





BERKELEY  
LIBRARY  
UNIVERSITY OF  
CALIFORNIA





MATH/STAT.









Sammlung Schubert VII

---

---

Ebene

# Geometrie der Lage

von

**Dr. Rudolf Böger**

Professor am Realgymnasium des Johanneums in Hamburg

Mit 142 Figuren

---

**Leipzig**

G. J. Göschensche Verlagshandlung

1900

QA471

B64

Math.

Dept.

Mathematics Dept.

Alle Rechte  
von der Verlagshandlung vorbehalten.

---

## Vorwort.

---

Der vorliegende Leitfaden folgt im allgemeinen der durch v. Staudt geschaffenen, durch Herrn Reye erschlossenen Darstellungsweise<sup>(1)</sup> der Geometrie der Lage. Im einzelnen finden sich mancherlei Abweichungen. Die wichtigsten unter diesen sind die beiden folgenden.

In der Definition<sup>(30.)</sup> der projektiven Verwandtschaft bin ich nicht v. Staudt, sondern Herrn Thomae gefolgt. Ausschlaggebend war dabei für mich, dafs, von der Begründung der kollinearen und reziproken Verwandtschaft abgesehen, bei allen Konstruktionen und Beweisen die projektiven Gebilde aufgefaßt werden als die Endglieder einer Kette von perspektiven Gebilden und dafs es daher für den Lernenden eine Erleichterung ist, wenn ihm in der Definition gerade diese Eigenschaft übermittelt wird.

Die Staudtsche Theorie der imaginären Elemente, die sich auf einen „ordentlichen“ Wurf stützt, habe ich ersetzt durch eine Theorie, die von einem *beliebigen* Wurf ausgeht. Diese Theorie macht eine Unterscheidung zwischen reellen und imaginären Fällen unnötig, weil sie nur Beweise kennt, die für alle Fälle gleichzeitig gelten. Hält man nämlich stets die durch einen Wurf bestimmte Involution fest und stützt die Beweise auf sie und niemals auf ihre etwa vorhandenen Ordnungselemente oder darauf, dafs keine Ordnungselemente vorhanden sind, so stellt sich nirgendwo das Bedürfnis ein, imaginäre Elemente einzuführen<sup>(93 A; 133 A; 190 A:)</sup>. Das Wort imaginär ist aber nicht blofs unnötig, es ist geradezu schädlich; denn es kann, weil ihm keine Vorstellung entspricht, nur verwirrend wirken. Das Wort imaginär sollte daher aus der Geometrie der Lage verbannt werden<sup>(231)</sup>. —

Dafs man durch die angegebene Verallgemeinerung (die ich zuerst in einer Abhandlung *Über Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen zweiter Ordnung*, Hamburg 1886, veröffentlicht habe; vgl. die Arbeit des Herrn H. Wiener<sup>(158 A)</sup>) zu allgemein gültigen Konstruktionen und mit ihnen zu allgemein gültigen Beweisen gelangt, zeigt, neben den Lehrsätzen von Desargues<sup>(194a)</sup> und Hesse<sup>(217)</sup> in ihrer allgemeinsten Form, die Aufgabe<sup>(203)</sup>: Eine Kurve aus fünf (reellen oder imaginären) Punkten zu zeichnen. — Diese Aufgabe liefs sich allmählich soweit vereinfachen und elementar begründen, dafs sie gleich an die Lehre von den konjugierten Involutionen angeschlossen<sup>(100)</sup> und so in den Mittelpunkt des Ganzen gerückt werden konnte. Im Grunde führen alle Konstruktionen auf sie hin oder gehen von ihr aus.

In der Darstellung habe ich ein lückenloses Fortschreiten im Beweisen erstrebt. Durch ein ununterbrochenes Zurückverweisen auf die beim Schliessen benutzten Lehrsätze soll der Lernende in den Stand gesetzt werden, mit möglichst geringer Mühe die Wurzeln jedes Beweises aufzudecken und sich über die Stellung jedes Satzes innerhalb des gesamten Lehrgebäudes Klarheit zu verschaffen. Überhaupt ist für die Form der Darstellung an jeder Stelle des Buches das Ziel gewesen, dem Lernenden den Zugang zur Geometrie der Lage zu erleichtern.

Hamburg, im November 1899.

**Rudolf Böger.**

# Inhalt.

## I. Der Kegelschnitt.

	Seite
§ 1. <b>Perspektive Verwandtschaft.</b> . . . . .	1—10
1. Die Staudtsche Darstellung der Geometrie der Lage. — 2. Die geraden Grundgebilde. — 3. Die uneigentliche Gerade. — 4. Drehungssinn. — 5. Bewegungssinn. — 6—9. Perspektiv Grundgebilde. — 10—11. Elliptischer und hyperbolischer Wurf. — 12—13.* Vorläufige Inhaltsangabe.	
§ 2. <b>Harmonische Elemente.</b> . . . . .	11—25
14. Stereometrische Hilfssätze. — 15. Perspektiv liegende Dreiecke. — 16. Viereck und Vierseit. — 17—20. Der Fundamentalsatz der harmonischen Punkte. — 21. Harmonische Strahlen. — 22. Harmonische Ebenen. — 23. Harmonische Elemente. — 24. Harmonische Punkte eines Vierecks. — 25. Harmonische Strahlen eines Vierseits. — 26. Konstruktion des vierten harmonischen Elementes. — 27.* Mittelpunkt und uneigentlicher Punkt einer Strecke. — 28.* Zwei Strahlen und die Halbierungslinien ihrer Winkel.	
§ 3. <b>Projektive Verwandtschaft gerader Grundgebilde.</b> . . . . .	25—50
29. Homologe Elemente in zwei geraden Grundgebilden. — 30. Definition der projektiven Verwandtschaft. — 31. Konstruktion zweier projektiven Grundgebilde. — 32. Der Fundamentalsatz der projektiven Verwandtschaft. — 33. Identität zweier projektiven Grundgebilde. — 34. Perspektiv Lage zweier projektiven Grundgebilde. — 35. Einschalten von perspektiven Gliedern zwischen die projektiven Endglieder einer Kette. — 36. Erster Sechseckssatz. — 37. Das zweite Ordnungselement einer Projektivität. — 38. Elemente, die sich zweifach entsprechen; Zweiter Sechseckssatz. — 39. Projektive Permutationen. — 40. Projektive Verwandtschaft harmonischer Würfe. — 41.* Die Lehre vom Doppelverhältnis.	

§ 4. **Krumme Grundgebilde.** . . . . .

42. Erzeugnis zweier projektiven geraden Grundgebilde. — 43.\* Kegelschnitt. — 44. Erzeugnis zweier perspektiven geraden Grundgebilde. — 45. Tangente. — 46—48. Kurvenkonstruktionen. — 49. Bestimmungsstücke einer krummen Punktreihe. — 50. Projektive Strahlenbüschel in zwei Kurvenpunkten. — 51. Harmonische Trennung von Ecke und Gegenseite eines Kurvendreiecks durch die Tangenten der beiden anderen Ecken. — 52. Der zweite Schnittpunkt einer Gerade mit der Kurve. — 53. Der Schnittpunkt zweier Tangenten liegt in der zugeordneten Diagonallinie. — 54. Dritter Sechseckssatz (Pascal). — 55. Kurvenfünfeck. — 56. Kurvenviereck. — 57. Kurvendreieck. — 58. Kurvendreiseit. — 59. Das gemeinsame Diagonaldreieck eines Kurvenvierecks und des zugeordneten Kurvenvierseits. — 60. Identität der krummen Punktreihe und des krummen Strahlenbüschels. — 61. Kurvenvierseit; Identität von Kurve und Kegelschnitt. — 62. Kurvenfünfeit.

§ 5. **Die gerade Involution.** . . . . .

72—79

63. Involution. — 64. Die Vierecksinvolution. — 65. Konstruktion einer Involution. — 66. Ordnungspunkte einer Involution. — 67. Parabolischer Wurf. — 68. Eine Involution und ihre Würfe.

§ 6. **Projektive Verwandtschaft krummer Grundgebilde.** . . . . .

79—95.

69. Krumme Würfe. — 70. Harmonische Elemente eines krummen Grundgebildes. — 71. Projektive Verwandtschaft krummer Grundgebilde. — 72. Die krumme Involution. — 73. Die Achse einer krummen Projektivität. — 74. Konstruktion einer krummen Projektivität. — 75. Ordnungselemente einer geraden Projektivität. — 76. Das Zentrum einer krummen Projektivität. — 77. Die Projektivität der Achse und des Zentrums. — 78. Die Achse einer krummen Involution. — 79. Das Zentrum einer krummen Involution. — 90. Viereck und Vierseit einer krummen Involution. — 81. Die Involution der Achse und des Zentrums.

§ 7. **Pol und Polare.** . . . . .

95—103

82—83. Die einem Punkt und einer Gerade zugeordnete krumme Punktinvolution. — 84. Pol und Polare. — 85. Poldreieck. — 86. Punkte, die in der Polare liegen. — 87. Geraden, die durch den Pol gehen. — 88. Konstruktion der Polare. — 89. Konstruktion des Pols. — 90. Involutionäre Lage von Pol und Polare. — 91. Polarfiguren.

- |   | Seite   |
|---|---------|
| <b>§ 8. Konjugierte Involutionen.</b> . . . . .   | 103—122 |
| 92. Konjugierte Punkte und Involutionen. —  |         |
| 93. Elliptische, hyperbolische und parabolische konjugierte Involutionen. — 94. Die durch zwei Poldreiecke bestimmten beiden Kurven. — 95. Konjugierte Punkte und Strahlen in den Seiten und Ecken eines Dreiecks. — 96. Der Hessesche Satz. — 97. Die durch ein Poldreieck bestimmten Kurvenvierecke. — 98. Zusammenhang zwischen den krummen Involutionen und den konjugierten geraden Involutionen. — 99. Konjugierte Punkte in den Seiten eines Kurvenvierecks. 100. Konstruktion der Kurve aus einem Punkte und zwei konjugierten Punktinvolutionen. — 101. Der vierte gemeinsame Punkt zweier Kurven. — 102. Kurvenbüschel. — 103. Lehrsatz des Desargues. — 104. Die durch die Gegenecken eines Vierseits harmonisch getrennten Geraden.   |         |
| <b>§ 9. Elliptische und hyperbolische Punkte und Geraden.</b> . . . . .   | 122—128 |
| 105. Elliptische und hyperbolische Punkte und Geraden. — 106. Die Involutionen der Ecken und Seiten eines Poldreiecks. — 107. Die Strahlen eines elliptischen Punktes. — 108. Kennzeichen für eine elliptische und eine hyperbolische Gerade. — 109. Kennzeichen für die Strahlen eines hyperbolischen Punktes. — 110. Trennung der elliptischen und hyperbolischen Elemente durch die Kurvenelemente. — 111. Das zweite gemeinsame Element zweier Kurven.  |         |
| <b>§ 10.* Konjugierte Durchmesser.</b> . . . . .  | 128—144 |
| 112. Zirkuläre Involution. — 113. Rechtwinkliges Strahlenpaar einer Involution. — 114. Konjugierte Durchmesser. — 115. Beispiel. — 116. Parallele Sehnen. — 117. Symmetrische Lage der Kurvenpunkte zu zwei konjugierten Durchmessern. — 118. Parallele Tangenten. — 119. Konstruktion der Kurvenachsen. — 120. Definition der Ellipse und der Hyperbel. — 121. Durchmesser der Ellipse und der Hyperbel. — 122. Hyperbeltangenten. — 123. Hyperbelsehne. — 124. Kennzeichen für die Ellipse und die Hyperbel. — 125. Abschnitte auf zwei parallelen Tangenten. — 126. Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel. — 127. Parabel. — 128. Die konjugierte Involution eines Parabeldurchmessers. — 129. Das Tangentendreieck einer Parabel. — 130. Gleichung der Parabel. — 131. Kreis. — 132. Konstruktion des Kreises. |         |
| <b>§ 11. Die diagonale Involution.</b> . . . . .  | 144—154 |
| 133. Die diagonale Involution. — 134. Die Haupt-  |         |

	Seite
§ 19. Die adjungierten Involutionen. . . . .	262—271
<p>214. Erweiterung des Begriffs der konjugierten Punkte durch die adjungierte Involution. — 215. Zusatz zum Lehrsatz des Desargues. — 216. Bestimmung eines Polarfeldes durch zwei konjugierte und eine adjungierte Involution. — 217. Verallgemeinerung des Hesseschen Satzes. — 218. Büschel adjungierter Involutionen. — 219. Polarfelder, die eine konjugierte und eine adjungierte Involution gemeinsam haben. — 220. Bestimmung eines Büschels durch eine konjugierte und zwei adjungierte Involutionen. — 221. Schnittpunkt dreier Chordalen.</p>	
§ 20. Zwei Polarfelder. . . . .	271— 289
<p>222. Die durch zwei konjugierte Punktinvolutionen und einen Ordnungsstrahl bestimmten Polarfelder; Konstruktion des Kreises aus einer konjugierten Punktinvolution und einer Tangente. — 223. Die durch eine konjugierte Punktinvolution, eine Strahleninvolution und ein Ordnungselement bestimmten Polarfelder; Konstruktion des Kreises aus einer konjugierten Strahleninvolution und einem Punkte. — 224. Die gemeinsam adjungierten Involutionen zweier Polarfelder. — 225. Hauptpunkte. — 226. Hauptgeraden. — 227. Die komponierenden Strahleninvolutionen der Hauptpunkte. — 228. Die Ordnungsstrahlen eines Hauptpunktes. — 229. Die gemeinsam konjugierten Strahleninvolutionen zweier Polarfelder. — 230. Bestimmung eines Büschels durch vier adjungierte Involutionen. — 231. Inhalt des Buches.</p>	



## Erster Teil.

# Der Kegelschnitt.

---

### § 1. Perspektive Verwandtschaft.

1. **Geometrie der Lage.** Die Geometrie der Lage beschäftigt sich ausschließlich mit den Lagenbeziehungen geometrischer Gebilde zu einander; der Begriff des Mafses ist ihr fremd. Für die Zeichnung der Figuren dieses Buches reicht daher (von einzelnen Zusätzen abgesehen) das Lineal aus. Dem Lernenden wird dringend geraten, jede Figur nach den Angaben des Textes (wenn auch nur aus freier Hand mit Bleifeder) selbständig zu zeichnen; er wird bald finden, dafs er durch selbständiges Zeichnen das Verstehen des Inhalts erheblich beschleunigt. Die beigegebenen Figuren sollen nur zur Kontrolle und zum schnellern Verständnis beim Nachschlagen eines bereits durchgearbeiteten Lehrsatzes dienen.

Während in der Geometrie der Alten die Arithmetik in ausgedehntem Mafse zum Beweisen herangezogen wird, verzichtet die Geometrie der Lage auf jede Rechnung. Trotzdem werden auch heute noch die grundlegenden Sätze vielfach mit planimetrischen Hilfsmitteln bewiesen<sup>(41)</sup>; der vorliegende Leitfaden folgt der Darstellung des grofsen Geometers von Staudt, der die Geometrie der Lage zu einer selbständigen Wissenschaft machte, indem er ihr 1847 in seinem Buche *Geometrie der Lage*, dem von 1856 bis 1860 die *Beiträge zur Geometrie der Lage* folgten, eine Grundlage aus rein geometrischem Stoff gab. Weil aber durch Übung und Unterricht Gleichheit und Parallelität

wichtige Hilfsmittel für unser Anschauungsvermögen geworden sind, so wird im folgenden (in durch ein Sternchen \* kenntlich gemachten Nummern) die Vorstellung der geometrischen Figuren durch den Hinweis auf planimetrische Folgerungen aus den allgemeinen Lehrsätzen der Geometrie der Lage erleichtert; zu einem Fortschritt in der Beweisführung aber werden die Begriffe der Gleichheit und Parallelität nicht benutzt.

2     **2. Die geraden Grundgebilde: Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel.** Der Inbegriff der Punkte, die in einer Geraden liegen, heisst (gerade) *Punktreihe*; der Inbegriff der Geraden, die durch einen Punkt gehen, heisst (gerader) *Strahlenbüschel*; der Inbegriff der Ebenen, die durch eine Gerade gehen, heisst (gerader) *Ebenenbüschel*. Für Punktreihe, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel hat man den gemeinsamen Namen *ein förmige gerade Grundgebilde* oder *Grundgebilde der ersten Stufe*. Die Punkte (einer Punktreihe), die Strahlen (eines Strahlenbüschels), die Ebenen (eines Ebenenbüschels) nennt man die *Elemente* (des ein förmigen Grundgebildes). Die Gesamtheit der Punkte  $ABC\dots$ , die in der Geraden (oder, wie man auch sagt, in dem *Träger*)  $s$  liegen, bezeichnet man kurz als die Punktreihe  $s$ ; die Gesamtheit der Strahlen  $abc\dots$ , die durch den Punkt (oder, wie man auch sagt, durch den *Mittelpunkt*)  $S$  gehen, als den Strahlenbüschel  $S$ ; die Gesamtheit der Ebenen  $\alpha\beta\gamma\dots$ , die durch die Gerade (oder, wie man auch sagt, durch die *Achse*)  $g$  gehen, als den Ebenenbüschel  $g$ .

3     **3. Uneigentliche Punkte und die uneigentliche Gerade.** Eine Gerade hat mehr Punkte, als wir zählen können; sie hat unzählig oder unendlich viele Punkte. Ebenso hat ein Strahlenbüschel unendlich viele Strahlen (und ein Ebenenbüschel unendlich viele Ebenen). Verbinden wir sämtliche Punkte einer Geraden  $s$  mit einem außerhalb der Geraden liegenden Punkte  $S$ , so erhalten wir sämtliche Strahlen von  $S$  bis auf einen  $u$ , der der Geraden  $s$  parallel ist. Die Zahl der Strahlen eines Punktes ist mithin um eins gröfser als die Zahl der Punkte einer Geraden. Wir dürfen also nicht sagen: Jeder Strahl des Büschels  $S$  schneidet die Gerade  $s$ , sondern müssen hinzufügen: bis auf einen  $u$ , der der Geraden  $s$  parallel ist. Dieser Strahl  $u$  nimmt aber, wie

wir im folgenden sehen werden, keine Ausnahmestellung ein; wir wollen deswegen den lästigen Zusatz umgehen, indem wir der Gerade  $s$  noch einen Punkt, den wir zum Unterschied von den übrigen den *uneigentlichen* nennen wollen, beilegen. Da dieser uneigentliche Punkt, in dem nach unserer neuen Ausdrucksweise der parallele Strahl die Gerade  $s$  schneidet, von jedem eigentlichen Punkt der Gerade unendlich weit entfernt ist, so nennen wir ihn auch den *unendlich fernen Punkt* der Gerade.

Der Grundsatz: Durch einen (eigentlichen) Punkt kann man zu einer Gerade eine und nur eine Parallele ziehen, lautet jetzt: Jede Gerade, die durch einen eigentlichen Punkt geht, hat einen und nur einen uneigentlichen (unendlich fernen) Punkt.

Aus diesem Grundsatz folgt, daß alle uneigentlichen (unendlich fernen) Punkte der Ebene in einer Gerade, der *uneigentlichen (unendlich fernen) Gerade  $o$*  der Ebene, liegen. Denn lägen sie in einer andern Linie, so könnten wir zwei Punkte dieser Linie verbinden und somit eine Gerade mit zwei uneigentlichen Punkten zeichnen.

In Zukunft sprechen wir also nicht mehr von parallelen Geraden, sondern von solchen, die durch denselben Punkt der uneigentlichen Gerade  $o$  gehen oder, was dasselbe sagt, die sich in einem uneigentlichen Punkte schneiden.

4. **Drehungssinn.** Ein Strahl  $a$  kann sich um einen seiner Punkte  $S$  in zweierlei Sinn drehen (mit dem Zeiger einer Uhr oder gegen den Zeiger einer Uhr). Ist  $b$  ein zweiter Strahl von  $S$ , so gelangt der Strahl  $a$  sowohl bei der Drehung im Sinn eines Uhrzeigers als auch bei der Drehung im entgegengesetzten Sinn nach  $b$  (Fig. 1).

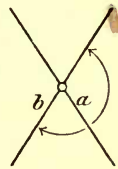


Fig. 1.

Ist  $c$  ein dritter Strahl von  $S$ , so überschreitet  $a$  bei der Drehung in dem einen Sinn, bevor er nach  $b$  gelangt, den Strahl  $c$ ; bei der entgegengesetzten Drehung nicht. Wir wollen nun unter  $abc$  immer den Drehungssinn verstehen, bei welchem  $a$ , ohne  $c$  zu über-

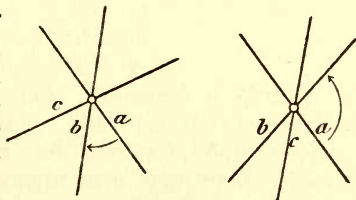


Fig. 2.

schreiten, nach  $b$  gelangt (Fig. 2), so daß durch die Bezeichnung  $a b c$  immer ein bestimmter Drehungssinn festgelegt ist.

- 5 **5. Bewegungssinn.** Von dem Punkt  $A$  einer Gerade  $s$  kann man sich in zweierlei Sinn fortbewegen, um zu einem zweiten Punkt  $B$  in  $s$  zu gelangen. Bewegt man sich in dem einen Sinn, so muß man den uneigentlichen<sup>(3)</sup> Punkt von  $s$  überschreiten, um nach  $B$  zu gelangen; bewegt man

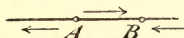


Fig. 3.

sich in dem andern Sinn, so überschreitet man den uneigentlichen Punkt von  $s$  nicht (Fig. 3). Den Sinn beider Bewegungen wollen wir dadurch unterscheiden, daß wir die Bewegung, bei welcher der uneigentliche Punkt *nicht* überschritten wird, durch  $AB$ , und die Bewegung, bei welcher der uneigentliche Punkt überschritten wird, durch  $A'B$  bezeichnen.

Ist  $C$  ein dritter (eigentlicher) Punkt von  $s$ , so wollen wir unter  $ABC$  immer den Bewegungssinn verstehen, bei

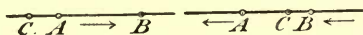


Fig. 4.

welchem man von  $A$  nach  $B$  gelangt, *ohne*  $C$  zu überschreiten, so daß durch die Bezeichnung  $ABC$  immer ein bestimmter Bewegungssinn festgelegt ist (Fig. 4).

- 6 **6. Perspektive Lage.** Das Wesen der Geometrie der Lage besteht darin, die Elemente der Grundgebilde<sup>(2)</sup> einander zuzuordnen, d. h. jedem Element des einen Grundgebildes ein Element des andern zuzuweisen.

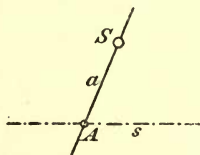


Fig. 5.

Zwei einander zugeordnete Elemente heißen *homologe* Elemente.

Auf die einfachste Art stellt man eine solche Zuordnung, z. B. zwischen einer Punktreihe  $s$  und einem Strahlenbüschel  $S$ , in folgender Weise her. Jedem Strahl  $a$  des Mittelpunktes  $S$  ordnet man den Punkt  $A$  des Trägers  $s$  zu, in dem der Strahl  $a$  die Gerade  $s$  schneidet (Fig. 5). Für die so hergestellte Beziehung zwischen den Punkten einer Gerade und den Geraden eines Punktes hat man verschiedene Ausdrucksweisen. Entweder man nennt den Strahlenbüschel einen *Schein* der Punktreihe oder die Punktreihe einen *Schnitt* des

Strahlenbüschels oder schließlicly man sagt: Der Strahlenbüschel und die Punktreihe sind in *perspektiver Lage*. In Zeichen deutet man die perspektive Verwandtschaft an durch

$$S \overline{\wedge} s,$$

gelesen: Der Strahlenbüschel  $S$  perspektiv zur Punktreihe  $s$ .

**7. Perspektive Strahlenbüschel und perspektive Punktreihen.** Im folgenden stellen wir eine Reihe von Sätzen nicht hinter, sondern neben einander. Dadurch wollen wir darauf aufmerksam machen, daß man den rechts stehenden Satz aus dem links stehenden Satz erhält, indem man die Worte: Gerade (Strahl) und Punkt, Mittelpunkt und Träger, Strahlenbüschel und Punktreihe, Schnittpunkt und Verbindungslinie, Drehung und Bewegung mit einander vertauscht. Später<sup>(91 Z)</sup> werden wir in dem *Gesetz der Dualität* (oder Reziprozität) den Grund dafür kennen lernen, daß man durch eine solche mechanische Vertauschung neue Sätze erhält. — Dem Lernenden wird empfohlen, den rechts stehenden Satz ohne Hilfe des Buches aus dem links stehenden abzuleiten.

*Perspektive Strahlenbüschel.* Um die Strahlen zweier Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  auf einander zu beziehen, nimmt man eine Punktreihe  $s$  zu Hilfe und weist jedem Strahl  $a$  von  $S$  den Strahl  $a_1$  von  $S_1$  zu, der durch den Schnittpunkt  $A = s a$  geht.

Die beiden Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  sind nach der Konstruktion (Fig. 6) Scheine<sup>(6)</sup> einer und derselben Punktreihe  $s$ . Nennen wir zwei solche Büschel perspektiv, so können wir uns auch so ausdrücken:

*Zwei Strahlenbüschel heißen perspektiv, wenn sie Scheine einer und derselben Punktreihe sind.*

In Zeichen:  $S \overline{\wedge} S_1$ .

*Perspektive Punktreihen.* Um die Punkte zweier Punktreihen  $s$  und  $s_1$  auf einander zu beziehen, nimmt man einen Strahlenbüschel  $S$  zu Hilfe und weist jedem Punkt  $A$  von  $s$  den Punkt  $A_1$  von  $s_1$  zu, der auf der Verbindungslinie  $a = S A$  liegt.

Die beiden Punktreihen  $s$  und  $s_1$  sind nach der Konstruktion (Fig. 7) Schnitte<sup>(6)</sup> eines und desselben Strahlenbüschels  $S$ . Nennen wir zwei solche Punktreihen perspektiv, so können wir uns auch so ausdrücken:

*Zwei Punktreihen heißen perspektiv, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind.*

In Zeichen:  $s \overline{\wedge} s_1$ .

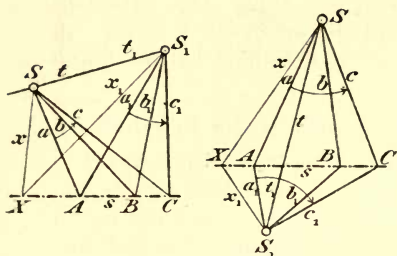


Fig. 6.

8. **Sich selbst homologer Strahl.** Der Strahl, welcher durch die Mittelpunkte  $S$  und  $S_1$  geht, gehört sowohl zum Büschel  $S$  wie zum Büschel  $S_1$ . Er ist also als ein zweifacher Strahl zu betrachten und wird als solcher häufig mit zwei Buchstaben bezeichnet: mit  $t$ , wenn man ihn als Strahl des Büschels  $S$ ; mit  $t_1$ , wenn man ihn als Strahl des Büschels  $S_1$  ansieht.

Sucht man zu  $t$  mittelst der Punktreihe  $s$  in der angegebenen<sup>(7)</sup> Weise den homologen<sup>(6)</sup> Strahl von  $S_1$ , so findet man  $t_1$  (Fig. 6). Daher:

*Sind zwei Strahlenbüschel in perspektiver Lage, so ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte sich selbst homolog.*

9. **9. Drehung perspektiv zugeordneter Strahlen.** Dreht sich ein Strahl  $x$  um den Punkt  $S$  so, daß sein Drehungssinn<sup>(4)</sup>, etwa  $abc$  (Fig. 6), unver-

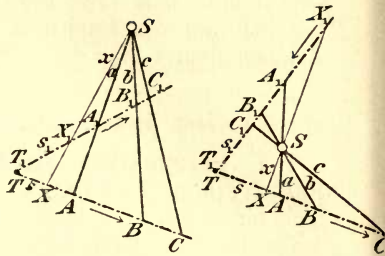


Fig. 7.

- Sich selbst homologer Punkt.** Der Punkt, in dem sich die Träger  $s$  und  $s_1$  schneiden, gehört sowohl zur Reihe  $s$  wie zur Reihe  $s_1$ . Er ist also als ein zweifacher Punkt zu betrachten und wird als solcher häufig mit zwei Buchstaben bezeichnet: mit  $T$ , wenn man ihn als Punkt der Reihe  $s$ ; mit  $T_1$ , wenn man ihn als Punkt der Reihe  $s_1$  ansieht.

