ punti ha comuni r punti con $\binom{m-1}{r}$ gruppi della g_n^r, e tali gruppi contengono ciascuno ulteriormente $n-r$ punti, che si debbono assumere come punti R omologhi al punto P dato.

Viceversa, dato un punto R vi sono $Z_{n-1,\,r-1}$ gruppi di r punti comuni alla g_{n-1}^{r-1} formata dai gruppi di g_n^r che passano per R, e alla nostra γ_m^1, sicchè si hanno altrettanti gruppi della γ_m^1 contenenti quelle r-ple. Ciascuno di questi gruppi contiene ulteriormente $m-r$ punti da assumersi come punti P omologhi al punto R.

Si osservi ora che se, dato P si considerano tutti i punti degli $\binom{m-1}{r}$ gruppi di g_n^r sopra definiti, si ottengono, oltre ai punti R omologhi di P, i punti Q contati ciascuno $\binom{m-2}{r-1}$ volte. Ciò si può esprimere dicendo che <u>la corrispondenza</u>

$$T + \binom{m-2}{r-1} S$$

<u>è a valenza zero</u>.

I punti uniti di tale corrispondenza sono dati dai punti uniti di T e dai punti uniti di S contati ciascuno $\binom{m-2}{r-1}$ volte. — I punti uniti di T cadono in ciascuno dei punti formanti i gruppi di $r+1$ punti comuni a g_n^r e a γ_m^1, sicchè sono in numero di $Z_{2,r}(r+1)$. I punti uniti di S sono i d punti doppî della serie γ_m^1. Verrà pertanto:

$$(13)\quad Z_{r-1,n-1}(m-r)+\nu\binom{m-1}{r}(n-2)+2\nu(m-1)\binom{m-2}{r-1}=$$
$$=Z_{rn}(r+1)+\binom{m-2}{r-1}d,$$

ossia:

$$Z_{r-1,n-1}(m-r)+\nu\binom{m-1}{r}n+\nu(m-1)\binom{m-2}{r-1}=$$
$$=Z_{r,n}(r+1)+\binom{m-2}{r-1}d.$$

Per $r=1$ si ha $Z_{0,n-1}=\nu(n-1)$ e quindi risulta:

$$Z_{1,n}=n\nu(m-1)-\frac{1}{2}d.$$

Per $r=2$, tenendo conto del valore di $Z_{1,n-1}$ si ottiene:

$$\nu(n-1)(m-1)(m-2)-\frac{1}{2}(m-2)d+\nu n\binom{m-1}{2}+\nu(m-1)(m-2)=$$
$$=3Z_{2,n}+(m-2)d,$$

donde:

$$Z_{2,n}=n\nu\binom{m-1}{2}-\frac{1}{2}(m-2)d.$$

Così proseguendo s'intuisce la formola generale

$$(14)\quad Z_{r,n}=n\nu\binom{m-1}{r}-\frac{1}{2}\binom{m-2}{r-1}d,$$

la quale si dimostra mediante la relazione (13) appena si sia ammessa per valori inferiori di r.

La formola (14) è dovuta a Schubert; ma il procedimento di Schubert, riprodotto al § 13 della "Introduzione" di Segre è meno semplice di quello da noi esposto. Veramente la formola di Schubert è relativa ad un caso un po' più generale: cioè al caso in cui i gruppi della γ_m^1 siano neutri per la serie g_n^r. Se uno generico di tali gruppi impone soltanto $k+1$ condizioni ($k+1\leq r$) ai gruppi della serie, in tal guisa cioè che ognuno di quei gruppi sia contenuto almeno in un gruppo della g_n^r, si avrà da ricercare il numero dei gruppi della γ_m^1 che contengono $k+1$ punti presentanti soltanto k condizioni ai gruppi della serie. A questo problema risponde la formola generale di <u>Schubert</u>.

<u>La deduzione di tale formola generale dalla (14) è immediata</u>. Si fissi infatti entro alla data serie g_n^r una serie subordinata g_n^k che non contenga (parzialmente) tutti i gruppi della γ_m^1. Ciò è sempre possibile, perchè i gruppi di g_n^r passanti per un gruppo generico di γ_m^1 formano una g_n^{r-k-1} e si può quindi scegliere entro g_n^r una g_n^k non avente alcun gruppo comune con questa g_n^{r-k-1}: la g_n^k così costruita non potrà allora contenere che un numero finito di gruppi della γ_m^1. Dicasi μ questo numero e dicasi z il numero dei gruppi di γ_m^1 che contengono $k+1$ punti presentanti k condizioni ai gruppi di g_n^r. Tali aggruppamenti di $k+1$ punti sono evidentemente compresi nel numero $\zeta_{k,n}$ – dato dalla formola (14) – dei gruppi di $k+1$ punti comuni alla γ_m^1 e alla g_n^k. Al numero $\zeta_{k,n}$ portano un ulteriore contributo i μ gruppi comuni a γ_m^1 e a g_n^k, giacchè anzi ciascuno di questi dà $\binom{m}{k+1}$ gruppi di $k+1$ punti comuni alla γ_m^1 e alla g_n^k. Dunque

$$\zeta_{k,n} = \binom{m}{k+1}\mu + z,$$

cioè

$$\binom{m}{k+1}\mu + z = n\nu\binom{m-1}{k} - \frac{1}{2}\binom{m-2}{k-1}d,$$

che è la <u>formola di Schubert</u>.

Questa formola - anzi il caso particolare di $k=m-1$ - è fondamentale nella trattazione della geometria sopra una curva col metodo iperspaziale di Castelnuovo e Segre: si può dire, in ultima analisi, ch'essa costituisce negli sviluppi della teoria il teorema fondamentale $Af+B\varphi$. Infatti, seguendo il metodo iperspaziale, mediante tale formola si dimostra che le aggiunte ad una curva piana segano su essa una serie lineare completa (Segre "Introduzione" n° 77) e se ne deduce anche il teorema di Riemann-Roch (Segre, "Introduzione" §19). - Si ottiene di più, mediante la formola stessa, una proposizione che può considerarsi come l'estensione del teorema di Riemann-Roch alle involuzioni irrazionali (cfr. Castelnuovo, Alcune osservazioni sulle serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica, Rendiconti dei Lincei, 1891). Una dimostrazione diversa della formola di Schubert nel caso in cui γ_m' riducesi ad una g_m' trovasi in Castelnuovo (Atti della R. Acc. di Torino, t. 24, 1889).

70. Un' altra applicazione notevolissima della formola di Schubert è stata fatta da Castelnuovo in una Nota recente dei Lincei.(*) Si tratta di un criterio per riconoscere quand'è che una

(*) Seduta del 1° Aprile 1906.

serie algebrica ∞^1 di gruppi di m punti, γ_m^1, è costituita da gruppi equivalenti.

Costruiscasi sulla curva C, di genere p, cui ci riferiamo una g_{m-1+p}^{m-1}, non speciale, non contenente (parzialmente) la γ_m^1: Ciò è sempre possibile, giacchè basta individuare la g_{m-1+p}^{m-1} mediante un gruppo di $m-1$ punti, tolti da un gruppo di γ_m^1, a cui si aggiungano p punti generici. Siamo allora sicuri che per Γ (e quindi per un gruppo generico di γ_m^1) non passa alcun gruppo della serie, perchè il resto degli $m-1$ punti scelti rispetto alla serie g_{m-1+p}^{m-1} è un gruppo (non speciale) di p punti, tra cui non trovasi l'm^{esimo} punto di Γ.

Si può dunque applicare la formola (14) alla ricerca del numero z dei gruppi della γ_m^1 che appartengono (parzialmente) alla serie lineare. Occorrerà fare $n = m-1+p$, $r = m-1$; si ottiene allora:

$$z = \nu(m+p-1) - \tfrac{1}{2} d \,,$$

cioè:

$$d = 2\nu(m+p-1) - 2z \quad (*)$$

Essendo per sua natura $z \geq 0$, ne risulta

$$d \leq 2\nu(m+p-1).$$

Dico che il segno $=$ vale allora e solo allora che la γ_m^1 è formata da gruppi equivalenti.

Infatti se vale il segno $=$ è $z=0$ e quindi una g_{m-1+p}^{m-1}

(*) Questa formola è stata estesa dal Torelli alle serie più volte infinite (Atti della R.ª Acc. di Torino t. 42, 1906.)

generica non contiene alcun gruppo di γ_m'; cioè una particolare g_{m-1+p}^{m-1} che contenga un gruppo di γ_m' li contiene tutti. Ciò posto, si consideri su C un gruppo Γ della serie algebrica e un gruppo G di p punti $a_1 a_2 \dots a_p$. La serie $g_{m+p}^{m} \,|G+\Gamma|$ gode della proprietà che la g_{m-1+p}^{m-1} residua di a_i contiene Γ e quindi ogni altro gruppo di γ_m'; cioè i gruppi residui dei gruppi Γ rispetto alla g_{m+p}^{m} passano tutti per a_i. Ma ciò vale per $i = 1, 2, \dots, p$, e poichè quei gruppi residui son formati da p punti, si conclude che i gruppi Γ danno lo stesso residuo G rispetto alla serie g_{m+p}^{p}, cioè che i Γ son contenuti nella serie g_m residua di G rispetto a g_{m+p}^{m}.

Se, viceversa, la γ_m' è formata da gruppi equivalenti, pel Restsatz, una g_{m-1+p}^{m-1} che contenga un Γ li contiene tutti, cioè una g_{m-1+p}^{m-1} costruita in modo che un gruppo generico di γ_m' non appartenga ad alcun gruppo della serie, non dovrà contenere alcun gruppo Γ. Sarà quindi $z = 0$, ecc.

Si conclude pertanto che:

Una serie algebrica (irriducibile) ∞^1, d'ordine m e indice ν, sopra una curva di genere p, possiede al più $2\nu(m+p-1)$ punti doppî; il limite superiore essendo raggiunto allora e solo allora che la serie è formata da gruppi equivalenti.

71. Dal teorema ora dimostrato si trae facilmente la proposizione seguente:

Se una serie algebrica irriducibile ∞^1, γ_m^1, giacente sopra una curva, è tale che l'insieme dei ν gruppi di γ_m^1 che passano per un punto P della curva (ivi compreso il punto P contato ν volte) si muova, al variare di P, in una serie lineare d'ordine $m\nu$, i gruppi della γ_m^1 risultano essi stessi equivalenti.

Infatti nell'ipotesi posta la corrispondenza involutoria S considerata al n° 69, ha la valenza ν e perciò il numero dei suoi punti doppi è dato da

$$d = 2\nu(m-1) + 2\nu p = 2\nu(m+p-1).$$

Ne deriva che i gruppi di γ_m^1 sono equivalenti tra loro.

Questo teorema che ha un ufficio fondamentale per certe questioni di geometria sopra una superficie, fu da me dimostrato coll'uso degl'integrali abeliani nella Memoria, Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche (Annali di Matematica, (3), t XII, 1905; n° 1). La dimostrazione esposta è di Castelnuovo.

Capitolo settimo.

Le funzioni algebriche come funzioni analitiche Superficie di Riemann.

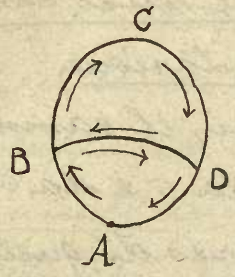
72. Sia

$$(1) \qquad f(u, z) = 0$$

un polinomio algebrico irriducibile di grado m nella u e consideriamo come variabile indipendente (complessa) la z. Abbiamo già visto (n° 20) che se $z = z_0$ è un valore di z che non sia critico per la funzione implicita u di z definita da $f = 0$, le m determinazioni di u corrispondenti a valori di z situati nell'intorno di z_0, sono rappresentabili mediante altrettante serie di potenze di $z - z_0$ convergenti in un certo circolo, che sul piano ove è distesa la variabile complessa z, ha per centro z_0.(*)
Da ciò deducesi che, per una circolazione qualunque di z (cioè per un cammino descritto da z partendo dal punto A e ritornandovi) la quale non avvolga alcun punto critico, non si produce permutazione tra gli m valori di u. Sia σ un cammino chiuso descrit-

(*) Veramente al n° 20 si supponeva che fosse $z_0 = 0$ (anzi $t_0 = 0$, perchè la variabile indipendente si chiamava t); si passa subito al caso attuale cambiando z in $z - z_0$.

to da z a partire da A e suppongasi che nell'interno dell'area racchiusa da σ non cadano punti critici.



Se σ produce sulle m determinazioni di u una sostituzione non identica, poichè evidentemente la sostituzione prodotta da σ dev'esser la stessa di quella prodotta dal cammino

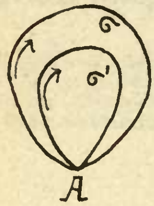
$$ABDBCDA = ABDA + DBCD,$$

uno degli ultimi due cammini deve produrre una sostituzione non identica. Ma allora tale cammino potrà sostituirsi con altri due cammini, comprendenti aree più piccole e di cui uno almeno produrrà una sostituzione non identica. Così proseguendo si arriverà ad un cammino comprendente un'area piccola a piacere, non avvolgente alcun punto critico, e che tuttavia produce una permutazione non identica. Ma ciò è assurdo perchè tale cammino può imaginarsi compreso in un circolo di raggio abbastanza piccolo avente il centro in un punto non critico; e nell'interno di un tal circolo sappiamo già che le determinazioni di u sono funzioni monodrome.

La proposizione dimostrata si può enunciare dicendo che *un cammino chiuso del piano z il quale sia riducibile ad un punto per deformazione continua, senza traversare punti critici, produce sulle determinazioni di u la sostituzione identica.*

Ne segue pure che due cammini riducibili l'uno all'altro per deformazione continua, senza traversare punti critici, sono equivalenti, nel senso che essi producono tra le u la stessa permutazione.

Se sono infatti σ, σ' due tali cammini, il cammino chiuso costituito da σ e da σ'



percorso nel senso inverso di quello che deriva per continuità dal senso di σ, racchiude un'area senza punti critici e quindi produce sulle u la sostituzione identica. Ciò si può esprimere dicendo che il cammino inverso di σ' produce tra le u la sostituzione inversa di quella prodotta da σ, cioè che σ, σ' producono la stessa sostituzione.

Consideriamo invece un punto critico $z = \alpha$, cioè un punto in cui coincidano due o più determinazioni di u: dicasi n ($\leq m$) il numero di tali determinazioni coincidenti e β il loro comune valore. Pel teorema relativo alla continuità delle funzioni algebriche (*) si potrà sempre considerare un punto z_1 dell'intorno di α cui corrispondano m valori distinti di u, dei quali precisamente n sieno abbastanza prossimi a β; indichiamoli con $u_1, u_2, \dots u_n$. Partiamo da z_1 e descriviamo un piccolo cammino chiuso σ avvolgente α; a circolazione eseguita, la determinazione di u che all'inizio aveva il valore u_1 potrà essersi mutata in sè, ma potrà

(*) cfr. p. es. Appel e Goursat, op. citata, pag. 166.

anche essersi scambiata con un'altra delle determinazioni prossime a β. p. es. con u_2. Nel primo caso, poichè u_1 nell'interno di un circoletto avente per centro z_1 e non comprendente punti critici, è sviluppabile in una serie di potenze di z; il prolungamento analitico (*) di questa serie mediante circoletti che abbiano i centri lungo il cammino σ fa ritornare alla serie stessa, cioè la determinazione u_1 ammette un unico sviluppo in serie nell'intorno di α. Se invece u_1 si cambia in u_2 il prolungamento analitico suddetto muta la serie che nell'intorno di z_1 dà lo sviluppo della determinazione u_1, nella serie analoga relativa ad u_2. L'ipotesi più generale è che mediante la circolazione σ si produca una certa sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \dots & u_{i_n} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$$

tra le n determinazioni $u_1, u_2, \dots, u_n$. Decomponiamo questa sostituzione nelle sue sostituzioni cicliche, e sia p. es. $(u_1 u_2 \dots u_k)$ uno dei cicli così ottenuti. Ponendo allora

$$(2) \qquad z - \alpha = z'^{k},$$

e considerando u come funzione di z', si vede che nell'intorno di $z' = 0$ ciascuna delle determinazioni $u_1, u_2 \dots u_k$ di u viene ad essere funzione uniforme di z', perchè mentre un punto del piano z' descrive un cammino chiuso attorno a $z' = 0$, il punto ad

(*) Ved. p. e Bianchi, Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa ..., Pisa, Spoerri 1901, § 45.

esso corrispondente mediante la (2) nel piano z, gira k volte attorno a $z = \alpha$ e quindi ognuna delle determinazioni $u_1, u_2, \ldots, u_k$, ritorna in se stessa. Poichè tali determinazioni risultano legate a z' dall'equazione algebrica

$$(3) \qquad f(u, \alpha + z'^k) = 0,$$

ognuna di esse, p. es. u_1, potrà svilupparsi nell'intorno di $z' = 0$ in una serie di potenze del tipo:

$$u_1 = \beta + A z' + B z'^2 + \ldots\ldots.$$

Avremo pertanto

$$(4) \qquad u_1 = \beta + A(z-\alpha)^{\frac{1}{k}} + B(z-\alpha)^{\frac{2}{k}} + \ldots\ldots,$$

ove $(z-\alpha)^{\frac{1}{k}}$ è una determinazione assegnata della radice k-esima di $z - \alpha$. Alle k determinazioni di questa radice rispondono i k valori $u_1, u_2 \ldots u_k$ permutantisi tra loro circolarmente attorno ad α. Si ottiene dunque il seguente teorema di Puiseux:

Le radici di $f(u, z) = 0$ che divengono uguali a β per $z = \alpha$, si distribuiscono in uno o più sistemi circolari, rappresentati nell'intorno di α da sviluppi del tipo (4).

Consideriamo ora la corrispondenza algebrica $(1, k)$ che tra le due curve

$$f(u, z) = 0, \quad F(u', z') = f(u, \alpha + z'^k) = 0,$$

vien posta dalle formole

$$u = u'$$
$$z = \alpha + z'^k.$$

Il punto $(\beta, 0)$ di F è origine di k rami distinti (nel senso del n° 20), rappresentati dagli sviluppi in serie di potenze di t:

$$\begin{cases} u' = \beta + At + Bt^2 + \ldots\ldots \\ z' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = \beta + A\theta t + B\theta^2 t^2 + \ldots\ldots \\ z' = t \end{cases}$$

....

$$\begin{cases} u' = \beta + A\theta^{k-1} t + B\theta^{k-1} t^2 + \ldots\ldots \\ z' = t \end{cases}$$

ove si è posto $\theta = e^{\frac{2\pi i}{k}}$. Questi rami sono <u>conjugati</u> nell'involuzione γ_k' che si ha su F come imagine della curva f, cioè mentre un punto di F descrive uno di essi, gli altri $k-1$ punti conjugati nell'involuzione descrivono gli altri $k-1$ rami.

Infatti gli sviluppi precedenti si posson scrivere sotto la forma:

$$\begin{cases} u' = \beta + A\tau + B\tau^2 + \ldots\ldots \\ z' = \theta^i \tau \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

e tale forma rende evidente che si tratta di rami conjugati perchè due punti $(u', \theta^i\tau)$ $(u', \theta^j\tau)$ son conjugati nella γ_k'.

Orbene è chiaro che mentre un punto di F descrive uno qualunque di questi rami, il punto corrispondente su f descrive <u>un sol ramo</u>. (*) Ne deriva

(*) Una corrispondenza $(1, k)$ tra due curve f, F non può infatti mutare un ramo di F in più rami di f, perchè imaginando sciolte le eventuali singolarità di f, F, ad un punto semplice di F non può rispondere che un sol punto semplice di f.

che i punti di f costituenti un medesimo ciclo ($u, u_2 \ldots$
$\ldots u_k$) cioè permutantesi tra loro ciclicamente per le circolazioni di z, appartengano ad un medesimo ramo. Ciò dà la ragione della denominazione di cicli con cui Halphen designava i rami delle curve algebriche.

Osservazione. Ci siamo finora limitati a considerare un punto $z=\alpha$ corrispondentemente al quale si abbiano n determinazioni di u assumenti il medesimo valore finito β. Nel caso in cui a $z=\alpha$ rispondano una o più radici infinite dell'equazione (1), si porrà $u=\frac{1}{u'}$ e si considererà l'equazione

$$f_1(u',z) = f\left(\frac{1}{u'},z\right)u'^m = 0,$$

la quale possiederà nel punto $z=\alpha$ altrettante radici nulle, distribuite in un certo numero di sistemi circolari rappresentati da sviluppi della forma:

$$u'=(z-\alpha)^{\frac{h}{k}}\left[b_h + b_{h+1}(z-\alpha)^{\frac{1}{k}}+\ldots\right].$$

Poichè la serie entro le parentesi quadre è una funzione regolare di $(z-\alpha)^{\frac{1}{k}}$ non nulla in $z=\alpha$, la sua inversa risulterà pure regolare nell'intorno di $z=\alpha$ e quindi si potrà sviluppare in una serie di potenze di $(z-\alpha)^{\frac{1}{k}}$; cioè si avrà:

$$\frac{1}{b_h+b_{h+1}(z-\alpha)^{\frac{1}{k}}+\ldots} = a_0 + a_1(z-\alpha)^{\frac{1}{k}} + a_2(z-\alpha)^{\frac{2}{k}}+\ldots$$

Ne deriva che

$$u=\frac{1}{u'}=(z-\alpha)^{-\frac{h}{k}}\left[a_0+a_1(z-\alpha)^{\frac{1}{k}}+a_2(z-\alpha)^{\frac{2}{k}}+\ldots\right],$$

cioè la singolarità che presenta u nell'intorno di $z=\alpha$ è di natura polare (nello sviluppo vi è soltanto un numero finito di potenze negative di $z-\alpha$).
Lo studio delle determinazioni di u corrispondenti a $z=\infty$ si riconduce facilmente al caso in cui z sia finito, mutando z in $\frac{1}{z'}$.
Si arriva in tal modo al seguente risultato complessivo:
Nell'intorno del punto $z=\alpha$ le m determinazioni di u definite dall'equazione (1) sono rappresentate da uno o più sviluppi del tipo

$$(5) \qquad u=(z-\alpha)^{\pm\frac{h}{k}}\left[a_0+a_1(z-\alpha)^{\frac{1}{k}}+\dots\dots\right]$$

ove si sostituisca $\frac{1}{z}$ al posto di $z-\alpha$ se si tratta dell'intorno del punto $z=\infty$.
Si conclude pertanto che la funzione algebrica $u(z)$ definita dall'equazione (1) ammette soltanto delle singolarità polari in numero finito e dei punti critici algebrici pure in numero finito, attorno a cui un certo numero di determinazioni di u si permutano circolarmente.