Sucht man zu  $T$  mittelst des Büschels  $S$  in der angegebenen<sup>(7)</sup> Weise den homologen<sup>(6)</sup> Punkt von  $s_1$ , so findet man  $T_1$  (Fig. 7). Daher:

*Sind zwei Punktreihen in perspektiver Lage, so ist der Schnittpunkt der Träger sich selbst homolog.*

- Bewegung perspektiv zugeordneter Punkte.** Durchläuft ein Punkt  $X$  die Gerade  $s$  so, daß sein Bewegungssinn<sup>(5)</sup>, etwa  $ABC$  (Fig. 7), un-

ändert bleibt, so durchläuft sein Schnittpunkt  $X$  mit einer nicht durch  $S$  gehenden Gerade  $s$  in einem bestimmten unveränderlichen Sinn  $ABC^{(5)}$  die Gerade  $s$ . Der Strahl  $x_1$ , welcher den Punkt  $X$  mit einem außerhalb  $s$  liegenden Punkte  $S_1$  verbindet, dreht sich dann, während  $x$  sich um  $S$  dreht, um den Mittelpunkt  $S_1$  in einem bestimmten unveränderlichen Sinn  $a_1 b_1 c_1$ .

Da bei unserer Konstruktion die Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  (vermitteltst der Punktreihe  $s$ ) perspektiv aufeinander bezogen sind<sup>(7)</sup>, so können wir das Ergebnis so aussprechen:

*Dreht sich ein Strahl  $x$  um den Mittelpunkt  $S$  in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, so daß er nacheinander mit jedem Strahl des Büschels  $S$  zusammenfällt, so dreht sich ein ihm perspektiv zugeordneter Strahl  $x_1$  um seinen Mittelpunkt  $S_1$  in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, so daß er ebenfalls nacheinander mit jedem Strahl des Mittelpunktes  $S_1$  zusammenfällt.*

verändert bleibt, so dreht sich seine Verbindungslinie  $x$  mit einem außerhalb  $s$  liegenden Punkte  $S$  in einem bestimmten unveränderlichen Sinn  $abc^{(4)}$  um  $S$ . Der Punkt  $X_1$ , in dem die Verbindungslinie  $x$  eine nicht durch  $S$  gehende Gerade  $s_1$  schneidet, durchläuft dann, während  $X$  sich auf  $s$  bewegt, den Träger  $s_1$  in einem bestimmten unveränderlichen Sinn  $A_1 B_1 C_1$ .

Da bei unserer Konstruktion die Punktreihen  $s$  und  $s_1$  (vermitteltst des Strahlenbüschels  $S$ ) perspektiv aufeinander bezogen sind<sup>(7)</sup>, so können wir das Ergebnis so aussprechen:

*Durchläuft ein Punkt  $X$  den Träger  $s$  in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, so daß er nacheinander mit jedem Punkt der Reihe  $s$  zusammenfällt, so durchläuft ein ihm perspektiv zugeordneter Punkt  $X_1$  seinen Träger  $s_1$  in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, so daß er ebenfalls nacheinander mit jedem Punkt des Trägers  $s_1$  zusammenfällt.*

**10. Elliptischer und hyperbolischer Wurf.** Die Reihenfolge von vier Punkten, die in einer Gerade liegen, sei  $ABCD$ , so daß ein Punkt  $X$ , der die Gerade  $s$  im Sinne  $ABC^{(5)}$  durchläuft, der Reihe nach mit  $ABCD$  zusammenfällt. Fassen wir die vier Punkte in zwei Paare  $AB$  und  $CD$  zusammen und nennen  $AB$  sowohl wie  $CD$  ein *Punktpaar*, so wird bei der angegebenen Reihenfolge das Punktpaar  $AB$  durch das Punktpaar  $CD$  nicht getrennt, d. h. der

Punkt  $X$  gelangt von  $A$  nach  $B$ , ohne  $C$  oder  $D$  zu überschreiten. — Um uns bequemer ausdrücken zu können, führen wir ein neues Wort ein durch die

1. Definition: Der Inbegriff zweier Punktpaare heißt ein (gerader Punkt-) *Wurf*; in Zeichen  $AB.CD$ .

Wir können dann sagen: In dem Wurf  $AB.CD$  wird das Punktpaar  $AB$  durch das Punktpaar  $CD$  nicht getrennt.

Aus der Gruppe unserer vier Punkte können wir ferner den Wurf  $AD.BC$  bilden. Unser Punkt  $X$  gelangt von  $A$  nach  $D$ , indem er  $B$  und  $C$  überschreitet. Würde er sich im entgegengesetzten Sinne bewegen, so würde er von  $A$  nach  $D$  gelangen, ohne  $B$  und  $C$  zu überschreiten. Auch in diesem Falle sagen wir: Das Punktpaar  $AD$  wird durch das Punktpaar  $BC$  nicht getrennt.

Bilden wir schliesslich aus den vier Punkten  $ABCD$  den Wurf  $AC.BD$ , so gelangt der Punkt  $X$  von  $A$  nach  $C$ , indem er  $B$  überschreitet,  $D$  dagegen nicht; bewegt er sich im entgegengesetzten Sinn, so gelangt er von  $A$  nach  $C$ , indem er  $D$  überschreitet,  $B$  aber nicht. In diesem Fall sagen wir: Das Punktpaar  $AC$  wird durch das Punktpaar  $BD$  getrennt. —

Um das Ergebnis zusammenfassen zu können, führen wir noch zwei neue Worte ein:

2. Definition: Ein Wurf, dessen Punktpaare einander trennen, heißt *elliptisch*.

3. Definition: Ein Wurf, dessen Punktpaare einander nicht trennen, heißt *hyperbolisch*.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen lautet demnach:

4. Lehrsatz: *Aus vier Punkten lassen sich drei Würfe bilden; zwei von diesen drei Würfeln sind hyperbolisch, der dritte ist elliptisch.*

11 **11. Der aus vier Strahlen gebildete Wurf.** Verbinden wir die vier Punkte  $ABCD$  mit einem ausserhalb ihres Trägers  $s$  liegenden Punkte  $S$  durch die vier Strahlen  $abcd$  und bezeichnen die Verbindungslinie  $S(X)$  durch  $x$  (Fig. 7), so ergibt sich aus den Betrachtungen von Nr. 9, daß die Reihenfolge der Strahlen  $abcd$  mit der Reihenfolge der Punkte  $ABCD$  übereinstimmt. Gebrauchen wir statt der Worte: Wir verbinden die Punkte  $ABCD$  mit dem Punkte



$S$  durch die Strahlen  $abcd$ , die gleichbedeutenden: Wir projizieren die Punkte  $ABCD$  aus  $S$  durch die Strahlen  $abcd$ , und nennen ferner noch zwei elliptische (oder hyperbolische) Würfe gleichartig, so haben wir

1. Lehrsatz: *Ein Punktwurf wird aus jedem Punkt durch einen gleichartigen Strahlenwurf projiziert.*

Es läßt sich daher der Satz Nr. 10<sub>4</sub> auf einen Strahlenwurf übertragen. Indem wir für Punkt und Strahl (und auch Ebene) das zusammenfassende Wort Element<sup>(2)</sup> anwenden, können wir sagen:

2. Lehrsatz: *Aus vier Elementen  $ABCD$  lassen sich drei Würfe*

$$AB.CD; AC.BD; AD.BC$$

*bilden; zwei von diesen drei Würfeln sind hyperbolisch, der dritte ist elliptisch.*

Zusatz. Wir sprechen nicht bloß von einem Wurf gleich- z artiger Elemente, sondern auch von einem Wurf, der bestimmt wird durch ein Punktpaar  $AB$  und ein Strahlenpaar  $cd$ . Bezeichnen wir nämlich die Punkte, in denen die Verbindungslinie  $s = AB$  von den Strahlen  $c$  und  $d$  geschnitten wird, durch  $C$  und  $D$  und die Strahlen, durch welche die Punkte  $A$  und  $B$  aus dem Schnittpunkt  $S = cd$  projiziert werden, durch  $a$  und  $b$ , so verstehen wir unter dem durch das Punktpaar  $AB$  und das Strahlenpaar  $cd$  bestimmten Wurf  $AB.cd$  entweder den Punktwurf  $AB.CD$  oder den Strahlenwurf  $ab.cd$ . Je nachdem der Wurf  $AB.CD$  ( $ab.cd$ ) elliptisch oder hyperbolisch ist, sprechen wir von einem elliptischen oder hyperbolischen Wurf  $AB.cd$ ; oder auch wir sagen: *Das Punktpaar  $AB$  wird durch das Strahlenpaar  $cd$  getrennt oder nicht getrennt.*

Diese Ausdrucksweise dehnen wir auch auf drei Punkte  $ABC$  und einen Strahl  $d$  (oder auf drei Strahlen  $abc$  und einen Punkt  $D$ ) aus, indem wir z. B. sagen: *Der Punkt  $C$  wird von dem Strahl  $d$  durch die Punkte  $A$  und  $B$  getrennt oder nicht getrennt.*

12. **Vorläufige Inhaltsangabe.** Der Inhalt der <sup>12</sup> Geometrie der Lage läßt sich an dieser Stelle bereits verständlich machen und zwar am anschaulichsten vermittelt der (links) konstruierten perspektiven Strahlenbüschel<sup>(7)</sup>.

Denken wir uns die Strahlen  $abc\dots$  von  $S$  und die ihnen homologen<sup>(6)</sup>  $a_1 b_1 c_1\dots$  von  $S_1$  fest und dann den einen Büschel um seinen Mittelpunkt gedreht (ohne daß die gegenseitige Lage der Strahlen sich ändert), sodafs also  $t$ <sup>(8)</sup> nicht mehr mit  $t_1$  zusammenfällt, so liegen die Schnittpunkte der homologen Strahlen  $aa_1, bb_1, cc_1\dots$  nicht mehr in einer Geraden  $s$ , sondern in einer krummen Linie.

Das Aufsuchen der Eigenschaften, die die so entstandene krumme Linie hat, bildet den Inhalt dieses ganzen Buches.

13. \* Erläuterung durch den Kreis. Verständlicher werden die in der vorhergehenden Nummer gemachten Andeutungen, wenn wir eine bekannte krumme Linie, den Kreis, auf die angegebene Weise entstehen lassen.

Wir beziehen zwei Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  nicht vermittelt einer beliebigen Geraden  $s$ , sondern vermittelt der unendlich fernen Geraden  $o$  der Zeichenebene<sup>(3)</sup> perspektiv aufeinander. Wir ordnen also<sup>(7)</sup> jedem Strahl  $a$  von  $S$  den Strahl  $a_1$  von  $S_1$  zu, der durch den Schnittpunkt von  $a$  und  $o$  geht, d. h. wir weisen jedem Strahl  $a$  von  $S$  den ihm parallelen Strahl  $a_1$  von  $S_1$  zu (Fig. 8). Da Winkel mit parallelen Schenkeln, wenn sie in demselben Sinn<sup>(4)</sup> gemessen werden,

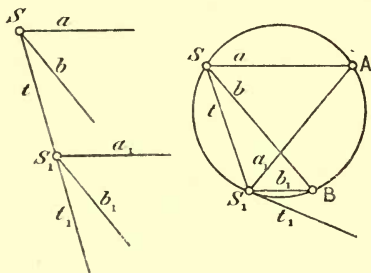


Fig. 8.

einander gleich sind, so ist der Winkel zwischen zwei beliebigen Strahlen  $ab$  gleich dem von den homologen Strahlen  $a_1 b_1$  gebildeten Winkel, so daß die beiden Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  einander kongruent sind. Die Gleichheit der Winkel bleibt bestehen, wenn wir z. B. den Büschel  $S_1$  um seinen Mittelpunkt  $S_1$  drehen. Auch in der neuen Lage ist also  $\angle ab = \angle a_1 b_1$  und folglich auch, wie ein Blick in die Fig. 8 lehrt,  $\angle aa_1 = \angle bb_1$ . Daraus folgt nach einem planimetrischen Satze, daß die Schnittpunkte  $A = aa_1$ ,  $B = bb_1$  auf einem durch  $S$  und  $S_1$  gehenden Kreise liegen. — Aus  $\angle aa_1 = \angle tt_1$  folgt, nebenbei bemerkt, ferner noch, daß  $t_1$  in seiner neuen Lage Tangente an dem Kreise ist.

## § 2. Harmonische Elemente.

**14. Stereometrische Hilfssätze.** Der Fundamentalsatz<sup>(15)</sup> dieses Paragraphen wird durch stereometrische Betrachtungen gewonnen. Wir schicken daher, um den Beweis nicht unterbrechen zu müssen, die zu benutzenden stereometrischen Sätze voraus.

1. Zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkte.

2. Zwei Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, liegen in einer Ebene.

3. Zwei Ebenen schneiden sich in einer Gerade.

4. Schneiden sich zwei Geraden, die in zwei verschiedenen Ebenen liegen, so liegt ihr Schnittpunkt in der Schnittlinie beider Ebenen.

5. Vier Punkte lassen sich immer als die Ecken eines (räumlichen oder ebenen) Vierecks ansehen.

**Lehrsatz:** Wenn zwei Gegenseiten eines Vierecks sich schneiden, so schneiden sich auch die anderen Gegenseiten des Vierecks.

**Beweis:** Wenn die Gegenseiten  $\Delta A$  und  $B\Gamma$  des Vierecks  $\Delta A B \Gamma$  sich in  $P$  schneiden, so liegen die vier Ecken in der Ebene  $P A B$ ; alle Verbindungslinien der Ecken liegen daher in einer Ebene, folglich schneiden sie sich<sup>(14)</sup>.

**6. Lehrsatz:** *Wenn je zwei von drei Geraden sich schneiden, so liegen die drei Geraden in einer Ebene oder gehen durch einen Punkt.*

**Beweis:** Nach der Voraussetzung schneiden sich  $b$  und  $c$  in  $A$ ,  $c$  und  $a$  in  $B$ ,  $a$  und  $b$  in  $C$ . Fällt  $A$  nicht mit  $B$  (und folglich auch nicht mit  $C$ ) zusammen, so liegen die drei Geraden in der Ebene  $A B C$ . Fällt dagegen  $A$  mit  $B$  (und folglich auch mit  $C$ ) zusammen, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

**15. Perspektiv liegende Dreiecke.** In einer Ebene  $\sigma$  liege das Dreieck  $A B C$  mit den Seiten  $a b c$ ; in einer zweiten Ebene  $\sigma_1$  (oder auch in derselben Ebene  $\sigma$ ) das Dreieck  $A B \Gamma$  mit den Seiten  $\alpha \beta \gamma$ . Wir wollen die Ecken  $A$  und  $A$ ,  $B$  und  $B$ ,  $C$  und  $\Gamma$  einander zuweisen und sie kurz homolog<sup>(6)</sup> nennen. Die Verbindungslinien homologer Ecken

nennen wir homologe Seiten. Durch die Zuordnung der Ecken der beiden Dreiecke ist dann auch jeder Seite des einen Dreiecks eine bestimmte Seite des andern zugeordnet. Und umgekehrt. —

1. Lehrsatz: Wenn die drei Punkte, in denen sich die homologen Seiten zweier zugeordneten Dreiecke schneiden, in einer Geraden liegen, so gehen die drei Geraden, welche die homologen Ecken verbinden, durch einen Punkt.

Beweis: Die beiden in derselben Ebene  $\sigma$  liegenden, zugeordneten Dreiecke seien  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  (Fig. 9); die drei Punkte, in denen die Seiten  $abc$  des Dreiecks  $ABC$  von den homologen Seiten  $a_1b_1c_1$  des Dreiecks  $A_1B_1C_1$  geschnitten werden, seien  $PQR$ ; die Gerade, in der nach der Voraussetzung die drei Punkte  $PQR$  liegen, heiße  $t$ .

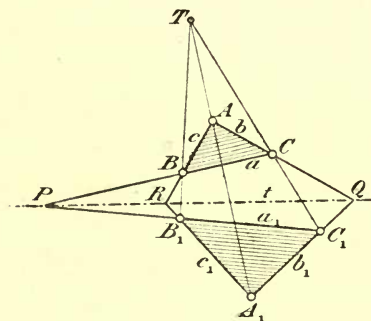


Fig. 9.

Wir legen durch die Gerade  $t$  eine (in der Figur nicht gezeichnete) beliebige

Ebene  $\sigma_1$  und ziehen in dieser durch die drei Punkte  $PQR$  drei beliebige Geraden  $\alpha\beta\gamma$ , die sich in den Punkten  $AB\Gamma$  schneiden. Wir betrachten zunächst die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $AB\Gamma$ . Da  $BC$  und  $B\Gamma$  sich in  $P$  schneiden, so müssen sich auch die Verbindungslinien  $BB$  und  $C\Gamma$  schneiden<sup>(14a)</sup>; ebenso müssen sich die Verbindungslinien  $C\Gamma$  und  $AA$  und die Verbindungslinien  $AA$  und  $BB$  schneiden. Da diese drei Verbindungslinien nicht in einer Ebene liegen, weil die Ebenen  $ABC = \sigma$  und  $AB\Gamma = \sigma_1$  nicht zusammenfallen, so gehen die drei Verbindungslinien  $AA$ ,  $BB$ ,  $C\Gamma$  durch einen Punkt  $S$ <sup>(14a)</sup>.

Durch Betrachtung der Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $AB\Gamma$  ergibt sich in derselben Weise, daß die Verbindungslinien  $A_1A$ ,  $B_1B$ ,  $C_1\Gamma$  durch einen Punkt  $S_1$  gehen.

Den Punkt, in dem die Ebene  $\sigma$  der Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  durch die Verbindungslinie der beiden Punkte  $S$  und  $S_1$  geschnitten wird, nennen wir  $T$ . Weil nun  $SA$

und  $S_1 A_1$  nach der Konstruktion sich in  $A$  schneiden, müssen sich auch  $S S_1$  und  $A A_1$  schneiden<sup>(14b)</sup>, mit andern Worten,  $A A_1$  muß durch  $T$  gehen. Ebenso müssen  $B B_1$  und  $C C_1$  durch  $T$  gehen. —

2. Lehrsatz: *Wenn die drei Geraden, welche die homologen Ecken zweier zugeordneten Dreiecke verbinden, durch einen Punkt gehen, so liegen die drei Punkte, in denen sich die homologen Seiten schneiden, in einer Gerade.*

Beweis: Wir legen durch den Punkt  $T$  (Fig. 9), in dem sich nach der Voraussetzung die drei Verbindungslinien homologer Ecken  $A A_1$ ,  $B B_1$ ,  $C C_1$  schneiden, eine beliebige, nicht in  $\sigma$  liegende (in der Figur nicht gezeichnete) Gerade und nehmen in dieser zwei beliebige Punkte  $S$  und  $S_1$  an. Weil  $S S_1$  und  $A A_1$  durch  $T$  gehen, so müssen sich auch  $S A$  und  $S_1 A_1$  in einem Punkte  $A$  schneiden<sup>(14b)</sup>; ebenso schneiden sich  $S B$  und  $S_1 B_1$  in einem Punkte  $B$ ,  $S C$  und  $S_1 C_1$  in einem Punkte  $\Gamma$ . Die drei Punkte  $A B \Gamma$  bestimmen eine Ebene  $\sigma_1$ , die die Ebene  $\sigma$  in der Gerade  $t$  schneiden möge<sup>(14a)</sup>.

Die Geraden  $BC$  und  $B_1 C_1$  schneiden sich<sup>(14c)</sup>, weil sie beide in der Ebene  $\sigma$  liegen; die Geraden  $BC$  und  $B \Gamma$  schneiden sich, weil  $B B$  und  $C \Gamma$  durch  $S$  gehen<sup>(14b)</sup>; die Geraden  $B_1 C_1$  und  $B \Gamma$  schneiden sich, weil  $B_1 B$  und  $C_1 \Gamma$  durch  $S_1$  gehen<sup>(14b)</sup>. Die drei Geraden  $BC$ ,  $B_1 C_1$ ,  $B \Gamma$ , von denen, wie wir sehen, je zwei sich schneiden, können aber nicht in einer Ebene  $\sigma$  liegen, weil sonst  $B$  (und  $\Gamma$ ) und mithin auch  $S$  gegen die Konstruktion in  $\sigma$  liegen müßte; sie gehen daher<sup>(14a)</sup> durch einen Punkt  $P$ , und dieser liegt, weil z. B.  $BC$  und  $B \Gamma$  in zwei verschiedenen Ebenen  $\sigma$  und  $\sigma_1$  liegen, in der Schnittlinie  $t$  von  $\sigma$  und  $\sigma_1$ <sup>(14d)</sup>.  $BC$  und  $B_1 C_1$  schneiden sich also in einem Punkte  $P$  von  $t$ . — Ebenso liegt auch der Schnittpunkt  $Q$  von  $CA$  und  $C_1 A_1$  und der Schnittpunkt  $R$  von  $AB$  und  $A_1 B_1$  in  $t$ .

Anmerkung. Wenn von zwei zugeordneten Dreiecken  $A$   $ABC$  und  $A_1 B_1 C_1$  entweder die Schnittpunkte homologer Seiten in einer Gerade liegen oder die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt gehen, so heißen die Dreiecke *perspektiv liegend*. — Dieser (durch *stereometrische* Betrachtungen gewonnene) Lehrsatz (von Desargues) über perspektiv liegende Dreiecke bildet die Grundlage der Lehre von den harmonischen Elementen und damit der Geometrie der Lage.

16 **16. Viereck.** Vier Punkte einer Ebene können durch sechs Geraden verbunden werden. Nimmt man die vier Punkte zu Ecken eines Vierecks und nennt die Verbindungslinien Seiten, so lautet der vorstehende Satz:

Ein Viereck hat *sechs* Seiten.

Zwei Seiten, die nicht durch dieselbe Ecke gehen, heißen *Gegenseiten*;

der Schnittpunkt zweier Gegenseiten heißt *Diagonalpunkt*;

die Verbindungslinie zweier Diagonalpunkte heißt *Diagonallinie*.

Ein Viereck hat demnach drei Paar Gegenseiten, drei Diagonalpunkte und drei Diagonallinien.

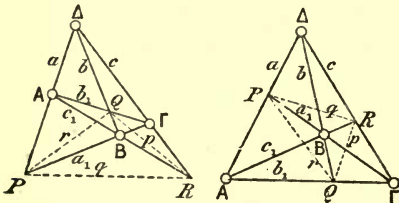


Fig. 10.

Die vier Ecken nennen wir  $\Delta A B \Gamma$  (Fig. 10); die drei von  $\Delta$  ausgehenden Seiten  $a b c$ , ihre Gegenseiten  $a_1 b_1 c_1$ . Ferner führen wir für die Diagonalpunkte und Diagonallinien die Bezeichnung ein:  $a a_1 = P$ ;  $b b_1 = Q$ ;  $c c_1 = R$ .  $Q R = p$ ;  $R P = q$ ;  $P Q = r$ .

16. **Vierseit.** Vier Geraden einer Ebene schneiden sich in sechs Punkten. Nimmt man die vier Geraden zu Seiten eines Vierseits und nennt die Schnittpunkte Ecken, so lautet der vorstehende Satz:

Ein Vierseit hat *sechs* Ecken.

Zwei Ecken, die nicht in derselben Seite liegen, heißen *Gegenecken*;

die Verbindungslinie zweier Gegenecken heißt *Diagonallinie*;

der Schnittpunkt zweier Diagonallinien heißt *Diagonalpunkt*.

Ein Vierseit hat demnach drei Paar Gegenecken, drei Diagonallinien und drei Diagonalpunkte.

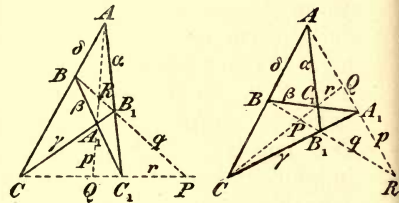


Fig. 11.

Die vier Seiten nennen wir  $\delta \alpha \beta \gamma$  (Fig. 11); die drei in  $\delta$  liegenden Ecken  $A B C$ , ihre Gegenecken  $A_1 B_1 C_1$ . Ferner führen wir für die Diagonallinien und Diagonalpunkte die Bezeichnung ein:  $A A_1 = p$ ;  $B B_1 = q$ ;  $C C_1 = r$ .  $A A_1 = p$ ;  $B B_1 = q$ ;  $C C_1 = r$ .  $q r = P$ ;  $r p = Q$ ;  $p q = R$ .

*Zusatz.* Um für die im folgenden sich ergebenden Beziehungen zwischen den Seiten und Diagonallinien eines Vierecks einen kurzen Ausdruck zu gewinnen, ordnen wir die Seiten und Diagonallinien einander zu und zwar jeder Seite (und ihrer Gegenseite) die Diagonallinie, welche die beiden *nicht* in der Seite liegenden Diagonale verbindet, sodafs einander zugeordnet heifsen

$a (a_1)$  und  $p$ ;  $b (b_1)$  und  $q$ ;  
 $c (c_1)$  und  $r$ .

*Anmerkung.* In der Planimetrie legt man den Ecken eines Vierecks eine bestimmte Reihenfolge bei und nennt nur die Verbindungslinie von zwei *aufeinander folgenden* Ecken Seite, sodafs ein planimetrisches Viereck vier Seiten hat. Ein solches Viereck heifst ein *einfaches* im Gegensatz zum unsrigen, das wohl auch ein *vollständiges* genannt wird.

Allgemein heifst ein Vieleck ein *einfaches*, wenn den Ecken eine bestimmte Reihenfolge beigelegt ist; ein einfaches Vieleck hat ebensoviel Seiten wie Ecken.

*Zusatz.* Um für die im folgenden sich ergebenden Beziehungen zwischen den Ecken und Diagonalepunkten eines Vierseits einen kurzen Ausdruck zu gewinnen, ordnen wir die Ecken und Diagonalepunkte einander zu und zwar jeder Ecke (und ihrer Gegenseite) den Diagonalepunkt, in welchem die beiden *nicht* durch die Ecke gehenden Diagonallinien sich schneiden, sodafs einander zugeordnet heifsen

$A (A_1)$  und  $P$ ;  $B (B_1)$  und  $Q$ ;  
 $C (C_1)$  und  $R$ .

*Anmerkung.* In der Planimetrie legt man den Seiten eines Vierseits eine bestimmte Reihenfolge bei und nennt nur den Schnittpunkt von zwei *aufeinander folgenden* Seiten Ecke, sodafs ein planimetrisches Vierseit vier Ecken hat. Ein solches Vierseit heifst ein *einfaches* im Gegensatz zum unsrigen, das wohl auch ein *vollständiges* genannt wird.

Allgemein heifst ein Vielseit ein *einfaches*, wenn den Seiten eine bestimmte Reihenfolge beigelegt ist; ein einfaches Vielseit hat ebensoviel Ecken wie Seiten.

## 17. Konstruktion eines Vierecks.

17

Aufgabe: Es sind drei Punkte  $P Q W$  gegeben, die in einer Gerade liegen. Man soll ein Viereck zeichnen, von dem  $P$  und  $Q$  zwei Diagonalepunkte sind,

während eine Seite des dritten Diagonalpunktes durch  $W$  geht.

Lösung: Wir legen durch  $P$  zwei beliebige Geraden  $a$  und  $a_1$ , die von einer beliebigen durch  $W$  gelegten Gerade  $c$  in  $\Delta$  und  $\Gamma$  geschnitten werden. Bezeichnen wir dann den Punkt, in welchem  $a$  von der Verbindungslinie  $Q\Gamma$  geschnitten wird, durch  $A$ , und den Punkt, in welchem  $a_1$  von  $Q\Delta$  geschnitten wird, durch  $B$ , so bilden  $\Delta A B \Gamma$  die Ecken eines der verlangten Vierecke.

A *Anmerkung.* Später<sup>(26,1)</sup> werden wir sehen, daß die Zeichnung des Punktes  $W_1$ , in dem die Seite  $AB$  die Diagonallinie  $PQ$  schneidet, für die Lehre von den harmonischen Punkten von der größten Wichtigkeit ist. Der Leser hat sich daher mit der vorstehenden Konstruktion vollständig vertraut zu machen; er hat sie für verschiedene Lagen der Punkte  $PQW$  und unter Abänderung der Lage der willkürlich angenommenen Geraden  $aa_1c$  zu wiederholen und einzutüben. Je gründlicher er diese Konstruktion beherrscht und die Einzelheiten der Vierecksfigur in sich aufnimmt, um so schneller wird er die folgenden Sätze verstehen.

18. **Zwei Diagonalpunkte und die Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes.** Zeichnen wir nach Nr. 17 zwei Vierecke (Fig. 12), von denen  $P$  und  $Q$  zwei Diagonalpunkte sind, so behaupten wir: Wenn die Seiten  $c$  und  $c'$  der dritten Diagonalpunkte  $R$  und  $R'$  sich in  $W$  schneiden, so gehen

die Gegenseiten  $c_1$  und  $c'_1$  dieser Seiten  $c$  und  $c'$  durch einen und denselben Punkt  $W_1$  der gemeinsamen Diagonallinie  $PQ$ , mit andern Worten:

Wir behaupten, daß der Punkt  $W_1$  von der Wahl des Vierecks  $\Delta A B \Gamma$  unabhängig, also nur von der Lage der drei Punkte  $P Q W$  abhängig ist.

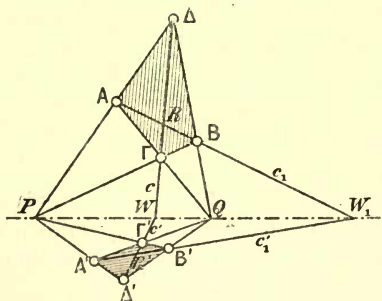


Fig. 12.

Beweis: Jedes der beiden gezeichneten Vierecke  $\Delta A B \Gamma$  und  $\Delta' A' B' \Gamma'$  zerlegen wir in zwei Dreiecke und betrachten zunächst  $\Delta \Gamma A$  und  $\Delta' \Gamma' A'$ . Diese beiden Dreiecke liegen



perspektiv<sup>(15A)</sup>, weil der Schnittpunkt  $W$  von  $\Delta \Gamma$  und  $\Delta' \Gamma'$ , der Schnittpunkt  $P$  von  $\Delta A$  und  $\Delta' A'$ , der Schnittpunkt  $Q$  von  $A \Gamma$  und  $A' \Gamma'$  in einer Geraden liegen. Die drei (in der Figur nicht gezeichneten) Verbindungslinien homologer Ecken  $\Delta \Delta'$ ,  $\Gamma \Gamma'$ ,  $A A'$  gehen daher<sup>(15,1)</sup> durch einen Punkt  $T$ . — Ferner liegen die Dreiecke  $\Delta \Gamma B$  und  $\Delta' \Gamma' B'$  perspektiv; es gehen daher<sup>(15,1)</sup> die drei Verbindungslinien  $\Delta \Delta'$ ,  $\Gamma \Gamma'$ ,  $B B'$  durch einen Punkt, mit andern Worten,  $B B'$  geht durch den Schnittpunkt von  $\Delta \Delta'$  und  $\Gamma \Gamma'$ , d. i.  $T$ .

Betrachten wir schliesslich die beiden Dreiecke  $A B \Gamma$  und  $A' B' \Gamma'$ , so liegen diese perspektiv, weil, wie wir eben bewiesen haben, die Verbindungslinien homologer Ecken  $A A'$ ,  $B B'$ ,  $\Gamma \Gamma'$  durch einen Punkt  $T$  gehen. Weil nun  $B \Gamma$  und  $B' \Gamma'$  sich in  $P$ ,  $\Gamma A$  und  $\Gamma' A'$  sich in  $Q$  schneiden, so müssen  $A B$  und  $A' B'$  durch einen und denselben Punkt  $W_1$  von  $P Q$ <sup>(15,2)</sup> gehen.

**19. Vertauschbarkeit der Punktpaare.** Die drei<sup>19</sup> Punkte  $P Q W$ , von denen wir beim vorhergehenden Satz ausgingen, sind nicht gleichartig. Wir wollen dies dadurch andeuten, dass wir die Punkte  $P$  und  $Q$ , die Diagonalpunkte unserer Vierecke sind, ein Punktpaar nennen und beim Schreiben von  $W$  trennen:  $P Q . W$ . Es ist dann<sup>(15)</sup> durch  $P Q . W$  der Punkt  $W_1$  eindeutig bestimmt. Es fragt sich nun, ob wir, ausgehend von  $W W_1 . Q$ , zum Punkte  $P$  gelangen.

Wir nehmen also an (Fig. 13), dass von dem Viereck  $\Delta A B \Gamma$  die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  zwei Diagonalpunkte sind und dass die beiden Punkte  $W$  und  $W_1$  auf den Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes  $R$  liegen. Betrachten wir die beiden Dreiecke  $\Delta A Q$  und  $W_1 W R$  und ordnen die Ecken in der hingeschriebenen Reihenfolge einander zu<sup>(15)</sup>, so sehen wir, dass der Schnittpunkt  $P$  von  $\Delta A$  und  $W_1 W$ , der Schnittpunkt  $\Gamma$  von  $A Q$  und  $W R$ , der Schnittpunkt  $B$  von  $Q \Delta$  und  $R W_1$  in einer

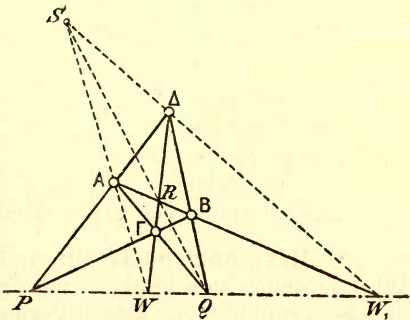


Fig. 13.

und  $W R$ , der Schnittpunkt  $B$  von  $Q \Delta$  und  $R W_1$  in einer

Gerade liegen. Es gehen daher <sup>(15.)</sup> die Verbindungslinien homologer Ecken  $\Delta W_1$ ,  $AW$ ,  $QR$  durch einen Punkt  $S$ . Wir haben damit ein Viereck  $SR\Delta A$  gezeichnet, von dem  $W$  und  $W_1$  zwei Diagonalpunkte sind, während die Seite  $SR$  des dritten Diagonalpunktes durch  $Q$  geht. Da die Gegenseite  $\Delta A$  von  $SR$  durch  $P$  geht, so erkennen wir, daß wir, ausgehend von  $WW_1 \cdot Q$ , zum Punkt  $P$  gelangen; die beiden Punktpaare  $PQ$  und  $WW_1$  können also miteinander vertauscht werden.

20 **20. Harmonische Punkte.** Auf den in den Nummern 18 und 19 gewonnenen Ergebnissen werden die folgenden Sätze aufgebaut; es ist daher nötig, diese Ergebnisse in einem knappen, für die Anwendung bequemen Ausdruck zusammenzufassen. Zu einem solchen Ausdruck gelangen wir mit Hilfe der

1. Definition: *Zwei Diagonalpunkte eines Vierecks und diejenigen beiden Punkte ihrer Verbindungslinie, welche auf den Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes liegen, heißen vier harmonische Punkte; sie bilden, wie man auch sagt, einen harmonischen Wurf* <sup>(10.)</sup>.

Ein harmonischer Wurf besteht aus zwei gleichartigen <sup>(19)</sup> Punktpaaren  $PQ$  und  $WW_1$ ; wir bezeichnen ihn durch  $PQ.WW_1$  oder  $WW_1.QP$  usw.

Die Ergebnisse von 18 und 19 können wir jetzt so aussprechen:

2. Lehrsatz: *Durch ein Punktpaar und einen Punkt ist der vierte harmonische Punkt bestimmt*

oder

*Stimmen zwei harmonische Würfe in einem Punktpaar und einem Punkt überein, so stimmen sie auch im vierten Punkt überein.*

In Zeichen: Wenn  $PQ.WW_1$  und  $W_2W.PQ$  zwei harmonische Würfe sind, so fällt  $W_2$  in  $W_1$ .

21 **21. Harmonische Strahlen.** Die folgende Konstruktion: Wir verbinden den Punkt  $S$  mit dem Punkt  $A$  und bestimmen den Schnittpunkt  $A_1$  dieser Verbindungslinie  $SA$  mit einer Gerade  $t_1$ , beschreiben wir kurz mit den Worten: Wir projizieren (vgl. 11) den Punkt  $A$  aus dem Punkte  $S$  auf die Gerade  $t_1$ .

Wenn wir nun die vier harmonischen Punkte<sup>(20<sub>1</sub>)</sup>  $AB.CD$  aus irgend einem Punkte  $S$  auf die beliebige Gerade  $t_1$  projizieren, so bilden  $A_1 B_1 . C_1 D_1$ , wie wir beweisen wollen, wieder einen harmonischen Wurf. Zunächst beweisen wir den Satz aber nicht für eine beliebige, sondern für eine durch den Punkt  $D$  gehende Gerade.

Wir projizieren (Fig. 14) den Punkt  $C_1$  aus  $A$  auf  $S(B)$  und aus  $B$  auf  $S(A)$ . Bezeichnen wir den Schnittpunkt von  $C_1 A$  und  $S(B)$  durch  $B$ , den Schnittpunkt von  $C_1 B$  und  $S(A)$  durch  $A$ , so bilden  $SC_1 A B$  ein Viereck, von dem  $A$  und  $B$  zwei Diagonalpunkte sind, während eine Seite des dritten Diagonalpunktes durch  $C$  geht; die Gegenseite  $AB$  muß daher<sup>(20<sub>2</sub>)</sup> durch  $D$  gehen. Betrachten wir nun das Viereck  $ABAB$ , so sehen wir, daß von diesem  $C_1$  und  $D$  zwei Diagonalpunkte sind, während die Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes  $S$  durch  $A_1$  und  $B_1$  gehen;  $A_1 B_1 . C_1 D$  sind also<sup>(20<sub>1</sub>)</sup> vier harmonische Punkte. —

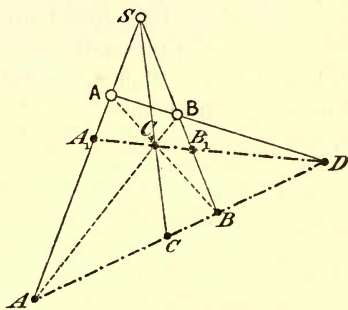


Fig. 14.

Wir wenden uns jetzt zu dem allgemeinen Fall: Wir projizieren also die vier harmonischen Punkte  $AB.CD$  aus  $S$  auf eine beliebige (nicht durch  $D$  gehende) Gerade  $t_1$  und behaupten, daß  $A_1 B_1 . C_1 D_1$  ebenfalls vier harmonische Punkte sind.

Verbinden wir  $A_1$  und  $D$  und bezeichnen die Punkte, in denen diese Verbindungslinie von den Projektionsstrahlen  $S(B)$  und  $S(C)$  geschnitten wird, durch  $B'$  und  $C'$ , so sind nach dem eben geführten Beweise, weil  $AB.CD$  vier harmonische Punkte sind, auch  $A_1 B' . C' D$  vier harmonische Punkte; und weil  $A_1 B' . C' D$  vier harmonische Punkte sind, sind es auch  $A_1 B_1 . C_1 D_1$ . Daher:

1. Lehrsatz: Durch Projektion eines harmonischen Wurfs erhalten wir wieder einen harmonischen Wurf.

Für manche Anwendungen ist es vorteilhaft, diesem Satz durch Einführung des Begriffes der harmonischen Strahlen eine andere Form zu geben.

2. Definition: Vier Strahlen heißen harmonisch, wenn sie durch vier harmonische Punkte gehen.

3. Lehrsatz: Vier harmonische Strahlen schneiden jede Gerade in vier harmonischen Punkten.

22

## 22. Harmonische Ebenen.

1. Definition: Vier Ebenen eines Ebenenbüschels<sup>(2)</sup> heißen harmonisch, wenn sie durch vier harmonische Punkte gehen.

2. Lehrsatz: Vier harmonische Ebenen eines Büschels schneiden jede Ebene in vier harmonischen Strahlen.

Beweis: Eine beliebige Ebene  $\varepsilon_1$ , die nicht durch die Achse<sup>(2)</sup>  $g$  des Ebenenbüschels geht, werde von den vier harmonischen Ebenen  $\alpha \beta \gamma \delta$  des Büschels in den Strahlen  $a_1 b_1 \cdot c_1 d_1$  geschnitten; es ist zu beweisen, daß  $a_1 b_1 \cdot c_1 d_1$  durch vier harmonische Punkte gehen<sup>(21a)</sup>.

Wir verbinden einen beliebigen Punkt  $S$  der Achse  $g$  mit den vier harmonischen Punkten  $A B \cdot C D$ , durch welche nach der Voraussetzung die vier Ebenen  $\alpha \beta \gamma \delta$  gehen. Weil  $SA$  und  $a_1$  in der Ebene  $\alpha$  liegen, so schneidet  $SA$  den Strahl  $a_1$  in einem Punkte  $A_1$ <sup>(14)</sup>; ferner schneiden die Verbindungslinien  $SB, SC, SD$  die Strahlen  $b_1 c_1 d_1$  in  $B_1 C_1 D_1$ . Diese vier Punkte  $A_1 B_1 \cdot C_1 D_1$  sind harmonisch, weil sie die Projektion des harmonischen Wurfes  $AB \cdot CD$  bilden<sup>(21)</sup>. —

3. Lehrsatz: Die vier Ebenen, durch welche vier harmonische Strahlen aus einem beliebigen Punkte projiziert werden, bilden einen harmonischen Wurf.

Beweis: Die vier Ebenen, welche den beliebigen Punkt  $T$  mit den vier harmonischen Strahlen  $ab \cdot cd$  des Mittelpunktes  $S$  verbinden, gehören dem Ebenenbüschel mit der Achse  $TS$  an. Nach der Voraussetzung gehen  $ab \cdot cd$  durch vier harmonische Punkte<sup>(21a)</sup>  $AB \cdot CD$ ; durch diese gehen auch die vier Ebenen von  $TS$ . —

4. Lehrsatz: Vier harmonische Ebenen schneiden jede Gerade in vier harmonischen Punkten.

Beweis: Wir legen durch die Gerade  $t$ , welche von den vier harmonischen Ebenen in den Punkten  $AB \cdot CD$  geschnitten wird, eine beliebige Ebene  $\varepsilon$ . Diese wird<sup>(22)</sup> von den vier harmonischen Ebenen in vier harmonischen

Strahlen  $ab.cd$  geschnitten. Da diese vier harmonischen Strahlen durch  $AB.CD$  gehen, so sind  $AB.CD$  vier harmonische Punkte<sup>(21a)</sup>.

**23. Harmonische Elemente.** Haben wir die beiden harmonischen Strahlenwürfe  $pq.w w_1$  und  $pq.w w_2$ , die in den drei Strahlen  $pqw$  übereinstimmen, so müssen sie auch im vierten übereinstimmen; denn die beiden harmonischen Punktwürfe  $PQ.WW_1$  und  $PQ.WW_2$ , in denen eine beliebige Gerade von unsern beiden harmonischen Strahlenwürfen geschnitten wird<sup>(21a)</sup>, sind identisch<sup>(20a)</sup>.

Da sich dasselbe von zwei harmonischen Ebenenwürfen, die in drei Ebenen übereinstimmen, aussagen läßt, so ist der Satz Nr. 20<sub>2</sub> nicht bloß für Punkte, sondern für alle Elemente gültig:

*Durch ein Elementenpaar und ein Element ist das vierte harmonische Element bestimmt.*

**24. Harmonische Punkte eines Vierecks.** Bilden wir aus den vier harmonischen Punkten  $PQ.WW_1$  die drei Würfe

$$PW.QW_1; PW_1.QW; PQ.WW_1,$$

so muß einer und nur einer dieser drei Würfe elliptisch sein<sup>(10)</sup>.

Wäre dieser Wurf  $PW.QW_1$  (Fig. 15), so müßte, wenn wir ihn aus  $\Delta$  auf  $AB$  projizierten,  $AR.BW_1$  ein elliptischer Wurf sein<sup>(11)</sup>; gleichzeitig müßte, wie wir durch Projektion des Wurfes  $PW.QW_1$  aus  $\Gamma$  erkennen,  $BR.AW_1$  ein elliptischer Wurf sein. Da dies nicht möglich ist<sup>(10a)</sup>, so kann  $PW.QW_1$  kein aus zwei getrennten Punktpaaren bestehender Wurf sein.

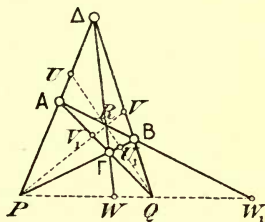


Fig. 15.

Ebenso überzeugt man sich davon, daß auch  $PW_1.QW$  kein elliptischer Wurf sein kann. Daher besteht der Wurf  $PQ.WW_1$  aus zwei getrennten Punktpaaren<sup>(10a)</sup>:

1. Lehrsatz: *Die beiden Punktpaare, die einen harmonischen Wurf bilden, trennen einander.*

Aus diesem Lehrsatz ergibt sich<sup>(20.)</sup> mit Hülfe der in Nr. 11 Z eingeführten Ausdrucksweise:

2. Je zwei Diagonalepunkte eines Vierecks werden durch die beiden Gegenseiten des dritten Diagonalepunktes harmonisch getrennt. —

Aus der Fig. 15 ergibt sich noch durch Projektion des harmonischen Wurfs  $PQ \cdot WW_1$  aus  $\Delta$  (oder  $\Gamma$ ) auf die Vierecksseite  $AB$ , daß  $AB \cdot RW_1$  ein harmonischer Wurf ist<sup>(21.)</sup>:

3. Je zwei Ecken eines Vierecks, der in ihrer Verbindungslinie liegende Diagonalepunkt und die zugeordnete<sup>(16 Z)</sup> Diagonallinie bilden einen harmonischen Wurf.

25

25. Harmonische Strahlen eines Vierseits. Wir betrachten ein Vierseit  $\delta \alpha \beta \gamma$  (Fig. 16)

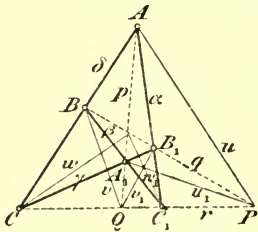


Fig. 16.

mit den Gegenecken  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ . Zwei Paar Gegenecken, z. B.  $AA_1$  und  $BB_1$ , lassen sich als die Ecken eines Vierecks auffassen, von welchem das dritte Paar Gegenecken  $CC_1$  zwei Diagonalepunkte sind; die Diagonallinien  $p$  und  $q$  sind die Gegenseiten des dritten Diagonalepunktes.

Wir können daher den Inhalt von

Nr. 24<sub>2</sub> auch vermittelst des Vierseits ausdrücken:

1. Je zwei Diagonallinien eines Vierseits werden durch die beiden Gegenecken der dritten Diagonallinie harmonisch getrennt.

Weil, wie wir eben sahen,  $CC_1 \cdot QP$  (Fig. 16) vier harmonische Punkte und daher ihre Verbindungslinien mit  $A$  vier harmonische Strahlen<sup>(21.)</sup> sind, so haben wir:

2. Je zwei Seiten eines Vierseits, die durch ihren Schnittpunkt gehende Diagonallinie und der zugeordnete<sup>(16 Z)</sup> Diagonalepunkt bilden einen harmonischen Wurf.

26

26. Konstruktion des vierten harmonischen Elementes.

1. Aufgabe: Den von einem gegebenen Punkte durch ein gegebenes Punktepaar harmonisch getrennten Punkt zu zeichnen.

Die Aufgabe: Den von  $W$  durch  $P$  und  $Q$  harmonisch getrennten Punkt ( $W_1$ ) zu zeichnen, ist in Nr. 17 bereits gelöst. —

2. Aufgabe: *Den von einem gegebenen Strahl durch ein gegebenes Strahlenpaar harmonisch getrennten Strahl zu zeichnen.*

Die Zeichnung, die sich durch duale Übertragung<sup>(7)</sup> aus Nr. 17 ableiten läßt, wird dem Lernenden überlassen.

Eine andere Lösung ergibt sich dadurch, daß man die drei gegebenen Strahlen durch eine beliebige Gerade schneidet und zu den drei Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt zeichnet. — Auch die Ausführung dieser Zeichnung wird dem Lernenden empfohlen.

*Zusatz.* Verfolgt man die Konstruktion<sup>(17)</sup> für den Fall, <sup>z</sup> daß der Punkt  $Q$  in den Punkt  $P$  fällt, so erkennt man, daß die Punkte  $A$  und  $B$  mit  $P$  zusammenfallen; daher fällt auch  $W_1$  in  $P$ . — Läßt man den Punkt  $W$  in  $Q$  fallen, so fällt  $A$  in  $\Delta$  und  $B$  in  $\Gamma$ , der Punkt  $W_1$  also in  $Q$ .

Ähnliches ergibt sich für die duale 2. Aufgabe. Daher:

*Wenn eins von vier harmonischen Elementen mit einem zweiten zusammenfällt, so fällt es auch noch mit einem dritten zusammen.*

**27.\* Mittelpunkt und uneigentlicher Punkt einer <sup>27</sup> Strecke.** Die Geometrie der Lage hat vor der Planimetrie den großen Vorzug, daß sie ihre Sätze immer in der allgemeinsten Form gewinnt, so daß sich viele planimetrische Sätze als besondere Fälle aus den Sätzen der Geometrie der Lage ablesen lassen. Wir beweisen daher in dieser und der folgenden Nummer zwei Sätze, die wir später bei der Ableitung planimetrischer Sätze vielfach verwenden werden.

**Aufgabe:** Den Punkt einer Strecke zu finden, der von dem uneigentlichen<sup>(3)</sup> Punkte durch die beiden Endpunkte harmonisch getrennt ist.

**Lösung:** Wenn  $P$  und  $Q$  (Fig. 17) die Endpunkte der Strecke sind und  $W_\infty$  der uneigentliche Punkt, so legen wir<sup>(17)</sup> durch  $P$  zwei beliebige Strahlen, die von einem beliebig durch  $W_\infty$  gelegten Strahl, d. i.<sup>(3)</sup> von einer beliebigen Parallele zu  $PQ$ , in  $\Delta$  und  $\Gamma$  geschnitten werden. Treffen die Verbindungslinien  $Q\Gamma$  und  $Q\Delta$  die durch  $P$

gelegten Strahlen in A und B, so schneidet AB die Strecke PQ in dem vierten harmonischen Punkte W.

Wir behaupten, daß der gezeichnete vierte harmonische Punkt W der Mittelpunkt von PQ ist. — Sehen wir zunächst A und dann B als Strahlenmittelpunkt an, so haben wir nach einem Satze der Proportionslehre

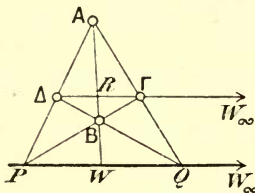


Fig. 17.

$$WP : R\Delta = WQ : R\Gamma$$

$$WP : R\Gamma = WQ : R\Delta,$$

folglich durch Multiplikation  $WP^2 = WQ^2$ . Daraus folgt entweder  $WP = WQ$  oder  $WP = -WQ$ .

Wäre  $WP = WQ$ , so fielen P und Q zusammen. Es ist daher  $WP = -WQ$ , d. h. W ist der Mittelpunkt von PQ. Das Ergebnis sprechen wir aus in dem

1. *Lehrsatz: Die Endpunkte, der Mittelpunkt und der uneigentliche Punkt einer Strecke sind vier harmonische Punkte.*

Da durch drei Punkte der vierte harmonische bestimmt ist<sup>(20a)</sup>, so läßt sich dem vorstehenden Satze die Form geben:

2. *Wenn von vier harmonischen Punkten der eine der uneigentliche (der Mittelpunkt) ist, so ist der zugeordnete der Mittelpunkt (der uneigentliche).*

28

**28\*. Zwei Strahlen und die Halbierungslinien ihrer Winkel.**

1. *Zwei Strahlen und die Halbierungslinien der beiden von den Strahlen gebildeten Winkel bilden einen harmonischen Wurf.*

Beweis: a und b (Fig. 18) seien die beiden Strahlen und c und d die Halbierungslinien der durch a und b bestimmten Nebenwinkel. Wir verbinden einen beliebigen Punkt C der Halbierungslinie c mit dem uneigentlichen Punkte  $D_\infty$  der zweiten Halbierungslinie d und bezeichnen die Punkte, in denen diese Verbindungslinie die Strahlen a und b schneidet, durch A und B. Weil die Halbierungslinien c und d aufeinander senkrecht stehen, so ist  $\angle SCA = SCB$  und daher

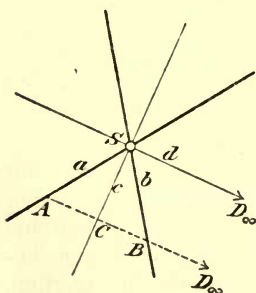


Fig. 18.



Dreieck  $SCA \cong SCB$ , folglich  $AC = CB$ . Es sind also <sup>(27<sub>1</sub>)</sup>  $AB.CD_\infty$  vier harmonische Punkte und folglich <sup>(21<sub>2</sub>)</sup>  $ab.c d$  vier harmonische Strahlen. —

Da durch drei Strahlen der vierte harmonische bestimmt ist <sup>(23)</sup>, so läßt sich dem vorstehenden Satz auch die Form geben:

2. Wenn von vier harmonischen Strahlen  $ab.c d$  der eine  $c$  den Winkel  $ab$  halbiert, so halbiert der  $c$  zugeordnete Strahl  $d$  den Nebenwinkel von  $ab$ . —

3. Wenn zwei zugeordnete Strahlen eines harmonischen Wurfes auf einander senkrecht stehen, so halbieren sie die von den beiden andern zugeordneten Strahlen gebildeten Winkel.

Beweis: Verbinden wir wieder einen beliebigen Punkt  $C$  (Fig. 18) des einen der beiden senkrecht aufeinanderstehenden Strahlen  $c$  und  $d$  mit dem unendlich fernen Punkt  $D_\infty$  des andern, so sind, weil  $ab.c d$  nach der Voraussetzung harmonische Strahlen sind,  $AB.CD_\infty$  vier harmonische Punkte <sup>(21<sub>2</sub>)</sup>. Mithin ist  $C$  der Mittelpunkt von  $AB$  <sup>(27<sub>2</sub>)</sup> und daher Dreieck  $SCA \cong SCB$ , folglich  $\sphericalangle ac = cb$ .

### § 3. Projektive Verwandtschaft gerader Grundgebilde.

29. **Homologe Elemente in zwei geraden Grundgebilden.** In Nr. 6 haben wir die einfachste Art, die Elemente eines Strahlenbüschels und einer Punktreihe einander zuzuordnen, kennen gelernt: Wir wiesen jedem Strahl  $a$  des Büschels  $S$  den Punkt  $A$  der Punktreihe  $s$  zu, in dem  $s$  von  $a$  geschnitten wird. In Nr. 7 lernten wir dann z. B. zwei Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  aufeinander beziehen: Wir nahmen eine Punktreihe  $s$  zu Hülfe und wiesen die Strahlen von  $S$  und  $S_1$  einander als homolog zu, die durch denselben Punkt von  $s$  gehen.

Diese in Nr. 6 und 7 gelehrt Zuordnung zweier geraden Grundgebilde <sup>(2)</sup> könnten wir die direkte nennen zum Unterschied von der folgenden,

bei welcher wir, um zwei Strahlenbüschel $S$ und $S_1$ aufeinander zu beziehen, einen dritten beliebigen Strahlen-	bei welcher wir, um zwei Punktreihen $s$ und $s_1$ aufeinander zu beziehen, eine dritte beliebige Punktreihe $\sigma$ zu Hülfe
--	--

büschel  $\Sigma$  zu Hülfe nehmen und diesen nach 7 mittelst einer beliebigen Punktreihe  $s$  auf  $S$  und mittelst einer zweiten beliebigen Punktreihe  $s_1$  auf  $S_1$  beziehen.

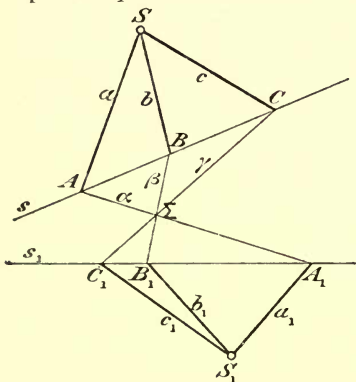


Fig. 19.