73. Questa proprietà si può invertire dimostrando che ogni funzione analitica ad m determinazioni, la quale possegga soltanto poli e punti critici algebrici, è una funzione algebrica.
Dicansi infatti $u_1 u_2 \dots u_m$ le m determinazioni di u. Ogni funzione simmetrica di tali determinazioni è una funzione uniforme di z, perchè una

circolazione di z non produce che una permutazione tra le $u_1, \dots u_m$ e quindi lascia immutata ogni funzione simmetrica di tali quantità. Consideriamo in particolare una funzione simmetrica intiera delle u: $\varphi(u_1 u_2 \dots u_m)$. Volendo studiare il comportamento di φ nell'intorno di $z = \alpha$ si potranno sostituire al posto delle u_i i loro sviluppi in serie di potenze fratte di $z-\alpha$. A sostituzione eseguita si otterrà una serie di potenze da cui dovranno esser sparite le potenze frazionarie, perchè altrimenti si tratterebbe di una funzione non uniforme. E poichè gli sviluppi delle u_i non conterranno al più che un numero finito di potenze negative, così lo sviluppo della

$$\varphi(u_1 u_2 \dots\dots u_m) = \psi(z)$$

non conterrà che un numero finito di potenze negative (intere) di $z-\alpha$. Si vede facilmente che lo sviluppo di $\varphi(u_1 u_2 \dots u_m)$ nell'intorno di $z = \infty$ contiene un numero finito di potenze negative di $\frac{1}{z}$ (cioè di potenze positive di z). La $\varphi(u_1 u_2 \dots u_m)$ è dunque una funzione uniforme di z che in tutto il piano non ha che poli. Si conclude pertanto (*) che essa è una funzione razionale di z. Le $u_1 u_2 \dots u_m$ risultano perciò radici di un'equazione algebrica i cui coefficienti son funzioni razionali di z. c.d.d.

74. Una conseguenza assai importante del teorema dimostrato è la seguente:

Affinchè la curva (1) sia irriducibile occorre che per

(*) Bianchi . op. citata, § 61.

<u>una conveniente circolazione di z due qualunque delle m determinazioni di u si possano scambiare tra loro.</u>

Suppongasi infatti che per una qualunque circolazione di z non sia possibile scambiare la determinazione u_1 con una qualunque delle altre $u_2, \dots, u_m$. Allora gli cammini chiusi descritti da z partendo da una posizione iniziale e ritornandovi, la u_1 sarà permutabile soltanto con alcune delle u_i; p. es. con $u_2, u_3, \dots, u_n$. Per uno qualunque di tali cammini le $u_2, u_3, \dots, u_n$ non potranno che permutarsi tra loro, perchè altrimenti la u_1 potrebbe scambiarsi con qualche altra delle u_i. Ne deriva che le $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono n determinazioni di una funzione analitica di z, che ammette soltanto poli e punti critici algebrici, e quindi, pel teorema precedente, sono radici di un'equazione $\varphi(u,z)=0$, di grado n in z. Poichè per ipotesi le $u_1, u_2, \dots, u_n$ son anche radici dell'equazione $f(u,z)=0$, la f risulterà divisibile per φ e quindi la curva $f=0$ sarà riducibile.

<u>La proprietà precedente si può invertire</u>: la condizione esposta è cioè non soltanto necessaria ma anche sufficiente affinchè la curva (1) sia irriducibile, a meno che tal curva ~~a meno che tal curva~~ non sia costituita da una curva irriducibile contata l volte (nel qual caso f è la potenza l-esima d'un polinomio irriducibile).

Se infatti il polinomio f è divisibile per due polinomi irriducibili distinti φ, ψ, non può darsi che una determinazione di u definita dalla $\varphi=0$ possa scambiarsi con una determinazione di u definita dalla $\psi=0$, perchè altrimenti la serie relativa alla prima determinazione ammetterebbe come prolungamento analitico la serie relativa alla seconda, e quindi le due curve $\varphi=0$, $\psi=0$ avrebbero infiniti punti comuni, il che è assurdo.

Il teorema dimostrato si può esprimere anche dicendo che l'equazione irriducibile (1) determina una sola funzione analitica u di z, nel senso che uno sviluppo in serie del tipo (5) relativo ad una determinazione di u nell'intorno di un punto assegnato $z=\alpha$, determina completamente lo sviluppo di ogni altra determinazione di u in un punto z arbitrario: questo sviluppo può sempre ottenersi come prolungamento analitico del primo.

75. Superficie di Riemann: costruzione di Lüroth.

In quel che segue noi supporremo che la curva $f(u,z)=0$ d'ordine m non abbia che nodi, che gli assi siano disposti genericamente rispetto ad essa, e che la retta all'infinito la seghi in m punti distinti (cioè che il punto $z=\infty$ non sia un punto critico).

Tutto ciò è lecito quando vogliamo studiare proprietà invarianti per trasformazioni birazionali. (Cfr. colla pag. 176).

I punti critici della funzione u di z cadranno nei punti di contatto delle tangenti (bipunte, per la posizione generica degli assi) parallele all'asse u, e se d è il numero dei nodi della curva e p il genere della medesima, tali punti critici saranno in numero di

$$w = m(m-1) - 2d = 2(m+p-1)$$

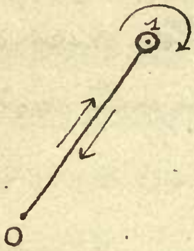
e in relazione a ciascuno di essi si avranno m - 2 determinazioni monodrome (finite) di u e due sole determinazioni (pure finite) formanti un sistema circolare.

Infatti i valori di z cui corrispondono punti doppi di f non sono effettivi punti critici, perchè le due determinazioni di u che in essi coincidono appartengono a due rami distinti e quindi non possono permutarsi tra loro –

Noi ci proponiamo di costruire una superficie reale R i cui punti sieno in corrispondenza biunivoca (continua) coi punti reali e complessi della curva f, cioè colle soluzioni dell'equazione (1).

Una tal superficie si chiamerà la superficie di Riemann imagine della curva f.

Segnamo sul piano z i punti critici della funzione u e fissiamo sullo stesso piano un punto O tale che un raggio rotante attorno ad O in un determinato verso li incontri successivamente uno alla volta. Nel senso considerato, che sia p. es. da sinistra verso destra, indichiamo i punti critici coi numeri $1, 2, 3, \ldots, w$. Chiameremo brevemente <u>cappio</u> un cammino (anche curvilineo) che



parta da O e vada verso un punto critico avvolgendolo e ritornando ad O senza incontrare altri punti critici, come indica la figura.

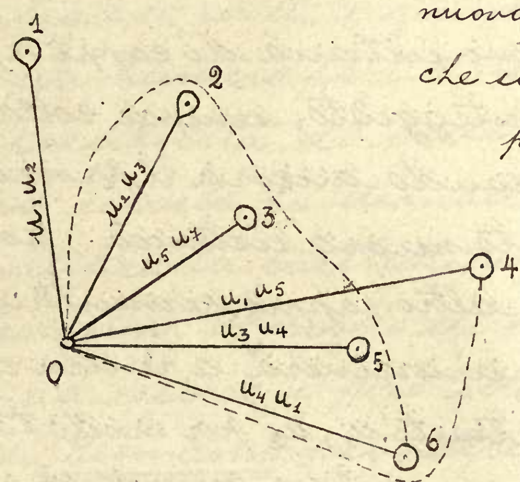
Diciamo $u_1, u_2 \ldots u_m$ gli m valori della u nel punto O. Ogni cappio permuterà <u>due</u> di questi valori. Supponiamo p.e. che il cappio $O1$ permuti $u_1 u_2$. Partiamo da O e camminiamo successivamente per diversi cappî $O1$, $O2$, $O3$, ... seguendo la variazione di quella determinazione di u che in O ha il valore u_1. È ben chiaro che al più dopo aver percorso tutti i cappî si ritornerà col valore u_1, perchè un cammino chiuso che contenga nel suo interno tutti i punti critici, potendosi deformare con continuità senza traversare punti critici (ma traversando il punto $z=\infty$) fino a ridursi ad un punto, produce sulle u_i la sostituzione identica.(*)

(*) Più chiaramente si vede la cosa (in quanto non occorre traversare punti all'infinito) rappresentando i valori di z sopra una sfera mediante una proiezione stereografica.

Sia il cappio O6 che riconduce la prima volta al valore u_1. I cappi successivamente percorsi O2, …, O5 si potranno dividere in due famiglie:

1ª) Cappi che lasciano fissa la determinazione u_1

2ª) Cappi che cambiano u_1 con un'altra determinazione. Nell'esempio indicato dalla figura appartengono alla 1ª famiglia i cappi O2, O3, O5, mentre appartiene alla 2ª il solo cappio O4. Consideriamo un



nuovo cappio punteggiato O6, che si possa ridurre al cappio O6 non punteggiato, traversando soltanto i punti critici 2, 3, 5 della 1ª famiglia. Indicando con +O2 il cappio O2 percorso in un senso e con −O2 il cappio stesso percorso in senso contrario, si vede che il cappio punteggiato O6 riducesi per deformazione continua (senza traversare punti critici) al cammino:

$$+O2+O3+O5+O6-O5-O3-O2$$

e quindi (n° 72) produce tra le u la sostituzione

$$(u_1 u_2) = (u_1 u_1)(u_1 u_1)(u_1 u_1)(u_1 u_4)(u_4 u_3)(u_3 u_3)(u_3 u_2).$$

Consideriamo ora il cappio punteggiato O4, che può ridursi al cappio non punteggiato O4 traversando i punti critici 5, 6. — Tale cappio equivale al cammino

$$+06+05+04-05-04,$$

e quindi lascia fisse le determinazioni u_1, u_2.
In tal modo ai cappî primitivi si sono sostituiti altrettanti cappî, di cui i due primi, 01, 06 punteggiato, permutano tra loro le determinazioni u_1, u_2, mentre gli altri quattro, $02, 03, 05, 04$ punteggiato, lasciano fisse queste due determinazioni.
Percorriamo ora il nuovo sistema di cappî a partire dal secondo, 06 punteggiato, sempre colla determinazione u_1. Applicando ancora il procedimento esposto a questo nuovo sistema, porteremo in terzo posto un altro cappio permutante $u_1 u_2$. Così proseguendo si arriverà a render consecutivi i cappî permutanti u_1, u_2 per modo tale che gli altri cappî lasceranno fisse queste due radici.
Lasciando ora da parte i cappî che permutano u_1, u_2 e che, per conseguenza, lasciano fisse le altre radici, partiremo dal primo cappio ad essi consecutivo colla determinazione u_2. Se u_3 è la determinazione che deriva da u_2 dopo aver percorso il cappio stesso, si opererà su u_2, u_3 come si è operato su u_1, u_2 e si verranno a portare consecutivi tutti i cappî permutanti u_2, u_3, ecc, ecc,
Concludendo si può supporre che i <u>cappî che vanno da un punto 0 del piano z ai punti critici</u>,

sieno ordinati in tal modo che girando attorno ad O in un determinato verso se ne incontri un numero pari permutanti u_1, u_2, successivamente un numero pari permutanti u_2, u_3, e infine un numero pari permutanti u_{m-1}, u_m.

I cappi che permutano due radici u_i, u_{i+1} sono in numero pari, perchè percorrendo il cammino risultante dall'insieme di tutti i cappi, u_i deve cambiare u_i in u_i e quindi u_i deve cambiarsi in u_{i+1} un numero pari di volte.

La possibilità di ordinare i cappi nella maniera esposta fu dimostrata da Lüroth (*); essa semplifica la costruzione della superficie di Riemann. Il modo di costruzione che andiamo ad esporre è però identico nel concetto a quello di Riemann e si potrebbe applicare direttamente al caso in cui i punti critici avessero anche molteplicità > 2 e i cappi fossero disposti comunque (**).

76. Imaginiamo m piani sovrapposti al piano z e chiamiamoli ordinatamente i piani u_1, $u_2, \ldots, u_m$, cioè designandoli coi simboli dei valori che la u assume nel punto O. Sieno 1, 2, 3, ..., 6 i punti critici cui fanno capo i cappi permutanti u_1, u_2; 7, 8, 9, 10 i punti critici ~~cui fanno capo i~~

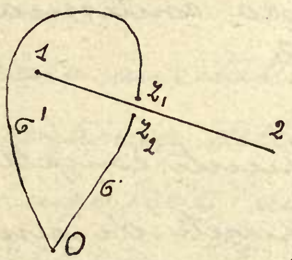
(*) Mathematische Annalen, Bd. 4.

(**) Cfr. p. e Appel e Goursat, op. citata, n° 93, p. 199.

~~punti critici~~ relativi ai cappî permutanti u_2, u_3, ecc. Conduciamo le linee 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10, ecc, in tal guisa ch'esse non si taglino a due a due. Diremo U_1 le linee 1-2, 3-4, 5-6, U_2 le linee 7-8, 9-10, ecc.
Mentre z si muove non attraversando mai le linee U_1 la radice u_1 non si permuta con alcuna altra, cioè u_1 risulta funzione uniforme di z. Infatti se a partire da O si eseguisce una circolazione non traversante le linee U_1, anche nell'ipotesi che questa circolazione avvolga qualcuna di tali linee, u_1 ritornerà in se stessa, perchè si produrrà un numero pari di trasposizioni $(u_1 u_2)$. Imaginiamo tagliato il piano u_1 lungo le linee U_1 e deponiamo in ciascun punto z del piano così tagliato il valore ben determinato che assume in quel punto la funzione uniforme u_1 sopra definita. Sul secondo piano u_2 pratichiamo dei tagli lungo le linee U_1, U_2: allora andando su questo piano con un cammino qualunque da O al punto z senza traversare i tagli U_1, U_2, si arriverà sempre ad uno stesso valore derivante dal valore di u_2 in O, perchè saranno impedite le permutazioni di u_2 colle uniche determinazioni u_1, u_3 con cui u_2 è scambiabile. Similmente tagliando il terzo piano lungo le linee U_2, U_3, si potrà deporre in ciascun punto z di tale piano un determinato valore di u_3, ecc, ecc.
Ora vediamo come si possano connettere gli n fogli sovrapposti così tagliati, in modo da ottenere

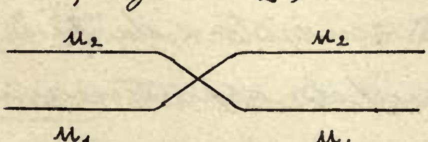
una sola <u>superficie connessa</u> (tale cioè che si possa andare da un suo punto ad ogni altro con un cammino continuo).

È chiaro che i valori assunti dalla funzione uniforme distesa sul foglio u_1, in due punti infinitamente vicini z_1, z_2, appartenenti rispettivamente al bordo sinistro ed al bordo destro di un medesimo taglio 1-2 della famiglia U_1, sono ordinatamente eguali ai valori assunti dalla funzione distesa sul foglio u_2 nei punti z_2, z_1, appartenenti al bordo destro e al bordo sinistro del taglio praticato sul secondo foglio.



Infatti partendo da O col valore u_1 e andando in z_2 $(=z_1)$ col cammino σ segnato in figura, si ottiene il medesimo valore di quello che deriva da u_2 partendo da O e andando in z_1 $(=z_2)$ col cammino σ'.

Si potrà dunque connettere il foglio u_2 col foglio u_1, riunendo i bordi sinistro e destro del taglio 1-2 sul foglio u_1, rispettivamente coi bordi destro e sinistro sul foglio u_2, come indica lo schema qui appresso, che riferiscesi ad una sezione dei due fogli con un piano perpendicolare al taglio 1-2.



Il fatto che i valori assunti da u sul 1° foglio passono riconnettersi per variasione continua coi valori assunti dalla funzione stessa sul secon-

do foglio, viene così rappresentato in modo concreto dalla possibilità di passare con un cammino continuo attraverso ai bordi saldati dei due tagli sovrapposti. Analoghe saldature potremo farsi tra i bordi degli altri tagli U_1, sempre tra i fogli u_1, u_2; tra i bordi dei tagli U_2, riconnettendo i fogli u_2, u_3, e così via.
In tal modo verremo ad avere una superficie connessa i cui punti risultano riferiti mediante una corrispondenza biunivoca continua ai punti della curva algebrica f.

La rappresentazione degli ∞^2 punti complessi di una curva algebrica, coi punti di una superficie reale, è stata introdotta per la prima volta da Riemann (Inaugural
1857), mediante il modello sopra costruito con m fogli sovrapposti.

77. Ancora della superficie di Riemann: modello nello spazio mediante una ciambella con p buchi o una sfera con p manichi.

Il modello di superficie di Riemann costruito al n° prec., si può rendere più concreto e di più facile intuizione, trasformandolo opportunamente per deformazioni continue accompagnate anche da estensioni, imaginando che si tratti di fogli flessibili elastici. Tali trasformazioni sono pienamente lecite per lo scopo che ci siamo proposito perchè, mediante esse, si viene a sostituire alla superficie costruita un'altra che è in corrispondenza biunivoca continua con quella e quindi anche colla totalità dei punti complessi della curva f. - Si dovrà soltanto aver cura di evitare che la deformazione porti a coincidere due parti della superficie che inizialmente erano distinte, perchè altrimenti verrebbe a cessare la biunivocità della corrispondenza. -

Si faccia anzitutto una prima trasformazione biunivoca continua della superficie ottenuta, passando ad una superficie i cui m fogli siano sfere (concentriche) anzichè piani (sovrapposti o paralleli). - Tale trasformazione si ottiene immediatamente mediante una proiezione stereografica.

Prendiamo a esaminare una tale superficie di Riemann sferica e cominciamo dal caso in cui essa sia formata da due soli fogli ($m = 2$). Si possono anzitutto deformare con continuità i tagli, in guisa ch'essi vengano ad esser situati sopra uno stesso circolo massimo, dei due fogli sovrapposti. Si trasformerà poi la superficie colla corrispondenza biunivoca <u>continua</u> che nasce lasciando fissi i punti del foglio esterno e scambiando per simmetria, rispetto al piano del suddetto circolo massimo, i punti del foglio interno: dopo ciò ogni bordo di un taglio praticato sul foglio esterno verrà ad esser saldato non già al bordo opposto del taglio corrispondente del foglio interno, ma al bordo ad esso immediatamente sottostante. Insomma dopo la trasformazione i k tagli potranno ridursi addirittura per deformazione continua, a dei tubi cilindrici di comunicazione fra il foglio esterno ed il foglio interno.

Imaginiamo ora che uno di questi tubi si dilati e che gli altri si adattino alla deformazione senza però scomparire nè confondersi con esso. La sfera potrà allora ridursi ad un emisfero cavo le cui facce interna ed esterna rappresenteranno i due fogli; continuando, la sfera potrà ridursi addirittura ad una ciambella con $k-1$ tubi di passaggio dalla faccia superiore all'inferiore.

Si può anche concepire questa ciambella ridotta ad un disco piano con $k-1$ fori; intendendosi che sia libero il passaggio dalla faccia superiore del disco all'inferiore, attraverso ai contorni dei $k-1$ fori o attraverso al perimetro del disco, che corrisponde precisamente al foro che si è andato dilatando durante la deformazione. Anzi se i due fogli sferici da cui siamo partiti invece di esser concentrici (ad una distanza finita) erano sovrapposti, si otterrà invece della ciambella con $k-1$ buchi, il disco piano con $k-1$ fori. — Ma è chiaro che dal nostro punto di vista le due superficie sono identiche. Imaginando il disco piano formato da due fogli elastici saldati soltanto lungo i bordi dei $k-1$ fori e lungo il contorno del disco; se si gonfia il disco a mo' di vescica si ottiene la ciambella con $k-1$ buchi.

Suppongasi ora che si tratti di una superficie di Riemann sferica ad m fogli $u_1, u_2, \dots, u_m$, che s'incontrino in quest'ordine procedendo dall'esterno all'interno. Siano k_1 le linee di passaggio da u_1 ad u_2, k_2 le linee di passaggio da u_2 ad $u_3, \dots\dots, k_{m-1}$ le linee di passaggio da u_{m-1} ad u_m.

Si potrà supporre anzitutto di aver riportato le linee di passaggio sopra un medesimo circolo massimo e di aver trasformato i fogli $u_2, u_4, u_6, \dots$, mediante la simmetria rispetto al piano di questo circolo: in guisa tale che il foglio u_1 potrà imaginarsi congiunto ad u_2 mediante k_1 tubi, u_2 ad u_3 mediante k_2 tubi, ecc.

Non preoccupiamoci degli $m-2$ fogli che contiene nel suo interno il foglio u_2, i quali non influiscono affatto sulle saldature dei fogli u_1, u_2 tra loro. Consideriamo cioè i fogli u_1, u_2 come costituenti una superficie a due fogli, e applichiamo a tale superficie la trasformazione precedentemente descritta. Avremo una ciambella con k_1-1 buchi: la faccia inferiore della ciambella rappresentando il foglio u_1, la faccia superiore il foglio u_2. A quest'ultima faccia, mediante k_2 tubi resterà congiunto il foglio sferico u_3 che abbiamo lasciato inalterato (coi suoi $m-2$ fogli interni) facendolo uscire soltanto dall'interno della sfera ($u_1 u_2$) non appena il foro che siamo andati allargando, ha consentito l'uscita del nocciolo interno.