Dem Strahl  $a$  von  $S$  (Fig. 19) ordnen wir also einen Strahl  $a_1$  von  $S_1$  durch die folgende Konstruktion zu: Wir bestimmen den Schnittpunkt  $s(a) = A$  und ziehen die Verbindungslinie  $\Sigma(A) = a$ ; der Schnittpunkt  $s_1(a) = A_1$  wird dann aus  $S_1$  durch den  $a$  homologen Strahl  $a_1$  projiziert.

nehmen und diese nach 7 mittelst eines beliebigen Strahlenbüschels  $S$  auf  $s$  und mittelst eines zweiten beliebigen Strahlenbüschels  $S_1$  auf  $s_1$  beziehen.

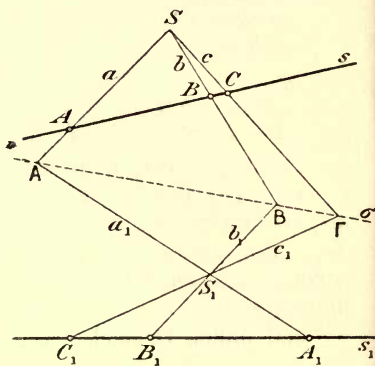


Fig. 20.

Dem Punkt  $A$  von  $s$  (Fig. 20) ordnen wir also einen Punkt  $A_1$  von  $s_1$  durch die folgende Konstruktion zu: Wir ziehen die Verbindungslinie  $S(A) = a$  und bestimmen den Schnittpunkt  $\sigma(a) = A$ ; die Verbindungslinie  $S_1(A_1) = a_1$  schneidet dann  $s_1$  in dem  $A$  homologen Punkte  $A_1$ .

**A** *Anmerkung.* Das Studium der eben gezeichneten Figur wird uns von jetzt an ununterbrochen beschäftigen. Die vorstehende Konstruktion ist daher für verschiedene Lagen des Punktes  $\Sigma$  und der Hilfsgeraden  $s$  und  $s_1$  zu wiederholen und insbesondere auch für den Fall einzutüben, daß  $s$  durch  $S_1$  und  $s_1$  durch  $S$  geht.

**30. Projektive Verwandtschaft.** Die früher <sup>(6; 7)</sup> direkt aufeinander bezogenen Gebilde nannten wir perspektiv; für die nach unserm jetzigen <sup>(29)</sup> Verfahren auf-

einander bezogenen einförmigen Grundgebilde wollen wir das Wort *projektiv* einführen. Da wir statt *eines* Strahlenbüschels  $\Sigma$  zwischen  $S$  und  $S_1$  noch mehrere  $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots$  einschalten könnten, so geben wir für das Wort projektiv die folgende

1. Definition: *Zwei gerade Grundgebilde heißen projektiv, wenn sie die Endglieder einer Kette von perspektiv liegenden Gebilden sind.*

Hat die Kette nur zwei oder drei Glieder, so sind die Endglieder in perspektiver Lage <sup>(6; 7)</sup>. Die perspektive Verwandtschaft ist also ein besonderer Fall der projektiven:

2. Perspektiv liegende Grundgebilde sind projektiv.—  
Aus der Definition folgt ferner:

3. *Sind zwei gerade Grundgebilde einem dritten projektiv, so sind sie auch einander projektiv.* —

Wenden wir den Satz <sup>(9)</sup> über die Bewegung perspektiv zugeordneter Elemente auf die aufeinanderfolgenden Glieder einer Kette von perspektiv liegenden Gebilden an, so haben wir

4. Durchläuft ein Element ein einförmiges Grundgebilde in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, sodafs es nacheinander mit jedem Element des Gebildes zusammenfällt, so durchläuft das homologe Element ein projektiv zugeordnetes Grundgebilde in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, sodafs es ebenfalls nacheinander mit jedem Element dieses Gebildes zusammenfällt. —

Wenden wir ebenso den Satz <sup>(21)</sup> über harmonische Strahlen und für den Fall, dafs auch Ebenenbüschel unter den Gliedern unserer Kette sind, den Satz <sup>(22)</sup> über harmonische Ebenen auf die aufeinanderfolgenden Glieder der Kette an, so haben wir

5. *In zwei projektiven Grundgebilden sind vier Elementen, die einen harmonischen Wurf bilden, vier Elemente homolog, die wieder einen harmonischen Wurf bilden.*

### 31. Konstruktion zweier projektiven Grundgebilde. <sup>31</sup>

In Nr. 7 haben wir die Elemente zweier Grundgebilde, z. B. zweier Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$ , einander *perspektiv* zugeordnet, indem wir die Hilfsgerade  $s$  willkürlich annahmen. Durch passende Wahl von  $s$  können wir nun eine perspektive Verwandtschaft von der Art herstellen, dafs *zwei* gegebenen Strahlen  $a b$  von  $S$  zwei gegebene Strahlen  $a_1 b_1$  von  $S_1$

homolog sind: wir brauchen nur als Hilfsgerade  $s$  der perspektiven Zuordnung die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte zu nehmen, in denen sich die Strahlen  $a a_1$  und die Strahlen  $b b_1$  schneiden.

In Nr. 29 haben wir die Strahlen zweier Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  einander projektiv zugeordnet, indem wir den Punkt  $\Sigma$  und die Geraden  $s$  und  $s_1$  willkürlich annahmen. Wir wollen jetzt zeigen, daß wir durch passende Wahl von  $\Sigma s s_1$  eine projektive Verwandtschaft von der Art herstellen können, daß drei gegebenen Strahlen  $abc$  von  $S$  drei gegebene Strahlen  $a_1 b_1 c_1$  von  $S_1$  homolog sind.

**Aufgabe:** Zwei Strahlenbüschel projektiv so auf einander zu beziehen, daß drei gegebenen Strahlen des einen Büschels drei gegebene des andern homolog sind.

**Allgemeine Lösung:** Die Zuordnung soll so erfolgen, daß den Strahlen  $abc$  (Fig. 21) des einen Büschels  $S$  die Strahlen  $a_1 b_1 c_1$  des andern Büschels  $S_1$  homolog sind. — Wir legen

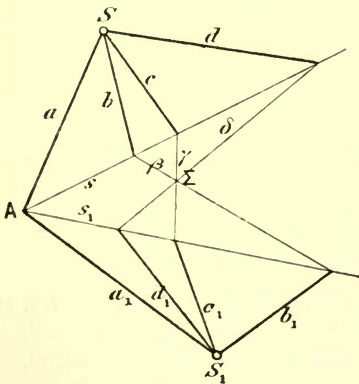


Fig. 21.

durch den Schnittpunkt zweier homologen Strahlen, z. B. durch  $a a_1 = A$ , zwei beliebige Ge-

**Aufgabe:** Zwei Punktreihen projektiv so aufeinander zu beziehen, daß drei gegebenen Punkten der einen Reihe drei gegebene der andern homolog sind.

**Allgemeine Lösung:** Die Zuordnung soll so erfolgen, daß den Punkten  $A B C$  (Fig. 22) der einen Reihe  $s$  die Punkte  $A_1 B_1 C_1$  der andern Reihe  $s_1$  homolog sind. — Wir wählen

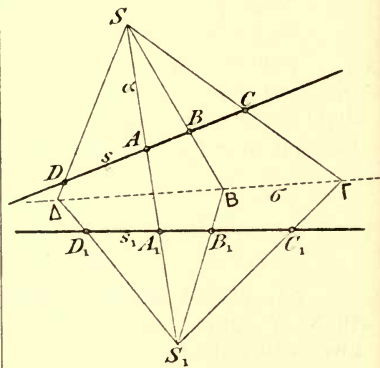


Fig. 22.

auf der Verbindungslinie zweier homologen Punkte, z. B. auf  $A A_1 = \alpha$ , zwei be-

raden  $s$  und  $s_1$ , ziehen die Verbindungslinie  $\beta$  der Schnittpunkte  $s(b)$  und  $s_1(b_1)$  und die Verbindungslinie  $\gamma$  der Schnittpunkte  $s(c)$  und  $s_1(c_1)$  und bestimmen den Schnittpunkt  $\beta\gamma = \Sigma$ . Beziehen wir dann  $S$  und  $\Sigma$  mittelst  $s$ , und  $\Sigma$  und  $S_1$  mittelst  $s_1$  auf einander <sup>(7)</sup>, so erhalten wir die verlangte Zuordnung der Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$ . — Ist z. B.  $d$  ein beliebiger Strahl von  $S$ , so bestimmt der Schnittpunkt  $s(d)$  in  $\Sigma$  den Strahl  $\delta$  und der Schnittpunkt  $s_1(\delta)$  in  $S_1$  den gesuchten homologen Strahl  $d_1$ . —

*Besondere Lösungen:* Unter den verschiedenen Lagen, die man den durch  $A = aa_1$  gehenden Hilfsgeraden  $s$  und  $s_1$  geben kann, sind zwei von besonderer Wichtigkeit:

1.  $s$  und  $s_1$  fallen mit den Geraden zusammen, die  $A$  mit

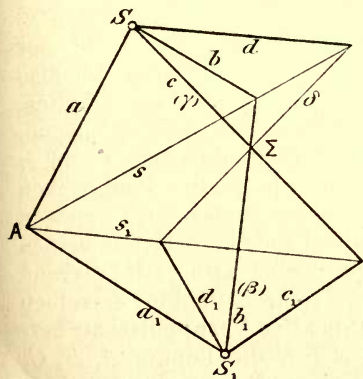


Fig. 23.

beliebige Punkte  $S$  und  $S_1$ , bestimmen den Schnittpunkt  $B$  der Verbindungslinien  $S(B)$  und  $S_1(B_1)$  und den Schnittpunkt  $\Gamma$  der Verbindungslinien  $S(C)$  und  $S_1(C_1)$  und ziehen die Verbindungslinie  $B\Gamma = \sigma$ . Beziehen wir dann  $s$  und  $\sigma$  mittelst  $S$ , und  $\sigma$  und  $s_1$  mittelst  $S_1$  auf einander <sup>(7)</sup>, so erhalten wir die verlangte Zuordnung der Punktreihen  $s$  und  $s_1$ . — Ist z. B.  $D$  ein beliebiger Punkt von  $s$ , so bestimmt die Verbindungslinie  $S(D)$  in  $\sigma$  den Punkt  $\Delta$  und die Verbindungslinie  $S_1(\Delta)$  in  $s_1$  den gesuchten homologen Punkt  $D_1$ . —

*Besondere Lösungen:* Unter den verschiedenen Lagen, die man den auf  $a = AA_1$  liegenden Hilfspunkten  $S$  und  $S_1$  geben kann, sind zwei von besonderer Wichtigkeit:

1.  $S$  und  $S_1$  fallen mit den Punkten zusammen, in denen

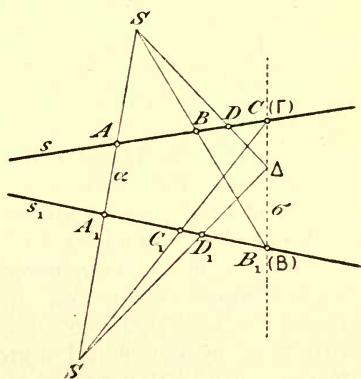


Fig. 24.

den Schnittpunkten der beiden andern Paare von homologen Strahlen  $bb_1$  und  $cc_1$  verbinden (Fig. 23);

2.  $s$  fällt mit der Verbindungslinie  $AS_1 = a_1$  und  $s_1$  mit der Verbindungslinie  $AS = a$  zusammen (Fig. 25).

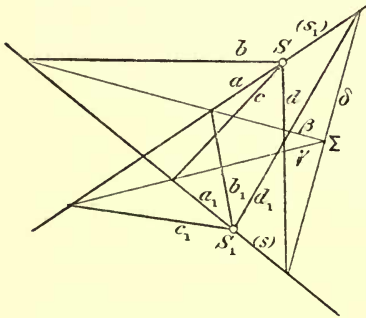


Fig. 25.

$\alpha$  von den Verbindungslinien der beiden andern Paare von homologen Punkten  $BB_1$  und  $CC_1$  geschnitten wird (Fig. 24);

2.  $S$  fällt mit dem Schnittpunkt  $\alpha s_1 = A_1$  und  $S_1$  mit dem Schnittpunkt  $\alpha s = A$  zusammen (Fig. 26).

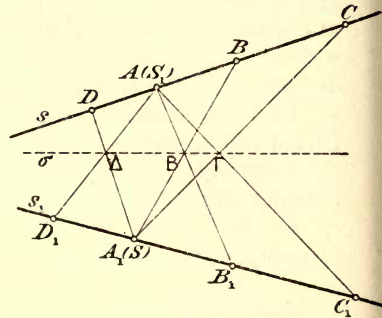


Fig. 26.

A *Anmerkung.* Der Lernende darf nicht unterlassen, die Zeichnungen zu diesen Lösungen selbständig auszuführen und sie mit den Fig. 23—25 zu vergleichen; wir werden von den besondern Lösungen öfter Gebrauch machen als von der allgemeinen.

32 **Fundamentalsatz.** Unser nächstes Ziel ist, zu beweisen, daß die durch die vorhergehende Konstruktion<sup>(31)</sup> hergestellte projektive Verwandtschaft von der Wahl der Hilfsgeraden und Hilfspunkte unabhängig ist, daß wir also immer dieselbe Zuordnung in den Grundgebilden erhalten, wie wir auch Hilfsgeraden und Hilfspunkte wählen mögen. Um diese Behauptung z. B. für zwei Punktreihen  $s$  und  $s_1$  zu beweisen, haben wir zunächst zwei projektive Punktreihen zu betrachten, die denselben Träger haben, mit andern Worten, den besondern Fall zu behandeln, daß die beiden Geraden  $s$  und  $s_1$  zusammenfallen. Sind also  $ABC$  irgend drei Punkte von  $s$  und  $A_1B_1C_1$  drei Punkte derselben Gerade  $s$ , so haben wir eine projektive Verwandtschaft herzustellen, in der den Punkten  $ABC$  die Punkte  $A_1B_1C_1$  homolog sind. Wir erreichen dies, indem wir eine beliebige

Gerade  $s'$  zu Hülfe nehmen, auf dieser drei beliebige Punkte  $A' B' C'$  wählen und nun <sup>(31)</sup> die Punktreihen  $s$  und  $s'$  projektiv so aufeinander beziehen, erstens das den Punkten  $A B C$  die Punkte  $A' B' C'$  homolog sind, und dann zweitens so, das den Punkten  $A_1 B_1 C_1$  die Punkte  $A' B' C'$  homolog sind. Auf diese Weise erhalten wir in  $s$  zwei projektive <sup>(30a)</sup> Punktreihen der verlangten Art.

Wir wenden uns jetzt dem besondern Fall zu, das es in den beiden in  $s$  konstruierten projektiven Punktreihen drei Punkte giebt, die mit ihren homologen zusammenfallen. Bezeichnen wir diese der Reihe nach durch  $K L M$  (Fig. 27), so setzen wir also voraus, das  $K$  mit  $K_1$ ,  $L$  mit  $L_1$ ,  $M$  mit  $M_1$  zusammenfällt.

Durchläuft nun  $X$  die erste Punktreihe in dem unveränderlichen Sinn  $K L M$ ,

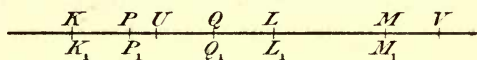


Fig. 27.

so durchläuft <sup>(30a)</sup> sein homologer Punkt  $X_1$  die zweite Punktreihe in dem Sinn  $K_1 L_1 M_1$ , d. i., weil  $K L M$  mit  $K_1 L_1 M_1$  zusammenfallen, in demselben Sinn wie  $X$ . Bei dieser Bewegung fällt der Punkt  $X$  nach der Voraussetzung dreimal mit seinem homologen zusammen. Wir wollen zeigen, das er immer mit seinem homologen zusammenfällt; zunächst aber beweisen wir nur, das er unendlich oft mit seinem homologen zusammenfällt.

Ist nämlich  $N$  der von  $M$  durch  $K$  und  $L$  harmonisch getrennte Punkt, so wissen wir <sup>(30b)</sup>, das den Punkten  $K L . M N$ , die einen harmonischen Wurf bilden, vier Punkte homolog sind, die wieder einen harmonischen Wurf bilden. Zeichnen wir also den von  $M_1$  durch  $K_1$  und  $L_1$  harmonisch getrennten Punkt  $N_1$ , so ist dieser dem Punkt  $N$  homolog. Da aber unsere beiden harmonischen Würfe  $K L . M N$  und  $K_1 L_1 . M_1 N_1$  in drei Punkten übereinstimmen, so fällt  $N_1$  in  $N$  <sup>(20a)</sup>. Ebenso können wir beweisen, das der von  $M$  durch  $K$  und  $N$  harmonisch getrennte Punkt mit seinem homologen zusammenfällt usw. —

Wir folgen nun dem Punkte  $X$ , während er sich im Sinn  $K L M$  von  $K$  nach  $L$  bewegt. In  $K$  fällt er noch mit dem homologen zusammen; würde er also auf diesem Wege in einem folgenden Punkte  $U$  nicht mehr mit seinem homologen zusammenfallen, so müßte er sich beim Überschreiten eines vor  $U$  liegenden Punktes  $P$  (vielleicht schon

gleich in  $K$ ) von seinem homologen getrennt haben; bei der weitem Bewegung, also *hinter*  $U$ , würde er wieder mit seinem homologen zusammenfallen, etwa in  $Q$  (möglicherweise erst in  $L$ ).

Das Ergebnis ist: In den Punkten  $P$  und  $Q$  (die auch mit  $K$  und  $L$  zusammenfallen könnten) fällt  $X$  mit seinem homologen zusammen; während seiner Bewegung von  $P$  nach  $Q$  aber nicht. Das ist jedoch unmöglich. Zeichnen wir nämlich den von  $M$  durch  $P$  und  $Q$  harmonisch getrennten Punkt  $W$ , so fällt dieser, wie wir im ersten Teil unseres Beweises gesehen haben, mit seinem homologen zusammen; der Punkt  $X$  gelangt aber nach  $W$ , *bevor* er  $Q$  erreicht; denn die Punktpaare des harmonischen Wurfes  $PQ.MW$  trennen einander<sup>(24)</sup>. — Der Punkt  $X$  fällt also auf dem Wege  $KL$  stets mit seinem homologen zusammen. —

Um einzusehen, daß ein beliebiger Punkt  $V$  von  $KL$ <sup>(5)</sup> mit seinem homologen zusammenfällt, zeichnen wir den von  $V$  durch  $K$  und  $L$  harmonisch getrennten Punkt. Da dieser ein Punkt von  $KL$  ist<sup>(24)</sup>, so fällt er, wie wir eben bewiesen haben, mit seinem homologen zusammen; folglich auch  $V$ <sup>(20)</sup>.

*Lehrsatz: Wenn zwei projektive Punktreihen drei Punkte entsprechend gemein haben, so haben sie jeden Punkt entsprechend gemein.*

33

**33. Kennzeichen der Identität zweier projektiven Grundgebilde.** Der vorstehende Satz läßt sich auf alle Grundgebilde übertragen. Wenn z. B. in zwei projektiven Ebenenbüscheln, die eine gemeinsame Achse haben, drei Ebenen  $\alpha \lambda \mu$  mit ihren homologen  $\alpha_1 \lambda_1 \mu_1$  zusammenfallen, so werden in einer beliebigen Gerade zwei zu den beiden Ebenenbüscheln<sup>(30)</sup> und daher zueinander<sup>(30)</sup> projektive Punktreihen ausgeschnitten, die drei Punkte und folglich jeden Punkt<sup>(32)</sup> entsprechend gemein haben; die beiden Ebenenbüschel haben daher auch jede Ebene entsprechend gemein.

*1. Wenn zwei projektive Grundgebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie jedes Element entsprechend gemein.*

Aus diesem Satz ergibt sich, daß die Konstruktion<sup>(31)</sup>, durch welche wir zwei Grundgebilde  $s$  und  $s_1$  projektiv so auf einander bezogen, daß den Elementen  $ABC$  die Elemente  $A_1 B_1 C_1$  homolog wurden, trotz der Willkür in der



Wahl der benutzten Hilfsgeraden und Hilfspunkte eine eindeutige ist. Würden wir nämlich die Konstruktion mit andern Hilfsgeraden und Hilfspunkten wiederholen, so würden wir in  $s_1$  zwei projektive<sup>(30<sub>2</sub>)</sup> Grundgebilde erhalten, die die drei Elemente  $A_1 B_1 C_1$  und daher jedes Element entsprechend gemeinsam hätten, also identisch wären. Daher:

2. Die projektive Verwandtschaft zwischen zwei eiförmigen Grundgebilden ist durch drei Paar homologe Elemente bestimmt.

Zusatz. Das Zeichen für die projektive Verwandtschaft  $z$  ist  $\overline{\wedge}$  (gelesen: projektiv zu). Die Thatsache, daß die Grundgebilde  $s$  und  $s_1$  projektiv so aufeinander bezogen sind, daß den Elementen  $A B C \dots D E F \dots$  die Elemente  $A_1 B_1 C_1 \dots D_1 E_1 F_1 \dots$  homolog sind, drücken wir also in Zeichen aus durch

$$A B C \dots D E F \dots \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 \dots D_1 E_1 F_1 \dots$$

oder auch kurz durch  $s \overline{\wedge} s_1$ . —

1. Aus  $A B C D \overline{\wedge} A B C E$

folgt<sup>(33<sub>1</sub>)</sup>, daß das Element  $D$  mit dem Element  $E$  zusammenfällt. —

2. Aus  $A B C D \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1$  und  
 $A C D E \overline{\wedge} A_1 C_1 D_1 E_1$

ergiebt sich, weil wir die projektive Verwandtschaft als bestimmt<sup>(33<sub>2</sub>)</sup> durch die drei Elementenpaare  $A A_1, C C_1, D D_1$  ansehen können,

$$A B C D E \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \text{ oder auch } A B D E \overline{\wedge} A_1 B_1 D_1 E_1.$$

3. Ist ferner noch

$$C D E F \overline{\wedge} C_1 D_1 E_1 F_1, \text{ so ist auch } A B C D E F \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 \text{ und } A D E F \overline{\wedge} A_1 D_1 E_1 F_1 \text{ u. s. w.}$$

34. Kennzeichen der perspektiven Lage zweier projektiven Grundgebilde. In Nr. 30<sub>2</sub> haben wir bereits bemerkt, daß die perspektive Verwandtschaft ein besonderer Fall der projektiven ist; es handelt sich jetzt darum, ein Kenn-

zeichen dafür zu finden, wann zwei projektive Gebilde in perspektiver Lage sind. In Nr. 8 sahen wir, dafs in zwei perspektiven Grundgebilden das beiden Trägern gemeinsame Element sich selbst homolog ist. Es läfst sich nun umgekehrt zeigen:

Wenn zwei projektive Strahlenbüschel die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte entsprechend gemein haben, so sind sie in perspektiver Lage, mit andern Worten<sup>(6)</sup>, so sind sie Scheine einer und derselben Punktreihe.

Wenn zwei projektive Punktreihen den Schnittpunkt ihrer Träger entsprechend gemein haben, so sind sie in perspektiver Lage, mit andern Worten<sup>(6)</sup>, so sind sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels.

Beweis: (Von jetzt an beschränken wir uns auf die Anführung der dualen<sup>(7)</sup> Sätze und überlassen es dem Lernenden, die Begründung dieser dualen Sätze selbst abzuleiten.)

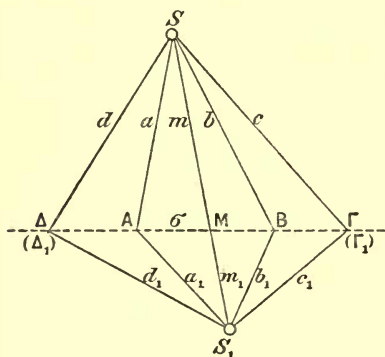


Fig. 28.

Die Verbindungslinie  $\sigma$  (Fig. 28) der Punkte A und B, in denen zwei beliebige Strahlen  $a$  und  $b$  des ersten Büschels  $S$  von den homologen Strahlen  $a_1$  und  $b_1$  des zweiten Büschels  $S_1$  geschnitten werden, möge von dem den beiden Büscheln gemeinsamen Strahle  $SS_1 = m(m_1)$  in  $M$  geschnitten werden. Bezeichnen wir ferner die Punkte, in denen  $\sigma$  von  $cd \dots$  geschnitten wird, durch  $\Gamma \Delta \dots$ ; die Punkte, in denen  $\sigma$  von  $c_1 d_1 \dots$  geschnitten wird, durch  $\Gamma_1 \Delta_1 \dots$ , so ist

$$A B M \Gamma \Delta \dots \overline{\wedge} a b m c d \dots \overline{\wedge} a_1 b_1 m_1 c_1 d_1 \dots \overline{\wedge} A B M \Gamma_1 \Delta_1 \dots$$

Folglich fallen  $\Gamma$  und  $\Gamma_1$ ,  $\Delta$  und  $\Delta_1 \dots$  zusammen<sup>(83 Z 1)</sup>. Die beiden Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  sind also Scheine der Punktreihe  $\sigma$ .

In Zeichen: Aus

$abc \dots m \dots \bar{\wedge} a_1 b_1 c_1 \dots m \dots$

folgt, daß die Schnittpunkte  $a a_1, b b_1, c c_1 \dots$  in einer Gerade liegen.

In Zeichen: Aus

$ABC \dots M \dots \bar{\wedge} A_1 B_1 C_1 \dots M \dots$

folgt, daß die Verbindungslinien  $AA_1, BB_1, CC_1 \dots$  durch einen Punkt gehen.

**35. Einschalten von perspektiven Gliedern zwischen die projektiven Endglieder einer Kette.**

1. Lehrsatz: Zwei projektive Punktreihen, deren Träger *nicht* zusammenfallen, lassen sich durch Einschalten *einer* Punktreihe, deren Träger eine beliebige Gerade ist, in perspektive Lage bringen.

1. Lehrsatz: Zwei projektive Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte *nicht* zusammenfallen, lassen sich durch Einschalten *eines* Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Punkt ist, in perspektive Lage bringen.

Beweis:  $s$  und  $s_1$  (Fig. 29) seien die Träger der beiden gegebenen projektiven Punktreihen und  $\sigma$  eine beliebige Gerade, die  $s$  in  $B$  und  $s_1$  in  $C_1$  schneidet. Den Punkten  $B$  und  $C_1$  seien die Punkte  $B_1$  und  $C$  homolog, außerdem sei  $AA_1$  ein beliebiges drittes Paar homologer Punkte. Wird dann  $AA_1$  von  $\sigma, BB_1$  und  $CC_1$  in  $A, S_1$  und  $S$  geschnitten, so sind 1. die durch  $ABC \bar{\wedge} A_1 B_1 C_1$  in  $s$  und  $\sigma$  bestimmten<sup>(33a)</sup> projektiven Punktreihen, weil  $B = s\sigma$  ein sich selbst homologer Punkt ist, Schnitte des Strahlenbüschels  $S$ <sup>(34)</sup> und 2. die durch  $AB C_1 \bar{\wedge} A_1 B_1 C_1$  in  $\sigma$  und  $s_1$  bestimmten projektiven Punktreihen, weil  $C_1 = \sigma s_1$  ein sich selbst homologer Punkt ist, Schnitte des Strahlenbüschels  $S_1$ . Durch die in  $\sigma$  konstruierte Punktreihe ist also in der That die Kette zwischen  $s$  und  $s_1$  geschlossen. —

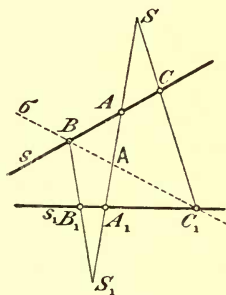


Fig. 29.

Fallen die Träger  $s$  und  $s_1$  zusammen, so hat man zuerst eine Gerade  $s'$  (vgl. 32) einzuschalten, auf der man drei Punkte  $A' B' C'$  so wählt, daß sie perspektiv zu  $ABC$  liegen; die Punktreihe  $A' B' C'$  bezieht man dann mittelst einer beliebigen Gerade  $\sigma_1$  projektiv auf  $s_1$ <sup>(31)</sup>.

2. Lehrsatz: Zwei projektive Punktreihen, deren Träger zusammenfallen, lassen sich durch Einschalten zweier Punktreihen, deren Träger beliebige Geraden sind, in perspektive Lage bringen.

2. Lehrsatz: Zwei projektive Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte zusammenfallen, lassen sich durch Einschalten zweier Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte beliebige Punkte sind, in perspektive Lage bringen.