Possiamo ora trattare i fogli u_3, u_4 come se costituissero una superficie a due fogli, assoggettandoli alla deformazione descritta, ecc, ecc.

Otterremo in tal modo una ciambella con $k_1 - 1$ buchi, connessa mediante k_2 tubi ad una ciambella con $k_3 - 1$ buchi, la quale alla sua volta è connessa mediante k_4 tubi ad una ciambella con $k_5 - 1$ buchi, e così proseguendo. Delle due prime ciambelle se ne può fare una sola allargando i tubi e impicciolendo i $k_2 - 1$ intervalli tra essi tubi, considerati in un determinato ordine: poi fare una sola ciambella dell'unica così ottenuta e della terza; e così via.

In definitiva si ottiene una ciambella con

$$k_1 - 1 + k_2 - 1 + \cdots + k_{m-1} - 1$$

buchi. - Poichè (n° 75):

$$W = 2k_1 + 2k_2 + \cdots + 2k_m = 2(m+p-1),$$

risulta:

$$k_1 - 1 + k_2 - 1 + \cdots + k_{m-1} - 1 = p.$$

Dunque:

<u>Una curva algebrica di genere p si può rappresentare mediante una superficie di Riemann formata da una ciambella con p buchi (od anche da un di-</u>

sco piano con p fori).

È ben chiaro che la ciambella con p buchi si può deformare con continuità fino a ridurla ad una sfera con p manichi.

Per $p=0$ si ha come superficie di Riemann una superficie del tipo sfera; per $p=1$ si ha una ciambella con un buco, cioè una superficie del tipo toro.

La trasformazione della superficie di Riemann ad m fogli in un disco con p buchi o in una sfera con p manichi, trovasi in Tonelli (Rendiconti dei Lincei, 1875. p. 596; 1895, p. 300), Clifford (London Proc. Math. Society, 1877, p. 292), Klein (Ueber Riemanns Theorie der algebraische Funktionen, 1882).

78. Retrosezioni. (Rückerschnitt). Riduzione di una superficie di genere p ad una di genere 0.

La considerazione della superficie di Riemann permette di riattaccare la nozione del genere di una curva alla nozione della connessione di una superficie reale (bilatera) (*)

Premettiamo alcune definizioni. Una superficie dicesi aperta quando possiede contorni, cioè quando su essa son tracciate delle linee che non posso-

(*) Una superficie dicesi bilatera quando considerando le due facce dell'intorno di un suo punto qualunque, non è possibile passare dall'una all'altra con un cammino continuo appartenente alla superficie; unilatera nel caso contrario.

no esser traversate da un cammino continuo situato tutto sulla superficie. Una superficie senza contorni dicesi chiusa.

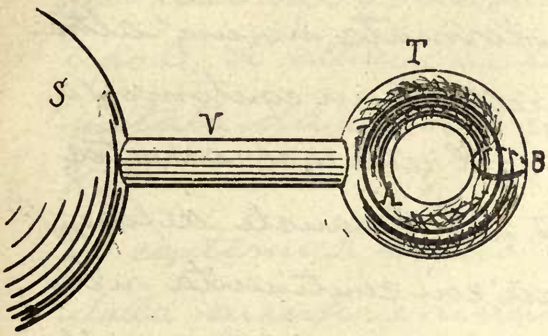
La sfera è una superficie chiusa: un rettangolo è una superficie aperta, ed è pure aperta la superficie che si ottiene da una sfera asportandone un dischetto.

Una superficie di Riemann di genere p (ciambella con p buchi o sfera con p manichi) è una superficie chiusa.

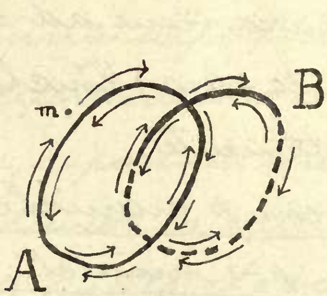
Una superficie chiusa connessa, la quale venga divisa in due parti da ogni taglio su essa praticato dicesi semplicemente connessa. La stessa definizione la riferiremo anche alle superficie aperte, purchè il contorno formi una sola linea (percorribile tutta con continuità). Se il contorno totale si scindesse in più cammini continui, è ben chiaro che la superficie si potrebbe tagliare lungo una linea (aperta) congiungente due punti di due diversi contorni parziali, senza che la connessione si rompesse.

Ciò premesso riprendiamo come modello di una superficie di Riemann R, di genere p, una sfera con p manichi, ciascuno dei quali si può addirittura assimilare ad un toro attaccato alla sfera mediante un tubo cilindrico.

Fissato uno di questi manichi possiamo considerare un cammino chiuso che gira attorno all'apertura del toro (si può prendere un parallelo del toro stesso), ed un cammino chiuso che passi attraverso all'apertura del toro, incontrando in un punto il cammino precedente (si può prendere un circolo meridiano del toro). Diremo che il primo cammino appartiene al tipo A, il secondo al tipo B. Si avranno p coppie di tali cammini $(A_1 B_1)(A_2 B_2) \ldots (A_p, B_p)$ relative ai p manichi.

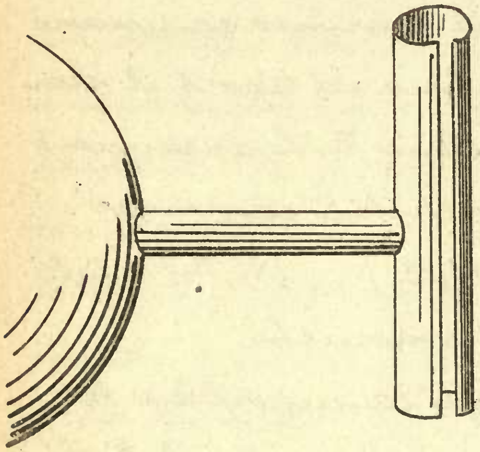


Si tagli la superficie R lungo i cammini A, B di un determinato manico. La connessione del manico e quindi dell'intera superficie, non viene perciò rotta; i contorni dei due tagli praticati si possono percorrere con una sola linea continua come indica la figura schematica qui accanto (si segua il movimento delle frecce partendo per esempio dalla posizione m.).



Una tale coppia di tagli dicesi una <u>retrasezione</u>.

S'imagini di operare prima il taglio B: allora si potrà deformare il manico così tagliato facendolo diventare un cilindro aperto alle due estremità e attaccato alla sfera pel solito tubo. Il cammino A diverrà una generatrice del cilindro, e quindi eseguendo il taglio A, avremo un rettangolo accartocciato a mo' di cilindro, come indica la figura. In tal maniera la nostra superficie R verrà trasformata in un'altra possedente un contorno (unico). Il rettangolo accartocciato potrà anche deformarsi con continuità riducendolo ad una coppa: il



contorno di questa può poi restringersi indefinitamente per guisa che la coppa venga a chiudersi, trasformandosi in una sfera. E si potrà infine contrarre il tubo che congiungeva il toro alla sfera primitiva (e che ora viene ad esser chiuso all'estremità da una piccola sfera) finchè esso non venga a scomparire completamente.

La sfera con p manichi vien così trasformata in una con p-1 manichi, mediante una retrosezione.

Facendo le operazioni analoghe sugli altri manichi, si viene a trasformare la R in una sfera senza manichi, cioè in una superficie di genere 0, mediante p retrosezioni.

Se si mantengono i p contorni che provengono dai p manichi (dopo aver trasformato i vari to=

ri in rettangoli) si ottiene una superficie aperta i cui p contorni, possono esser congiunti mediante $p-1$ tagli che vadano da un punto del 1° contorno ottenuto ad uno del 2°, da un punto del 2° ad uno del 3°, ecc. Questi $p-1$ tagli si diranno del tipo C. Si ottiene in tal modo una superficie limitata da un sol contorno, che indicheremo con K.

Il contorno K si può per deformazione continua della superficie ridurre ad un punto, perchè come abbiamo visto tale riduzione si può fare per ciascuno dei tagli A+B, e quindi K può ridursi ad una semplice fessura formata dai tagli C; tale fessura è alla sua volta riducibile ad un punto.

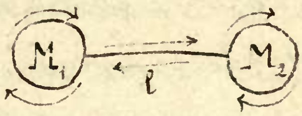
Si può dunque assimilare la superficie R, su cui s'è operato il taglio K, ad una superficie del tipo sfera (cioè riducibile per deformazione continua ad una sfera), da cui si sia asportata una parte limitata da un cammino chiuso: la parte asportata sarebbe, nel caso nostro, quella che vien descritta dal cammino chiuso K, quando si deforma per continuità sino ad un punto.

Dunque <u>sia che dopo aver operato le p retrosezioni si consideri la R come una superficie chiusa (del tipo sfera), sia che la si consideri come una superficie aperta con un sol contorno K, ogni cammino chiuso tracciato sulla R così trasformata potrà ridursi ad un punto per deformazione conti-</u>

nua, perchè di tale proprietà godono i cammini chiusi tracciati sulla sfera.
Si può anche dire che la R è ridotta ad esser semplicemente connessa, in quanto la sfera, come abbiamo già osservato, è semplicemente connessa.
Si osservi che sulla superficie primitiva R si possono soltanto praticare p tagli chiusi non intersecantisi tra loro, i quali non ne rompano la connessione: sono quei p tagli che trasformano i singoli manichi (tori) in cilindri (aperti ai due estremi).
Infatti dopo aver trasformato la R in una sfera cui sono attaccati, mediante p tubi, altrettanti cilindri aperti ai due estremi, è chiaro che sopra tale superficie non può eseguirsi un altro taglio chiuso senza che la connessione venga rotta.

79. Riduzione di tutti i cicli di una superficie di Riemann, al sistema fondamentale dei 2p cicli formanti le retrosezioni. Omologie ed equivalenze tra cicli (Poincaré).

Un cammino chiuso tracciato sopra una superficie di Riemann R, si chiama anche un ciclo (lineare). Talora questo ciclo si considera insieme ad uno dei suoi versi preso come positivo: allora se M denota il ciclo col verso positivo, -M denota il ciclo stesso col verso negativo. Per multiplo di un ciclo M secondo un intero k, positivo o negativo, s'intende il ciclo percorso k volte nel verso di M, o nel verso contrario, secondo che k è positivo o negativo. Spesso il multiplo di un ciclo M può anche considerarsi come un'elica di passo infinitesimo che gira k volte vicino ad M ed ha i due estremi saldati tra loro. — Si pensi p. e. ad un toro e ad un multiplo di un suo ciclo del tipo A (o B). Per <u>somma di due cicli</u> M_1, M_2 — e s'indica con $M_1 + M_2$ — s'intende il ciclo risultante dall'insieme dei due dati, ciascuno col proprio verso, e di una linea l percorsa una volta in un senso ed una volta nell'altro, la quale congiunga un punto di M_1 con un punto di M_2.



Da queste definizioni discende un significato preciso per la <u>combinazione lineare</u>

$$k_1 M_1 + k_2 M_2 + \cdots\cdots + k_r M_r ,$$

ove $M_1, M_2, \ldots, M_r$ son cicli e $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son interi, positivi o negativi.

Diremo, con <u>Poincaré</u>, che due cicli M, N sono <u>omologhi</u> quando l'uno di essi è riducibile all'altro per deformazione continua (operata senza uscire dalla Riemanniana data). L'omologia tra due cicli s'indica col simbolo $\sim$, e si scrive

$$M \sim N .$$

Un ciclo P riducibile a un punto per deformazione continua dicesi <u>omologo a zero</u>, e si scrive

$P \sim 0$.

Più cicli diconsi <u>distinti</u> allorquando nessuna loro combinazione a coefficienti (interi) non tutti nulli, è omologa a zero; <u>dipendenti</u> nel caso contrario. Dimostriamo che <u>ogni ciclo della riemanniana R è omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei 2p cicli formanti le retrosezioni</u>.

Proviamo la cosa per $p=1$, prendendo come modello di R un toro. Assumiamo come ciclo A il circolo di gola del toro, e come ciclo B un circolo meridiano. Un ciclo M che traversi più volte il circolo di gola, potrà sempre esser deformato con continuità in guisa che i passaggi attraverso ad A vengano a coincidere tra loro, per modo che dal ciclo dato verrà a staccarsi un multiplo, positivo o negativo, del ciclo B. Rimarrà dopo ciò un ciclo che incontrerà un certo numero di volte il ciclo B, e quindi esso potrà ridursi ad un multiplo, positivo o negativo, di A. Sicchè

$$M \sim \lambda A + \mu B,$$

λ, μ essendo interi (positivi o negativi).

Per provare la cosa per p qualunque, supponiamola stabilita per le riemanniane di genere $p-1$ e dimostriamola per le riemanniane di genere p.

Come al n° 78, fissiamo l'attenzione sopra uno dei p manici S della sfera R, ridotto ad avere la forma di un toro T attaccato alla sfera mediante un cilindro V (v. la fig. della pag. 269). Se un ciclo lineare M di R non incontra nè il ciclo A nè il ciclo B del manico S, è chiaro che M, se pur penetra nel manico fissato, fa ivi semplici escursioni con movimenti di andata e ritorno lungo generatrici del tubo cilindrico V, senza mai girare attorno al foro del manico o passare attraverso al foro stesso. Il ciclo M potrà perciò contrarsi con continuità lungo il cilindro V, uscendo completamente dal manico S; in tal guisa ch'esso diverrà un ciclo della riemanniana R', che si ottiene da R astraendo dal manico S. Avendo ammesso il teorema per le riemanniane di genere p-1, si potrà concludere che M è omologo ad una combinazione dei 2p-2 cicli formanti le p-1 retrosezioni restanti.

Se invece il ciclo M gira attorno al foro di T o passa attraverso a questo foro, potrà M deformarsi con continuità riducendolo ad un ciclo il quale lungo il cilindro V possiede soltanto una linea percorsa due volte; una volta in un senso ed un'altra nel senso opposto. Sicchè M risulta omologo alla somma di un ciclo della riemanniana R' con un ciclo della riemanniana T, e quindi si può esprimere mediante una combinazione dei cicli fondamentali di R' e dei due cicli fondamentali di T, cioè, complessivamente dei 2p cicli fondamentali di R. c.d.d.

Accanto al <u>concetto di omologia</u> tra cicli, <u>Poincaré</u> introduce anche, nei suoi lavori nell'<u>Analysis</u>

situs, il concetto di equivalenza.

Due cicli M, N uscenti da un medesimo punto O della riemanniana, si dicono equivalenti e si scrive

$$M \equiv N ,$$

quando l'uno può ridursi all'altro per deformazione continua sulla riemanniana, mantenendo fisso il punto O.

Due cicli equivalenti sono omologhi, ma non è necessariamente vero il viceversa.

Per $p=1$ è facile vedere che il concetto di equivalenza coincide con quello di omologia; ma appena sia $p=2$ è possibile costruire cicli omologhi non equivalenti. Se infatti si considera la solita sfera con due manichi S_1, S_2, aventi la forma di tori T_1, T_2 attaccati alla sfera mediante tubi cilindrici V_1, V_2, due cicli M, N del tipo A che escano da un medesimo punto O del toro T_1 rimanendo da parti opposte rispetto al cilindro V_1, sono omologhi, ma non sono equivalenti, perchè la riduzione dell'uno all'altro non può farsi senza traversare il cilindro V_1, il che sarebbe possibile soltanto se non esistesse l'altro manico S_2 ad impedire un tale passaggio.

Una differenza essenziale tra l'omologia e l'equivalenza, consiste in ciò: che in un'omologia i termini si possono commutare tra loro, mentre in un'equivalenza una tale inversione non è generalmente lecita.

Così se il ciclo M si può ridurre, tenendo fisso il punto O, alla somma dei cicli $N_1, N_2, \dots$, dall'equivalenza

$$M \equiv N_1 + N_2 + \dots\dots ,$$

non potrà dedursi senz'altro l'equivalenza

$$M \equiv N_2 + N_1 + \dots\dots ,$$

mentre potrà scriversi

$$M \sim N_1 + N_2 + \dots\dots \sim N_2 + N_1 + \dots\dots$$

Ciò può verificarsi chiaramente nel caso ora esaminato di $p = 2$. Considerando ancora i due cicli M, N omologhi, ma non equivalenti, è chiaro che si può deformare con continuità N, tenendo fisso O, per guisa da ridurre N al ciclo B percorso nei due sensi coll'aggiunta del ciclo M (si ricordi che M, N sono entrambi del tipo A). Si potrà scrivere cioè nell'ordine in cui s'incontrano i cicli cui N è riducibile

$$N \equiv B + M - B$$

Se l'inversione dei termini fosse lecita in questa equivalenza, ne deriverebbe $N \equiv M$, il che non è: si può invece scrivere $N \sim M$.

Alla considerazione delle equivalenze Poincaré connette la considerazione del gruppo fondamentale della riemanniana, che ha speciale importanza quando si tratti di una varietà reale a più dimensioni.

Lo sviluppo delle idee geniali introdotte da Poincaré ne' suoi lavori sull' Analysis situs ci trarrebbe troppo lungi dal piano delle nostre lezioni. Bastino questi brevi cenni per invogliare il lettore allo studio delle importanti Memorie del Poincaré dedicate all'Analysis situs (Journal de l'École Polytechnique 1895; Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 13; Proceedings of the London Math. Society, t. 37; Bulletin de la Société Math. de France, et Journal de Liouville, 1901; Rendiconti del Circolo di Palermo, t. 18).

80. Funzioni uniformi di un punto variabile sopra una superficie di Riemann. Estensione dei teoremi relativi ad una funzione di variabile complessa.

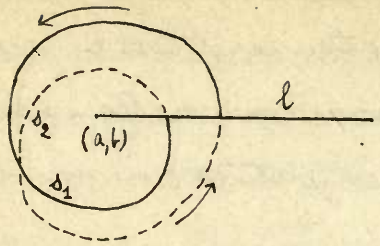
Consideriamo una funzione $\varphi(z,u)$ che abbia un sol valore in un punto generico (z,u) della superficie di Riemann R corrispondente alla curva algebrica $f(z,u)=0$. Prendiamo come modello di R la superficie formata da n fogli sovrapposti, e sia anzitutto (a,b) un punto di R non critico per la funzione u. Allora in un intorno del foglio cui appartiene il punto considerato, la φ potrà riguardarsi come una funzione uniforme della sola variabile complessa z, giacchè nell'intorno stesso le posizioni del punto variabile su R rispondono biunivocamente ai valori di z.

Diremo che la φ è regolare in (a,b) o che presenta ivi un polo, se di tali proprietà essa gode considerata come funzione di z. Nel 1° caso φ potrà svilupparsi intorno ad (a,b) in serie di potenze intere e positive di $z-a$; nel secondo caso si avranno nello sviluppo anche alcune potenze intere e negative (in numero finito) di $z-a$.

In quest'ultimo caso il coefficiente di $\frac{1}{z-a}$ sarà il residuo della φ, cioè il valore dell'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_s \varphi(z,u)\,dz$, s essendo un piccolo contorno chiuso avvolgente il punto (a,b) nel verso positivo che (se gli assi x, y nel piano $z\,(=x+iy)$ hanno l'orientazione ordinaria) è quello che lascia l'area circondata da s alla propria sinistra.

Le definizioni di punto regolare e di polo valgono anche se il punto considerato è uno degli m punti distinti all'infinito di R, purchè si sostituisca $\frac{1}{z}$ a $z-a$. Per residuo dovrà in tal caso intendersi il coefficiente di $\frac{1}{z}$ cambiato di segno, giacchè l'intorno del punto all'infinito sopra uno de' fogli, è la parte esterna ad una circonferenza di raggio abbastanza grande; e tale circonferenza deve esser descritta in senso negativo se si vuole che la regione ad essa esterna resti alla sinistra del punto mobile.

Fissiamo l'attenzione sopra un punto critico (a,b), che sarà l'origine di un ciclo di due fogli dato il modo di costruzione della R. Per intorno del punto (a,b) deve in tal caso intendersi l'area racchiusa da un ciclo chiuso avvolgente il punto come



indica la figura (ove la porzione piena del ciclo rappresenta la parte situata in uno dei due fogli connessi attraverso l, e la porzione punteggiata rappresenta la parte situata sull'altro foglio).

Per ricadere ancora nel caso di un'ordinaria funzione di variabile complessa, si potrà rappresentare biunivocamente l'intorno definito di (a, b) mediante l'intorno del punto $z'=0$ sopra un ordinario piano complesso z', ponendo $z'^2 = z-a$ (*), e quindi considerare $\varphi(z, u)$ come funzione della variabile complessa z'. Si dirà che in (a, b) la φ è regolare o ha un polo, se di tale proprietà essa gode come funzione di z'. – L'ordine del polo (a, b) sarà così dato dall'ordine del polo $z'=0$; come pure, se (a, b) è uno zero di φ, l'ordine di questo zero è dato dall'ordine dello zero $z'=0$. – Poichè $z' = (z-a)^{\frac{1}{2}}$, lo sviluppo di φ, espresso mediante la variabile z, procederà per le potenze intere di $(z-a)^{\frac{1}{2}}$. Si tratterà del valore di φ in un punto di un foglio o nel punto ad esso sovrapposto nell'altro foglio, secondo che si sceglierà l'una o l'altra determi-

(*) In tal modo ai punti z' appartenenti al semicerchio di raggio ρ assai piccolo descritto da un segmento rotante attorno a $z'=0$ da 0 a π, rispondono i punti z di uno dei due fogli, mentre ai punti del semicerchio descritto dal segmento rotante da π a 2π rispondono i punti dell'altro foglio.

nazione di $(z-a)^{\frac{1}{2}}$.

Per residuo si definirà il valore dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{s_1}\varphi(z,u)\,dz+\int_{s_2}\varphi(z,u)\,dz\right]$$

essendo s_1, s_2 le due porzioni del ciclo lineare avvolgente l'intorno di (a,b), che appartengono rispettivamente all'uno o all'altro foglio. Tali porzioni s'intendono percorse nel senso positivo. L'integrale suddetto s'indica brevemente con

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s}\varphi(z,u)\,dz,$$

s indicando l'intero ciclo lineare s_1+s_2.

A proposito di questa definizione del residuo di φ in un punto critico, faremo un'osservazione di carattere generale sulla definizione di integrale curvilineo sopra una riemanniana. Quando sulla riemanniana R si considera un cammino σ chiuso o aperto (con un verso assegnato), se tale cammino è tutto situato in un foglio, allora $\int_\sigma \varphi(z,u)\,dz$ ha un significato ben netto: si tratta di un integrale curvilineo di una funzione della variabile complessa z.(*)

Quando il cammino σ non è situato in un sol foglio, esso potrà dividersi in parti $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ situate ciascuna in un sol foglio, e allora assumeremo per definizione

$$\int_\sigma \varphi(z,u)\,dz=\int_{\sigma_1}\varphi(z,u)\,dz+\int_{\sigma_2}\varphi(z,u)\,dz+\int_{\sigma_3}\varphi(z,u)\,dz+\ldots\ldots$$

(*) Cfr. p. e. Bianchi, op. citata, § 40.

Più propriamente l'integrale di sinistra dovrebbe denotarsi col simbolo

$$\int_{\sigma} \varphi(P)\,dP\,,$$

$P \equiv (z,u)$ essendo il punto che descrive sulla riemanniana il cammino σ. Il prendere come variabile indipendente z, è lecito soltanto quando σ s'imagini diviso nelle porzioni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, perchè in ciascuna di queste havvi corrispondenza biunivoca tra i valori di z e le posizioni di P.

Ritorniamo ora al residuo di φ nel punto critico (a,b). Si dimostra agevolmente che il residuo stesso non è altro che il doppio del coefficiente di $\frac{1}{z-a}$ nello sviluppo di φ per le potenze di $(z-a)^{\frac{1}{2}}$.

Passando dalla variabile z alla z' si ha infatti

$$\int_{s_i} \varphi(z,u)\,dz = 2\int_{s_i'} \varphi(a+z'^2, u)\,z'dz'\,, \quad (i=1,2)$$

ove s_1', s_2' sono le due semicirconferenze del piano z' che hanno per corrispondenti i cammini s_1, s_2. Verrà dunque

$$\int_{s} \varphi(z,u)\,dz = 2\int_{s'} \varphi(z'^2+a, u)\,z'dz'\,,$$

s' essendo la circonferenza attorno a $z'=0$. Se nello sviluppo di $\varphi(a+z'^2, u)$ il coefficiente di $\frac{1}{z'^2}$ è A, tale sarà il coefficiente di $\frac{1}{z'}$ nello sviluppo di

$$\varphi(a+z'^2, u)\,z'\,,$$

e quindi l'integrale del 2° membro risulterà eguale a $2\pi i \cdot A$; donde segue la proposizione enunciata.

Tra le funzioni uniformi di un punto variabile sopra una riemanniana hanno speciale importanza le funzioni razionali. È chiaro che tali funzioni non possono avere su tutta la riemanniana che singolarità polari; ma è importante osservare che la proprietà s'inverte:

Ogni funzione analitica uniforme di un punto variabile sopra R, la quale passegga soltanto singolarità polari è una funzione razionale.

Proviamo anzitutto che ogni funzione uniforme $\varphi(z,u)$ del punto variabile su R, può porsi sotto la forma:

$$\varphi(z,u) = P_0(z) + uP_1(z) + \dots\dots + u^{m-1}P_{m-1}(z),$$

$P_0, P_1, \dots$ essendo funzioni uniformi di z. Siena $u_1, u_2, \dots, u_m$ gli m valori (distinti) di u corrispondenti ad un generico valore di z; poniamo:

$$\varphi_i = \varphi(z,u_i) = P_0 + u_iP_1 + \dots + u_i^{m-1}P_{m-1} \quad (i = 1, \dots, m),$$

$P_0, P_1, \dots$ essendo indeterminate. Poichè il determinante dei coefficienti delle P è il determinante D di Vandermonde formato colle u_i, le quali son tra loro distinte, sarà $D \neq 0$; e quindi potrà scriversi

$$P_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 0, \dots, m-1)$$

ove D_i è il determinante che deriva da D sostituendo agli elementi $u_1^i, u_2^i, \dots, u_m^i$ della $(i+1)^a$ verticale le quantità $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

Poichè per una circolazione di z le $u_1, u_2, \dots, u_m$ si permutano al più tra loro e le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ subiscono la stessa permutazione, nella frazione $\frac{D_i}{D}$ la circolazione stessa produce al più uno scambio di o=

rizzontali nel denominatore e lo stesso scambio nel numeratore, sicchè la funzione $P_i(z)$ rimarrà inalterata, cioè sarà uniforme rispetto a z.

Ciò premesso, se φ non ammette che poli su tutta la R, gli sviluppi di $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ in un punto qualunque della superficie conterranno al più un certo numero (finito) di potenze negative del relativo argomento (o di potenze positive, qualora si tratti di un punto all'infinito). Lo stesso dicasi degli sviluppi delle $u_1, u_2, \dots, u_m$. E sostituzioni effettuate, la $P_i(z)$ ammetterà dunque in ogni punto del piano uno sviluppo con un numero finito di termini a esponente negativo (o rispettivamente positivo). Dovrà trattarsi di potenze intere, perchè altrimenti la P_i non sarebbe uniforme in z. Dunque la P_i in tutto il piano ammette sole singolarità polari ed è perciò una funzione razionale di z.

Si può anche dimostrare facilmente che ogni funzione uniforme del punto variabile su R, la quale si conservi dovunque finita è una costante. Infatti le funzioni simmetriche elementari $\Sigma\varphi_i$, $\Sigma\varphi_1\varphi_2, \dots$ dei valori $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ assunti dalla funzione φ nei punti $(z, u_1) \dots (z, u_m)$, sono funzioni uniformi di z, dovunque finite, e quindi sono costanti. Ne deriva che φ è radice di un'equazione a coefficienti costanti.

Osservazione 1ª. Nell'Introduzione a queste lezioni avevamo avuto occasione di considerare proposizioni analoghe poggiate però sull'ipotesi più restrittiva che si trattasse di funzioni algebriche.

Osservazione 2ª. Allorquando si ha una funzione razionale

$$\varphi(z,u) = \frac{A(z,u)}{B(z,u)},$$

ove A, B son polinomî, se (a,b) è un polo al finito di questa funzione e r il suo ordine si ha la relazione

$$r = i_2 - i_1,$$

i_1, i_2 denotando rispettivamente le molteplicità d'intersezione delle curve $A=0$, $B=0$ colla curva $f(z,u)=0$ nel punto (a,b). S'intende che tali molteplicità d'intersezione debbono riferirsi ad un ramo fissato di cui (a,b) sia origine (qualora ad (a,b) facciano capo più rami).

Il ramo in questione potrà infatti rappresentarsi mediante gli sviluppi

$$\begin{cases} u = b + b_1 z' + b_2 z'^2 + \cdots\cdots \\ z = a + z'^k. \end{cases}$$

(Nel caso cui noi ci siamo costantemente riferiti, $k=1,2$ secondo che si tratta di un punto ordinario o di un punto critico.).

Sostituendo in A, B tali sviluppi delle u, z, pel significato stesso di "molteplicità d'intersezione" avremo

$$A(z,u) = z'^{i_1}(\alpha_0 + \alpha_1 z' + \cdots\cdots)$$
$$B(z,u) = z'^{i_2}(\beta_0 + \beta_1 z' + \cdots\cdots),$$

e quindi verrà

$$\varphi(z,u) = z^{i_1-i_2}(\gamma_0+\gamma_1 z' + \cdots), \qquad c.d.d.$$

Se $i_1 > i_2$ il ragionamento prova che si avrà in (a,b) uno zero d'ordine i_1-i_2 per la φ.

Consideriamo ora il caso di un punto all'infinito P_∞ della curva $f(z,u)=0$. Uno dei due rapporti $\frac{u}{z}$, $\frac{z}{u}$ delle coordinate di questo punto all'infinito, sarà certamente finito (lo sono entrambi se la direzione del punto stesso non è parallela ad alcuno dei due assi coordinati). Sia finito p. e il rapporto $\frac{u}{z}$, cosicchè il punto P_∞ non appartenga all'asse u. Allora si potranno prendere come coordinate omogenee di un punto appartenente all'intorno di P_∞

$$(6) \quad \begin{cases} z_0 = \dfrac{u}{z} = a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots \\ z_1 = 1 \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

e se i_1, i_2 son le molteplicità d'intersezione delle curve $A=0$, $B=0$ colla $f=0$ in P_∞ (si sottintende col ramo di P_∞ rappresentato dalle (6)), verrà nell'intorno considerato

$$A = \frac{1}{z^{i_1}}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \cdots\right)$$

$$B = \frac{1}{z^{i_2}}\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \cdots\right),$$

onde sarà

$$\varphi = \frac{1}{z^{i_1-i_2}}\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots\right).$$

Dunque anche in tal caso P_∞ sarà un polo d'ordine i_2-i_1 per la φ, se $i_1 < i_2$, sarà uno zero d'ordine $i_1 - i_2$ se $i_1 > i_2$ (sarà un punto ove la φ non si annulla nè diviene infinita, se $i_1 = i_2$).

Chiamando <u>ordine</u> di una funzione razionale φ in un punto P della riemanniana R, il numero zero, se ivi la φ non si annulla nè diviene infinita, l'intero positivo $+r$ se in P la φ presenta uno zero d'ordine r, l'intero negativo $-r$ se in P la φ presenta un polo d'ordine r, si può dire che:

<u>L'ordine di una funzione razionale $\varphi = \frac{A}{B}$ in un punto P della riemanniana R (o della curva $f=0$) è eguale alla differenza tra le molteplicità d'intersezione delle curve $A=0$, $B=0$ colla $f=0$ nel punto P.</u>

La serie lineare g_n^1, <u>priva di punti fissi</u>, costituita su $f=0$ dai gruppi di livello costante della funzione φ, possiede un punto di molteplicità r, in ogni punto in cui la φ abbia l'ordine $\pm r$; e viceversa. Poichè mediante una trasformazione birazionale della f ad ogni punto multiplo della g_n^1 risponde, sulla curva f' trasformata di f, un punto della stessa molteplicità per la g_n^1 trasformata, e poichè d'altra parte le φ, φ' trasformate l'una dell'altra, assumono lo stesso valore in due punti corrispondenti, ne viene che <u>l'ordine di una funzione razionale in un punto di R, è invariante per trasformazioni birazionali.</u>

81. Ritorniamo alla superficie di Riemann e riandiamo per un momento alla trasformazione dal modello primitivo formato da m fogli sovrapposti, al modello costituito da una sfera con p manichi. Ciascun foglio sul modello primitivo è una superficie del tipo sfera a cui si sono dati uno o più contorni, corrispondenti alle linee di passaggio da quel foglio al successivo. Quindi nella deformazione continua dal modello primitivo alla sfera con p manichi, ogni foglio verrà rappresentato da una certa regione della nuova superficie, limitata da uno o più contorni.

Così p.e. nel caso $p=1$, $m=2$, sulla sfera con un manico, o sul toro cui essa è riducibile, le regioni che rappresentano i due fogli, posson ritenersi delimitate dal cerchio di gola del toro e dal circolo equatoriale.

Su ciascuno dei contorni suddetti si avranno due punti imagini di quei punti critici che prima della deformazione fungevano da estremi della relativa linea di passaggio.

Ciò premesso, se sulla sfera con p manichi R si considera un ciclo omologo a zero, il quale ~~permette~~ penetri in varie delle suddette regioni, esso potrà sempre riguardarsi come una somma di cicli appartenenti ciascuno ad una sola regione (foglio), o circondante al più un sol punto critico, (cioè appartenente in parte ad un foglio ed in parte al successivo).

Dunque ogni ciclo omologo a zero è pure omologo ad una somma di intorni di punti ordinarî o di punti critici, dei tipi considerati al n° precedente. E poichè a ciascuno di tali intorni è applicabile il teorema di Cauchy (cioè che l'integrale di una funzione uniforme φ esteso al contorno è eguale al residuo della φ e quindi è nullo se la funzione è regolare in quell'intorno), così il teorema di Cauchy sarà applicabile più in generale sulla riemanniana ai cicli omologhi a zero; o, se si vuol dire altrimenti sulla riemanniana resa semplicemente connessa mediante il contorno K; dicendo che: L'integrale della funzione uniforme φ esteso ad un ciclo omologo a zero, è nullo se quel ciclo può ridursi a zero senza traversare punti all'infinito o punti nei quali la φ divenga infinita, e in ogni caso è uguale a $2\pi i \sum A_k$, ove $A_1, A_2, \ldots\ldots$ sieno i residui della φ nei punti singolari che occorre traversare.

Tutti i teoremi della teoria delle funzioni di variabile complessa potranno similmente interpretarsi sulla riemanniana, purchè si riferiscano a cicli omologhi a zero. In particolare potrà applicarsi su R il teorema dell'indicatore logaritmico.

Allorquando si tratti di una funzione φ che sia uniforme soltanto in una certa regione della riemanniana, già resa semplicemente connessa mediante il contorno K, i teoremi stessi, potranno applicarsi ai cicli di questa regione.

Capitolo ottavo.

Integrali abeliani.

82. Classificazione degl'integrali abeliani secondo le loro singolarità.

L'integrale di una funzione razionale $\varphi(z,u)$ di un punto scorrente sopra la superficie di Riemann R (o sopra la curva $f=0$) dicesi un integrale abeliano. Un tale integrale si suole indicare col simbolo

$$\int_{(z_0 u_0)}^{(z_1 u_1)} \varphi(z,u)\,dz,$$

ove $(z_0 u_0)(z_1 u_1)$ sono gli estremi dell'integrazione che s'imagina eseguita lungo un cammino σ che vada su R da $(z_0 u_0)$ a $(z_1 u_1)$. A proposito di questo simbolo veggasi quanto fu esposto al n° 80 relativamente alla definizione dei residui.

Si consideri ora un punto $P(a,b)$ della R e un intorno di questo punto. Avremo ivi uno sviluppo in serie della funzione φ, e lo sviluppo dell'integrale $\int \varphi\, dz$ preso da un punto fisso $(z_0 u_0)$ dell'intorno a un pun=

to (z,u) ivi variabile (integrale indefinito nell'intorno considerato), si otterrà integrando termine a termine la serie che dà i valori di φ. Se quindi lo sviluppo di φ non contiene termini in $\frac{1}{z-a}$ (o in $\frac{1}{z}$ qualora P sia all'infinito), l'integrazione condurrà ad uno sviluppo procedente per le sole potenze dell'argomento; mentre allorquando lo sviluppo di φ contenga il termine in $\frac{1}{z-a}$ (o in $\frac{1}{z}$) l'integrazione porterà $\log(z-a)$ (o risp. $\log z$). Nel primo caso si osservi inoltre che lo sviluppo dell'integrale non conterrà che un numero finito di potenze negative di $z-a$ (o risp. di potenze positive di z), sicchè si tratterà di una singolarità polare.

Dunque un integrale abeliano può ammettere sulla R soltanto due specie di punti singolari (ove diviene infinito): punti di singolarità polare e punti di singolarità logaritmica.

Quando l'integrale possegga sole singolarità polari dicesi un integrale di seconda specie; quando possegga anche singolarità logaritmiche dicesi un integrale di terza specie. – Vedremo più tardi come possano esistere anche integrali abeliani (non costanti) che sono dovunque finiti sulla riemanniana; tali integrali, che sono casi particolari di quelli di 2ª specie, si diranno integrali di prima specie. Affinchè l'integrale abeliano cui dà luogo la funzione φ sia di 2ª specie, occorre che φ abbia il residuo nullo in ogni punto della riemann, e quindi il valore dell'integrale $\int \varphi\, dz$, di seconda specie, lungo un ciclo qualunque omologo a zero, sarà nullo.

La proprietà s'inverte: cioè un integrale abeliano che abbia il valore zero lungo ogni ciclo riducibile a un punto, è di 2ª specie, perchè la funzione φ integranda ha in ogni punto il residuo nullo.

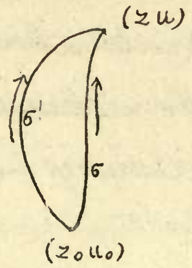
Perciò gl'integrali di 2ª specie possono anche definirsi come quelli che dànno valori nulli lungo tutti i cicli omologhi a zero.

Il concetto d'integrale abeliano è evidentemente invariante rispetto alle trasformazioni birazionali; anzi con una trasformazione birazionale della curva un integrale abeliano si muta in un altro della stessa specie. Ciò segue subito dalle definizioni date.

83. Periodicità degl'integrali abeliani. Periodi ciclici e periodi polari.

Un integrale di seconda specie calcolato lungo un ciclo omologo a zero dà un valore nullo; ma la stessa cosa non può affermarsi in generale per il valore dell'integrale lungo un ciclo non riducibile a un punto.

È facile anzi verificare che se un integrale abeliano dà valore zero lungo ogni ciclo (anche non riducibile a un punto), esso non è altro che una funzione razionale. Infatti, nell'ipotesi posta, il valore dell'integrale $\int_{(z_0 u_0)}^{(z,u)} \varphi(z,u)\,dz$ riesce indipendente dal cammino d'integrazione percorso per andare da $(z_0 u_0)$ a $(z\,u)$, giacchè indicando con σ e σ' due cammini diversi che vadano da $(z_0 u_0)$ a $(z u)$, si ha



$$\int_{\sigma-\sigma'} \varphi\, dz = \int_{\sigma} \varphi\, dz - \int_{\sigma'} \varphi\, dz = 0,$$

perchè il cammino $\sigma - \sigma'$ è chiuso.

Considerando quindi l'integrale come funzione del suo limite superiore, si ottiene una funzione uniforme del punto scorrente sulla R, la quale è dotata di sole singolarità polari: tale funzione sarà dunque razionale in (z, u).

Si avverta che le funzioni razionali posson esser considerate effettivamente come integrali abeliani (di seconda specie). - Così la funzione razionale $\varphi(z, u)$ non è che l'integrale abeliano cui dà luogo la funzione razionale

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dz} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial u}}.$$

Si tratti ora di un qualunque integrale di seconda specie $\int \varphi\, dz$, e diciamo ancora σ, σ' due cammini che vadano da $(z_0 u_0)$ a $(z u)$. Se questi due cammini possono ridursi l'uno all'altro tenendo fissi gli estremi d'integrazione, cioè se il cammino chiuso $\sigma - \sigma'$ è riducibile ad un punto, verrà ancora $\int_{\sigma-\sigma'} = \int_{\sigma} - \int_{\sigma'} = 0$.

Ricordando che sulla riemanniana R trasformata in una superficie semplicemente connessa R' mediante il solito contorno K, ogni cammino chiuso può ri-

-dursi ad un punto per deformazione continua, si conclude che <u>sulla riemanniana R' (limitata dal contorno K) un integrale qualunque di 2ª specie è una funzione uniforme.</u> (*)

Cosa accade se si lascia l'estremo superiore d'integrazione (z, u) libero di variare sulla R, senza il vincolo di non traversare il contorno K?

Due cammini σ, σ' da $(z_0 u_0)$ a $(z\, u)$ non saranno allora necessariamente riducibili l'uno all'altro; però il ciclo $\sigma - \sigma'$ sarà analogo ad una combinazione lineare dei $2p$ cicli fondamentali $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p$:

$$\sigma - \sigma' \sim \sum_{h=1}^{p} (m_h A_h + n_h B_h)$$

le m, n denotando interi positivi o negativi.

Si ha cioè:

$$(7) \qquad \tau = \sigma - \sigma' - \sum_{h=1}^{p} (m_h A_h + n_h B_h) \sim 0,$$

(*) Si potrà rilevare qui un'apparente contraddizione col teorema che "sul piano o sulla sfera ogni funzione uniforme dotata di sole singolarità polari, è una funzione razionale". Infatti al n° 78 abbiamo veduto come la superficie R' possa deformarsi per continuità in una sfera, riducendo ad un punto O il suo contorno K; e quindi a prima vista potrebbe sembrare che un qualunque integrale di 2ª specie I venisse in definitiva ad essere uniforme su tutta la sfera e con sole singolarità polari. Ma in realtà occorre tener conto del fatto che la trasformazione dalla superficie R' alla sfera non è <u>conforme</u> e quindi la funzione I non è una funzione di variabile complessa nel senso di <u>Cauchy</u>. Si osservi poi che, in O, la I viene ad assumere gl'infiniti valori di cui essa era capace sul contorno K.

e per conseguenza l'integrale esteso al ciclo τ (il quale è composto del ciclo $\sigma - \sigma'$ e dei cicli $A_h\, B_h$ riuniti tra loro da linee percorse una volta in un senso e un'altra volta nel senso opposto) dà il valore zero.

Indicando pertanto con a_h, b_h i valori rispettivi dell'integrale lungo i cicli B_h, A_h avremo:

$$\int_\sigma = \int_{\sigma'} + \sum (n_h a_h + m_h b_h).$$

Le costanti a_h e b_h si chiamano <u>periodi</u> <u>ciclici</u> dell'integrale considerato: "ciclici" per ricordare che provengono da effettivi cicli (non omologhi a zero) della riemanniana. Una denominazione più propria, ma meno breve e perciò meno usata, sarebbe quella di <u>moduli di periodicità</u>.