36. **Andere Methode des Einschaltens.** Für die in Nr. 35 gelöste Aufgabe: Zwei projektive Grundgebilde als Endglieder einer Kette von perspektiven Gebilden darzustellen, geben wir noch weitere Konstruktionen: zunächst für den Fall, daß die beiden Träger  $s$  und  $s_1$  nicht zusammenfallen und dann in Nr. 37 und 38 für zwei zusammenfallende Träger. Trotzdem diese Konstruktionen als besondere Fälle in der allgemeinen Konstruktion von Nr. 35 enthalten sind, ist es nötig, sie eingehend zu behandeln, da sie uns zu wichtigen Lehrsätzen führen. —

Wir projizieren die Punktreihe  $s_1$  (Fig. 30) aus einem Punkte  $A$ , der in dem Träger  $s$  liegt, im übrigen aber beliebig ist; dann die Punktreihe  $s$  aus dem  $A$  homologen

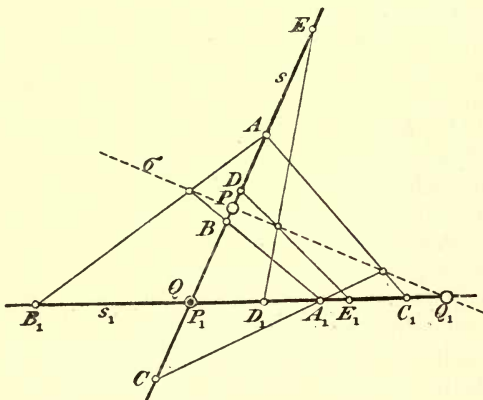


Fig. 30.

Punkte  $A_1$  von  $s_1$ . Diese beiden projektiven Strahlenbüschel  $A(A_1 B_1 C_1 \dots)$  und  $A_1(A B C \dots)$  sind, weil sie den Strahl  $A A_1$  entsprechend gemein haben, Scheine<sup>(34)</sup> einer und derselben Punktreihe  $\sigma$ .

Wir richten unser Augenmerk auf die Punkte  $P$  und  $Q_1$ , in denen  $s$  und  $s_1$  von  $\sigma$  geschnitten werden. Die Strahlen  $AP$  und  $A_1P$  sind, weil sie durch denselben Punkt von  $\sigma$  gehen, homolog; der Strahl  $AP$  muß also den dem Punkte  $P$  homologen Punkt projizieren, d. h. der Schnittpunkt  $P_1 = s s_1$  ist dem Schnittpunkt  $P = s \sigma$  homolog. Der Schnittpunkt  $s s_1$  ist gleichzeitig ein Punkt von  $s$ ; bezeichnen wir ihn als solchen durch  $Q$ , so ergibt sich in derselben Weise, daß  $Q$  dem Schnittpunkte  $Q_1 = \sigma s_1$  homolog ist.

Das Ergebnis ist, daß die Hilfsgerade  $\sigma$  die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte  $P$  und  $Q_1$  ist, die dem Schnittpunkte  $P_1(Q)$  in den beiden Punktreihen von  $s$  und  $s_1$  homolog sind, *daß  $\sigma$  also unabhängig von der Wahl des beliebig in  $s$  angenommenen Punktes  $A$  ist.* Mit andern Worten: Wir erhalten immer dieselbe Gerade  $\sigma$ , ob wir von dem Punkte  $A$  oder irgend einem andern Punkte  $D$  ausgehen; auf der Gerade  $\sigma$  schneiden sich daher nicht nur  $AB_1$  und  $A_1B$ ,  $AC_1$  und  $A_1C$  u. s. w., sondern auch irgend zwei beliebige Strahlen  $DE_1$  und  $D_1E$ .

Nennen wir die Gerade  $PQ_1$ , die die dem Schnittpunkte homologen Punkte verbindet, die *Achse* der projektiven Verwandtschaft der Punktreihen  $s$  und  $s_1$  oder kurz die *Projektionsachse*, so haben wir den

**Lehrsatz:** Die Gerade, welche einen beliebigen Punkt  $D$  der Punktreihe  $s$  mit einem beliebigen Punkte  $E_1$  der projektiven Punktreihe  $s_1$  verbindet, schneidet die Gerade, die die homologen Punkte  $D_1$  und  $E$  verbindet, in einem Punkte der Projektionsachse.

**Lehrsatz:** Der Punkt, in dem ein beliebiger Strahl  $d$  des Strahlenbüschels  $S$  von einem beliebigen Strahl  $e_1$  des projektiven Strahlenbüschels  $S_1$  geschnitten wird, liegt mit dem Punkte, in dem die homologen Strahlen  $d_1$  und  $e$  sich schneiden, in einem Strahle des Projektionszentrums.

*Zusatz.* Der Satz läßt sich vom Begriff der projektiven Verwandtschaft loslösen, indem wir ihn auf drei Punktpaare  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  beschränken. Von diesen sechs Punkten müssen  $ABC$  in einer Gerade  $s$  und  $A_1B_1C_1$  in einer zweiten Gerade  $s_1$  liegen; im übrigen können sie ganz be-

liebig sein. Unser Satz sagt dann aus, daß die Verbindungslinien  $AB_1$  und  $A_1B$ ;  $BC_1$  und  $B_1C$ ;  $CA_1$  und  $C_1A$  sich in drei Punkten einer Geraden schneiden.

Nehmen wir die sechs Punkte als Ecken eines einfachen <sup>(16 A)</sup> Sechsecks  $AB_1CA_1BC_1$ , so sind die Verbindungslinien die Seiten dieses Sechsecks. Bequemer wird die Übersicht, wenn wir (Fig. 31) die Ecken dieses Sechsecks der Reihe nach mit 1 2 3 4 5 6 bezeichnen und folgende Namen einführen.

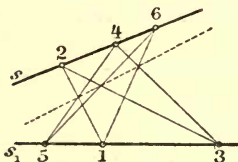


Fig. 31.

Die Ecken 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 heißen Gegenecken und die Seiten 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61, die sich am bequemsten aus dem Schema

$$\overbrace{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6}$$

ergeben, heißen Gegenseiten. Ferner wollen wir die Verbindungslinie zweier Gegenecken eine Diagonallinie und den Schnittpunkt zweier Gegenseiten einen Diagonalpunkt nennen, so daß sind

Diagonallinien: 14; 25; 36;

Diagonalpunkte: (23) . (56); (34) . (61); (12) . (45).

Wir können demnach unserm Satz die folgende Form geben:

*Erster Sechseckssatz.* Liegen drei Ecken eines einfachen Sechsecks in einer Geraden und die Gegenecken dieser drei Ecken in einer zweiten Geraden, so liegen die drei Diagonalpunkte in einer dritten Geraden.

*Erster Sechseitssatz.* Gehen drei Seiten eines einfachen Sechsecks durch einen Punkt und die Gegenseiten dieser drei Seiten durch einen zweiten Punkt, so gehen die drei Diagonallinien durch einen dritten Punkt.

### 37. Das zweite Ordnungselement einer Projektivität.

Um zwei projektive Punktreihen, deren Träger  $s$  und  $s_1$  zusammenfallen, in perspektive Lage zu bringen, haben wir im allgemeinen <sup>(36a)</sup> zwei Hilfsgeraden  $s'$  und  $s'_1$  nötig; in dem besondern Falle aber, daß es in dem gemeinsamen Träger  $s(s_1)$

einen Punkt  $K$  giebt, der mit seinem homologen  $K_1$  zusammenfällt, genügt eine Gerade  $s'$ :

Wir legen durch den Punkt  $K$  (Fig. 32), der nach unserer Annahme mit seinem homologen  $K_1$  zusammenfällt, eine beliebige Gerade  $s'$  und wählen auf dieser zwei beliebige Punkte  $B'$  und  $C'$ .

Sind nun  $BB_1$  und  $CC_1$  irgend zwei Paare homologer Punkte des gemeinsamen Trägers  $s$  ( $s_1$ ), so ziehen wir die Verbindungslinien  $BB'$  und  $CC'$ ,  $B_1B'$  und  $C_1C'$ ; den Schnittpunkt der beiden

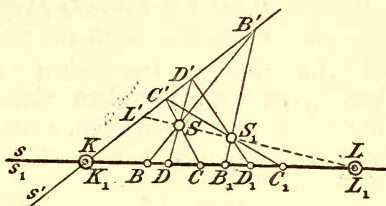


Fig. 32.

ersten Verbindungslinien bezeichnen wir durch  $S$ , den Schnittpunkt des zweiten Paares durch  $S_1$ . Es sind dann 1. die durch  $KB C \overline{\wedge} K B' C'$  in  $s$  und  $s'$  bestimmten <sup>(33a)</sup> projektiven Punktreihen Schnitte des Strahlenbüschels  $S$  <sup>(34)</sup> und 2. die durch  $K B' C' \overline{\wedge} K B_1 C_1$  in  $s'$  und  $s_1$  bestimmten projektiven Punktreihen Schnitte des Strahlenbüschels  $S_1$ . Durch die in  $s'$  konstruierte Punktreihe ist also in der That die Kette zwischen  $s$  und  $s_1$  geschlossen. —

Zu einem beliebigen Punkte  $D$  der ersten Punktreihe von  $s$  erhalten wir den homologen  $D_1$  der zweiten, indem wir  $D$  aus  $S$  auf  $s'$  und den gefundenen Punkt  $D'$  aus  $S_1$  wieder auf  $s$  projizieren.

Wenden wir diese Konstruktion auf den Punkt  $L$  an, in dem der Träger  $s$  von der Verbindungslinie  $SS_1$  geschnitten wird, so erkennen wir, daß der homologe Punkt  $L_1$  mit  $L$  zusammenfällt. Es fällt also nicht bloß der Punkt  $K$  mit seinem homologen zusammen, sondern auch noch ein zweiter Punkt  $L$ . (Ein dritter Punkt kann nicht mit seinem homologen zusammenfallen <sup>(32)</sup>, weil nach unserer Annahme  $B$  nicht mit  $B_1$  zusammenfällt.)

Das Ergebnis kleiden wir in Worte mit Hülfe der folgenden beiden Definitionen:

1. Der Inbegriff zweier projektiven geraden Grundgebilde, die einen gemeinsamen Träger haben, heißt eine gerade *Projektivität*.

2. Ein Element einer Projektivität, das mit seinem homologen zusammenfällt, heißt ein *Ordnungselement*. —

Da sich der Satz, den wir für zwei Punktreihen bewiesen haben, auf die übrigen Grundgebilde übertragen läßt<sup>(33)</sup>, so haben wir:

3. *Hat eine gerade Projektivität ein Ordnungselement, so hat sie auch noch ein zweites.*

A *Anmerkung.* Die eben gelehrte Herstellung der projektiven Verwandtschaft zwischen den beiden in  $s$  ( $s_1$ ) liegenden Punktreihen können wir, indem wir die Projektionscentren in eckigen Klammern hinzusetzen, in Zeichen kurz so beschreiben:

$$K B C [S] \overline{\wedge} K B' C' [S_1] \overline{\wedge} K B_1 C_1.$$

38. **Elemente, die sich zweifach entsprechen.** Fallen die Träger  $s$  und  $s_1$  zweier projektiven Punktreihen zusammen, so haben wir jeden Punkt des gemeinsamen Trägers  $s$  ( $s_1$ ) als einen zweifachen aufzufassen, da wir ihn entweder zur ersten oder zur zweiten Punktreihe rechnen können. Dementsprechend wollen wir jeden Punkt des Trägers  $s$  ( $s_1$ ) durch zwei Buchstaben bezeichnen, z. B. durch  $D$  ( $E_1$ ); wir können dann schon durch die Bezeichnung  $D$  oder  $E_1$  andeuten, ob wir den Punkt als Element der ersten oder als Element der zweiten Punktreihe ansehen wollen.

Entspricht nun dem Punkte  $A$  der ersten Punktreihe der Punkt  $A_1$  der zweiten, so wird dem Punkte  $A_1$ , wenn wir ihn zur ersten Punktreihe rechnen und dementsprechend mit  $B$  bezeichnen, ein Punkt  $B_1$  homolog sein, der im allgemeinen nicht mit  $A$  zusammenfällt. Fällt aber der Punkt  $B_1$  in den Punkt  $A$ , so wollen wir sagen:

Der Punkt  $A$  ( $B_1$ ) entspricht dem Punkte  $A_1$  ( $B$ ) *zweifach*.

Wir gehen jetzt zum zweiten besondern Fall der Aufgabe über: Die Punkte zweier zusammenfallenden Träger  $s$  und  $s_1$  projektiv so aufeinander zu beziehen, daß den Punkten  $A B C$  die Punkte  $A_1 B_1 C_1$  homolog werden, und zwar wollen wir die Punkte  $A B C$  und  $A_1 B_1 C_1$  nicht beliebig annehmen, sondern von ihnen voraussetzen, daß  $A$  und  $B_1$ ,  $A_1$  und  $B$  zusammenfallen, mit andern Worten, daß der Punkt  $A$  ( $B_1$ ) dem Punkt  $A_1$  ( $B$ ) zweifach entspricht.



Lösung: Wir legen durch  $C_1$  (Fig. 33) die beliebige Gerade  $\sigma$  und durch  $C$  die beliebige Gerade  $\sigma_1$ , welche  $\sigma$  in  $\Gamma$  schneiden möge. Durch  $A_1$  ( $B$ ) legen wir eine beliebige Gerade, die  $\sigma$  in  $B$  und  $\sigma_1$  in  $A_1$  schneidet. Damit haben wir ein Dreieit mit den Seiten  $s$  ( $s_1$ )  $\sigma$   $\sigma_1$  und den Ecken  $\Gamma$   $C$   $C_1$  gezeichnet; diesem Dreieit ist das Dreieck  $A$  ( $B_1$ )  $B$   $A_1$  eingeschrieben.

Wir wollen nun die Träger  $s$  und  $\sigma$  mittelst des Strahlenbüschels  $A_1$ , die Träger  $\sigma$  und  $\sigma_1$  mittelst des Strahlenbüschels  $A$  ( $B_1$ ), die Träger  $\sigma_1$  und  $s_1$  mittelst des Strahlenbüschels  $B$  perspektiv aufeinander beziehen, was wir in Zeichen <sup>(37 A)</sup> so andeuten:

$$s [A_1] \overline{\wedge} \sigma [A (B_1)] \overline{\wedge} \sigma_1 [B] \overline{\wedge} s_1.$$

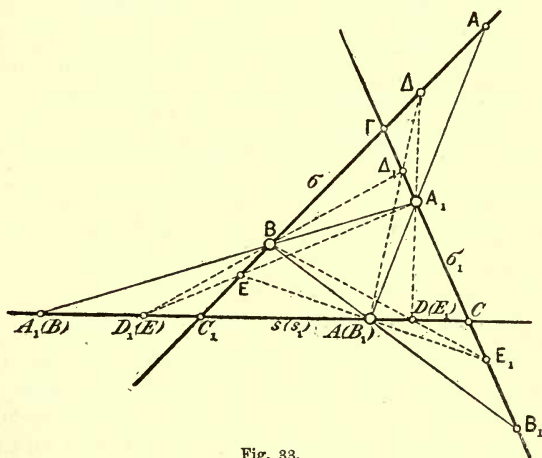


Fig. 33.

Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem  $\sigma$  von  $A$  ( $B_1$ )  $A_1$  geschnitten wird, durch  $A$  und den Punkt, in dem  $\sigma_1$  von  $A$  ( $B_1$ )  $B$  geschnitten wird, durch  $B_1$ , so können wir die vorstehende Kette auch so schreiben:

$$A B C [A_1] \overline{\wedge} A B \Gamma [A (B_1)] \overline{\wedge} A_1 B_1 \Gamma [B] \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1.$$

Zu einem beliebigen Punkte  $D$  von  $s$  erhalten wir nun den homologen  $D_1$  von  $s_1$  durch die folgende Konstruktion: Wir projizieren  $D$  aus  $A_1$  auf  $\sigma$ , den erhaltenen Punkt  $\Delta$

aus  $A(B_1)$  auf  $\sigma_1$ , den erhaltenen Punkt  $\Delta_1$  aus  $B$  auf  $s_1$ ; in Zeichen:

$$A B C D \overline{\wedge} A B \Gamma \Delta \overline{\wedge} A_1 B_1 \Gamma \Delta_1 \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1. —$$

Die eben angegebene Konstruktion führt uns zu einem wichtigen Lehrsatz, wenn wir jetzt wieder zum Punkte  $D_1$ , indem wir ihn zur ersten Punktreihe  $s$  rechnen und dementsprechend mit  $E$  bezeichnen, den homologen  $E_1$  suchen: Wir projizieren also  $E$  aus  $A_1$  auf  $\sigma$ , den erhaltenen Punkt  $E$  aus  $A(B_1)$  auf  $\sigma_1$ , den erhaltenen Punkt  $E_1$  aus  $B$  auf  $s_1$ , sodafs wir haben:

$$B A C_1 E [A_1] \overline{\wedge} B A C_1 E [A(B_1)] \overline{\wedge} B_1 A_1 C E_1 [B] \overline{\wedge} A B C E_1.$$

Da das erste Glied  $B A C_1 E$  dieser Kette mit dem letzten Gliede  $A_1 B_1 C_1 D_1$  der vorhergehenden Kette identisch ist, so haben wir<sup>(30)</sup>  $A B C D \overline{\wedge} A B C E_1$ ; folglich<sup>(33 Z1)</sup> fällt  $E_1$  in  $D$ , mit andern Worten, der Punkt  $D(E_1)$  entspricht dem Punkt  $D_1(E)$  zweifach. Da  $D(E_1)$  ein beliebiger Punkt ist, so können wir das Ergebnis mit Hülfe des Begriffes der Projektivität<sup>(37)</sup> so aussprechen:

*Wenn in einer geraden Projektivität ein Element seinem homologen zweifach entspricht, so entspricht jedes Element seinem homologen zweifach.*

In Zeichen: Aus

$$A A_1 C \dots F \dots \overline{\wedge} A_1 A C_1 \dots F_1 \dots$$

folgt

$$A A_1 C C_1 \dots F F_1 \dots \overline{\wedge} A_1 A C_1 C \dots F_1 F \dots$$

In der Zeichensprache können wir auf die doppelte Bezeichnung eines und desselben Elementes einer Projektivität verzichten, da aus der Stellung des Elementes (vor oder hinter  $\overline{\wedge}$ ) zu erkennen ist, ob es zum ersten oder zweiten Grundgebilde zu rechnen ist.

<sup>z</sup> *Zusatz.* Auch<sup>(36 Z)</sup> diesen Satz können wir von dem Begriff der Projektivität loslösen, indem wir beachten, dafs nach unserer Konstruktion  $s \sigma \sigma_1$  ein beliebiges Dreieck und  $A B A_1$  ein beliebiges diesem Dreieck eingeschriebenes Dreieck ist und dafs wir, von dem beliebigen Punkte  $D$  ausgehend, nacheinander konstruiert haben  $\Delta \Delta_1 E E E_1$ . Fassen wir wieder diese sechs Punkte als die Ecken eines einfachen<sup>(16 A)</sup> Sechsecks auf und bezeichnen sie der Reihe

nach durch 1 2 3 4 5 6, so erkennen wir (Fig. 34), daß von diesem Sechseck  $s \sigma \sigma_1$  die Diagonallinien <sup>(36 Z)</sup> und  $AB A_1$  die Diagonalpunkte sind.

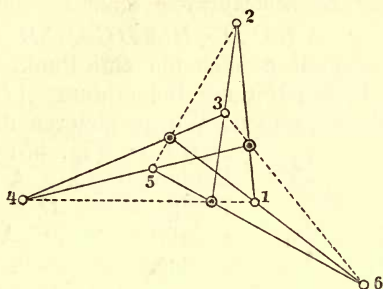


Fig. 34.

Nennen wir noch z. B. die Diagonallinie 14 und den Diagonalpunkt (23). (56) einander zugeordnet, so können wir unsern Satz auch so aussprechen:

*Zweiter Sechseckssatz.* Wenn zwei Diagonalpunkte eines einfachen Sechsecks in den zugeordneten Diagonallinien liegen, so liegt auch der dritte Diagonalpunkt in der zugeordneten Diagonallinie.

*Zweiter Sechseckssatz.* Wenn zwei Diagonallinien eines einfachen Sechsecks durch die zugeordneten Diagonalpunkte gehen, so geht auch die dritte Diagonallinie durch den zugeordneten Diagonalpunkt.

**39. Projektive Permutationen.** Es ist häufig bequem, <sup>39</sup> nicht bloß, wie bisher, von perspektiven und projektiven Grundgebilden zu sprechen, sondern auch von perspektiven und projektiven Elementen. Z. B. der Satz: Die Punkte  $AB C D E$  sind den Punkten  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$  projektiv, soll aussagen: 1.  $AB C D E$  liegen in einer Geraden  $s$  und  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$  in einer zweiten Geraden  $s_1$ ; 2. in der etwa durch  $BC D \overline{\wedge} B_1 C_1 D_1$  bestimmten <sup>(33a)</sup> projektiven Verwandtschaft der Punktreihen  $s$  und  $s_1$  ist dem Punkt  $A$  der Punkt  $A_1$  und dem Punkt  $E$  der Punkt  $E_1$  homolog. — Da sich zwei Punktreihen immer projektiv so aufeinander beziehen lassen, daß drei Punkten der einen drei Punkte der andern entsprechen, so muß eine Gruppe mindestens vier Elemente enthalten, wenn die Aussage, daß die Gruppe einer andern projektiv ist, einen Inhalt haben soll. —

**Lehrsatz:** *Leitet man aus einer Gruppe von vier Elementen eine Permutation ab, indem man irgend zwei Elemente und gleichzeitig die beiden übrigen vertauscht, so ist die Elementengruppe ihrer Permutation projektiv.*

In Zeichen:  $A B C D \overline{\wedge} B A D C \overline{\wedge} C D A B \overline{\wedge} D C B A$ .

**Beweis:** Handelt es sich um eine Punktgruppe, so läßt sich z. B. die Richtigkeit der Behauptung  $A B C D \overline{\wedge} B A D C$  in folgender Weise zeigen: Wir projizieren die vier Punkte

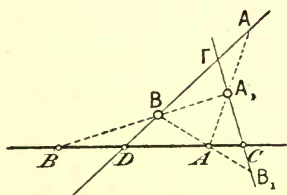


Fig. 35.

$A B C D$  (Fig. 35) aus einem beliebigen Punkte  $A_1$  auf eine beliebige durch  $D$  gehende Gerade, sodafs  $A B C D \overline{\wedge} A B \Gamma D$  ist. Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem die Verbindungslinie  $A B$  den Projektionsstrahl  $A_1 C$  schneidet, durch  $B_1$ , so haben wir

$$A B C D [A_1] \overline{\wedge} A B \Gamma D [A] \overline{\wedge} A_1 B_1 \Gamma C [B] \overline{\wedge} B A D C.$$

**Z** **Zusatz.** Aus  $A B C D \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1$  folgt demnach

$$A B C D \overline{\wedge} B_1 A_1 D_1 C_1 \overline{\wedge} C_1 D_1 A_1 B_1 \overline{\wedge} D_1 C_1 B_1 A_1.$$

**A** **Anmerkung.** Dieser Satz ist mit dem vorhergehenden <sup>(38)</sup> identisch. Wir haben ihn zweimal abgeleitet und zweimal in Worte gekleidet, um je nach den Schlüssen, die wir aus ihm zu ziehen haben, bald die eine bald die andere Form anwenden zu können.

#### 40. Projektive Verwandtschaft harmonischer Würfe.

Haben zwei harmonische Punktwürfe  $A B . C D$  und  $A_1 B_1 . C_1 D$  den Punkt  $D$  gemeinsam, so wird die Verbindungslinie  $C C_1$  von  $A A_1$  und  $B B_1$  in einem und demselben Punkte geschnitten. Ist nämlich  $S$  der Schnittpunkt von  $C C_1$  und  $A A_1$ , so muß der Strahl  $S B$  durch den von  $A_1$  durch  $C_1$  und  $D$  harmonisch getrennten Punkt gehen <sup>(21)</sup>; das ist aber  $B_1$  <sup>(20)</sup>.

In derselben Weise ergibt sich, dafs  $C C_1$  auch von den Verbindungslinien  $A B_1$  und  $A_1 B$  in einem und demselben Punkte geschnitten wird. Daher:

1. *Zwei harmonische Würfe, die ein Element gemeinsam haben, sind perspektiv auf einander bezogen, wenn man das gemeinsame Element sich selbst, und die diesem zugeordneten Elemente einander, zuweist. Die weitere Zuordnung ist beliebig.*

In Zeichen: Sind  $AB.CD$  und  $A_1B_1.C_1D$  zwei harmonische Punktwürfe, so gehen durch einen Punkt

In Zeichen: Sind  $ab.cd$  und  $a_1b_1.c_1d$  zwei harmonische Strahlenwürfe, so liegen in einer Gerade

1.  $CC_1; AA_1; BB_1$  und
2.  $CC_1; AB_1; A_1B$ . —

1.  $cc_1; aa_1; bb_1$  und
2.  $cc_1; ab_1; a_1b$ . —

Aus dem vorstehenden Lehrsatz folgt, daß wir zwei beliebige harmonische Punktwürfe immer als die Endglieder einer perspektiven Kette ansehen können. Verbinden wir nämlich einen beliebigen Punkt des einen Wurfs mit einem beliebigen des andern, z. B.  $A$  mit  $D_1$ , nehmen auf dieser Verbindungslinie einen Punkt  $B$  willkürlich an und zeichnen den von  $D_1$  durch  $A$  und  $B$  harmonisch getrennten Punkt  $\Gamma$ , so haben wir nach dem eben bewiesenen Satze z. B.

$$ABCD \overline{\wedge} AB D_1 \Gamma \overline{\wedge} B_1 A_1 D_1 C_1.$$

Im ganzen erhält man acht verschiedene Arten der Zuordnung. Dabei ist zu beachten, daß zwei Elementen, die ein Paar bilden, immer zwei Elemente zugewiesen werden müssen, die wieder ein Paar bilden.

2. Zwei harmonische Würfe sind *projektiv* aufeinander bezogen, wenn man einem beliebigen Element des einen Wurfs ein beliebiges Element des andern, und gleichzeitig die diesen zugeordneten Elemente einander, zuweist. Die weitere Zuordnung ist beliebig.

In Zeichen: Sind  $AB.CD$  und  $A_1B_1.C_1D_1$  zwei harmonische Würfe, so ist

$$ABCD \overline{\wedge} A_1B_1C_1D_1 \overline{\wedge} B_1A_1C_1D_1 \overline{\wedge} B_1A_1D_1C_1 \text{ usw.}$$

Der vorstehende Satz läßt sich umkehren:

3. *Ist eine Gruppe von vier Elementen einer Permutation projektiv, die durch Vertauschung nur zweier Elemente aus ihr abgeleitet ist, so bilden die beiden vertauschten und die beiden nicht vertauschten Elemente zwei Paare eines harmonischen Wurfs.*

In Zeichen: Aus  $ABCD \overline{\wedge} BACD$  folgt, daß  $AB.CD$  ein harmonischer Wurf ist.

Beweis: Projiziert man  $ABCD$  aus einem beliebigen Punkt  $\Delta$  auf eine durch  $D$  gelegte Gerade, sodafs  $ABCD \overline{\wedge} ABRD$  ist, so folgt<sup>(30a)</sup> aus der Voraussetzung  $ABCD \overline{\wedge}$

$BACD$ , daß  $ABRD \overline{BACD}$  ist. Folglich <sup>(34)</sup> gehen  $AB$ ,  $BA$ ,  $RC$  durch *einen* Punkt  $\Gamma$ . Das Viereck  $\triangle AB\Gamma$  zeigt <sup>(20<sub>1</sub>)</sup>, daß  $AB.CD$  ein harmonischer Wurf ist.

41 41\*. **Doppelverhältnis.** In der Geometrie des Mafses unterscheidet man zwei Strecken durch ihre Größe und, wenn sie in einer und derselben Gerade oder in parallelen Geraden liegen, auch durch ihre Richtung. Den Richtungssinn unterscheidet man durch das positive und negative Vorzeichen, sodafs  $AB = -BA$  oder  $AB + BA = 0$  ist. Sind  $ABX$  drei Punkte einer Gerade, so ist, wie auch ihre Lage sein mag,  $AX + XB = AB$  oder  $AX + XB + BA = 0$ , vorausgesetzt, daß man Strecken von entgegengesetzter Richtung als positive und negative Größen im algebraischen Sinn auffaßt.