Si può enunciare il risultato dicendo che:

<u>I possibili valori d'un integrale abeliano di 2ª specie (in particolare di 1ª) in un punto qualunque della riemanniana, si ottengono tutti da uno di essi aggiungendo una qualunque combinazione lineare a coefficienti interi, positivi o negativi, dei 2p periodi ciclici</u>.

Esaminiamo il caso di un integrale di 3ª specie. Il valore dell'integrale $\int \varphi\, dz$ esteso ad un ciclo τ omologo a zero non sarà allora necessariamente nullo. Se per ridurre il ciclo a zero si deve traversare un certo numero di punti ove la φ abbia i residui $r_1, r_2, \ldots\ldots$, diversi da zero, il ciclo stesso potrà riguardarsi come una somma di multipli dei cicli limitanti gl'in=

torni dei punti stessi, e quindi il valore dell'integrale lungo τ risulterà eguale a $2\pi i \sum q_k r_k$; $q_1, q_2, \ldots\ldots$ essendo interi positivi o negativi.

L'omologia (7) ci dà allora:

$$\int_\sigma = \int_{\sigma'} + \sum_{h=1}^{p} (n_h a_h + m_h b_h) + 2\pi i \sum_{k=1}^{t} q_k r_k \quad ,$$

a_h, b_h essendo ancora i <u>periodi</u> (<u>ciclici</u>) dell'integrale di 3ª specie $\int \varphi dz$ lungo B_h, A_h e $2\pi i r_1, 2\pi i r_2, \ldots\ldots, 2\pi i r_t$ essendo i <u>periodi polari</u> dell'integrale (cioè i periodi che provengono dai poli della funzione integranda φ). Dunque:

<u>I valori di un integrale di 3ª specie in un punto si ottengono tutti aggiungendo ad uno di essi combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi ciclici e dei periodi polari.</u>

È facile dimostrare che <u>tra i periodi polari</u> $2\pi i r_1, 2\pi i r_2 \ldots\ldots 2\pi i r_t$ <u>passa la relazione</u> $\sum r_k = 0$.

Consideriamo infatti il ciclo, omologo a zero, che risulta dal sommare tra loro i cicli nulli che limitano gl'intorni dei t punti ove φ lascia residui non nulli (tra cui può esser compreso un punto all'infinito non polo per φ). Questo ciclo, come ben si vede pensando alla riemanniana R' trasformata in una sfera, in quanto avvolge <u>tutti</u> i t punti suddetti può ridursi ad un punto senza traversarne alcuno. Ciò prova senz'altro che $2\pi i \sum r_k = 0$.

<u>Le proprietà segnalate</u> circa le possibili singolarità e circa la polidromia (data da un certo numero di

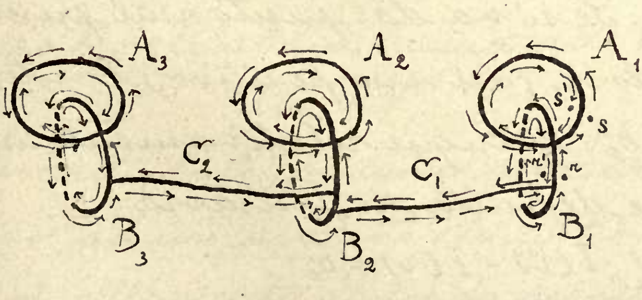
periodi ciclici e di periodi polari) sono caratteristiche per gl'integrali abeliani.

Infatti se I è una funzione polidroma di un punto scorrente sulla riemanniana R, la quale sia dotata delle proprietà suddette, poichè in ogni punto di R - ci riferiamo al modello formato da m fogli sovrapposti - la I ammette uno sviluppo in serie di potenze (positive o negative) dell'argomento, esisteranno nell'intorno di ogni punto della R le derivate dei varî ordini rispetto alla variabile z, e saranno indipendenti dalla direzione secondo cui vengono calcolate.

Siccome inoltre l'incremento che riceve la funzione I, allorquando si passa da un punto P ad un punto infinitamente vicino P' è indipendente dai periodi, cioè è il medesimo qualunque sia il valore di I col quale si arriva in P, così la derivata $\frac{dI}{dz}$ sarà una funzione uniforme, avente in tutto il piano sole singolarità polari (perchè nella derivazione spariscono anche le singolarità logaritmiche), cioè una funzione razionale di (z, u). Dunque I è un integrale abeliano.

84. Disuguaglianza fondamentale tra le parti reali e le parti imaginarie dei periodi di un integrale di 1ª specie.

Fissiamo l'attenzione sopra la riemanniana R formata da m fogli. Si potrà allora definire ben nettamente il senso positivo del contorno K, su questo modello. Anzitutto è chiaro il modo di costruire il contorno K sul modello considerato: basta seguire la trasformazione continua inversa di quella che ci aveva servito a passare dalla superficie ad n fogli alla sfera a p manichi. - In relazione a ciascun foglio, che sia connesso al successivo mediante k_i linee di passaggio, si avranno $k_i - 1$ cicli A, avvolgenti sul foglio considerato altrettante linee di passaggio; e $k_i - 1$ cicli B conducenti da un punto di un ciclo A allo stesso punto mediante il passaggio sul foglio successivo attraverso alla k_i-esima linea, e il ritorno sul foglio primitivo traversando la linea di passaggio avvolta dal ciclo A considerato. Le retrosezioni (A, B) saranno poi congiunte a catena mediante le linee C, come indica la seguente figura schematica che si riferisce al caso $p = 3$.



Su ciascuno dei fogli resta fissato un senso positivo concorde con quello fissato sul piano z della variabile indipendente, e che, data l'orientazione ordinaria degli assi, è quello da destra verso sinistra. Orbene, preso un punto r, su quel bordo del taglio B_1 cui non fa capo il taglio C_1, si cominci a percorrere il bordo stesso nel verso positivo e si prosegua quindi per continuità descrivendo l'intero contorno K, come indicano le freccie. In tal modo, su ciascun bordo dei tagli (cioè su ciascun elemento del contorno) verrà definito il verso che noi assumiamo come positivo pel contorno stesso. Ciò posto si consideri un integrale I di prima specie appartenente alla riemanniana considerata, che noi imaginiamo tagliata lungo il contorno K, in tal guisa che I sarà una funzione uniforme dovunque finita. Dalla funzione I saranno determinate due funzioni reali uniformi pure finite in ogni punto di R', tali che $I = U + iV$ (U parte reale e V parte imaginaria di I). Indichiamo con a_h e b_h i periodi di I lungo i cicli B_h A_h percorsi nel verso positivo. Relativamente alla funzione uniforme I definita sull'area R', a_h, b_h che significato avranno? Vediamo qual è il significato di a_1, b_1. Se si va dal punto r al punto r' seguendo il ciclo A_1 (nel verso positivo), l'integrale I aumenta di b_1: dunque relativamente alla funzione uniforme definita da I si avrà:

$$I(r') - I(r) = b_1 .$$

Similmente

$$I(s) - I(s') = a_1 ,$$

perchè per andare da s ad s' si percorre B nel verso negativo.

Ponendo

$$a_h = a_h' + i a_h'' \quad , \quad b_h = b_h' + i b_h'' ,$$

verrà evidentemente

$$\mathcal{U}(r') - \mathcal{U}(r) = b'_1 \quad , \quad V(r') - V(r) = b''_1$$

$$\mathcal{U}(s) - \mathcal{U}(s') = a'_1 \quad , \quad V(s) - V(s') = a''_1 .$$

Quanto alle differenze tra i valori della funzione uniforme I (e quindi delle U, V) in due punti affacciati a bordi opposti di una linea C, si vede facilmente ch'esse son nulle perchè due tali punti posson esser congiunti da un ciclo omologo a zero (si può prendere ad es. il ciclo che va da un punto all'altro seguendo il contorno, giacchè gli elementi corrispondenti sull'uno o sull'altro bordo vengono percorsi in senso contrario).

Ricordiamo ora, con Riemann, la disuguaglianza

$$\int_K U\,dV > 0 \quad (K \text{ percorso positivamente}),$$

che si deduce facilmente dalla formola di Green(*).
Il contributo portato all'integrale dalla parte di esso che è relativa ad un archetto infinitesimo del contorno K, che abbia la sua sede in r sia

$$\mathcal{U}(r)\,dV\,;$$

a tale contributo possiamo associare il contributo relativo ad un archetto che abbia la sua sede nel punto r' affacciato al bordo opposto. Il valore assoluto dell'incremento subito dalla funzione V è evidentemente lo stesso nei due casi; solo il segno dell'incremento è diverso, perchè nel 1° caso l'arco elementare nel calcolo dell'integrale vien percorso in

(*) Cfr. p. e. Picard, Traité d'Analyse, t. II° 1905, pp. 432 e 451: Appel e Goursat, n° 69: p. 145.

un senso, mentre nel 2° caso vien percorso nel senso opposto. Avremo dunque come espressione del contributo portato dall'elemento r':

$$-U(r')\,dV = -(U(r)+b'_1)\,dV \; .$$

Sicchè complessivamente i due elementi considerati portano all'integrale il contributo

$$U(r)\,dV - U(r')\,dV = -b'_1\,dV.$$

Facendo la somma di queste coppie di contributi per tutti gli elementi dei due bordi del taglio B_1 avremo il contributo totale

$$-b'_1 \int_{B_1} dV = -b'_1\, a''_1 \, .$$

Similmente associamo al contributo $U(s)\,dV$ portato da un arco elementare che abbia la sua sede in s, il contributo $-U(s')\,dV$ portato da un arco elementare avente la sede in s'. Verrà:

$$-U(s')\,dV = -\big(U(s) - a'_1\big)\,dV,$$

e quindi la somma dei due contributi associati risulta $a'_1\,dV$. Estendendo la somma a tutti gli elementi di A_1 si ottiene

$$a'_1 \int_{A_1} dV = a'_1\, b''_1 \, .$$

La prima retrosezione dà dunque all'integrale il contributo $a'_1 b''_1 - a''_1 b'_1$. Complessivamente avremo:

$$\int_K U\,dV = \sum_{h=1}^{p} (a'_h b''_h - a''_h b'_h).$$

Si conclude pertanto colla <u>disuguaglianza fondamentale di Riemann</u>:

$$(8) \qquad \sum_{h=1}^{p} (a'_h b''_h - a''_h b'_h) > 0 \, .$$

Questa disuguaglianza esclude l'uguaglianza a meno che $I = U + iV$ non si riduca ad una costante (nel qual caso le a, b son tutte nulle). – Poichè quando l'integrale di 1ª specie avesse reali o imaginarî puri tutti i periodi, oppure nulli tutti gli a_h, o nulli tutti i b_h la disuguaglianza diverrebbe un'uguaglianza, così si conclude che <u>un integrale di 1ª specie avente tutti i periodi reali o imaginarî puri, oppure nulli tutti i periodi a_h, o nulli i b_h, riducesi ad una costante</u>.

Dalla (8) deducesi agevolmente un limite superiore pel numero degl'integrali di 1ª specie linearmente indipendenti. Se $I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots$ son <u>integrali di 1ª specie</u> relativi ad una medesima riemanniana, si dice ch'essi son <u>linearmente indipendenti</u> quando una loro combinazione lineare

$$h_1 I_1 + h_2 I_2 + h_3 I_3 + \ldots\ldots$$

a coefficienti costanti, non tutti nulli, non riducesi mai ad una costante.

Perchè ciò sia occorre e basta, evidentemente, che una combinazione lineare analoga delle funzioni razionali integrande non sia mai identicamente nulla (cioè nulla per tutti i punti di R).

Orbene, dico che <u>il numero r degl'integrali di 1ª specie linearmente indipendenti appartenenti ad una riemanniana di genere p, non può superare il genere</u>.

Denotiamo infatti con $a_h^{(i)}, b_h^{(i)}$ $(h = 1, .., p)$ i periodi ciclici dell'integrale I_j e cerchiamo se è possibile costruire un integrale di 1ª specie $h_1 I_1 + h_2 I_2 + \cdots\cdots + h_r I_r$ i cui periodi a siano tutti nulli. A tal scopo occorrerà determinare le h in guisa che sieno soddisfatte le equazioni

$$h_1 a_h^{(1)} + h_2 a_h^{(2)} + \cdots\cdots + h_r a_h^{(r)} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

Ora, se fosse $r > p$, in queste equazioni almeno $r-p$ delle h resterebbero arbitrarie e quindi si potrebbero dare loro valori non nulli. Esisterebbe pertanto un integrale $I = h_1 I_1 + h_2 I_2 + \cdots\cdots + h_r I_r$ corrispondente a valori non tutti nulli delle h, e i cui periodi $\underline{a}$ sarebbero nulli, e per conseguenza I risulterebbe costante. Ciò è contrario all'ipotesi che gl'integrali $I_1, I_2, \ldots, I_r$ siano indipendenti.

85. Integrali abeliani di 1ª specie: loro forma e loro numero.

Ci proponiamo ora di contare quanti siano effettivamente gl'integrali abeliani di 1ª specie appartenenti alla curva $f(z, u) = 0$, di genere p, e di assegnare la forma (necessaria e sufficiente) di un integrale di 1ª specie.

Sia $\varphi(z, u) = 0$ una curva d'ordine $m-3$, aggiunta alla f d'ordine m. Intorno alla curva f conserviamo le ipotesi fatte al n° 75: che cioè si tratti di una curva dotata di soli punti doppî nodali e disposta genericamente rispetto agli assi. Ciò premesso consideriamo l'integrale abeliano

$$(9) \qquad \int \frac{\varphi(z,u)}{f'_u}\, dz$$

Dico che tale integrale è di 1ª specie. Occorrerà esaminare come esso si comporta nei poli della funzione razionale $\frac{\varphi}{f'_u}$ e negli m punti all'infinito di f.

Sbarazziamo anzitutto il terreno dai punti all'infinito. La curva $f'_u = 0$, polare del punto u_∞, rispetto alla $f=0$, sarà d'ordine $m-1$ (in $\underline{u}$) e non passerà per alcuno dei punti all'infinito di f (perchè altrimenti qualche asintoto di f sarebbe parallelo all'asse u).

Ciò posto trasformiamo la funzione razionale $\varphi(z,u)$ introducendo l'omogeneità nelle coordinate $(z = \frac{z_1}{z_0}, u = \frac{z_2}{z_0})$. Si viene ad ottenere al numeratore un polinomio che contiene il fattore z_0^2 ($z_0 = 0$ essendo la retta all'infinito); e quindi il numeratore uguagliato a zero rappresenta una curva che ha molteplicità d'intersezione 2 (o maggiore) in ciascun punto all'infinito di f; mentre il denominatore dà una curva che ha con f molteplicità d'intersezione zero negli stessi punti. Ricordando il teorema stabilito nell'osservazione 2ª con cui si chiude il n° 80, si conclude che $\frac{\varphi}{f'_u}$ ha uno zero almeno doppio in ciascun punto all'infinito di f.

Lo sviluppo di $\frac{\varphi}{f'_u}$ nell'intorno di uno di questi punti all'infinito procederà pertanto per potenze ascendenti di $\frac{1}{z}$ e la minima potenza ivi contenuta sarà $(\frac{1}{z})^2$. Ne deriva che l'integrale ( ) avrà nel punto considerato uno zero almeno di 1° ordine.

Esaminiamo ora i poli di $\frac{\varphi}{f'_u}$. Questi poli andranno cercati tra i punti comuni alla $f=0$ e alla $f'_u=0$, cioè:
1°) tra i punti di contatto delle tangenti ad f mandate dal punto u_∞.
2°) tra i nodi di f.
Quanto ai punti della 1ª classe si vede subito che in essi l'integrale (9) conservasi finito. Si ha infatti

$$\int \frac{\varphi(z,u)}{f'_u}\,dz = -\int \frac{\varphi(z,u)}{f'_z}\,du,$$

e la funzione integranda del 2° membro conservasi finita in ciascuno di quei punti, perchè altrimenti si avrebbe $f'_u = f'_z = 0$ e si tratterebbe di un punto doppio della curva f. Alla stessa conclusione si arriverebbe applicando il teorema del n° 80 (oss. 2ª).

Per un nodo P della curva $f=0$ passa semplicemente la $f'_u=0$, sempre per la posizione generica degli assi, cioè ha molteplicità d'intersezione 1 con ciascuno dei rami di f uscenti da P. La φ poi, essendo aggiunta ad f, ha con questi rami molteplicità d'intersezione almeno uguale ad 1: e quindi la funzione $\frac{\varphi}{f'_u}$ ha in ciascuno dei due punti della riemanniana R, che corrispondono ad un punto doppio P, un punto di regolarità (che può anche essere uno zero). L'integrale (9) conservasi pertanto finito nei punti stessi. – Si conclude che l'integrale (9) è dovunque finito sulla R, cioè che trattasi di un integrale di 1ª specie. – In corrispondenza alle p aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m-3$ si avranno p integrali linearmente indipendenti di 1ª specie; e poichè già si è visto (nº prec.) che il numero r degl'integrali di 1ª specie indipendenti è $\leq p$, così si conclude precisamente che $r = p$.

Si arriva pertanto al teorema:

Una curva $f(z,u)=0$ d'ordine m e genere p possiede precisamente p integrali abeliani linearmente indipendenti di 1ª specie. Se $\varphi_1(z,u)=0$, $\varphi_2(z,u)=0, \ldots\ldots, \varphi_p(z,u)=0$ sono p curve linearmente indipendenti d'ordine $m-3$ aggiunte ad f, ogni integrale di 1ª specie ha la forma

$$h_1 \int \frac{\varphi_1(z,u)}{f'_u}\,dz + h_2 \int \frac{\varphi_2(z,u)}{f'_u}\,dz + \cdots\cdots + h_p \int \frac{\varphi_p(z,u)}{f'_u}\,dz .$$

Osservazione 1ª. Per arrivare a questo teorema non occorre neppure conoscere esattamente il numero delle curve indipendenti d'ordine $m-3$ aggiunte ad f; basta semplicemente stabilire che questo numero non è inferiore a p; perchè allora da un lato per il numero r degl'integrali di 1ª specie indipendenti si ha la disuguaglianza $r \leq p$; d'altro lato si ha $r \geq p$ e quindi ne risulta $r = p$.

Ora che r (nº delle aggiunte indipendenti d'ordine $m-3$) sia $\geq p$, segue subito dal fatto che i punti doppî di f presentano alle curve d'ordine $m-3$ che debbano contenerli $d-\varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$) condizioni, e quindi l'infinità $r-1$ di queste curve, come abbiamo già notato al nº 44, soddisfa alla disuguaglianza

$$r-1 \geq \frac{m(m-3)}{2} - d + \varepsilon, \quad \text{ossia:} \quad r-1 \geq p-1+\varepsilon.$$

Osservazione 2ª. Nell'enunciato del teorema non abbiamo ricordato le ipotesi restrittive che ci hanno servito per la dimostrazione: che cioè la $f=0$ abbia soli nodi e sia disposta genericamente rispetto agli assi. Ciò perchè tenendo conto:

1°) del fatto che una trasformazione birazionale della f (in particolare una trasformazione cremoniana operante sul piano di f) muta un integrale abeliano di 1ª specie relativo ad f in un integrale analogo relativo alla curva piana trasformata f_1;

2°) del fatto che in una tale trasformazione una funzione razionale canonica del punto variabile su f vien mutata in una funzione analoga del punto variabile su f_1;

si dimostra agevolmente che la conclusione vale per una curva f_1 dotata di singolarità qualunque e disposta comunque rispetto agli assi.(*)

86. Proprietà dei periodi degl'integrali di 1ª specie.

1ª) Diciamo $a_{1h}, b_{1h}; a_{2h} b_{2h}; \dots; a_{ph} b_{ph}$ $(h=1,2,\dots,p)$ i periodi lungo i cicli B_h, A_h degli integrali di 1ª specie indipendenti $I_1, I_2, \dots, I_p$, e poniamo al solito

$$a_{hk} = a'_{hk} + i a''_{hk} \quad , \quad b_{hk} = b'_{hk} + i b''_{hk} . \quad (h, k = 1, 2, \dots, p)$$

Un integrale di 1ª specie qualunque $\Sigma \lambda_h I_h$ ha per periodi $\Sigma \lambda_h a_{hk}$, $\Sigma \lambda_h b_{hk}$, e quindi se si pone

$$\lambda_h = \lambda'_h + i \lambda''_h$$

(λ'_h, λ''_h essendo numeri reali), come periodi della parte rea-

(*) Cfr. p. e. Appel e Goursat, nⁱ 141, 142.

le U dell'integrale $I = U + iV$, avremo i numeri reali

$$\sum_{h=1}^{p} (h'_h a'_{hk} - h''_h a''_{hk}) , \quad \sum_{h=1}^{p} (h'_h b'_{hk} - h''_h b''_{hk}) , \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Dico che si possono scegliere i parametri h_h (cioè i numeri reali h'_h, h''_h) in tal guisa che i $2p$ periodi di U (cioè le parti reali dei $2p$ periodi di I) prendano valori assegnati ad arbitrio. Poichè le

$$\begin{aligned} \sum (h'_h a'_{hk} - h''_h a''_{hk}) &= \alpha_k \\ \sum (h'_h b'_{hk} - h''_h b''_{hk}) &= \beta_k \end{aligned} \qquad (k = 1, \ldots, p) ,$$

ove α_k, β_k sieno $2p$ numeri reali assegnati, sono $2p$ equazioni lineari nelle $2p$ incognite $h'_1, h'_2, \ldots h'_p, h''_1, h''_2 \ldots$ $\ldots h''_p$, affinchè esse dieno valori finiti (reali) per queste incognite occorre e basta che il determinante D dei coefficienti sia diverso da zero. Ora così accade effettivamente, perchè se fosse $D = 0$, le equazioni stesse sarebbero possibili per valori finiti non tutti nulli delle h'_h; h''_h, con $\alpha_k = \beta_k = 0$ $(k = 1, \ldots, p)$, e quindi sarebbe possibile costruire un integrale di 1ª specie (non costante) avente tutti i periodi imaginari puri (il che non è conciliabile colla disuguaglianza riemanniana). Si conclude pertanto che:

<u>Le parti reali (o, similmente, le imaginarie) dei $2p$ periodi di un integrale abeliano di 1ª specie posson esser assegnate arbitrariamente.</u>

<u>Se si assegnano valori tutti nulli si ottiene una costante.</u>

2ª) Consideriamo ora due integrali di 1ª specie I, J e designamo rispettivamente con a_h, b_h e α_h, β_h $(h = 1, \ldots, p)$

i loro periodi. Immaginiamo la superficie R' che deriva dalla riemanniana R resa semplicemente connessa mediante il contorno K, e ricordiamo che su tutta la R' gli integrali I, J son funzioni finite, uniformi. — Possiamo applicare il teorema di Cauchy alla funzione $I \frac{dJ}{dz}$ considerata sulla superficie R' limitata dal ciclo K, omologo a zero. Avremo (n° 81) che $\frac{1}{2\pi i}\int_K I\,dJ$ (K essendo percorso nel verso positivo) è uguale alla somma dei residui di $I\frac{dJ}{dz}$. È ben chiaro che al finito i residui di $I\frac{dJ}{dz}$ sono tutti nulli. Infatti nell'intorno di un punto $(z_0 u_0)$ ove la funzione <u>razionale</u> $\frac{dJ}{dz}$ presenti un polo, si ha uno sviluppo del tipo (n° 85):

$$\frac{A}{(z-z_0)^{\frac{1}{2}}} + B + C(z-z_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots\cdots ,$$

e quindi, poichè I è finito, la sola potenza negativa di $z-z_0$, che comparisca nello sviluppo di $I\frac{dJ}{dz}$ è $(z-z_0)^{\frac{1}{2}}$. In un punto all'infinito I si conserva finito e $\frac{dJ}{dz}$ presenta uno zero di 2° ordine; il prodotto delle due funzioni presenterà dunque uno zero di 2° ordine (almeno), e perciò il residuo sarà nullo. Avremo pertanto

$$\int_K I\,dJ = 0 .$$

Ora il valore di quest'integrale si può calcolare in funzione dei periodi di I, J ripetendo il ragionamento del n° 84; si trova così

$$\int_K I\,dJ = \Sigma(a_h \beta_h - \alpha_h b_h) .$$

Concludendo <u>si ottiene la relazione</u>

$$\sum_{h=1}^{p}(a_h\beta_h - \alpha_h b_h) = 0$$

<u>che lega i periodi normali</u> a_h e b_h <u>e</u> α_h, β_h <u>di due inte</u>-

grali I, J di 1^a specie, intendendosi per periodi normali i periodi relativi alle retrosezioni.

87. Integrali normali di 1^a specie.

Sieno I_1, I_2, I_p, p integrali indipendenti di 1^a specie, e sia

	A_1	A_2	......	A_p	B_1	B_2	......	B_p
I_1	a_{11}	a_{12}	......	a_{1p}	b_{11}	b_{12}	......	b_{1p}
I_2	a_{21}	a_{22}	......	a_{2p}	b_{21}	b_{22}	......	b_{2p}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
I_p	a_{p1}	a_{p2}	......	a_{pp}	b_{p1}	b_{p2}	......	b_{pp}

la tabella dei periodi normali ad essi relativi (con a_{hk}, b_{hk} si sono indicati i periodi dell'integrale I_h relativi al passaggio attraverso i tagli A_k, B_k, cioè i valori dell'integrale lungo i cicli B_k, A_k). Scriviamo le p equazioni lineari nelle λ:

$$
(10)\quad \begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_p a_{p1} = 1 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_p a_{p2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_{1p} + \lambda_2 a_{2p} + \dots + \lambda_p a_{pp} = 0 \end{cases},
$$

ed osserviamo che il determinante dei coefficienti non può esser nullo, perchè altrimenti si potrebbero determinare per le λ valori finiti non tutti nulli scrivendo nei 2^i membri tutti zeri, e si otterrebbe così un integrale $\lambda_1 I_1 + \dots + \lambda_p I_p$ avente periodi nulli lungo i cicli B contrariamente alla disuguaglianza riemanniana.

Si potranno pertanto risolvere le equazioni (10) e si avremo certi valori finiti (non tutti nulli) per le $h_1, h_2, \dots, h_p$. L'integrale $J_1 = h_1 I_1 + h_2 I_2 + \dots + h_p I_p$ avrà i periodi:

	A_1	A_2	$\dots$	A_p	B_1	B_2	$\dots$	B_p
J_1	1	0	$\dots$	0	τ_{11}	τ_{12}	$\dots$	τ_{1p}

Similmente si potranno determinare gl'integrali $J_2, \dots, J_p$ aventi valori nulli lungo i cicli B, eccezion fatta rispettivamente pei cicli $B_2, \dots, B_p$ lungo cui essi abbiano il valore 1. Si otterrà la tabella seguente:

	A_1	A_2	$\dots$	A_p	B_1	B_2	$\dots$	B_p
J_1	1	0	$\dots$	0	τ_{11}	τ_{12}	$\dots$	τ_{1p}
J_2	0	1	$\dots$	0	τ_{21}	τ_{22}	$\dots$	τ_{2p}
$\vdots$								
J_p	0	0	$\dots$	1	τ_{p1}	τ_{p2}	$\dots$	τ_{pp}

Gl'integrali $J_1, \dots J_p$ che sono evidentemente indipendenti, perchè una loro combinazione lineare qualunque $\mu_1 J_1 + \dots + \mu_p J_p$ a coefficienti non tutti nulli ha i periodi $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ lungo tutti i cicli B, diconsi <u>integrali normali di 1^a specie</u>.

Il determinante Δ formato dalle τ è diverso da zero, perchè altrimenti esisterebbe una combinazione degl'integrali J aventi periodi nulli lungo tutti i cicli A.

Si osservi infine che la relazione dimostrata alla fine del n° prec., applicata alle coppie di integrali normali, dà $\tau_{hk} = \tau_{kh}$, cioè il <u>determinante Δ è simmetrico</u>.

88. Integrali normali di 2ª specie.

Proponiamoci di costruire un integrale abeliano di 2ª specie elementare, che abbia cioè un sol polo di 1° ordine nel punto (semplice) $(\xi\eta)$ della curva $f(zu)=0$ d'ordine m. A tal scopo conduciamo la retta $az+bu+c=0$ tangente ad f nel punto $(\xi\eta)$, e consideriamo una curva $\psi(z,u)=0$ d'ordine $m-2$, aggiunta ad f, e passante per gli $m-2$ punti ove la tangente suddetta sega ulteriormente la curva. Il numero delle aggiunte d'ordine $m-2$ indipendenti che soddisfano a queste condizioni, noi già lo conosciamo, perchè dette aggiunte segano su f fuori dei punti fissi una g^{p}_{2p} completa; ma eviteremo di far uso di tale acquisizione, che implica il teorema di Riemann-Roch (almeno per le serie non speciali) volendo più tardi esporre una nuova dimostrazione di questo teorema, poggiata sull'uso degl'integrali abeliani.

Consideriamo l'integrale

$$H = \int \frac{\psi(z,u)}{(az+bu+c)\,f'_u}\,dz\,,$$

ove $\psi=0$ è una aggiunta d'ordine $m-2$, del sistema definito, che non contiene come parte la tangente fissata. - Si può sempre considerare una tale aggiunta, perchè la dimensione l del sistema definito soddisfa alla disuguaglianza

$$l \geq \frac{m(m-1)}{2} - 1 - d - (m-2)\,,$$

cioè $l \geq p$; mentre le curve contenenti come parte la tangente sono ∞^{p-1}.

Profittando del teorema stabilito nell'Oss. 2ª del n° 80, si conclude, come al n° 85, che la funzione integranda ha uno zero di 2° ordine (almeno) in ciascuno dei punti all'infinito di f, e che non diviene infinita nei d nodi della curva, per tal modo che l'integrale rimane finito, sia nei punti all'infinito, come nei nodi.

Quanto ai punti di diramazione della funzione u di z, prendendo come variabile indipendente la u, si vede che in essi l'integrale si conserva finito.

Ci resta da esaminare soltanto il punto $(\xi\eta)$. Ivi il denominatore della funzione integranda presenta uno zero doppio, mentre il numeratore non si annulla: dunque la funzione integranda presenta in $(\xi\eta)$ un polo doppio; e perciò l'integrale presenterà in $(\xi\eta)$ un polo di 1° ordine o un punto di singolarità logaritmica, secondochè nello sviluppo della funzione integranda mancherà o no il termine in $\frac{1}{z-\xi}$.

Ma questo termine deve necessariamente mancare, perchè altrimenti l'integrale possiederebbe un sol punto logaritmico e quindi un sol periodo polare, il che è inconciliabile col fatto che la somma dei periodi polari deve esser nulla (n° 84).

Si conclude che l'integrale H è di 2ª specie.

Il residuo ρ dell'integrale H relativamente al polo $(\xi\eta)$ sarà, a meno del segno, il coefficiente di $\frac{1}{(z-\xi)^2}$ nello sviluppo della funzione integranda.

Sia ora $\mathcal{L}$ un integrale qualunque di 2^a specie avente il solo polo semplice $(\xi\eta)$, e sia σ il suo residuo relativo a questo polo; allora l'integrale di 2^a specie

$$\sigma H - \rho \mathcal{L}$$

avrà residuo nullo nel polo di 1^o ordine (ξ, η), cioè questo punto non sarà più un polo per l'integrale stesso, in tal guisa che l'integrale $\sigma H - \rho\mathcal{L}$ risulterà dovunque finito (ossia di 1^a specie). Potremo pertanto scrivere:

$$(11) \qquad \mathcal{L} = \alpha H + \beta_1 I_1 + \cdots\cdots + \beta_p I_p ,$$

ove si è posto $\alpha = \frac{\sigma}{\rho}$, e ove $I_1, \ldots, I_p$ rappresentano p integrali indipendenti di 1^a specie.

<u>La (11) dà la forma di un integrale elementare qualunque di 2^a specie, relativo al polo semplice</u> $(\xi\eta)$.

Ecco ora come si costruisce <u>l'integrale normale elementare di 2^a specie, relativo al polo</u> (ξ, η).

Si può anzitutto scegliere il coefficiente α in guisa che il residuo dell'integrale (11) nel polo $(\xi\eta)$ sia l'unità. Diciamo a_{hk}, b_{hk} i periodi normali dell'integrale I_h attraverso i tagli A_k, B_k, ed a_k, b_k i periodi dell'integrale H attraverso i tagli stessi. Si possono allora determinare le β in tal guisa che

$$\beta_1 a_{1k} + \beta_2 a_{2k} + \cdots\cdots\cdots + \beta_p a_{pk} = -\alpha a_k . \quad (k = 1, \ldots, p)$$

Ciò è sempre possibile, perchè il determinante delle a_{hk} è diverso da zero (n° 87). L'integrale di 2^a specie rispondente ai valori definiti delle α, β s'indicherà con E; i suoi periodi sono

$$\frac{A_1\ A_2 \ldots\ldots A_p\ B_1\ B_2 \ldots B_p}{0\ 0 \ldots\ldots 0\ \ell_1\ \ell_2 \ldots \ell_p}$$

Esso è determinato (a meno di una costante addittiva) perchè, se E' è un integrale godente delle stesse proprietà di E, la differenza $E-E'$ è un integrale <u>di 1ª specie</u> coi periodi nulli attraverso ai tagli A, cioè una costante. - L'integrale E si definisce appunto come l'integrale normale di 2ª specie relativo al polo $(\xi\eta)$.

<u>I periodi $\ell_1\ \ell_2 \ldots \ell_p$ si possono esprimere razionalmente rispetto al polo $(\xi\eta)$</u>, come ora proveremo.

Detto J_h l'integrale normale di 1ª specie definito al nº prec. $(h=1,2,..,p)$, consideriamo l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_K E\,dJ_h$, il contorno K essendo percorso nel verso positivo. Tale integrale, come sappiamo, è uguale alla somma dei residui della funzione uniforme $E\frac{dJ_h}{dz}$ sulla R' limitata dal contorno K. Tenendo conto del fatto che in ogni punto, anche all'infinito, diverso dal polo (ξ,η), E è finito, si vede che la suddetta funzione può avere un residuo non nullo soltanto nel polo (ξ,η). Tale residuo si calcola agevolmente: è il prodotto del residuo di E (cioè l'unità) pel valore ~~assunto~~ assunto in $(\xi\eta)$ dalla funzione razionale $\frac{dJ_h}{dz}$, cioè

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K E\,dJ_h = \frac{\varphi_h(\xi\eta)}{f'_\eta}\ ,$$

ove φ_h è il polinomio aggiunto d'ordine $m-3$ corrispondente a J_h.

D'altra parte ripetendo il ragionamento del n° 84 si trova che

$$\int_K E\, dJ_h = \sum_{l=1}^{p} (a_l \beta_l - \alpha_l b_l)$$

ove $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ sono i periodi ciclici di E e $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p$ quelli di J_h. Poichè

$$a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0\,, \quad b_1 = l_1, \dots, \quad b_p = l_p\,,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{h-1} = \alpha_{h+1} \dots = \alpha_p = 0\,, \quad \alpha_h = 1\,, \beta_1 = \tau_{h1}, \dots, \beta_p = \tau_{hp}$$

verrà $\int_K E\, dJ_h = -l_h$, e quindi:

$$(12) \qquad l_h = -2\pi i \frac{\varphi_h(\xi\eta)}{f'_\eta}\,.$$

89. Sistema fondamentale per la totalità degli integrali di 2^a specie.

Fissati p punti generici $(\xi_1 \eta_1) \dots (\xi_p \eta_p)$ formanti un gruppo non speciale sulla curva $f(z,u)=0$, consideriamo gl'integrali elementari normali di 2^a specie $E_1, E_2, \dots, E_p$ relativi ai poli $(\xi_1 \eta_1) \dots (\xi_p \eta_p)$ e gl'integrali normali di 1^a specie $J_1, J_2, \dots, J_p$. Dico che nessuna combinazione lineare del tipo

$$h_1 E_1 + h_2 E_2 + \dots + h_p E_p + \mu_1 J_1 + \dots + \mu_p J_p\,,$$

per valori non tutti nulli delle h, μ, può ridursi ad una funzione razionale. Infatti se la combinazione scritta riducesi ad una funzione razionale, i periodi ciclici corrispondenti a tale combinazione dovranno esser tutti nulli. Ora i periodi ciclici attraverso ai tagli A sono $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$: dunque intanto $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p = 0$; i periodi ciclici attraverso ai tagli B sono:

$$h_1 l_{h1} + h_2 l_{h2} + \dots + h_p l_{hp} \quad (h = 1, 2, \dots, p)\,,$$

e_{hk} essendo il periodo di E_k attraverso a B_h.

Avremo pertanto:

$$\lambda_1 \frac{\varphi_h(\xi_1\eta_1)}{f'_{\eta_1}} + \lambda_2 \frac{\varphi_h(\xi_2\eta_2)}{f'_{\eta_2}} + \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\varphi_h(\xi_p\eta_p)}{f'_{\eta_p}} = 0$$

$$(h = 1, \ldots, p),$$

le quali relazioni dànno $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots\cdots = \lambda_p = 0$, perchè in caso contrario sarebbe nullo il determinante delle $\frac{\varphi_h(\xi_k\eta_k)}{f'_{\eta_k}}$, e quindi si potrebbero risolvere per valori non tutti nulli delle ρ le equazioni

$$\rho_1\varphi_1(\xi_k\eta_k) + \rho_2\varphi_2(\xi_k\eta_k) + \cdots\cdots + \rho_p\varphi_p(\xi_k\eta_k) = 0 \quad (k = 1, \ldots, p),$$

cioè esisterebbe una curva aggiunta d'ordine $m-3$:

$$\rho_1\varphi_1(zu) + \rho_2\varphi_2(zu) + \cdots\cdots + \rho_p\varphi_p(zu) = 0,$$

passante pel gruppo $(\xi_1\eta_1)\cdots\cdots(\xi_p\eta_p)$, contro l'ipotesi che questo gruppo sia non speciale.

Chiamando linearmente indipendenti più integrali di 2ª specie (in particolare di 1ª specie) quando nessuna loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli, riducesi ad una funzione razionale (o ad una costante), si può dire che i $2p$ integrali $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots, E_p, J_1, J_2, \ldots, J_p$ sono linearmente indipendenti.

Il determinante d'ordine $2p$ formato dai periodi ciclici di questi integrali riducesi evidentemente, a meno del segno, al determinante ~~delle~~ $|e_{hk}|$, cioè al determinante $\frac{1}{f'_{\eta_1} f'_{\eta_2} \cdots f'_{\eta_p}} \left| \varphi_h(\xi_k\eta_k) \right|$, che è diverso da zero.

È facile dimostrare che ogni integrale H di 2ª specie si può esprimere mediante una relazione del tipo

$$H = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_p E_p + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \cdots + \mu_p J_p + \text{funz. razionale}.$$

Infatti se $a_1\, a_2 \ldots a_p$ sono i periodi di H attraverso ai tagli A, scegliendo $\mu_h = a_h$ $(h=1,\ldots,p)$, l'integrale

$$H' = H - \mu_1 J_1 - \mu_2 J_2 - \cdots - \mu_p J_p,$$

avrà periodi nulli relativamente ai tagli A; se poi si scelgono le $h_1,\ldots,h_p$ in guisa che, essendo $b_1, b_2, \ldots, b_p$ i periodi di H' attraverso ai tagli B, si abbia

$$h_1 \frac{\varphi_h(\xi_1\eta_1)}{f'_{\eta_1}} + h_2 \frac{\varphi_h(\xi_2\eta_2)}{f'_{\eta_2}} + \cdots + h_p \frac{\varphi_h(\xi_p\eta_p)}{f'_{\eta_p}} = -b_h,$$

il che è sempre possibile perchè il determinante delle $\varphi_h(\xi_k\eta_k)$ è diverso da zero, l'integrale

$$H' - h_1E_1 - \cdots - h_pE_p =$$
$$= H - h_1E_1 - \cdots - h_pE_p - \mu_1J_1 - \cdots - \mu_pJ_p,$$

che ha già nulli i periodi attraverso ai tagli A, avrà periodi nulli anche attraverso ai tagli B, cioè si ridurrà ad una funzione razionale.

<u>Un sistema di $2p$ integrali di 2^a specie, mediante cui si possano esprimere con combinazioni lineari, tutti gli altri, si chiama "sistema fondamentale".</u>

<u>Il sistema $(E_1,\ldots,E_p, J_1,\ldots,J_p)$ è fondamentale.</u>

<u>È chiaro che si può scegliere come sistema fondamentale ogni sistema di $2p$ integrali di 2^a specie i cui periodi ciclici formino un determinante non nullo.</u>

Ne segue che i $2p$ periodi ciclici di un integrale di 2^a specie si possono assegnare ad arbitrio, cioè esiste sempre un integrale di 2^a specie i cui $2p$ periodi abbiano valori precedentemente assegnati (tale integrale risulta determinato, com'è chiaro, a meno d'una funzione razionale additiva). Dato un sistema fondamentale $(u_1, u_2, \dots u_{2p})$, le $2p$ equazioni lineari che si ottengono prendendo come determinante dei coefficienti il determinante D dei periodi di $u_1, \dots, u_{2p}$, e come secondi membri $2p$ costanti arbitrarie, sono risolubili per valori finiti delle incognite, perchè $D \neq 0$. La combinazione lineare dei $2p$ integrali, formata prendendo come coefficienti i $2p$ valori ricavati da queste equazioni, è appunto un integrale che ha come periodi quelle costanti assegnate.

90. Integrali normali di 3^a specie.

S'indichi con $az+bu+c=0$ l'equazione della retta s che riunisce i due punti (semplici) distinti $(\xi_1\eta_1), (\xi_2\eta_2)$ della curva $f(z,u)=0$, e con $\varphi(z,u)=0$ una curva aggiunta d'ordine $m-2$ che passi per le ulteriori $m-2$ intersezioni della retta s colla curva f. Ripetendo una considerazione già fatta al n° 88 nel caso in cui i due punti $(\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2)$ coincidevano si vede come sia lecito supporre che φ non contenga come parte s — e per conseguenza non passi per nessuno dei due punti dati.

L'analisi stessa del n° 90 ci dice che l'integrale

$$\Pi = \int \frac{\varphi(z,u)}{(az+bu+c)f'_u}\,dz$$

conservasi finito in ogni punto della curva f, tranne, eventualmente in $(\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2)$. Effettivamente in ciascuno di tali punti il denominatore presenta uno zero di 1° ordine senza che si annulli il numeratore della funzione integranda, e quindi la funzione stessa presenta un polo di 1° ordine. Ne deriva che Π ha in $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$ due punti singolari logaritmici: la parte dello sviluppo di Π che diviene infinita in ciascuno di questi punti, sarà rispettivamente $\rho \log(z-\xi_1)$ e $-\rho \log(z-\xi_2)$, in quanto la somma dei due periodi polari $2\pi i\rho_1$, $2\pi i\rho$ relativi ai punti logaritmici di Π dev'esser nulla. - Dividendo la funzione integranda per la costante ρ, si può addirittura supporre che Π presenti i periodi polari $2\pi i$, $-2\pi i$ nei due punti logaritmici $(\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2)$.