Liegt  $X$  auf  $AB$ , so haben  $XA$  und  $XB$  entgegengesetzte Vorzeichen; liegt  $X$  auf  $A'B$  <sup>(5)</sup>, so haben  $XA$  und  $XB$  gleiche Vorzeichen. Im ersten Fall ist daher das Verhältnis  $XA:XB$ , welches das *einfache* Verhältnis der drei Punkte  $ABX$  genannt und kurz durch  $(ABX)$  bezeichnet wird, negativ; im zweiten positiv.

Ist  $Y$  ein zweiter Punkt von  $AB$ , so läßt sich auch  $Y$  als Teilpunkt der Strecke  $AB$  ansehen; die Teilstrecken sind  $YA$  und  $YB$  und das Teilungsverhältnis  $YA:YB$  oder  $(ABY)$ . Aus den beiden Verhältnissen  $(ABX)$  und  $(ABY)$  läßt sich ein neues Verhältnis  $\frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB}$  bilden, welches das Doppelverhältnis des Wurfes  $AB.XY$  heißt und kurz durch  $(ABXY)$  bezeichnet wird. —

1. Aufgabe: Eine Strecke nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

Lösung: Ist das Verhältnis durch die beiden Strecken  $p$  und  $q$  gegeben, so muß noch angegeben werden, ob das Verhältnis positiv oder negativ sein soll.

I.  $\left(-\frac{p}{q}\right)$ : Wir ziehen von den Endpunkten  $A$  und  $B$  der gegebenen Strecke (Fig. 36) zwei parallele und entgegengesetzt gerichtete Strecken:  $AP = p$  und  $BQ = q$ ; die Verbindungslinie  $PQ$  schneidet  $AB$  in dem gesuchten Punkte  $X$ .

II.  $\left(+\frac{p}{q}\right)$ : Wir ziehen von  $A$  und  $B$  zwei parallele und gleich gerichtete Strecken:  $AP = p$  und  $BQ_1 = q$ ; die Verbindungslinie  $PQ_1$  schneidet  $AB$  in dem gesuchten Punkte  $Y$ . —

Das Doppelverhältnis der vier Punkte  $ABXY$  ist

$$\left(-\frac{p}{q}\right) : \left(+\frac{p}{q}\right) = -1.$$

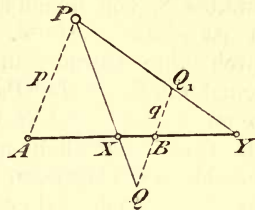


Fig. 36.

Weil  $B$  die Mitte von  $QQ_1$  ist, so sind, wenn wir den unendlich fernen Punkt von  $QQ_1$  durch  $U$  bezeichnen,  $QQ_1 \cdot BU$  vier harmonische Punkte<sup>(27.)</sup>, die Verbindungslinien dieser Punkte mit  $P$  mithin<sup>(21.)</sup> vier harmonische Strahlen und die vier Punkte  $AB \cdot XY$ , in denen diese vier Strahlen die Gerade  $AB$  schneiden, vier harmonische Punkte<sup>(21a)</sup>. Daher

2. Lehrsatz: Vier Punkte, deren Doppelverhältnis  $-1$  ist, bilden einen harmonischen Wurf.

Von diesem Satz gilt auch die

3. Umkehrung: Das Doppelverhältnis von vier harmonischen Punkten ist  $-1$ .

Projiziert man nämlich aus einem beliebigen Punkte  $P$  die vier harmonischen Punkte  $AB \cdot XY$  auf eine durch  $B$  parallel zum Projektionsstrahl  $PA$  gelegte Gerade, so sind  $UB \cdot QQ_1$  vier harmonische Punkte<sup>(21.)</sup>; und weil  $U$  der unendlich ferne Punkt von  $QQ_1$  ist, so ist  $B$  die Mitte<sup>(27a)</sup>. Weil also  $BQ = -BQ_1$  ist, so haben wir

$$\frac{XA}{XB} = \frac{AP}{BQ} = -\frac{AP}{BQ_1} = -\frac{YA}{YB},$$

folglich  $(ABXY) = -1$ .

Aus der vorstehenden Proportion ergibt sich ferner die Gleichung  $XA \cdot YB + XB \cdot YA = 0$ . Ist  $O$  die Mitte der Strecke  $AB$ , so daß  $OA + OB = 0$  ist, so haben wir

$$(XO + OA)(YO + OB) + (XO + OB)(YO + OA) = 0,$$

folglich

$$2XO \cdot YO + (XO + YO)(OA + OB) + 2OA \cdot OB = 0,$$

folglich

$$OA^2 = OX \cdot OY.$$

4. Sind  $AB.XY$  vier harmonische Punkte und  $O$  die Mitte von  $AB$ , so ist  $OA^2 = OX \cdot OY$ . —

Sind  $ab.xy$  vier harmonische Strahlen des Mittelpunktes  $S$ , von denen  $x$  und  $y$  auf einander senkrecht stehen, so ist  $\angle ax = xb^{(28s)}$ . Schneiden wir diese vier Strahlen durch eine Gerade in den vier Punkten  $AB.XY$  und ziehen durch  $B$  eine Parallele zu  $a$ , welche  $x$  in  $C$  schneidet, so ist  $\angle BSC = CSA = SCB$ , folglich  $SB = BC$ , wobei wir vom Vorzeichen abzusehen haben, da die Strecken in verschiedenen Geraden liegen. Da nun  $SA:BC = XA:XB$  ist, so ist auch  $SA:SB = XA:XB$ .

5. Schneiden wir vier harmonische Strahlen  $ab.xy$  des Punktes  $S$  durch eine Gerade in den Punkten  $AB.XY$ , so ist, wenn  $x \perp y$  ist,

$$SA:SB = XA:XB = YA:YB. —$$

Projiziert man drei Punkte  $ABX$ , die in einer Gerade liegen, entweder aus einem endlichen Punkte auf eine parallele Gerade oder aus einem unendlich fernen Punkte auf eine beliebige Gerade, so folgt aus bekannten Sätzen der Proportionslehre, daß das einfache Verhältnis  $(ABX) = (A_1B_1X_1)$  ist, also durch die Projektion nicht geändert wird. Würde man dagegen die drei Punkte aus einem endlichen Punkte auf eine endliche Gerade projizieren, so würde das einfache Verhältnis sich ändern.

Nimmt man aber noch einen vierten Punkt  $Y$  hinzu, so bleibt das Doppelverhältnis  $(ABXY)$ , wie wir beweisen wollen, bei jeder Projektion konstant. Bleibt es bei einer Projektion konstant, so bleibt es auch bei mehreren aufeinander folgenden konstant, so daß wir unsern Lehrsatz so aussprechen können<sup>(30i)</sup>:

6. *Zwei projektive Gruppen von vier Punkten haben dasselbe Doppelverhältnis.*

Beweis: Projizieren wir die vier Punkte  $ABXY$  der Gerade  $s$  aus einem beliebigen Punkte  $S$  auf irgend eine Gerade  $s_1$ , so ist zu zeigen, daß die Doppelverhältnisse  $(ABXY)$  und  $(A_1B_1X_1Y_1)$  einander gleich sind. — Ziehen wir durch  $B$  (Fig. 37) eine Parallele zum Projektionsstrahl  $SA$ , welche  $SX$  und  $SY$  in  $U$  und  $V$  schneidet, so ist  $(ABXY) = (VUB)$ ; denn



$$\frac{XA}{XB} = \frac{AS}{BU} \quad \text{und} \quad \frac{YA}{YB} = \frac{AS}{BV},$$

folglich durch Division

$$\frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB} = \frac{BV}{BU}.$$

Ziehen wir ebenso durch  $B_1$  eine Parallele zu  $SA$ , so ergibt sich bei entsprechender Bezeichnung  $(A_1 B_1 X_1 Y_1) = (V_1 U_1 B_1)$ . Da aber  $(V_1 U_1 B_1)$  die Projektion des einfachen Verhältnisses  $(VUB)$  auf eine parallele Gerade ist, so ist, wie schon erwähnt, nach einem bekannten Satz der Proportionslehre  $(VUB) = (V_1 U_1 B_1)$ , also auch  $(ABXY) = (A_1 B_1 X_1 Y_1)$ . — Gilt aber der Satz für perspektive Gruppen, so gilt er auch <sup>(30.)</sup> für projektive Gruppen. —

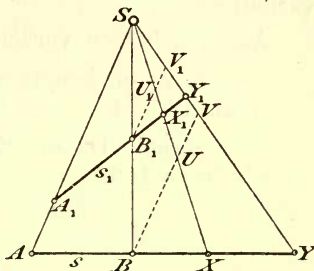


Fig. 37.

Auf indirektem Wege beweist man den

7. Lehrsatz: Wenn zwei Gruppen von vier Punkten, die einen Punkt entsprechend gemein haben, dasselbe Doppelverhältnis haben, so liegen sie perspektiv. —

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich ferner zeigen: Wenn  $(ABXY) = (A_1 B_1 X_1 Y_1)$  ist, so ist  $ABXY \overline{\wedge} A_1 B_1 X_1 Y_1$ . Man braucht nur die Hilfslinie  $A Y_1$  zu ziehen und zweimal den vorhergehenden Satz anzuwenden, um einzusehen, daß  $ABXY$  und  $A_1 B_1 X_1 Y_1$  perspektiv zu der in  $A Y_1$  konstruierten Punktgruppe liegen, also untereinander projektiv sind <sup>(30.)</sup>:

8. Zwei Gruppen von vier Punkten sind projektiv, wenn sie dasselbe Doppelverhältnis haben. —

Ist  $AB = A_1 B_1$ ,  $AX = A_1 X_1$ ,  $AY = A_1 Y_1$ , so ist auch  $(ABXY) = (A_1 B_1 X_1 Y_1)$ ; daher:

9. Zwei kongruente Punktgruppen sind projektiv.

Daraus ergibt sich weiter:

10. Zwei kongruente Strahlengruppen sind projektiv.

Ist nämlich  $\sphericalangle a b = a_1 b_1$ ,  $\sphericalangle a x = a_1 x_1$ ,  $\sphericalangle a y = a_1 y_1$ , so können wir zwei zu den Strahlengruppen perspektive und unter einander kongruente Punktgruppen zeichnen: Wählen wir in  $a$  und  $a_1$  zwei Punkte  $A$  und  $A_1$  so, daß  $SA = S_1 A_1$  ist, und errichten in  $A$  auf  $a$  das Lot  $s$  und in  $A_1$  auf  $a_1$  das Lot  $s_1$ , so werden  $s$  und  $s_1$  von den kongruenten Strahlengruppen in kongruenten Punktgruppen geschnitten. —

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt:

11. Zwei kongruente Grundgebilde sind projektiv (vgl. 164 Z).

- A *Anmerkung.* Durch die Lehre vom Doppelverhältnis hat Steiner 1832 in seinem Werke: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ die Geometrie der Lage begründet.

#### § 4. Krumme Grundgebilde.

- 42 **42. Erzeugnis zweier projektiven Grundgebilde.**  
Aus den projektiven Grundgebilden, deren Konstruktion im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, ergeben sich neue Gebilde, zu deren Untersuchung wir uns jetzt wenden. Für diese Erzeugnisse projektiver Grundgebilde geben wir die folgende

*Definition:* Der Inbegriff der Punkte, in denen sich die homologen Strahlen zweier projektiven geraden Strahlenbüschel schneiden, heißt eine krumme Punktreihe oder eine Kurve zweiter Ordnung.

*Definition:* Der Inbegriff der Geraden, die die homologen Punkte zweier projektiven geraden Punktreihen verbinden, heißt ein krummer Strahlenbüschel oder ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

- Z *Zusatz.\** Verbindet man zwei beliebige Punkte  $S$  und  $S_1$  der Peripherie eines Kreises mit irgend einem Punkte  $A$  der Peripherie durch die Strahlen  $a$  und  $a_1$ , mit  $B$  durch  $b$  und  $b_1$  u. s. w., so ist nach bekannten Sätzen der Planimetrie  $\sphericalangle a b = a_1 b_1$  u. s. w. Wir erhalten also in  $S$  und  $S_1$  zwei kongruente Strahlenbüschel (vgl. 13); da diese projektiv sind<sup>(41.11)</sup>, so können wir die Punkte eines Kreises auffassen

als die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel, mit andern Worten:

*Der Kreis ist eine Kurve zweiter Ordnung.*

43.\* **Kegelschnitt.** Es soll jetzt gezeigt werden, daß<sup>43</sup> auch die Linie, in welcher ein Kreiskegel von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, aufgefaßt werden kann als der Inbegriff der Punkte, in denen sich die homologen Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel schneiden, daß also der *Kegelschnitt* eine Kurve zweiter Ordnung ist.

Ist  $\delta$  eine zur Achse des Kegels senkrechte Ebene, die den Kegel in einem Kreise schneidet, so lassen sich, wie wir in Nr. 42 Z gesehen haben, zwei beliebige Punkte  $S$  und  $S_1$  dieses Kreises zu Mittelpunkten von zwei projektiven Strahlenbüscheln machen. Die Strahlen  $abc\dots$  und  $a_1b_1c_1\dots$  dieser Büschel  $S$  und  $S_1$  verbinden wir mit den beiden durch  $S$  und  $S_1$  gehenden Seitenlinien  $s$  und  $s_1$  des Kegels durch die Ebenen  $\alpha\beta\gamma\dots$  und  $\alpha_1\beta_1\gamma_1\dots$ . Schneiden diese Ebenen der Büschel  $s$  und  $s_1$  eine beliebige Ebene  $\varepsilon$  in den Strahlenbüscheln  $a'b'c'\dots$  und  $a'_1b'_1c'_1\dots$  mit den Mittelpunkten  $S'$  und  $S'_1$ , so haben wir

$$a'b'c'\dots \overline{\wedge} \alpha\beta\gamma\dots \overline{\wedge} abc\dots \overline{\wedge} a_1b_1c_1\dots \overline{\wedge} \alpha_1\beta_1\gamma_1\dots \\ \overline{\wedge} a'_1b'_1c'_1\dots$$

Da demnach<sup>(30s)</sup>  $a'b'c'\dots \overline{\wedge} a'_1b'_1c'_1\dots$  ist, so stellen sich die Punkte der Linie, in welcher die Ebene  $\varepsilon$  den Kreiskegel schneidet, als Schnittpunkte der homologen Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel dar.

44. **Erzeugnis zweier perspektiven Grundgebilde.**<sup>44</sup> Weil die perspektive Verwandtschaft ein besonderer Fall der projektiven ist<sup>(30s)</sup>, so sind die Erzeugnisse perspektiver Gebilde aufzufassen als besondere Fälle der krummen Punkt-reihen und Strahlenbüschel<sup>(42)</sup>. Da nun die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier perspektiven Büschel  $S$  und  $S_1$  in einer Geraden  $s$  liegen<sup>(7)</sup>; da ferner<sup>(8)</sup> der Strahl  $SS_1 = t$  mit seinem homologen  $S_1S = t_1$  zusammenfällt, also jeder Punkt von  $t(t_1)$  als gemeinsamer Punkt zweier homologen Strahlen aufzufassen ist, so liegen die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier perspektiven Büschel  $S$  und  $S_1$  in zwei Geraden  $s$  und  $t$ . Daher:

Die Punktreihe zweiter Ordnung, die von zwei perspektiven Strahlenbüscheln erzeugt wird, zerfällt in zwei Punktreihen erster Ordnung.

Der Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der von zwei perspektiven Punktreihen erzeugt wird, zerfällt in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung.

45. **Tangenten und Berührungspunkte.** Sind  $S$  und  $S_1$  die Mittelpunkte zweier projektiven Strahlenbüschel, die nicht zugleich perspektiv sind, in denen also<sup>(34)</sup> der Strahl  $SS_1 = t$  nicht mit seinem homologen  $t_1$  zusammenfällt, so sind  $S$  und  $S_1$  zwei Punkte der erzeugten Kurve; denn in ihnen schneiden sich zwei homologe Strahlen, in  $S_1$  z. B.  $t$  und  $t_1$ .

Auf jedem Strahl  $a_1$  des Büschels  $S_1$  liegt außer  $S_1$  noch ein zweiter Punkt der Kurve: der Punkt  $A$ , in dem der Strahl  $a_1$  von seinem homologen  $a$  geschnitten wird. Nur beim Strahl  $t_1$ , der der Verbindungslinie  $SS_1 = t$  entspricht, fällt dieser zweite Schnittpunkt mit  $S_1$  zusammen; der Strahl  $t_1$ , der nur einen Punkt mit der Kurve gemein hat, heißt eine *Tangente*.

Bezeichnen wir  $S_1S$  als Strahl des zweiten Büschels durch  $u_1$ , so ergibt sich in derselben Weise, daß der homologe Strahl  $u$  Tangente in  $S$  ist.

Die Strahlen, welche der Verbindungslinie der Mittelpunkte entsprechen, heißen *Tangenten* der krummen Punktreihe.

Die Punkte, welche dem Schnittpunkte der Träger entsprechen, heißen *Berührungspunkte* des krummen Strahlenbüschels.

46. **Erste Konstruktion der Kurve.** Die hier folgenden drei Kurvenkonstruktionen sind nichts als eine Wiederholung der in Nr. 31 gegebenen Konstruktionen projektiver Grundgebilde. —

*Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der fünf Punkte gegeben sind.*

*Aufgabe: Einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu zeichnen, von dem fünf Strahlen gegeben sind.*

In Zeichen:  $SS_1AB\Gamma$ .

In Zeichen:  $\sigma\sigma_1\alpha\beta\gamma$ .

**Lösung:** Die fünf gegebenen Punkte seien  $SS_1AB\Gamma$ . Wir ziehen nach  $AB\Gamma$  aus  $S$  und  $S_1$  die Strahlen  $abc$  und  $a_1b_1c_1$  und beziehen die Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  projektiv

so aufeinander, daß den Strahlen  $abc$  die Strahlen  $a_1 b_1 c_1$  entsprechen (31, Allgemeine Lösung). Wir legen also (Fig. 38) durch A zwei beliebige Strahlen  $s$  und  $s_1$ , welche  $bc$  und  $b_1 c_1$  in  $BC$  und  $B_1 C_1$  schneiden, sodafs  $ABC \overline{\wedge} A B_1 C_1$  werden muß; den Schnittpunkt von  $B B_1 = \beta$  und  $C C_1 = \gamma$  bezeichnen wir durch  $\Sigma$ .

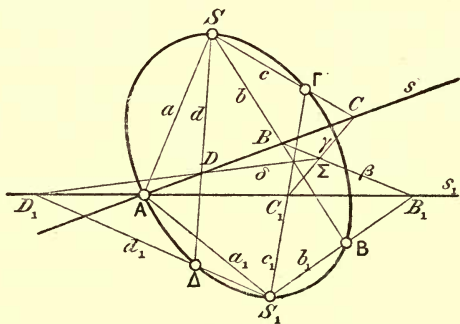


Fig. 38.

Einem beliebigen vierten Strahle  $d$  von  $S$  ordnen wir einen Strahl von  $S_1$  durch folgende Konstruktion zu: Den Punkt  $D$ , in welchem  $d$  die Hülfslinie  $s$  schneidet, verbinden wir mit  $\Sigma$  und den Punkt  $D_1$ , in welchem diese Verbindungslinie  $\delta$  die Hülfslinie  $s_1$  schneidet, verbinden wir mit  $S_1$  durch  $S_1 D_1 = d_1$ . Der Schnittpunkt  $\Delta = d d_1$  ist ein sechster Punkt der Kurve. — Auf die angegebene Weise sind soviel Punkte zu zeichnen, daß der Lauf der Kurve erkennbar ist.

*Zusatz.* Da die projektive Verwandtschaft der Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  durch drei Strahlenpaare bestimmt ist (33<sub>a</sub>), so erhalten wir dieselbe Kurve, wenn wir an die Stelle des Punktes A (durch den wir die Hülfsgeraden  $s$  und  $s_1$  legten) einen beliebigen andern Punkt der Kurve setzen, mit andern Worten:

A ist ein *beliebiger* Punkt der Kurve.

**47. Zweite Konstruktion der Kurve.** Die vorhergehende 47 Konstruktion (46) wird einfacher, wenn wir als Hülfslinien  $s$  und  $s_1$  nicht zwei beliebige durch A gehende Geraden nehmen, sondern die Verbindungslinien  $AB$  und  $A\Gamma$  (31<sub>1</sub>); es fallen dann die Punkte  $B B$  (Fig. 39) und  $C_1 \Gamma$  und folglich die Linien  $\beta b_1$  und  $\gamma c$  zusammen.

z *Zusatz.* Führen wir die Konstruktion aus, so ergibt sich aus der Figur eine wichtige Eigenschaft des gezeichneten

Kurvensechsecks: Die drei Punkte  $\Sigma D_1 D$ , welche in der Geraden  $\delta$  liegen, lassen sich auffassen als die Diagonalepunkte<sup>(86 z)</sup> des einfachen Sechsecks

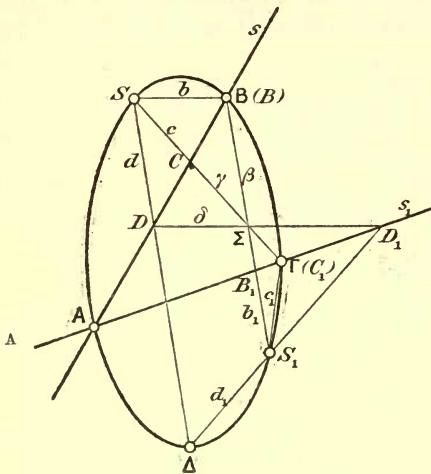


Fig. 39.

$$\overbrace{S \Gamma A B S_1 \Delta}.$$

Die Diagonalepunkte dieses Kurvensechsecks liegen also in einer Geraden<sup>(54)</sup>.

*Anmerkung.* Um sich mit den wichtigsten Konstruktionen vertraut zu machen, ist es weit zweckmäßiger, selbstständige Zeichnungen auszuführen, als die Figuren

des Textes zu verfolgen. Um auf solche Übungen hinzuweisen, werden wir an geeigneten Stellen einige Aufgaben in Buchstaben andeuten, wobei wir unendlich ferne Elemente durch den Index  $\infty$  kenntlich machen:

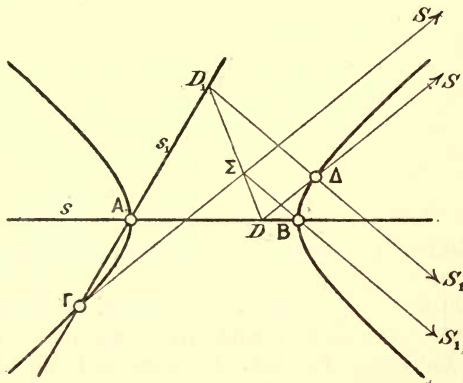


Fig. 40.

Zur Übung:  $S S_1 A B \Gamma_\infty$ ;  $S S_1 A B_\infty \Gamma_\infty$ ;  $S S_1 A_\infty B \Gamma$ ;  $S_\infty S_1 A B \Gamma$ ;  $S_\infty S_{1\infty} A B \Gamma$  (Fig. 40);  $S_\infty S_1 A_\infty B \Gamma$ .

48. Dritte Konstruktion der Kurve. Wir fügen noch <sup>48</sup> eine dritte Lösung, die für uns wichtigste, hinzu, indem wir die Hilfsgeraden  $s_1$  und  $s$  mit  $A S$  und  $A S_1$  zusammenfallen lassen <sup>(31<sub>2</sub>)</sup>.

Wir ziehen also nach  $A B \Gamma$  (Fig. 41) aus  $S$  die drei Strahlen, die  $s = A S_1$  in  $A B C$ , und aus  $S_1$  die drei Strahlen, die  $s_1 = A S$  in  $A B_1 C_1$  schneiden, und bestimmen den Schnittpunkt  $\Sigma$  von  $B B_1$  und  $C C_1$ .

— Zu einem beliebigen Strahl  $d$  von  $S$  erhalten wir den zugeordneten  $d_1$  von  $S_1$ , indem wir den Schnittpunkt  $s d = D$  mit  $\Sigma$  durch  $\delta$  und den Schnittpunkt  $s_1 \delta = D_1$  mit  $S_1$  verbinden.

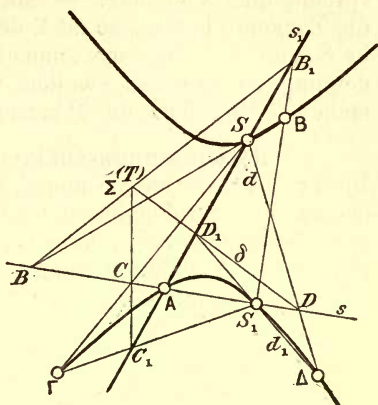


Fig. 41.

1. Zusatz. Da  $B$  und  $B_1$ , wie ein Blick in die Figur <sup>z</sup> lehrt, zwei Diagonalepunkte des Kurvenvierecks  $S S_1 A B$  und  $C$  und  $C_1$  zwei Diagonalepunkte des Kurvenvierecks  $S S_1 A \Gamma$  sind, so läßt sich die vorstehende Konstruktion auch so beschreiben:

Aus den fünf gegebenen Punkten bilden wir die beiden Vierecke  $S S_1 A B$  und  $S S_1 A \Gamma$  und zeichnen in jedem Viereck die Diagonallinie, welche der Seite  $S S_1$  zugeordnet ist <sup>(18 z)</sup>; der Schnittpunkt dieser beiden Diagonallinien ist der Punkt  $\Sigma$ . Wir erhalten einen neuen Kurvenpunkt  $\Delta$ , indem wir zwei Punkte  $D$  und  $D_1$  in den Seiten  $A S_1$  und  $A S$  des Dreiecks  $A S S_1$ , die mit  $\Sigma$  in einer Geraden liegen, aus  $S$  und  $S_1$  projizieren.

2. Zusatz. Diese Lösung ist die fruchtbarste, weil bei ihr <sup>z</sup> der Punkt  $\Sigma$  eine wichtige geometrische Bedeutung gewinnt. Um diese zu erkennen, ziehen wir den (in der Figur nicht gezeichneten) Strahl  $S S_1 = m$  und suchen den homologen  $m_1$  von  $S_1$ . Dazu müssen wir den Schnittpunkt  $s m$ , d. i.  $S_1$ , mit  $\Sigma$  durch  $\mu$  und den Schnittpunkt  $s_1 \mu$  mit  $S_1$  verbinden.

Wir sehen, daß  $S_1 \Sigma = m_1$  der dem Strahl  $S S_1 = m$  homologe ist. Nach Nr. 45 ist aber der Strahl von  $S_1$ , welcher der Verbindungslinie der Strahlenmittelpunkte entspricht, eine Tangente. — Da aus denselben Gründen  $S \Sigma$  die Tangente in  $S$  ist, so ist  $\Sigma$  der Schnittpunkt der Tangenten in  $S$  und  $S_1$ . Um uns immer an diese geometrische Bedeutung zu erinnern, wollen wir an die Stelle des Buchstaben  $\Sigma$  von jetzt an  $T$  setzen.

- 49 **49. Bestimmungsstücke einer krummen Punktreihe.** Bisher haben wir stets  $S$  und  $S_1$  zu Mittelpunkten der die Kurve erzeugenden Strahlenbüschel gemacht; es fragt sich nun, ob wir dieselbe Kurve erhalten oder eine andere, wenn wir etwa  $S$  und  $A$  zu Mittelpunkten von Strahlenbüscheln machen und diese vermittelt der drei Punkte  $S_1 B \Gamma$  projektiv auf-

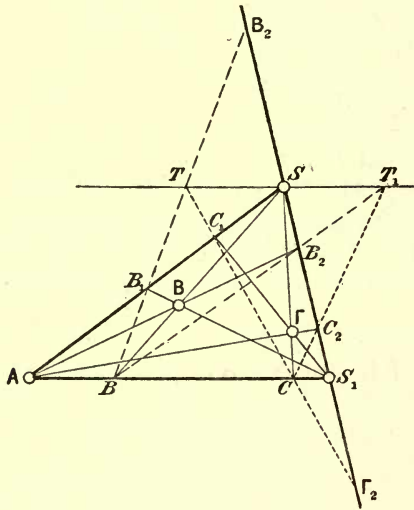


Fig. 42.

einander beziehen. Um diese Frage zu beantworten, verfolgen wir die dritte Konstruktion<sup>(48 Z 1)</sup>, indem wir ausgehen das erste Mal von  $S$  und  $S_1$ , das zweite Mal von  $S$  und  $A$ . Wir zeichnen also (Fig. 42) die der Seite  $S S_1$  zugeordneten<sup>(16 Z)</sup> Diagonallinien  $B B_1$  und  $C C_1$  der Vierecke  $S S_1 A B$  und  $S S_1 A \Gamma$  und erhalten dadurch für die erste



Kurve den Schnittpunkt  $T$ <sup>(48 Z 2)</sup> der Tangenten in  $S$  und  $S_1$ ; ebenso erhalten wir durch die der Seite  $SA$  zugeordneten Diagonallinien  $BB_2$  und  $CC_2$  den Schnittpunkt  $T_1$  der Tangenten in  $S$  und  $A$  für die zweite Kurve. Bezeichnen wir noch die Punkte, in denen  $SS_1$  von  $B B_1$  und  $C C_1$  geschnitten wird, durch  $B_2$  und  $\Gamma_2$ , so folgt<sup>(24s)</sup>

aus Viereck  $SS_1AB$ :  $SS_1 \cdot B_2 B_2$  ein harmonischer Wurf;

aus Viereck  $SS_1A\Gamma$ :  $SS_1 \cdot C_2 \Gamma_2$  ein harmonischer Wurf;

folglich  $SS_1 B_2 B_2 \overline{\wedge} SS_1 C_2 \Gamma_2$ <sup>(40s)</sup>. Durch Projektion dieser Punktgruppen aus  $B$  und  $C$  erhalten wir zwei projektive<sup>(30i)</sup> Strahlengruppen  $B(SS_1 B_2 B_2) \overline{\wedge} C(SS_1 C_2 \Gamma_2)$ , die in perspektiver<sup>(34)</sup> Lage sind, weil sie den Strahl  $BC(S_1)$  entsprechend gemein haben; die Schnittpunkte  $ST T_1$  der drei übrigen Strahlenpaare liegen mithin in einer Geraden, und der Punkt  $T$  ist von  $T_1$  durch  $S$  und  $AS_1$ <sup>(11 Z)</sup> harmonisch getrennt, weil z. B. die Gegenseiten des Vierecks  $SS_1AB$ , die sich im Diagonalpunkt  $B$  schneiden, durch die beiden andern Diagonalpunkte  $B_1$  und  $B_2$  harmonisch getrennt werden<sup>(24s)</sup>. Die Punkte  $T$  und  $T_1$  liegen also mit  $S$  in einer Geraden und werden durch  $S$  und  $AS_1$  harmonisch getrennt.

Mit Hülfe dieses Ergebnisses läßt sich nun zeigen, daß jeder Punkt der ersten Kurve auch ein Punkt der zweiten Kurve ist. Wir zeichnen einen beliebigen Punkt  $\Delta$  (Fig. 43) der ersten Kurve, indem wir die Punkte  $D$  und  $D_1$  in den Seiten  $AS_1$  und  $AS$  des Dreiecks  $ASS_1$ , die mit  $T$  in einer Geraden liegen, aus  $S$  und  $S_1$  projizieren<sup>(48 Z 1)</sup>. Von dem gezeichneten Kurvenviereck  $SS_1A\Delta$  sind  $D$  und  $D_1$  zwei Diagonalpunkte; der dritte, der Schnittpunkt von  $SS_1$  und  $A\Delta$ , heiße  $D_2$ . Dann muß, weil die beiden Diagonalpunkte  $D_1$  und  $D_2$  durch die Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes harmonisch getrennt werden<sup>(24s)</sup>,  $DD_2$  durch den von  $T$  durch  $S$  und  $AS_1$  harmonisch getrennten Punkt gehen, das ist<sup>(20s)</sup>  $T_1$ . Benutzen wir nun den Strahl  $T_1 DD_2$ , um einen Punkt der zweiten Kurve zu zeichnen, so haben wir<sup>(48 Z)</sup>  $D$  und  $D_2$  aus  $S$  und  $A$  zu projizieren; dadurch aber erhalten wir  $\Delta$ . —

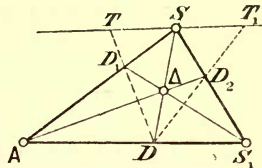


Fig. 43.

Da wir in dieser Weise weiter schließsen können, daß

die von den Strahlenbüscheln  $S$  und  $A$  erzeugte Kurve dieselbe ist wie die von den Strahlenbüscheln  $A$  und  $B$  erzeugte, so ist bewiesen, daß die Punkte  $S$  und  $S_1$  ersetzt werden können durch irgend <sup>(46 Z)</sup> zwei andere Punkte, mit andern Worten, daß  $S$  und  $S_1$  zwei beliebige Punkte der Kurve sind, *daß mithin alle Eigenschaften, die von  $S$  (oder  $S_1$ ) gelten, von jedem Punkte der Kurve gelten.*

Das Ergebnis, daß sich durch fünf Punkte nur eine Kurve legen läßt, drücken wir so aus:

*Eine Punktreihe zweiter Ordnung ist durch fünf Punkte bestimmt.*

*Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung ist durch fünf Strahlen bestimmt.*

z *Zusatz.* Alle Stücke, die die projektive Verwandtschaft zweier Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  bestimmen, bestimmen auch eine Kurve zweiter Ordnung<sup>(42)</sup>. Die projektive Verwandtschaft von  $S$  und  $S_1$  ist nun nicht allein durch drei Punkte  $A B \Gamma$  bestimmt, sondern auch durch zwei Punkte  $A$  und  $B$  und den Strahl  $\sigma$  von  $S$ , der dem Strahl  $S_1 S$  von  $S_1$  entspricht, und ferner durch einen Punkt  $A$  und die Strahlen  $\sigma$  und  $\sigma_1$ , welche der Verbindungslinie  $S S_1$  in  $S$  und  $S_1$  entsprechen. Da  $\sigma$  und  $\sigma_1$  die Tangenten<sup>(45)</sup> der durch die projektive Verwandtschaft erzeugten Kurve sind, so haben wir:

Eine Kurve zweiter Ordnung ist bestimmt sowohl durch vier Punkte und die Tangente in dem einen dieser Punkte als auch durch drei Punkte und die Tangenten in zweien dieser Punkte.

Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung ist bestimmt sowohl durch vier Strahlen und den Berührungspunkt des einen dieser Strahlen als auch durch drei Strahlen und die Berührungspunkte von zweien dieser Strahlen.

50 **50. Projektive Strahlenbüschel in zwei Kurvenpunkten.** Noch ein weiterer wichtiger Satz ist in Nr. 49 bewiesen. Zeichnen wir sämtliche Kurvenpunkte  $\Delta$ , indem wir (Fig. 43) den Punkt  $D$  die Dreiecksseite  $A S_1$  durchlaufen lassen, so haben wir<sup>(37 A)</sup>:

$$A(\Delta) \overline{\wedge} D_2 [T_1] \overline{\wedge} D \overline{\wedge} S(\Delta).$$

Ordnet man also dem Strahle von  $S$ , welcher durch den Kurvenpunkt  $\Delta$  geht, den Strahl von  $A$  zu, der ebenfalls durch  $\Delta$  geht, so sind die Strahlenbüschel  $S(\Delta)$  und  $A(\Delta)$

projektiv auf einander bezogen. Da wir in derselben Weise weiter schliessen können, dass  $A(\Delta) \overline{\wedge} B(\Delta)$  ist, so haben wir:

*Eine Punktreihe zweiter Ordnung wird aus zwei beliebigen ihrer Punkte durch zwei projektive Strahlenbüschel projiziert.*

*Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung schneidet zwei beliebige seiner Strahlen in zwei projektiven Punktreihen.*

*Zusatz.* Die vorstehende Fassung unsers Satzes ist *z* noch mangelhaft. Unter den Punkten der Kurve, die wir *z.* B. aus *A* projizieren sollen, ist auch der Punkt *A*; einen Punkt aber kann man nicht aus sich selbst projizieren, da eine Gerade erst durch zwei Punkte bestimmt ist. Wir müssen also zu unserm Beweise zurückkehren, um zu finden, welcher Strahl von *A* dem Strahl  $S(\Delta)$  entspricht für den Fall, dass  $\Delta$  in *A* fällt.  $\Delta$  fällt aber in *A* (Fig. 43), wenn  $D$  (und  $D_1$ ) in *A* und folglich  $D_2$  in den Schnittpunkt von  $AT_1$  und  $SS_1$  fällt. Da dann der Strahl  $A\Delta D_2$  durch  $T_1$  geht, mithin die Tangente in *A* ist, so haben wir der obigen Fassung unsers Satzes noch hinzuzufügen:

Der Strahl, welcher einen Kurvenpunkt aus sich selbst projiziert, ist seine Tangente.

Der Punkt, in dem ein Strahl eines Büschels sich selbst schneidet, ist sein Berührungspunkt.

### 51. Harmonische Trennung von Ecke und Gegen-

seite eines Kurvendreiecks. Wir haben noch nicht den ganzen Inhalt des in Nr. 49 gegebenen Beweises in Worte gekleidet. Allein die Thatsache, dass die zur Konstruktion der Kurve benutzten Punkte  $SS_1 \dots$  beliebig sind, wird uns in den nächsten Nummern eine Fülle von Sätzen liefern, da wir Eigenschaften, die wir für einzelne dieser Punkte abgeleitet haben, nunmehr als allgemein gültig aussprechen können.

Zunächst kleiden wir das Ergebnis<sup>(49)</sup> in Worte, dass  $S$  von  $AS_1$  durch  $T$  und  $T_1$  harmonisch getrennt wird. Da  $STT_1$  die Tangente in  $S$  ist,  $ASS_1$  aber ein beliebiges Kurvendreieck, so schneidet

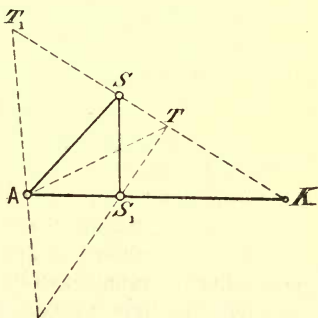


Fig. 44.

$AS_1$  die Tangente der Gegenecke  $S$  in einem Punkte  $K$  (Fig. 44), der von  $S$  harmonisch getrennt wird durch die Punkte  $T$  und  $T_1$ , in denen die Tangente in  $S$  von den Tangenten der beiden anderen Ecken  $S_1$  und  $A$  geschnitten wird. — Nennen wir das von den Tangenten in drei Kurvenpunkten gebildete Dreieck ein Kurvendreieck, ferner (dual, 7) das von drei Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung gebildete Dreieck kurz ein Büscheldreieck und das von ihren Berührungspunkten gebildete Dreieck ein Büscheldreieck, so haben wir:

1. Jede Seite eines Kurvendreiecks schneidet die Tangente der Gegenecke in einem Punkte, der von dieser Gegenecke durch die Tangenten der beiden andern Ecken harmonisch getrennt wird. —

1. Jede Ecke eines Büscheldreiecks wird aus dem Berührungspunkte der Gegenseite durch einen Strahl projiziert, der von dieser Gegenseite durch die Berührungspunkte der beiden andern Seiten harmonisch getrennt wird. —

Da  $AT_1$  die Tangente in  $A$  ist, so können wir die Thatsache, daß die vier von  $A$  (Fig. 44) ausgehenden Strahlen  $A(T_1 T . S K)$  einen harmonischen Wurf bilden<sup>(21)</sup>, so aussprechen:

2. Jede Seite eines Kurvendreiecks wird von dem Strahl, der ihren Berührungspunkt mit der Gegenecke verbindet, durch die Berührungspunkte der beiden andern Seiten harmonisch getrennt.

2. Jede Ecke eines Büscheldreiecks wird von dem Punkte, in dem ihre Tangente von der Gegenseite geschnitten wird, durch die Tangenten der beiden andern Ecken harmonisch getrennt.

52

## 52. Schnittpunkte einer Gerade mit der Kurve.

Schneidet eine beliebige Gerade  $p$  die Kurve in einem Punkte  $A$ , so können wir<sup>(60)</sup>  $A$  zum Mittelpunkt des einen von zwei die Kurve erzeugenden Strahlenbüscheln machen; jeder Strahl von  $A$ , also auch  $p$ , geht daher (vgl. 45) außer durch  $A$  noch durch einen zweiten Kurvenpunkt, durch den Punkt nämlich, in dem er von dem homologen Strahl des zweiten Büschels geschnitten wird. — Um den besondern Fall, daß der homologe Strahl des zweiten Büschels durch  $A$  geht, unsere Gerade  $p$  also<sup>(45)</sup> eine Tangente ist, nicht gesondert in Worte kleiden zu müssen, sagen wir von einer Tangente,

dafs sie die Kurve in zwei (in den Berührungspunkt zusammenfallenden) Punkten schneidet (vgl. 50 Z).

*Auf jedem Strahl eines Kurvenpunktes liegt noch ein zweiter Kurvenpunkt.*

*Durch jeden Punkt eines Strahles geht noch ein zweiter Strahl des Büschels zweiter Ordnung.*

**53. Tangenten und Diagonallinie.** In Nr. 48 Z sahen wir, dafs die der Seite  $SS_1$  zugeordnete Diagonallinie des Vierecks  $SS_1AB$  durch den Schnittpunkt der Tangenten von  $S$  und  $S_1$  geht. Dieser Satz gilt, wie wir nunmehr<sup>(49)</sup> wissen, für jedes Kurvenviereck; daher:

*Die Tangenten zweier Ecken eines Kurvenvierecks schneiden sich in einem Punkte derjenigen Diagonallinie, die der durch die beiden Ecken bestimmten Vierecksseite zugeordnet<sup>(16 Z)</sup> ist.*

*Die Berührungspunkte zweier Seiten eines Büschelvierseits liegen in einem Strahle desjenigen Diagonalpunktes, welcher der durch die beiden Seiten bestimmten Vierseitseite zugeordnet<sup>(16 Z)</sup> ist.*

**54. Pascal und Brianchon.** In Nr. 47 Z sahen wir, dafs die Diagonalepunkte des Kurvensechsecks  $S\Gamma AB S_1 \Delta$  in einer Gerade lagen. Da wir nun an die Stelle dieser sechs Punkte irgend sechs andere Punkte der Kurve setzen können<sup>(49)</sup>, so haben wir (vgl. 38 Z) allgemein:

*Dritter Sechseckssatz. Die drei Diagonalepunkte<sup>(36 Z)</sup> jedes einfachen Kurvensechsecks liegen in einer Gerade. (Pascalsche Gerade.)*

*Dritter Sechseckssatz. Die drei Diagonallinien jedes einfachen Büschelsechsecks gehen durch einen Punkt. (Brianchonscher Punkt.)*

*Anmerkung.* Dieser (linke) Lehrsatz des Pascal fafst unsere zweite Kurvenkonstruktion<sup>(47)</sup> aufserordentlich kurz zusammen und wird daher vielfach Anwendung finden. — Aus dem Pascalschen Sechseck kann man den Satz über das Kurvenfünfeck<sup>(55)</sup> ableiten, indem man zwei Ecken zusammenfallen läfst und an die Stelle der sie verbindenden Seite die Tangente setzt; auch die Sätze über das Viereck und Dreieck lassen sich auf diese Weise gewinnen (statt durch die in Nr. 56 und 57 gegebenen direkten Konstruktionen). In allen diesen Fällen wendet man den Pascal am bequemsten

an, indem man die sechs Ecken durch Ziffern, und zwar je zwei zusammenfallende Ecken durch zwei gleiche Ziffern, bezeichnet und nun aus dem Schema<sup>(36 Z)</sup> die Gegenseiten und ihre Schnittpunkte, die Diagonalepunkte, abliest und dabei als Verbindungslinie zweier zusammenfallenden Ecken die Tangente nimmt. — Zu bemerken ist noch, daß die Reihenfolge der sechs Ecken beliebig ist und daß es daher zu jedem Kurvensechseck mehrere (sechzig) Pascalsche Geraden giebt.

55

### 55. Kurvenfünfeck.

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, wenn vier Punkte und die Tangente in einem dieser Punkte gegeben sind.

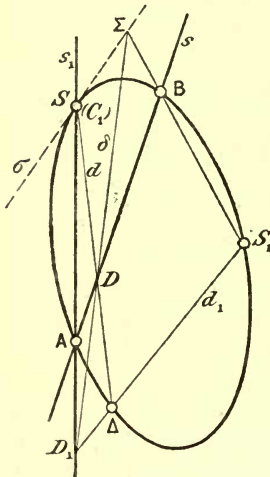


Fig. 45.

**Fünfeckssatz.** Der Punkt, in dem eine Seite eines einfachen Kurvenfünfecks die Tangente der gegenüberliegenden Ecke schneidet, und die beiden Schnittpunkte

Aufgabe: Einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu zeichnen, wenn vier Strahlen und der Berührungspunkt in einem dieser Strahlen gegeben sind.

Lösung: Sind uns die vier Punkte  $S, S_1, A, B$  und der Strahl  $\sigma$  des Punktes  $S$  gegeben, so haben wir die beiden Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  projektiv so auf einander zu beziehen, daß sich in den Punkten  $A$  und  $B$  homologe Strahlen schneiden<sup>(42)</sup> und daß der Strahl  $\sigma$  von  $S$  dem Strahl  $S_1, S$  entspricht<sup>(45)</sup>.

Stellen wir diese projektive Verwandtschaft durch die in Nr. 47 gegebene Konstruktion her, so erhalten wir statt des Kurvensechsecks  $S, \Gamma, A, B, S_1, \Delta$  das Kurvenfünfeck  $S, A, B, S_1, \Delta$  (Fig. 45), bei welchem die drei Punkte  $\Sigma, D, D_1$  in einer Geraden liegen. In Worten:

**Fünfeitssatz.** Die Gerade, welche eine Ecke eines einfachen Büschelfünfeits mit dem Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite verbindet, und die beiden Ver-

von je zwei unter den übrigen vier Seiten, die nicht aufeinander folgen, liegen in einer Gerade.

bindungslinien von je zwei unter den übrigen vier Ecken, die nicht aufeinander folgen, gehen durch einen Punkt.

Man findet<sup>(54 A)</sup> die Pascalsche Gerade des Fünfecks aus dem Schema  $\overline{1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5}$ .

Zur Übung<sup>(47 A)</sup>:  $S \ S_1 \ A_\infty \ B \ \sigma$ ;  $S \ S_1 \ A_\infty \ B_\infty \ \sigma$ ;  $S_\infty \ S_1 \ A \ B \ \sigma$ ;  $S_\infty \ S_1 \ A \ B_\infty \ \sigma$ ;  $S_\infty \ S_1 \ A_\infty \ B \ \sigma$ ;  $S_\infty \ S_1 \ A_\infty \ B \ \sigma$ .

### 56. Kurvenviereck.

56

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der drei Punkte und die Tangenten in zweien dieser Punkte gegeben sind.

Aufgabe: Einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu zeichnen, von dem drei Strahlen und die Berührungspunkte in zweien dieser Strahlen gegeben sind.

Lösung: Sind uns die drei Punkte  $S \ S_1 \ A$  und der Strahl  $\sigma$  des Punktes  $S$  und der Strahl  $\sigma_1$  des Punktes  $S_1$  gegeben, so haben wir die beiden Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  projektiv so aufeinander zu beziehen, daß sich im Punkte  $A$  zwei homologe Strahlen schneiden<sup>(42)</sup> und daß  $\sigma$  dem Strahl  $S_1 S$  und der Strahl  $S S_1$  dem Strahl  $\sigma_1$  entspricht<sup>(45)</sup>. Benutzen wir die in Nr. 48 gegebene Konstruktion, so erkennen wir, daß uns der dort konstruierte Schnittpunkt der Diagonallinien, den wir<sup>(48 Z)</sup> mit dem Buchstaben  $T$  bezeichnen wollten, durch die beiden Tangenten  $\sigma$  und  $\sigma_1$  bereits gegeben ist; daß wir also nur die Punkte  $D$  und  $D_1$  der Seiten  $A S_1$  und  $A S$  (Fig. 46), die mit  $T$  in einer Gerade liegen, aus  $S$  und  $S_1$  zu projizieren haben, um neue Kurvenpunkte  $\Delta$  zu erhalten.

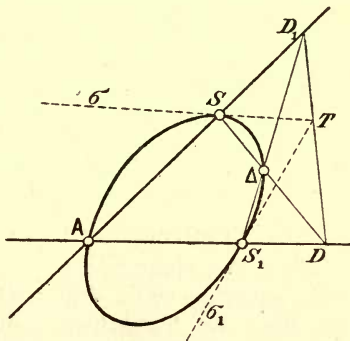


Fig. 46.

Der Vollständigkeit wegen sprechen wir auch diese

Konstruktion in Form eines Lehrsatzes aus, trotzdem das Ergebnis identisch ist mit Nr. 53. — Betrachten wir die vier Kurvenpunkte  $S A S_1 \Delta$ , indem wir ihnen eine bestimmte Reihenfolge beilegen, als die Ecken eines *einfachen* <sup>(16 A)</sup> Vierecks, so läßt sich die Konstruktion in Form eines Lehrsatzes so aussprechen:

*Viereckssatz.* Die beiden Punkte, in denen sich die Gegenseiten eines *einfachen* Kurvenvierecks schneiden, und der Punkt, in dem sich die Tangenten zweier Gegenecken schneiden, liegen in einer Gerade.

*Vierseitssatz.* Die beiden Geraden, die die Gegenecken eines *einfachen* Büschelvierecks verbinden, und die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier Gegenseiten verbindet, gehen durch einen Punkt.

Man findet <sup>(54 A)</sup> die Pascalsche Gerade des Vierecks durch das Schema  $\overline{1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4}$ .

<sup>z</sup> *Zusatz.* Drei Punkte  $S S_1 A$  und die Tangenten  $\sigma$  und  $\sigma_1$  in  $S$  und  $S_1$  können wir darstellen durch vier Punkte:  $S S_1 A$  und  $T$ , wenn wir den Schnittpunkt  $\sigma \sigma_1$  durch  $T$  bezeichnen. Wir haben also ein Stück weniger nötig, als wenn wir die Kurve als bestimmt ansehen durch fünf Punkte <sup>(49)</sup> oder durch vier Punkte und die Tangente des einen dieser Punkte <sup>(49 Z)</sup>.

*Wir wollen deswegen im folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes festgesetzt wird, unter den Worten: Eine Kurve ist gegeben, immer verstehen:  $S S_1 A$  und  $T$  sind gegeben;*

*und umgekehrt wollen wir die Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, als gelöst ansehen, wenn wir  $S S_1 A$  und  $T$  konstruiert haben.*

Zur Übung <sup>(47 A)</sup>:  $S S_1 A \sigma \parallel \sigma_1$ ,  $S S_1 A \infty \sigma \sigma_1$ ;  $S S_1 A \infty \sigma \parallel \sigma_1$ ;  $S \infty S_1 A \sigma \sigma_1$ ;  $S \infty S_1 A \infty \sigma \sigma_1$ ;  $S \infty S_1 \infty A \sigma \sigma_1$ .

57

### 57. Kurvendreieck.

Aufgabe: Von einer Kurve zweiter Ordnung sind drei Punkte und die Tangenten in zweien dieser Punkte gegeben; man soll die Tangente des dritten Punktes zeichnen.

Aufgabe: Von einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung sind drei Strahlen und die Berührungspunkte in zweien dieser Strahlen gegeben; man soll den Berührungspunkt des dritten Strahls zeichnen.



Lösung: Die Seiten  $AS_1$  und  $AS$  (Fig. 47) des gegebenen Kurvendreiecks  $AS S_1$  mögen die gegebenen Tangenten der Gegenecken  $S$  und  $S_1$  in den Punkten  $K$  und  $K_1$  schneiden. Die gesuchte Tangente des Kurvenpunktes  $A$  ist von  $AT$  durch  $S$  und  $S_1$  harmonisch getrennt<sup>(51z)</sup>. Den von  $AT$  durch  $S$  und  $S_1$  harmonisch getrennten Strahl können wir aber vermittelst des Vierecks  $SS_1KK_1$ , von dem  $A$  und  $T$  zwei Diagonalepunkte sind, finden, indem wir den dritten Diagonalepunkt  $K_2$ , den Schnittpunkt der Gegenseiten  $SS_1$  und  $KK_1$ , zeichnen.

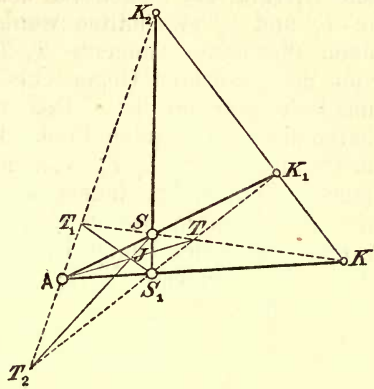


Fig. 47.

Die drei Punkte  $KK_1K_2$ , die nach unserer Konstruktion in einer Geraden liegen, sind die Punkte, in denen die Seiten unsers Kurvendreiecks die Tangenten der Gegenecken schneiden. Daher

**Dreieckssatz:** Die drei Punkte, in denen die Seiten eines Kurvendreiecks die Tangenten der Gegenecken schneiden, liegen in einer Geraden.

**Dreiseitssatz:** Die drei Geraden, welche die Ecken eines Büscheldreiecks mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, gehen durch einen Punkt.

Die Pascalsche Gerade des Kurvendreiecks erhält man<sup>(54 A)</sup>

aus dem Schema  $\overline{1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3}$ .

**58. Kurvendreiseit.**

**Aufgabe:** Von einer Kurve zweiter Ordnung sind drei Tangenten und die Berührungspunkte in zweien dieser Tangenten gegeben; man soll den Berührungspunkt der dritten Tangente zeichnen.

**Aufgabe:** Von einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung sind drei Berührungspunkte und die Strahlen durch zwei dieser Berührungspunkte gegeben; man soll den Strahl des dritten Berührungspunktes zeichnen.

58

Lösung: Die Tangenten der beiden gegebenen Punkte  $S$  und  $S_1$  (Fig. 47) mögen von der dritten gegebenen Tangente in  $T_1$  und  $T_2$  geschnitten werden. Die Seite  $S S_1$  schneidet dann die dritte Tangente  $T_1 T_2$  in einem Punkte  $K_2$ , der von der gesuchten Gegenecke  $A$  durch  $T_1$  und  $T_2$  <sup>(51)</sup> harmonisch getrennt ist. Den von  $K_2$  durch  $T_1$  und  $T_2$  harmonisch getrennten Punkt können wir aber mittelst des Vierecks  $S S_1 T_1 T_2$ , von dem  $T$  und  $K_2$  zwei Diagonale sind, finden, indem wir den dritten Diagonalepunkt  $J$ , den Schnittpunkt von  $S T_2$  und  $S_1 T_1$ , zeichnen; die Verbindungslinie der beiden Diagonalepunkte  $T$  und  $J$  schneidet dann die Tangente  $T_1 T_2$  in dem gesuchten Berührungspunkte  $A$  <sup>(24)</sup>.

Die drei Verbindungslinien  $S T_2$ ,  $S_1 T_1$  und  $T A$ , welche nach unserer Konstruktion durch *einen* Punkt ( $J$ ) gehen, sind die Geraden, welche die Ecken des gegebenen Kurvendreiseits mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden. Daher

**Dreieckssatz:** Die drei Geraden, welche die Ecken eines Kurvendreiseits mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, gehen durch einen Punkt.

**Dreieckssatz:** Die drei Punkte, in denen die Seiten eines Büscheldreiecks die Tangenten der Gegenecken schneiden, liegen in einer Gerade.

<sup>z</sup> *Zusatz.* Haben wir den Berührungspunkt der dritten Tangente gezeichnet, so können wir aus  $S S_1 A$  und  $T$  die durch die gegebenen Stücke bestimmte Kurve zeichnen <sup>(56 z)</sup>; die vorhergehende Konstruktion löst daher die

**Aufgabe:** Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der drei Tangenten und die Berührungspunkte in zweien dieser Tangenten gegeben sind.

**Aufgabe:** Einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu zeichnen, von dem drei Berührungspunkte und die Tangenten in zweien dieser Berührungspunkte gegeben sind.