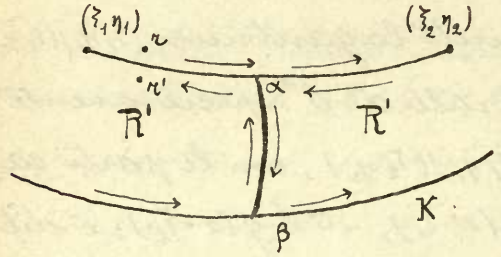
Si osserverà che "ogni integrale di 3ª specie avente i "soli punti logaritmici $(\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2)$, con le parti ca"ratteristiche rispettive $\sigma \log(z-\xi_1)$, $-\sigma \log(z-\xi_2)$, è del "tipo $\sigma\Pi+\beta_1 I_1+\dots+\beta_p I_p$, ove $I_1,\dots,I_p$ son p integrali "indipendenti di 1ª specie„ Infatti l'integrale $\Pi'-\sigma\Pi$ è dovunque finito sulla f, cioè è di 1ª specie.

Nell'integrale $\Pi+\beta_1 I_1+\dots+\beta_p I_p$ si potranno scegliere le costanti $\beta_1,\dots,\beta_p$ in tal guisa che i periodi attraverso ai cicli A risultino nulli: si avrà allora un integrale (determinato a meno di una costante additiva) che si chiama l'integrale normale di 3ª specie relativo ai punti $(\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2)$.

Questo integrale verrà indicato col simbolo $\Pi_{\xi_2\eta_2}^{\xi_1\eta_1}$, ponendo in alto l'indice del punto ove il periodo polare $2\pi i$ è affetto dal segno + (per una data scelta dell'unità imaginaria i). Diciamo $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ i periodi dell'integrale attraverso ai tagli $B_1, B_2, \dots, B_p$;

ci proponiamo di calcolare questi periodi in funzione di $(\xi_1 \eta_1), (\xi_2 \eta_2)$.

A tal uopo consideriamo la superficie R', ottenuta dalla riemanniana R dandole il contorno K e conduciamo su R' una linea che congiunga i due punti logaritmici (senza traversare il contorno K). Tagliamo R' lungo tale linea e riuniamo poi questo taglio al taglio K mediante un nuovo taglio $\alpha\beta$. Chiameremo K' il contorno K a cui si sono aggiunti i contorni provenienti dai nuovi tagli. Il senso positivo delle parti aggiunte è dato per



continuazione dal senso positivo di K come indica la figura. Si asserverà che il senso che si viene così a determinare intorno ad ognuno dei due punti logaritmici, è il senso inverso di quello positivo nell'intorno stesso. Infatti i punti $(\xi_1 \eta_1)(\xi_2 \eta_2)$ sono interni all'area R' delimitata da K, e quindi se il verso positivo di K lascia l'area R' alla sinistra, il verso che ne deriva per continuazione attorno ai due punti logaritmici, lascia l'area del relativo intorno alla propria destra. Poichè la funzione

$$\Pi_{\xi_2 \eta_2}^{\xi_1 \eta_1} \frac{dJ_h}{dz},$$

ove J_h è un integrale normale di 1ª specie, è uniforme su tutta la superficie limitata dal contorno K', e inoltre essa lascia residui nulli in tutti i punti della superficie medesima (come si vede mediante l'analisi esposta al n°86, 2ª), così il valore dell'integrale

$$\int_{K'} \Pi_{\xi_2\eta_2}^{\xi_1\eta_1}\, dJ_h$$

sarà nullo. D'altro lato il valore di questo integrale è uguale al valore esteso a K (nel verso positivo) più il valore esteso al contorno aggiunto (percorso pure nel verso positivo definito). Il valore esteso a K lo conosciamo già:

$$\int_K \Pi_{\xi_2\eta_2}^{\xi_1\eta_1}\, dJ_h = \sum_{l=1}^{p} (a_l\beta_l - \alpha_l b_l),$$

ove a_l, b_l ed α_l, β_l sono i periodi normali dei due integrali normali di 3ª e di 1ª specie rispettivamente.

Poichè

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0\ ,\quad b_1 = \pi_1\,,\ b_2 = \pi_2\,, \ldots\ldots, b_p = \pi_p$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{h-1} = \alpha_{h+1} = \cdots = \alpha_p = 0,\ \alpha_h = 1,\ \beta_1 = \tau_{h1}, \ldots, \beta_p = \tau_{hp}$$

verrà:

$$\int_K \Pi_{\xi_2\eta_2}^{\xi_1\eta_1}\, dJ_h = -\pi_h\,.$$

Cerchiamo ora il valore dell'integrale lungo il contorno aggiunto. I due bordi del taglio $\alpha\beta$ non portano alcun contributo, poichè in due punti affacciati a bordi opposti la funzione integranda ha lo stesso valore, e d'altra parte i bordi stessi son percorsi in senso contrario.— Ci resta dunque da cercare soltanto il valore dell'integrale lungo i bordi del taglio $(\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2)$.

Se $\Pi_{\xi_2\eta_2}^{\xi_1\eta_1}(r)\, dJ_h$ denota il contributo portato all'integrale da un archetto elementare che abbia la sua sede in r e se r' è il punto corrispondente nel bordo opposto, poichè il senso positivo (ved. figura) secondo cui deve esser percorso un circoletto che circondi $(\xi_1\eta_1)$, per dare all'integrale Π l'aumento $+2\pi i$, è quello da r verso r', verrà:

$$\Pi_{\xi_2 \eta_2}^{\xi_1 \eta_1}(r) + 2\pi i = \Pi_{\xi_2 \eta_2}^{\xi_1 \eta_1}(r') \quad ;$$

ed essendo gli elementi r, r' percorsi in senso contrario, il contributo portato all'integrale dall'arco elementare avente la sede in r', sarà:

$$-\left(\Pi_{\xi_2 \eta_2}^{\xi_1 \eta_1}(r) + 2\pi i\right) d\,J_h \quad ,$$

onde la somma dei due contributi associati risulterà uguale a $-2\pi i\, d\,J_h$, e quindi avremo il valore dell'integrale esteso ai due bordi del taglio $(\xi_1 \eta_1)(\xi_2 \eta_2)$:

$$-2\pi i \int_{\xi_1 \eta_1}^{\xi_2 \eta_2} d\,J_h \ ,$$

essendo l'integrale preso da $(\xi_1 \eta_1)$ a $(\xi_2 \eta_2)$, perchè $d\,J_h$ rappresentava l'incremento di J_h in corrispondenza all'elemento r, che ha il senso da $(\xi_1 \eta_1)$ a $(\xi_2 \eta_2)$.

Avremo in definitiva

$$\pi_h = -2\pi i \int_{\xi_1 \eta_1}^{\xi_2 \eta_2} d\,J_h \ ,$$

cioè

$$\pi_h = 2\pi i \left[J_h(\xi_1 \eta_1) - J_h(\xi_2 \eta_2) \right],$$

ove la differenza tra i valori dell'integrale J_h nei due punti $(\xi_1 \eta_1)(\xi_2 \eta_2)$ s'intenda calcolata lungo un cammino (qualunque) non incontrante il contorno K.

Se non si tien conto del cammino percorso dal punto variabile per andare dall'uno all'altro punto logaritmico, si potrà scrivere soltanto

$$\frac{\pi_h}{2\pi i} \equiv J_h(\xi_1 \eta_1) - J_h(\xi_2 \eta_2) \qquad (\text{modd. periodi di } J_h).$$

Capitolo nono.

Teorema d'Abel. – Il teorema di Riemann-Roch dal punto di vista trascendente. – Integrali riducibili. – Applicazioni.

91. Teorema d'Abel.

Consideriamo sopra una curva algebrica f di genere p una serie razionale semplicemente infinita γ_n^1 di gruppi di n punti. Sia w un integrale abeliano di specie qualunque appartenente alla curva f, e indichiamo in modo generico con $w(x)$ il valore (definito a meno di multipli dei periodi) dell'integrale w da una comune origine delle integrazioni al punto variabile x.
Sia inoltre $(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n)$ un gruppo G variabile entro alla serie γ_n^1 data, che può essere, in particolare, una serie lineare g_n^1.

La somma

$$w(x_1) + w(x_2) + \cdots\cdots + w(x_n)$$

risulta funzione della variabile (complessa) t, che individua i punti sulla retta (complessa) imagine della data serie razionale. Pensiamo al piano (o alla sfera) su cui è distesa la variabile t. Per ogni circolazione di t la funzione scritta si altera al più per combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi (ciclici e polari) di w, perchè a circolazione avvenuta i punti $x_1 x_2 \dots x_n$ si possono essere al più scambiati tra loro. Inoltre la funzione considerata conservasi finita in tutto il piano t o presenta ivi sole singolarità polari o logaritmiche. Essa gode dunque delle proprietà caratteristiche di un integrale abeliano. (fine del n° 83). Sarà pertanto

$$w(x_1) + w(x_2) + \dots\dots + w(x_n) = \int \psi(t)\,dt$$

ψ essendo una funzione razionale di t.

Allo stesso risultato si può giungere, osservando che, ove si ponga $d\,w(x_j) = \varphi(x_j)\,dx_j$ (φ essendo funzione razionale) la somma $\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\,\frac{dx_j}{dt}$ è una funzione <u>algebrica</u> di t perchè i punti $x_1, \dots, x_n$ sono appunto funzioni algebriche di t. – D'altra parte la somma stessa essendo simmetrica rispetto ad $x_1 x_2 \dots x_n$ è una funzione uniforme di t, cioè una funzione razionale $\psi(t)$.

Se l'integrale w è di 1ª specie, l'integrale $\int \psi\,dt$ sarà pure di 1ª specie, cioè si ridurrà ad una costante; se w è di 2ª specie l'integrale $\int \psi\,dt$ risulterà pure di 2ª specie, cioè si ridurrà ad una funzione razionale di t; se infine w è di 3ª specie, l'integrale $\int \psi\,dt$ sarà in generale uguale ad una funzione razionale aumentata del logaritmo di un'altra funzione razionale di t (*). Si conclude che:

(*) Nel calcolo si dimostra che l'integrazione di una funzione razionale d'una variabile si può sempre effettuare con sole operazioni razionali e logaritmiche.

La somma $W(x_1)+W(x_2)+\dots+W(x_n)$, ove $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un gruppo di punti della curva f variabile in una serie razionale γ_n^1, i cui elementi si rappresentino coi valori del parametro t, si esprime in funzione di t mediante operazioni razionali e logaritmiche.

In ciò consiste il celebre teorema d'Abel, scoperto nel 1826 dal grande analista norvegese. Veramente il teorema d'Abel si riferisce al caso più generale in cui il gruppo $(x_1 x_2 \dots x_n)$ dipende razionalmente non soltanto da uno ma anche da più parametri $t_1, t_2, \dots, t_r$, in guisa cioè che $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ descrive una γ_n^r i cui elementi sono funzioni razionali del punto $(t_1 t_2 \dots t_r)$ variabile in uno spazio lineare S_r (complesso).

Ma questo risultato più generale si ottiene immediatamente dal caso da noi trattato, perchè fissando i valori di tutti i parametri meno uno, la variabilità del gruppo resta ristretta ad una γ_n^1 razionale e si conclude pertanto che la $W(x_1)+\dots+W(x_n)$ espressa come funzione di $(t_1, t_2, \dots, t_r)$ è razionale-logaritmica rispetto a ciascuno dei parametri e quindi rispetto al loro insieme.

Osservazione. Limitiamoci a considerare il teorema d'Abel per un integrale di 1ª specie W: allora la somma $W(x_1)+\dots+W(x_n)$, come abbiamo avvertito, è costante. Ma è bene spiegar completamente il significato di tale affermazione.

Se non si fissa il cammino mediante cui si va dall'origine x_0 delle integrazioni ai punti $x_1, x_2, \dots, x_n$, il valore della somma $W(x_1)+\dots+W(x_n)$ risulta determinato soltanto a meno di multipli dei periodi e quindi si potrà dire che i valori della somma $W(x_1)+\dots+W(x_n)$ per due posizioni diverse $(x_1', x_2', \dots x_n')(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$ del gruppo $(x_1, \dots, x_n)$ nella data serie, differiscono tra loro soltanto per somme di multipli interi dei periodi; cioè

$$W(x_1')+W(x_2')+\dots+W(x_n') \equiv W(x_1'')+W(x_2'')+\dots+W(x_n'') \text{ (mod. d. periodi)}.$$

Se invece, una volta fissati, i cammini d'integrazione da x_0 ad una posizione iniziale dei punti del gruppo, e sia p. es. la posizione $(x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ corrispondente a $t=t_0$ (ovvero a $t_1=t_1^{(0)}, \dots, t_r=t_r^{(0)}$), si fa variare con continuità il punto t nel relativo spazio, sino ad un'altra posizione cui corrisponda il gruppo $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ costituito dalle posizioni limiti rispettive $x_1', x_2', \dots, x_n'$ dei punti $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$; chiamando $W(x_i')$ il valore di w lungo il cammino risultante dall'insieme di quello fissato da x_0 ad $x_i^{(0)}$, e di quello percorso dal punto mobile che da $x_i^{(0)}$ si è portato in x_i', la somma $\Sigma W(x_i')$ risulterà esattamente uguale a $\Sigma W(x_i^{(0)})$. Questa è la traduzione precisa del fatto che la somma $\Sigma W(x_i)$ considerata come funzione di t, riducesi ad una costante. Tutto ciò si può esprimere brevemente dicendo che la somma $W(x_1)+\dots+W(x_n)$, ove W è un integrale di 1ª specie, non muta, quando il gruppo $(x_1 x_2 \dots x_n)$ si assogetta ad uno spostamento infinitesimo nella serie data.

92. La reciproca del teorema d'Abel per gl'integrali di 1ª specie. Condizione trascendente affinchè due gruppi di punti sieno equivalenti.

Il teorema d'Abel ci dà una condizione necessaria affinchè due gruppi di n punti di una curva f sieno equivalenti: la condizione che, dicendo w un qualunque integrale di 1^a specie appartenente ad f, le somme dei valori di w nei punti dei due gruppi sieno congrue rispetto ai periodi. Ma per le applicazioni geometriche è assai più importante stabilire che questa condizione è anche sufficiente.

Sieno $(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n)$ due gruppi di n punti della curva f, e detti $J_1, J_2, \dots, J_p$ i p integrali normali di 1^a specie appartenenti a questa curva (n° 87), supponiamo soddisfatte le p congruenze

$$J_h(x_1) + \dots + J_h(x_n) \equiv J_h(y_1) + \dots + J_h(y_n) \ (\text{modd. periodi})$$
$$(h = 1, 2, \dots, p).$$

Abbiasi cioè

$$(1) \quad \sum J_h(x_j) = \sum J_h(y_j) + n_1 \tau_{h1} + n_2 \tau_{h2} + \dots + n_p \tau_{hp} + m_h.$$

ove le m, n son numeri interi dipendenti soltanto dai cammini d'integrazione percorsi e non già dall'integrale J_h considerato, e $\tau_{h1}, \tau_{h2}, \dots, \tau_{hp}$ sono i periodi di J_h attraverso ai tagli $B_1, \dots, B_p$. - Sieno $\Pi_{y_1}^{x_1}, \Pi_{y_2}^{x_2}, \dots, \Pi_{y_n}^{x_n}$ gli n integrali normali di 3^a specie relativi alle coppie di punti $x_1 y_1$; x_2, y_2; $\dots$; x_n, y_n (n° 90) e indichiamo con Π l'integrale di 3^a specie

$$\Pi_{y_1}^{x_1} + \Pi_{y_2}^{x_2} + \dots + \Pi_{y_n}^{x_n},$$

che ha come punti logaritmici i punti dei due dati gruppi. Poichè i periodi dell'integrale $\Pi_{y_j}^{x_j}$ attraverso ai tagli B vengono espressi da

$$2\pi i \left[J_h(x_j) - J_h(y_j)\right] + 2\pi i (r_h + s_1 \tau_{h1} + \dots + s_p \tau_{hp}) \quad (h = 1, \dots, p),$$

ove r, s sono interi (dipendenti dal cammino scelto per andare da x_j ad y_j), ricordando le relazioni (1), si vede che l'integrale Π - avente periodi nulli attraverso ai tagli A - attraverso ai tagli B ha periodi del tipo

$$2\pi i\,(a_h + b_1\tau_{h1} + \cdots + b_p\tau_{hp}),$$

essendo le a, b numeri interi.

Ciò premesso, poniamo

$$J = 2\pi i\,(b_1 J_1 + b_2 J_2 + \cdots + b_p J_p),$$

e detto x il punto variabile sulla curva f (cioè sulla superficie di Riemann corrispondente), consideriamo la funzione

$$\Phi(x) = e^{J-\Pi}.$$

Percorrendo il ciclo B_h l'integrale J aumenta di $2\pi i b_h$, mentre l'integrale Π resta immutato. Ne segue che dopo la circolazione la Φ riproducesi moltiplicata per $e^{2\pi i b_h} = 1$.

Percorrendo il ciclo A_h l'integrale J aumenta di

$$2\pi i\,(b_1\tau_{1h} + b_2\tau_{2h} + \cdots + b_p\tau_{ph}),$$

mentre Π aumenta di

$$2\pi i\,(a_h + b_1\tau_{h1} + b_2\tau_{h2} + \cdots + b_p\tau_{hp}).$$

Tenendo presente che $\tau_{hk} = \tau_{kh}$, si conclude che $J - \Pi$ aumenta di $-2\pi i a_h$, e quindi che a circolazione eseguita Φ riproducesi moltiplicata per $e^{-2\pi i a_h} = 1$.

__La Φ è dunque una funzione uniforme di__ x. - Proviamo ch'essa è una __funzione razionale__. - Finchè x non viene a coincidere con alcuno dei punti x_j od y_j, è chiaro che la Φ conservasi finita. Vediamo cosa accade quando x viene a coincidere con x_j. Ricordando che il valore di Π lungo un ciclo nullo avvolgente x_j è uguale a $2\pi i$, avremo, nell'intorno del punto x_j (che abbia le coordinate $z_j u_j$):

$$\Pi = \log(z-z_j) + \alpha_0 + \alpha_1(z-z_j) + \cdots\ ,$$

e quindi nello stesso intorno:

$$\Phi = e^{-\log(z-z_j) + \beta_0 + \beta_1(z-z_j) + \cdots}.$$

Poichè la funzione $e^{\beta_0+\beta_1(z-z_j)+\cdots}$ è finita nell'intorno di x_j, potremo scrivere:

$$e^{\beta_0+\beta_1(z-z_j)+\cdots} = \gamma_0 + \gamma_1(z-z_j) + \gamma_2(z-z_j)^2 + \cdots .$$

Concludendo verrà:

$$\Phi = \frac{\gamma_0}{z-z_j} + \gamma_1 + \gamma_2(z-z_j) + \cdots ,$$

e ciò prova che la Φ ha un polo di 1° ordine in ognuno dei punti $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Similmente, quando x viene a coincidere col punto y_j (che abbia le coordinate z'_j, u'_j), si ottiene nell'intorno di y_j:

$$\Phi = e^{\log(z-z'_j) + \beta'_0 + \beta'_1(z-z'_j) + \cdots} =$$

$$= \gamma'_0(z-z'_j) + \gamma'_1(z-z'_j)^2 + \gamma'_2(z-z'_j)^3 + \cdots ,$$

e questo prova che la Φ ha uno zero di 1° ordine in ciascuno dei punti y_i.

La Φ su tutta la riemanniana imagine di f presenta pertanto sole singolarità polari, e quindi è una funzione razionale: il gruppo de' suoi poli (di 1° ordine) è $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, il gruppo de' suoi zeri (di 1° ordine) è $(y_1\, y_2, \dots, y_n)$. Questi due gruppi appartengono dunque alla g^1_n definita su f dall'equazione Φ = costante, cioè sono equivalenti.

Possiamo ora enunciare il teorema seguente:

<u>La condizione necessaria e sufficiente affinchè due</u>

gruppi di punti $(x_1 x_2 \dots x_n)(y_1 y_2 \dots y_n)$ di una curva algebrica f, sieno equivalenti, è che, indicando con $w_1, w_2, \dots, w_p$ p integrali indipendenti di 1^a specie della curva f, sussistano le congruenze:

$$w_h(x_1) + \dots + w_h(x_n) \equiv w_h(y_1) + \dots + w_h(y_n) \text{ (modd. periodi)}$$

$$h = 1, 2, \dots, p.$$

Questa proposizione trovasi in Riemann e in Weierstrass. Da essa discende subito il teorema dimostrato altrimenti a pag. 205, perchè le condizioni suddette sono soddisfatte quando i due gruppi appartengono ad una medesima serie razionale. (n° prec.)

93. Dimostrazione del teorema di Riemann-Roch mediante gl'integrali di 2^a specie.

Sia $F(z,u)$ una funzione razionale del punto variabile sulla curva $f(z,u)=0$. Per semplicità supporremo che la F abbia soltanto poli semplici; l'ipotesi che essa abbia poli d'ordine maggiore d'1, trae soltanto qualche lieve complicazione formale.(*) Sia n l'ordine della funzione F, cioè l'ordine della serie lineare g^1_n, priva di punti fissi, formata dai gruppi di livello costante della F. Indichiamo con $x_1 x_2 \dots x_n$ gli n poli della F e con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i residui della funzione in ciascuno di questi poli. L'integrale abeliano

$$(2) \qquad F - \alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2 - \dots - \alpha_n E_n,$$

ove E_j è l'integrale elementare normale di 2^a specie relativo al polo x_j (n. 88), non ha più poli su tutta la riemanniana, e quindi è di 1^a specie. Poichè questo in=

tegrale di 1^a specie ha periodi nulli attraverso ai tagli A, esso si ridurrà addirittura ad una costante, cioè avremo:

$$F = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_n E_n + \alpha_{n+1},$$

le α essendo quantità costanti.

Esprimendo che F ha periodi nulli anche attraverso ai tagli B, e ricordando le espressioni dei periodi di un integrale normale di 2^a specie (n^o 88), si hanno le p relazioni tra le costanti α

$$(3) \qquad \alpha_1 \frac{\varphi_h(\xi_1\eta_1)}{f'_{\eta_1}} + \alpha_2 \frac{\varphi_h(\xi_2\eta_2)}{f'_{\eta_2}} + \dots + \alpha_n \frac{\varphi_h(\xi_n\eta_n)}{f'_{\eta_n}} = 0$$
$$(h = 1, \dots, p),$$

ove $(\xi_i\eta_i)$ denotano le coordinate del polo x_i. Viceversa, è chiaro che se un gruppo di costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ soddisfano alle (3), l'integrale $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_n E_n$ riducesi ad una funzione razionale. Infatti questo integrale ha già periodi nulli attraverso ai tagli A, e per effetto delle (3) viene ad aver periodi nulli anche attraverso ai tagli B.

Dunque per contare quante sono le funzioni razionali che hanno un dato gruppo $(x_1 x_2 \dots x_n)$ di poli semplici, occorre contare quante delle α restano libere nelle relazioni (3).

Questo computo equivale evidentemente alla ricerca della dimensione r della serie lineare completa g_n^r, individuata dal gruppo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dalla teoria delle equazioni lineari si sa che se ρ è la caratteristica della matrice dei coefficienti nelle (3), i legami riduconsi a ρ distinti; cioè le (3) lasciano libere $n-\rho$ delle α. - Ora la matrice dei coefficienti, dopo aver soppresso i fattori non nulli $\frac{1}{f'_{\eta_1}}, \ldots\ldots, \frac{1}{f'_{\eta_p}}$, che sono comuni agli elementi delle successive verticali, riducesi alla matrice

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(\xi_1\eta_1) & \varphi_1(\xi_2\eta_2) \ldots\ldots & \varphi_1(\xi_n\eta_n) \\ \varphi_2(\xi_1\eta_1) & \varphi_2(\xi_2\eta_2) \ldots\ldots & \varphi_2(\xi_n\eta_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_p(\xi_1\eta_1) & \varphi_p(\xi_2\eta_2) \ldots\ldots & \varphi_p(\xi_n\eta_n) \end{matrix} \right\| ,$$

la quale (scambiando le orizzontali e le verticali tra loro) può pure considerarsi come matrice dei coefficienti nelle equazioni

$$h_1\varphi_1(\xi_j\eta_j) + h_2\varphi_2(\xi_j\eta_j) + \ldots\ldots\ldots + h_p\varphi_p(\xi_j\eta_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Se ρ è la caratteristica della matrice dei coefficienti nelle (3), tale è dunque anche la caratteristica della matrice dei coefficienti nelle equazioni fra le h; e viceversa. - Indicando con i l'indice di specialità del gruppo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (cioè il numero delle curve aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m-3$ che passano pel gruppo stesso), le equazioni tra le h dovranno lasciar libere precisamente i delle incognite e la caratteristica della relativa matrice sarà pertanto $\rho = p - i$ e quindi le (3) lasceranno libere $n-p+i$ delle costanti α.

Ne deriva che includendovi la costante additiva α_{n+1}, la F verrà a contenere $n-p+i+1$ costanti arbitrarie.

Poichè i gruppi soddisfacenti alla condizione

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_n E_n = \text{cost}.$$

formano la serie completa g_n^r individuata da $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, si conclude che questa serie avrà la dimensione $r = n - p + i$.

Come abbiamo detto al n° 45 il caso $i = 0$ fu trattato, nel modo esposto, da Riemann. Facile, come si vede, è il passaggio al caso $i > 0$: tale passaggio è dovuto al Roch.

94. Integrali riducibili. - Sistemi lineari completi di tali integrali.

Si dice che un integrale di 1ª specie è riducibile (meglio si direbbe che è a periodi riducibili), allorquando i suoi periodi saddisfano ad una o più equazioni lineari omogenee a coefficienti interi. È ben chiaro che la riducibilità è una particolarità per un integrale di 1ª specie: i periodi di un integrale generico di 1ª specie non possono infatti soddisfare ad alcun legame del tipo suddetto, perchè le loro parti reali sono arbitrarie (n° 86).

Mediante le equazioni lineari che legano i periodi di un integrale riducibile, i $2p$ periodi di questo si possono esprimere come combinazione lineare a coefficienti razionali, di un certo numero r di essi (periodi ridotti).

Seguendo un procedimento aritmetico dovuto a Weierstrass (*) e che noi non staremo a sviluppare, si dimostra che i $2p$ periodi di un integrale riducibile si possono esprimere come combinazione lineare a coeffi-

(*) Cfr. p.e. Picard, Traité d'Analyse (Paris, Gauthier-Villars) t. II, 2me éd. (1905). pp. 227-228

cienti interi di un certo numero r di quantità.
Tali quantità si chiamano i periodi ridotti primitivi dell'integrale riducibile.
Suppongasi ora che esistano sopra una curva più integrali riducibili $I_1, I_2, \ldots, I_q$ aventi lo stesso numero r di periodi ridotti e tali che le matrici delle sostituzioni che servono ad esprimere i $2p$ periodi normali di $I_1, I_2, \ldots, I_q$ in funzione degli r periodi ridotti primitivi di ciascun integrale, sieno identiche, cioè che esse abbiano uguali gli elementi corrispondenti.
Indicando con $\Omega_{h1}, \Omega_{h2}, \ldots, \Omega_{h,2p}$ i periodi dell'integrale I_h (relativi ai tagli $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p$), avremo le relazioni

$$(4)\quad \begin{cases} \Omega_{h1} = m_{11}\omega_{h1} + m_{12}\omega_{h2} + \cdots + m_{1r}\omega_{hr} \\ \Omega_{h2} = m_{21}\omega_{h1} + m_{22}\omega_{h2} + \cdots + m_{2r}\omega_{hr} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_{h,2p} = m_{2p,1}\omega_{h1} + m_{2p,2}\omega_{h2} + \cdots + m_{2p,r}\omega_{hr} \end{cases} \quad (h=1,2,\ldots,q)$$

ove gl'interi m sono indipendenti dall'integrale I_h considerato, mentre $\omega_{h1}, \omega_{h2}, \ldots, \omega_{hr}$ sono gli r periodi ridotti primitivi dell'integrale stesso.
Si osserverà subito che un integrale $h_1 I_1 + h_2 I_2 + \cdots + h_q I_q$ appartenente al sistema lineare individuato dagl'integrali $(I_1, I_2, \ldots, I_q)$, è riducibile e la sostituzione lineare che serve ad esprimere i suoi $2p$ periodi in funzione degli r ridotti ha ancora la matrice

$$\left\| \begin{matrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1r} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{2p,1} & m_{2p,2} & \cdots & m_{2p,r} \end{matrix} \right\| .$$

Più generalmente se si considera la totalità degli integrali di 1^a specie i cui periodi $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{2p}$ son dati da formole del tipo

$$(5) \qquad \Omega_k = m_{k1}\omega_1 + m_{k2}\omega_2 + \cdots + m_{kr}\omega_r \quad (k = 1, 2, \dots, 2p),$$

si ottiene un sistema lineare (che contiene il sistema lineare $h_1 I_1 + h_2 I_2 + \cdots + h_q I_q$): infatti in questa totalità si troverà un certo numero massimo q' ($q \leq q' \leq p$) d'integrali linearmente indipendenti e ogni integrale della totalità dovrà esser linearmente dipendente dai q' fissati, perchè una combinazione lineare di due integrali della totalità appartiene ancora ad essa. Un tal sistema si chiamerà un sistema lineare completo d'integrali di 1^a specie riducibili.

Possiamo anche considerare un sistema lineare completo d'integrali riducibili di 2^a specie. Nelle formole (5) si lascino completamente libere le $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$. Poichè i $2p$ periodi di un integrale di 2^a specie si possono scegliere ad arbitrio (n. 89) ad ogni scelta delle ω, risponderà un integrale di 2^a specie avente i $2p$ periodi Ω espressi mediante le (5): questo integrale sarà determinato a meno di una funzione razionale additiva, giacchè la differenza tra due integrali rispondenti agli stessi valori delle ω, e quindi delle Ω, è un integrale che ha periodi tutti nulli, cioè una funzione razionale. Considerando gli r integrali di 2^a specie $H_1, H_2, \dots, H_r$ che si ottengono prendendo come valori delle ω gli elementi delle r orizzontali di un determinante non nullo, è chiaro che una combinazione $\mu_1 H_1 + \dots + \mu_r H_r$ non potrà mai, per valori non tutti nulli delle μ, ridursi ad una funzione razionale, perchè occorrerebbe che le ω relative ad una tal combinazione fossero nulle, la qual cosa non è compatibile coll'ipotesi che i periodi ridotti di $H_1, \dots, H_r$ formino un determinante non nullo. — È anche chiaro che ogni integrale di 2ª specie H avente i periodi Ω del tipo (5), è esprimibile mediante una combinazione lineare di $H_1, \dots, H_r$, appunto perchè le equazioni lineari nelle μ, che si ottengono uguagliando ai periodi ridotti di H i periodi ridotti corrispondenti della combinazione $\mu_1 H_1 + \dots + \mu_r H_r$, avendo per determinante dei coefficienti un determinante non nullo, son risolubili rispetto alle μ. Si può dire pertanto che un sistema lineare completo d'integrali di 2ª specie aventi r periodi ridotti, contiene precisamente r integrali linearmente indipendenti.

Da ciò dedurremo il teorema seguente:

In un sistema lineare d'integrali riducibili di 1ª specie, i cui periodi ridotti sieno in numero di r, non possono trovarsi più di $\frac{r}{2}$ integrali (di 1ª specie) linearmente indipendenti.(*)

Sia q il massimo numero d'integrali indipendenti che esistono entro al dato sistema, e designamo questi integrali con $I_1, I_2, \dots, I_q$. La tabella dei loro periodi ridotti sia

$$\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1r} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{q1} & \omega_{q2} & \dots & \omega_{qr} \end{matrix}$$

(*) Vedi il n° 3 di una mia Nota negli atti della R. Acc. di Torino, t. 40 (22 gennajo 1905).

e sieno (4) le formule che esprimono i periodi originari Ω dell'integrale I_h in funzione dei periodi ridotti. Pongasi

$$\omega_{hk} = \omega'_{hk} + i\omega''_{hk}$$

e dicansi I'_h, I''_h gl'integrali di 2^a specie i cui periodi si ottengono dalle (4) ponendovi rispettivamente le $\omega'_{h1}, \ldots, \omega'_{hr}$; $\omega''_{h1}, \ldots, \omega''_{hr}$ in luogo delle $\omega_{h1}, \ldots, \omega_{hr}$, per $h=1, 2, \ldots, q$. Gl'integrali di 2^a specie così costruiti faranno parte di un sistema lineare a r periodi ridotti. Dico che gl'integrali $I'_1, \ldots, I'_q, I''_1, \ldots, I''_q$ sono linearmente indipendenti: dal che segue $2q \leq r$, cioè $q \leq \frac{r}{2}$.

Infatti se una combinazione $h_1 I'_1 + \cdots + h_q I'_q + \mu_1 I''_1 + \cdots + \mu_q I''_q$ si riducesse ad una funzione razionale per valori non tutti nulli delle h, μ, avremmo le relazioni:

$$h_1\omega'_{1k} + h_2\omega'_{2k} + \cdots + h_q\omega'_{qk} + \mu_1\omega''_{1k} + \cdots + \mu_q\omega''_{qk} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r),$$

e a causa della realità dei coefficienti ω', ω'' si potrebbero sempre ridurre i numeri h, μ ad esser reali. Dopo ciò l'integrale di 1^a specie

$$(\mu_1 + ih_1) I_1 + \cdots\cdots + (\mu_q + ih_q) I_q$$

verrebbe ad avere per periodi ridotti i numeri

$$(\mu_1 + ih_1)(\omega'_{1k} + i\omega''_{1k}) + \cdots\cdots + (\mu_q + ih_q)(\omega'_{qk} + i\omega''_{qk})$$

$$(k = 1, \ldots, r),$$

che in virtù delle relazioni ammesse, riduconsi alle quantità reali

$$(\mu_1\omega'_{1k} - h_1\omega''_{1k}) + \cdots + (\mu_q\omega'_{qk} - h_q\omega''_{qk})$$

$$(k = 1, \ldots\ldots, r)$$

e quindi sarebbero anche reali i periodi Ω dell'integrale considerato, che sarebbe perciò una costante. Ciò è assurdo, da che si è supposto che $I_1, \dots, I_q$ fossero indipendenti.

Ecco un corollario immediato del teorema dimostrato:

Un sistema lineare di q integrali indipendenti di 1ª specie con $2q$ periodi è un sistema completo.

Un'altra osservazione assai utile è la seguente [*]:

I sistemi lineari completi d'integrali di 1ª specie riducibili, eventualmente esistenti sopra una curva, si distribuiscono in una serie discreta, o, in altri termini non può esistere una serie continua di sistemi completi d'integrali di 1ª specie riducibili.

Infatti poichè un sistema completo è formato da tutti gl'integrali di 1ª specie i cui periodi vengono espressi mediante i periodi ridotti con dati coefficienti interi m_{hk}, a due sistemi diversi d'integrali riducibili di 1ª specie risponderanno gruppi diversi di interi m_{hk}. I sistemi d'integrali dipendono pertanto dai valori attribuiti ad un certo gruppo d'interi e formano perciò una serie discreta.

95. Integrali riducibili al genere $q < p$. – Linearità delle involuzioni più volte infinite sopra una curva.

Consideriamo una curva $f(zu) = 0$ di genere p la quale possegga un'involuzione semplicemente infinita γ_n^1 di genere q, e diciamo $F(ZU) = 0$ una curva (di genere q) imagine della γ_n^1, cosicchè tra F, f interceda una corrispondenza $(1, n)$.

Poichè le coordinate $(ZU)(zu)$ di due punti corrispondenti son legate dalle relazioni

(*) Cfr. Castelnuovo - Enriques, Annale de l'École normale supérieure de Paris, 1906, pag 345.

(6) $Z=\alpha(z,u)$, $V=\beta(z,u)$,

α, β essendo funzioni razionali di z, u, un integrale abeliano di 1^a specie $\int \Phi(ZV)\,dZ$ appartenente alla curva F, si muterà, mediante la sostituzione (6), in un integrale abeliano di 1^a specie della curva f:

$$\int \Phi(ZV)\,dZ = \int \Phi(\alpha,\beta)\frac{d\alpha}{dz}\,dz = \int \varphi(z,u)\,dz ,$$

ove con φ si è indicata la funzione razionale

$$\Phi(\alpha,\beta)\frac{d\alpha}{dz} = \Phi(\alpha,\beta)\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial u}} .$$

È facile provare che <u>l'integrale</u> $\int \varphi\,dz$ <u>è riducibile ed i suoi periodi ridotti sono in numero di</u> $2q$.

Consideriamo infatti il valore dell'integrale lungo un ciclo qualunque s della riemanniana imagine di f. Al ciclo s risponde sulla riemanniana imagine di F un ciclo S tale che

$$\int_S \Phi\,dZ = \int_s \varphi\,dz ,$$

onde il valore considerato può esprimersi come una combinazione lineare a coefficienti interi (dipendenti soltanto dal ciclo S, cioè da s) dei $2q$ periodi fondamentali dell'integrale appartenente ad F. Ne deriva che ogni periodo dell'integrale appartenente ad f è esprimibile mediante una combinazione lineare a coefficienti interi di $2q$ periodi ridotti.

Ciò premesso, consideriamo i q integrali indipendenti di 1^a specie appartenenti ad F. Mediante le (6) otterremo q integrali indipendenti di 1^a specie della curva f, i cui periodi relativi ad un medesimo ciclo si esprimeranno come combinazioni lineari dei 2q periodi ridotti, con coefficienti interi dipendenti dal ciclo ma non dagl'integrali. Avremo pertanto su f un sistema lineare (completo) di q integrali indipendenti di 1ª specie con 2q periodi. Si conclude che:

Sopra una curva f di genere p l'esistenza d'un'involuzione γ_n' di genere q trae l'esistenza di un sistema lineare (completo) di q integrali indipendenti di 1ª specie con 2q periodi ridotti.

Si dice che la sostituzione (6) riduce q integrali di f dal genere p al genere q.

Si noti che ogni integrale del sistema riprende il medesimo valore (a meno di multipli dei periodi ridotti) nei punti di un medesimo gruppo dell'involuzione γ_n'; giacchè assumendo come cammini d'integrazione per l'integrale $\int \varphi dz$, dei cammini $\sigma_1 \sigma_2, \dots, \sigma_n$ che vadano da x_0 a $x_1, x_2, \dots, x_n$, a questi cammini risponderanno sulla riemanniana imagine di F altrettanti cammini $\sigma_1', \sigma_2', \dots, \sigma_n'$ che vanno dal punto X_0 corrispondente ad x_0 al punto X corrispondente a $x_1, x_2, \dots, x_n$, e tali cammini differiranno per una combinazione lineare dei 2q cicli fondamentali.

Da tutto ciò segue che:

Sopra una curva algebrica non può mai esistere un'infinità continua di involuzioni irrazionali.

Si faccia l'ipotesi contraria: allora è chiaro che le involuzioni della infinità continua avranno lo stesso genere q e ognuna di esse porterà sulla curva f un sistema completo di q integrali riducibili di 1^a specie.

Poichè un'infinità continua di tali sistemi completi non può esistere (n^o prec), le involuzioni γ_n' della infinità porteranno lo stesso sistema d'integrali riducibili.

Ma ciò è assurdo; perchè i gruppi delle γ_n' uscenti da un punto x_1 della f formano un'infinità continua, e quindi, per la proprietà ultimamente dimostrata ogni integrale di questo sistema riducibile assumerebbe lo stesso valore in un'infinità continua di punti di f (e di conseguenza in un'infinità continua di punti della F imagine di una γ_n^1), e ridurrebbesi pertanto ad una costante.

Questo teorema è stato dimostrato contemporaneamente da Humbert e da Castelnuovo (Humbert, Comptes rendus, 12 giugno 1893: .... Journal de Math., 1894; Castelnuovo, Atti della R. Acc. di Torino, 11 giugno 1893), ma era già contenuto implicitamente in una proposizione di Painlevé (Annales de l'École normale de Paris, 1891, p. 135).

Dal teorema stesso Humbert e Castelnuovo hanno dedotto che:

Sopra una curva algebrica f un'involuzione γ_n^r - cioè una serie algebrica tale che per r punti generici della curva passi un sol gruppo della serie - quando $r > 1$, può presentare soltanto i casi seguenti:

1°) Essa è una serie lineare g_n^r.

2°) Essa si ottiene aggruppando ad r ad r in tutti i modi possibili i gruppi di un'involuzione irrazionale γ_μ^1 (sicchè sarà $n = r\mu$), ed in particolare per $\mu = 1$ e quindi $n = r$, aggruppando ad r ad r i punti della curva.

Suppongasi anzitutto che la serie γ_n^2 sia semplice e di dimensione $r = 2$. Allora i gruppi di γ_n^2 per un punto generico di f formeranno una γ_{n-1}^1, che, al variare del punto scelto, descriverà una serie continua.

Infatti l'ipotesi che la γ_{n-1}^1 resti fissa o che una parte di un gruppo della γ_{n-1}^1 descriva una γ_μ^1 indipendente dalla posizione di x, deve escludersi, perchè altrimenti un gruppo generico Γ di γ_μ^1 starebbe in qualche gruppo di γ_n^2 con ogni posizione di x, cioè gl'infiniti gruppi di γ_n^2 passanti per un punto di Γ - che è poi un punto generico di f - passerebbero di conseguenza per altri $\mu - 1$ punti, residui del gruppo Γ, e quindi la γ_n^2 sarebbe composta.

Ne deriva che la γ_{n-1}^1, essendo variabile in una serie continua, è razionale, cioè lineare (pag. 78). Da ciò si trae facilmente che i gruppi di γ_n^2 sono due a due equivalenti. Infatti la serie lineare $x + \gamma_{n-1}^1$, al muoversi di x, varia in una serie lineare, perchè la serie $y + \gamma_n^1$ relativa ad un'altra posizione y del punto mobile ha comune colla precedente il gruppo di γ_n^2 passante per la coppia x, y. Ricordando che entro una serie lineare semplice una serie subordinata d'indice uno è essa stessa lineare (ved. a pag. 117), si conclude che la γ_n^2 è una serie lineare.

Per $r > 2$ si perviene alla stessa conclusione, sempre suppo-

nendo che la γ_n^r sia semplice, procedendo da $r-1$ ad r.
Quando la serie γ_n^r sia composta con una γ_μ^1 essa avrà per imagine sulla curva F imagine della γ_μ^1, una $\gamma_{n'}^r$ semplice, e quindi se $n' = \frac{n}{\mu} > r$, la $\gamma_{n'}^r$ sarà lineare e sarà lineare la γ_n^r stessa; se invece $n' = \frac{n}{\mu} = r$, la $\gamma_{n'}^r$ non sarà altro che l'insieme dei gruppi di r punti di F e la γ_n^r risulterà aggruppando ad r ad r i gruppi della γ_μ^1.

Errata-Corrige

A pagina	rigo	invece di	leggere
38	14 dal basso	n° 20	n° 12
65	ultimo	trasfor=	trasformata
122	2° e 3°	$r+2$ coppie di elementi	, nel definire la proiettività tra g_n^{r+1} e gl'iperpiani di S_{r+1}, una proiettività tra una g_n^r di g_n^{r+1} e una iperstella di S_{r+1}.
122	14 dall'alto	n°	n° 30
123	ultimo	n°	n° 24
171	5 dal basso	$\underline{i}$	$\underline{i}$ $(<r)$
192	ultimo	$y = \frac{Y}{(cX+d)^{p+1}}$	$y = \frac{\pm Y}{(cX+d)^{p+1}}$
242	6 dall'alto	$\underline{a}$	$\underline{a}_i$
247	5 dall'alto	$\underline{z}$	$\underline{z} - \underline{z}_1$
262	15 dall'alto	......	Dissertation

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]

-930