<sup>59</sup> **59. Kurvenviereck und zugeordnetes Kurvendreiseit.** Sind  $\Delta A B \Gamma$  (Fig. 48) vier Kurvenpunkte und  $\delta$  die Tangente in  $\Delta$ , so wissen wir <sup>(53)</sup>, weil die Tangenten in  $\Delta$  und  $A$  sich in der der Vierecksseite  $\Delta A$  zugeordneten <sup>(16 z)</sup> Diagonallinie  $Q R$  schneiden müssen, daß die Tangente  $\alpha$  der Ecke  $A$  durch den Punkt  $A$  geht, in dem  $\delta$  von der Diagonallinie  $Q R$  geschnitten wird. In derselben Weise

ergibt sich, daß die Tangenten  $\beta$  und  $\gamma$  in  $B$  und  $\Gamma$  durch die Punkte  $B$  und  $C$  gehen müssen, in denen  $\delta$  von den Diagonallinien  $RP$  und  $PQ$  geschnitten wird.

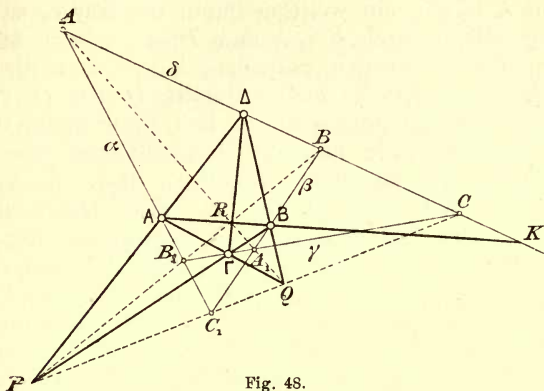


Fig. 48.

Betrachten wir das Kurvendreieck  $\Delta AB\Gamma$ , so wird<sup>(51)</sup> der Punkt  $K$ , in dem die Seite  $AB$  die Tangente  $\delta$  der Gegenecke  $\Delta$  schneidet, von dieser Gegenecke  $\Delta$  durch  $A$  und  $B$ , die Schnittpunkte von  $\delta$  mit den Tangenten in den beiden andern Ecken, harmonisch getrennt. Verbinden wir  $B$  mit diesen vier harmonischen Punkten  $\Delta K \cdot AB$ , so erhalten wir vier harmonische Strahlen, die die Diagonallinie  $QR$  in den vier harmonischen<sup>(21)</sup> Punkten  $QR \cdot AA_1$  schneiden, wenn wir mit  $A_1$  den Punkt bezeichnen, in dem die Tangente  $BB = \beta$  die Diagonallinie  $QR$  schneidet. Durch denselben, von  $A$  durch  $Q$  und  $R$  harmonisch getrennten Punkt  $A_1$  geht die Tangente  $\Gamma C = \gamma$ <sup>(53)</sup>. — Entsprechendes läßt sich für die Gegenecken  $BB_1$  und die Diagonalepunkte  $RP$  und schließlich für  $CC_1 \cdot PQ$  zeigen.

Nennen wir den Inbegriff der vier Tangenten  $\delta \alpha \beta \gamma$  das dem Kurvenviereck  $\Delta AB\Gamma$  zugeordnete Kurvenvierseit, so können wir das Ergebnis so ausdrücken:

*Jedes Kurvenviereck hat mit dem zugeordneten Kurvenvierseit das Diagonaldreieck gemeinsam; je zwei Gegenecken des Kurvenvierseits werden durch zwei Diagonalepunkte harmonisch getrennt.*

*Jedes Büschelvierseit hat mit dem zugeordneten Büschelviereck das Diagonaldreieck gemeinsam; je zwei Gegenseiten des Büschelvierecks werden durch zwei Diagonallinien harmonisch getrennt.*

60 60. **Identität von Punktreihe und Strahlenbüschel zweiter Ordnung.** Es seien  $S$  und  $S_1$  (Fig. 49) zwei beliebige Punkte einer Kurve und  $\sigma$  und  $\sigma_1$  ihre Tangenten. Ist dann  $A$  irgend ein weiterer Punkt der Kurve, so ist die Kurve gegeben durch  $SS_1A$  und  $T = \sigma\sigma_1$  <sup>(56 Z)</sup> und neue Kurvenpunkte  $\Delta$  werden gefunden, indem man die in den Seiten  $AS_1$  und  $AS$  liegenden Punkte  $D$  und  $D_1$ , die mit  $T$  in einer Geraden liegen, aus  $S$  und  $S_1$  projiziert <sup>(48 Z)</sup>.

Wiederholen wir nun die Betrachtungen von Nr. 49, so gelangen wir zu einem wichtigen Satz. — Von dem Viereck  $SS_1A\Delta$  sind  $D$  und  $D_1$  zwei Diagonalpunkte. Bezeichnen wir den dritten, den Schnittpunkt der Gegenseiten  $SS_1$  und  $A\Delta$ , durch  $R$ , so läßt sich zeigen, daß, während die Diagonallinie  $DD_1$  sich um den Punkt  $T$

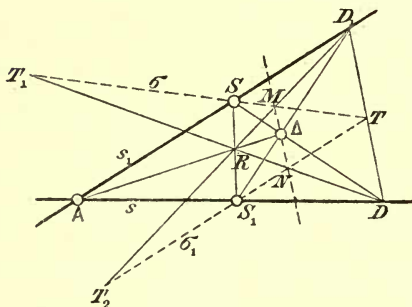


Fig. 49.

dreht, auch die beiden andern Diagonallinien  $DR$  und  $D_1R$  sich um feste Punkte drehen.

Weil die beiden Gegenseiten  $S\Delta$  und  $S_1A$ , die sich im Diagonalpunkt  $D$  schneiden, durch die beiden andern Diagonalpunkte  $D_1$  und  $R$  harmonisch getrennt werden <sup>(24<sub>2</sub>)</sup>, so geht

$DR$  durch den von  $T$  durch  $S$  und  $AS_1$  harmonisch getrennten <sup>(21<sub>2</sub>)</sup>, festen <sup>(20<sub>2</sub>)</sup> Punkt  $T_1$ ; ebenso geht  $D_1R$  durch den von  $T$  durch  $S_1$  und  $AS$  harmonisch getrennten, festen Punkt  $T_2$ .

Weil ferner <sup>(53)</sup> die Tangenten in  $S$  und  $\Delta$ , da die Seite  $S\Delta$  durch den Diagonalpunkt  $D$  geht, sich auf der Diagonallinie  $D_1R$  schneiden müssen, so geht die Tangente von  $\Delta$  durch den Punkt  $M$ , in welchem die Tangente  $ST$  von  $D_1R$  geschnitten wird. Aus denselben Gründen geht die Tangente von  $\Delta$  durch den Punkt  $N$ , in dem die Tangente  $S_1T$  von der Diagonallinie  $DR$  geschnitten wird. Bewegt sich nun der Punkt  $D$  in  $AS_1$ , so haben wir <sup>(37 A)</sup>:

$$M [T_2] \overline{\wedge} D_1 [T] \overline{\wedge} D [T_1] \overline{\wedge} N.$$

Die Punkte  $M$  und  $N$  also, in denen die Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung zwei beliebige  $\sigma$  und  $\sigma_1$  unter

ihnen schneiden, sind projektiv aufeinander bezogen; die Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung lassen sich daher auffassen als die Verbindungslinien homologer Punkte zweier projektiven geraden Punktreihen. Den Inbegriff dieser Verbindungslinien aber haben wir einen krummen Strahlenbüschel genannt<sup>(42)</sup>, so dafs wir haben:

*Die Tangenten einer krummen Punktreihe bilden einen krummen Strahlenbüschel.*

*Die Berührungspunkte der Strahlen eines krummen Büschels bilden eine krumme Punktreihe.*

Was wir demnach von den Strahlen eines krummen Büschels bewiesen haben, gilt auch von den Tangenten einer krummen Punktreihe und umgekehrt, so dafs wir in Zukunft statt von einem krummen Strahlenbüschel von einem *Tangentenbüschel* sprechen und auf ihn die bisher rechts gestellten Sätze anwenden können; von einem krummen Büschel sagen wir, dafs seine Strahlen eine krumme Punktreihe *umhüllen*. —

Aus unserm Beweise (Fig. 49) ergibt sich noch die Kette perspektiver Glieder

$$A(\Delta) \overline{\wedge} R [T_2] \overline{\wedge} M.$$

In Worten: *Wenn wir dem Strahle des beliebigen Kurvenpunktes A, der den Kurvenpunkt  $\Delta$  projiziert, den Punkt der beliebigen Tangente  $\sigma$  zuordnen, in dem sie von der Tangente  $\delta$  des Kurvenpunktes  $\Delta$  geschnitten wird, so ist der Strahlenbüschel des Kurvenpunktes projektiv auf die Punktreihe der Tangente bezogen.*

*Zusatz.* Aus den vielen neuen Sätzen, die sich mit  $z$  einem Schlage daraus ergeben, dafs die rechts gestellten Sätze auch Aussagen über krumme Punktreihen enthalten, heben wir vorläufig nur den folgenden hervor, der sich aus Nr. 49 ergibt. Während wir bisher nur wufsten, dafs eine Kurve bestimmt ist durch 5 Punkte; 4 Punkte und 1 Tangente; 3 Punkte und 2 Tangenten können wir jetzt hinzufügen: durch 2 Punkte und 3 Tangenten; 1 Punkt und 4 Tangenten; 5 Tangenten. (Der Übersichtlichkeit wegen ist bei dieser Aufzählung nicht überall die Bedingung hinzugefügt, dafs Punkte und Tangenten, so weit sie paarweise auftreten, in einander fallen müssen).

## 61. Kurvenvierseit.

61

Aufgabe: Von einer Kurve sind vier Tangenten und der Berührungspunkt in einer dieser Tangenten

gegeben; man soll die Berührungspunkte der übrigen Tangenten zeichnen.

Lösung: Das Diagonaldreieck  $BB_1R$  (Fig. 50) des gegebenen Kurvenvierseits  $\sigma\sigma_1\alpha\beta$  ist zugleich<sup>(59)</sup> das Diagonaldreieck des gesuchten Kurvenvierecks  $SS_1AB$ . Da nun die Tangente  $\sigma$  des gegebenen Punktes  $S$  und die

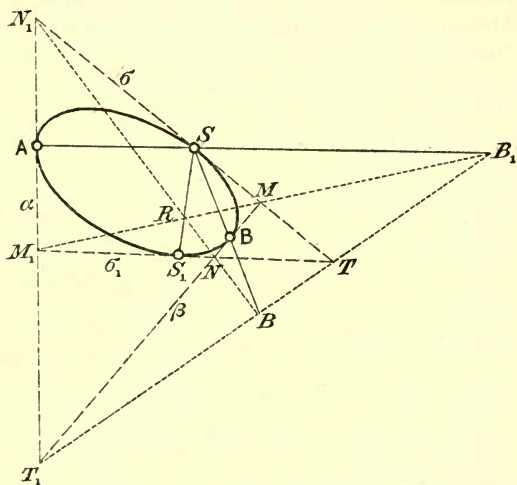


Fig. 50.

Tangente des gesuchten Punktes  $S_1$  sich auf der Diagonallinie  $BB_1$  schneiden, so muß die Seite  $SS_1$  durch den dritten Diagonalpunkt  $R$  gehen<sup>(53)</sup>. Wir erhalten also  $S_1$  mittelst der Gerade  $SR$ . — In ähnlicher Weise findet man die übrigen Berührungspunkte. —

Haben wir in der angegebenen Weise die Berührungspunkte der Tangenten  $\sigma_1$  und  $\alpha$  gezeichnet, so können wir aus  $SS_1A$  und  $T$  die durch die gegebenen Stücke bestimmte Kurve zeichnen<sup>(56 z)</sup>; die vorhergehende Konstruktion löst daher die

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der vier Tangenten und der Berührungspunkt in der einen dieser Tangenten gegeben ist.

In Zeichen:  $S\sigma\sigma_1\alpha\beta$ .

z Zusatz.\* In Nr. 43 zeigten wir, daß jeder Schnitt eines Kreiskegels eine krumme Punktreihe ist. Wir kehren zu

dem Beweise zurück, um ihm eine im folgenden benutzte Bemerkung hinzuzufügen.

Wir wählen<sup>(43)</sup> zwei beliebige Punkte  $S$  und  $S_1$  des Kreises zu Mittelpunkten zweier Strahlenbüschel  $abc\dots$  und  $a_1b_1c_1\dots$ , die wir mittelst der Kreislinie projektiv aufeinander bezogen; die Ebenen  $\alpha\beta\gamma\dots$  und  $\alpha_1\beta_1\gamma_1\dots$ , die diese Strahlenbüschel aus den durch  $S$  und  $S_1$  gehenden Kegelseiten  $s$  und  $s_1$  projizierten, schnitten dann jede Ebene  $\varepsilon$  in zwei projektiven Strahlenbüscheln  $a'b'c'\dots \wedge a_1'b_1'c_1'\dots$ . Wir richten jetzt unser Augenmerk auf die Kreistangente  $m_1$  in  $S_1$ , die dem Strahl  $SS_1 = m$  entspricht<sup>(43)</sup>; die Ebene  $\mu_1$ , welche  $m_1$  aus der Kegelseite  $s_1$  projiziert, schneidet  $\varepsilon$  in dem Strahl  $m_1'$ , der dem Strahle  $m' = S'S_1'$  entspricht;  $m_1'$  ist daher<sup>(46)</sup> die Tangente der in  $\varepsilon$  liegenden krummen Punktreihe. Da  $S$  ein beliebiger Punkt des Kreises ist, so haben wir: Die Projektion jeder Kreistangente ist eine Tangente der in  $\varepsilon$  liegenden krummen Punktreihe. —

Mit Hülfe dieser Bemerkung können wir nun die Umkehrung von Nr. 43 beweisen, also den

Lehrsatz: Jede krumme Punktreihe ist ein Kegelschnitt oder

Krumme Punktreihe und Kegelschnitt sind identische Linien.

Die krumme Punktreihe, von der wir ausgehen, wollen wir durch  $S^2$  bezeichnen und die Ebene, in der  $S^2$  liegt, durch  $\varepsilon$ . Ist  $a$  eine beliebige Tangente von  $S^2$  und  $A$  ihr Berührungspunkt, so legen wir durch  $a$  eine beliebige Ebene  $\delta$  und zeichnen in dieser irgend einen Kreis, der die Gerade  $a$  in  $A$  berührt. Sind nun  $bcd$  irgend drei weitere Tangenten von  $S^2$ , die  $a$  in  $BCD$  schneiden, so ziehen wir von  $BCD$  in  $\delta$  die drei Tangenten  $b_1c_1d_1$  an den Kreis. Die drei Ebenen  $bb_1, cc_1, dd_1$  gehen durch einen Punkt  $K$ , und der Kegel, welcher den Kreis aus  $K$  projiziert, schneidet, wie wir zeigen wollen, die Ebene  $\varepsilon$  in  $S^2$ . Nach Nr. 43 schneidet der Kreiskegel die Ebene  $\varepsilon$  in einer krummen Punktreihe. Von dieser krummen Punktreihe, die wir zunächst  $S_1^2$  nennen wollen, sind  $bcd$  Tangenten, als Projektionen der Kreistangenten  $b_1c_1d_1$ ; außerdem ist  $a$  eine Tangente und  $A$  ein Punkt von  $S_1^2$ . Die beiden krummen Punktreihen  $S^2$  und  $S_1^2$  haben also vier Tangenten und den

Berührungspunkt der einen dieser Tangenten gemeinsam und sind daher<sup>(60 Z)</sup> identisch.

62 **62. Kurvenfünffseit.**

Aufgabe: Von einer Kurve sind fünf Tangenten gegeben, man soll die Berührungspunkte der Tangenten finden.

Lösung: Um die Berührungspunkte  $S$  und  $S_1$  von  $\sigma$  und  $\sigma_1$  zu finden, betrachten wir die Kurvenvierseite  $\sigma\sigma_1\alpha\beta$  und  $\sigma\sigma_1\alpha\gamma$  und zeichnen in jedem den Diagonalepunkt, der der Ecke  $\sigma\sigma_1$  zugeordnet ist<sup>(16 Z)</sup>, vermittelst des Schemas  $\underline{\sigma\alpha}\ \underline{\sigma_1\beta}$  und des Schemas  $\underline{\sigma\alpha}\ \underline{\sigma_1\gamma}$ . Die Gerade, welche die in beiden Vierseiten gefundenen Diagonalepunkte  $R$  und  $R_1$  verbindet, schneidet  $\sigma$  und  $\sigma_1$  in den gesuchten Punkten  $S$  und  $S_1$ <sup>(53)</sup>. —

Haben wir in der angegebenen Weise die Berührungspunkte  $SS_1A$  gezeichnet, so können wir aus  $SS_1A$  und  $T$  die durch die gegebenen Stücke bestimmte Kurve zeichnen<sup>(66 Z)</sup>; die vorhergehende Konstruktion löst daher die

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der fünf Tangenten gegeben sind.

z *Zusatz.* Die Aufgabe läßt sich noch auf eine andere Weise lösen. Da wir jetzt<sup>(60)</sup> wissen, daß das Büschelfünffseit<sup>(55)</sup> identisch ist mit dem Kurvenfünffseit, so läßt sich der Berührungspunkt z. B. der Tangente  $\sigma$  nach dem Schema

$\overline{\sigma\sigma}\ \overline{\alpha\beta}\ \overline{\gamma\delta}$  finden, indem man den Schnittpunkt der Verbindungslinien  $(\sigma\alpha) \cdot (\gamma\delta)$  und  $(\alpha\beta) \cdot (\sigma\delta)$  mit dem Schnittpunkt  $\beta\gamma$  verbindet.

## § 5. Die gerade Involution.

63 **63. Involution.** In Nr. 38 haben wir eine Projektivität<sup>(37.1)</sup> betrachtet, in der ein Element seinem zugeordneten zweifach entspricht. Diese besondere Projektivität ist für uns ebenso wichtig wie die allgemeine; wir führen daher für sie einen neuen Namen ein durch die

1. Definition: *Eine Projektivität, in der ein Element seinem zugeordneten zweifach entspricht, heißt eine Involution.*



Der Fundamentalsatz<sup>(38)</sup> läßt sich dann so fassen:

2. Lehrsatz: *In einer Involution entspricht jedes Element seinem zugeordneten zweifach.* —

Zwei Grundgebilde, die eine Involution bilden, heißen involutorisch liegend oder kurz involutorisch. Den Begriff der involutorischen Lage kann man ausdehnen auf zwei *ungleichartige* Grundgebilde, z. B. auf eine Punktreihe  $s$  und einen Strahlenbüschel  $S$ . Ist die projektive Verwandtschaft von  $s$  und  $S$  durch  $ABC \overline{\wedge} abc$  bestimmt<sup>(33a)</sup> und bezeichnen wir die Punkte, in denen  $s$  von  $abc$  geschnitten wird, durch  $A_1 B_1 C_1$ , so sind durch  $ABC \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1$  zwei projektive Punktreihen in  $s$  bestimmt. Haben diese involutorische Lage, so sagen wir auch von der Punktreihe  $ABC \dots$  und dem Strahlenbüschel  $abc \dots$ , daß sie involutorische Lage haben:

3. Definition. Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel liegen involutorisch, wenn die Punktreihe und der Schnitt<sup>(6)</sup> ihres Trägers mit dem Strahlenbüschel involutorische Lage haben. —

Statt daß man in Zeichen die involutorische Verwandtschaft zweier Grundgebilde ausdrückt durch  $AA_1 CD \dots \overline{\wedge} A_1 A C_1 D_1 \dots$ <sup>(38)</sup>, spricht man auch häufig von der Involution  $AA_1 . CC_1 . DD_1 \dots$  und nennt zwei homologe Elemente, z. B.  $AA_1$ , ein *Elementenpaar* der Involution und zwei solche Elementenpaare, z. B.  $AA_1 . CC_1$ , einen *Wurf* der Involution. — Die allgemeine projektive Verwandtschaft zweier Grundgebilde ist bestimmt durch die willkürliche Annahme der sechs Elemente  $ABC A_1 B_1 C_1$ <sup>(33a)</sup>; da bei der involutorischen Verwandtschaft der Punkt  $B$  in  $A_1$  und  $B_1$  in  $A$  fällt<sup>(38)</sup>, so kann man nur vier Elemente  $AA_1 CC_1$  willkürlich annehmen. Um die Zusammengehörigkeit der Elemente kenntlich zu machen, sagt man, daß die involutorische Verwandtschaft durch den Wurf<sup>(10)</sup>  $AA_1 . CC_1$  bestimmt ist. — Da eine Involution aus zwei projektiven Grundgebilden besteht, so ergibt sich<sup>(37a)</sup>, daß eine Involution, die *ein* Ordnungselement hat, noch ein zweites Ordnungselement hat. —

Um das, was sich uns über die Involution ergeben hat, für die Anwendung in knapper Form bereit zu haben, sprechen wir das Vorstehende noch einmal in kurzen Sätzen

aus, indem wir die Definition in einer Fassung wiederholen, die auch für ungleichartige Gebilde gültig ist. Dabei wollen wir, trotzdem es nach der Entstehung der Involution eine Tautologie ist, besonders aussprechen, daß die Elemente eines involutorischen Grundgebildes und die ihnen involutorisch zugeordneten projektiv sind.

4. Zwei projektive Grundgebilde liegen involutorisch (bilden eine Involution), wenn ein Element seinem homologen zweifach entspricht.

In Zeichen: Wenn  $AA_1, CD \dots \overline{\wedge} A_1A, C_1D_1 \dots$  ist, so bilden  $AA_1, CC_1, DD_1 \dots$  eine Involution.

5. Eine Involution ist durch einen Wurf bestimmt.

6. Eine Involution, die ein Ordnungselement hat, hat noch ein zweites Ordnungselement.

7. Die Elemente eines Grundgebildes und die ihnen involutorisch zugeordneten sind einander projektiv. —

Bezeichnen wir die Ordnungselemente einer Involution durch  $P$  und  $Q$  und irgend ein weiteres Elementenpaar durch  $AA_1$ , so ist  $PQA_1A \overline{\wedge} PQA_1A$ ; folglich<sup>(40a)</sup> ist  $PQ.AA_1$  ein harmonischer Wurf. In Worten:

8. Hat eine Involution zwei Ordnungselemente, so wird jedes Elementenpaar durch die beiden Ordnungselemente harmonisch getrennt.

A Anmerkung. Eine Involution kann nicht mehr als zwei Ordnungselemente haben; denn sonst entspräche jedes Element sich selbst<sup>(33a)</sup>.

64 64. Die Vierecksinvolution. Sind  $AB\Gamma$  (Fig. 51) die

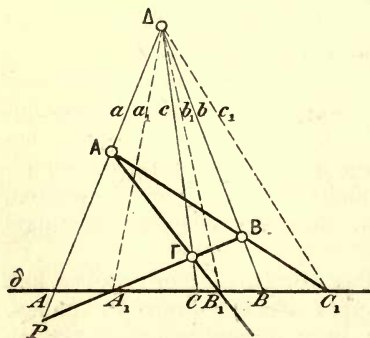


Fig. 51.

Ecken eines Dreiecks und  $A_1B_1C_1$  drei Punkte in den Gegenseiten, die in einer Gerade  $\delta$  liegen, so werden, wie bewiesen werden soll, aus jedem Punkte  $\Delta$  die drei Ecken und die Punkte in den Gegenseiten durch Strahlenpaare einer Involution  $\Delta(AA_1.BB_1.\Gamma C_1)$  projiziert.

Schneiden die drei Strahlen  $\Delta(AB\Gamma)$  die Gerade  $\delta$

in  $ABC$ , so ist, wenn wir noch den Schnittpunkt von  $\Delta A$  und  $B\Gamma$  durch  $P$  bezeichnen <sup>(37 A)</sup>,

$$AA_1 BC[\Delta] \overline{\wedge} PA_1 B\Gamma [A] \overline{\wedge} AA_1 C_1 B_1 \overline{\wedge} A_1 AB_1 C_1.$$

Es bilden daher <sup>(63a)</sup>  $AA_1 . BB_1 . CC_1$  und mithin auch  $\Delta(AA_1 . BB_1 . \Gamma C_1)$  oder  $a a_1 . b b_1 . c c_1$  eine Involution.

1. **Lehrsatz:** *Die Ecken eines Dreiecks und drei Punkte der Gegenseiten, die in einer Gerade liegen, werden aus jedem Punkte durch Strahlenpaare einer Involution projiziert.* —

Da eine Involution durch zwei Strahlenpaare bestimmt ist <sup>(63a)</sup>, so gilt auch die

2. **Umkehrung:** *Den drei Strahlen einer Involution, die durch die Ecken eines Dreiecks gehen, sind drei Strahlen homolog, die die Gegenseiten in drei Punkten schneiden, die in einer Gerade liegen.*

**Zusatz.** Der Inhalt unsers Lehrsatzes läßt sich noch <sup>z</sup> in anderer Form wiedergeben. — Der Punkt  $\Delta$  bildet mit den Ecken des Dreiecks  $AB\Gamma$  ein Viereck (Fig. 51), dessen Gegenseiten die Gerade  $\delta$  in den Punktpaaren der Involution  $AA_1 . BB_1 . CC_1$  schneiden,

und die Gerade  $\delta$  bildet mit den Seiten des Dreiecks ein Vierseit, dessen Gegenecken  $AA_1 . BB_1 . \Gamma C_1$  aus  $\Delta$  durch die Strahlenpaare der Involution  $a a_1 . b b_1 . c c_1$  projiziert werden.

Wir können daher unserm Satze die folgenden beiden Formen geben:

**Vierecksinvolution.** *Die Punkte, in denen eine beliebige Gerade durch die Gegenseiten eines Vierecks geschnitten wird, sind Punktpaare einer Involution.*

**Vierseitsinvolution.** *Die Strahlen, durch welche die Gegenecken eines Vierseits aus einem beliebigen Punkte projiziert werden, sind Strahlenpaare einer Involution.*

**Anmerkung.** Das Wort Involution wird im engern (und <sup>A</sup> ursprünglichen) Sinn für den Inbegriff der drei Punktpaare gebraucht, in denen eine beliebige Gerade von den Gegenseiten eines Vierecks geschnitten wird. — Die Verallgemeinerung des Satzes geben wir in Nr. 170.

**65. Involutorische Paarung der Punkte einer Gerade.** Mit Hilfe des eben <sup>(64 Z)</sup> gewonnenen Viereckssatzes lösen wir die

Aufgabe: Die Punkte einer Gerade involutorisch zu paaren.

Aufgabe: Die Strahlen eines Punktes involutorisch zu paaren.

Lösung: Ist der Wurf, der die Involution des Trägers  $s$  bestimmt<sup>(63a)</sup>,  $AA_1.BB_1$ , so läßt sich die Aufgabe durch ein Viereck mit drei festen und drei beweglichen Seiten in folgender Weise lösen.

Die feste durch  $A$  (Fig. 52) gelegte Gerade möge von den festen durch  $B$  und  $B_1$  gelegten Geraden in  $S$  und  $S_1$  geschnitten werden. Um nun zum Punkte  $C$  den homologen  $C_1$  zu finden, projizieren wir  $C$  aus  $S$  auf  $S_1B_1$  und den gefundenen Punkt  $D$  aus  $A_1$  auf  $SB$  und schließlich den gefundenen Punkt  $D_1$  aus  $S_1$  auf den Träger  $s$ . Die Punkte  $C$  und  $C_1$  bilden dann ein Punktpaar<sup>(64 z)</sup> der durch  $AA_1.BB_1$  bestimmten Involution. —

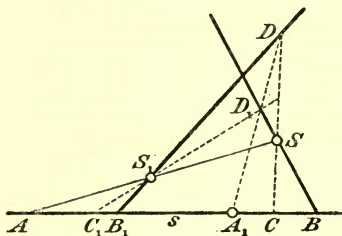


Fig. 52.

Unsere Konstruktion (und Figur) ist im Grunde eine Wiederholung der in Nr. 38 (Fig. 33) gegebenen Konstruktion mit der Vereinfachung, daß die dort zum Beweise der involutorischen Lage notwendigen Linien weggelassen sind. Das Viereck  $SS_1DD_1$  mit den drei festen und drei beweglichen Seiten hieß damals  $A_1B\Delta A_1$ . —

Identisch ist unsere Figur mit der Figur 46. Der (hier nicht benutzte) Schnittpunkt  $\Delta$  der projektiven Strahlenbüschel  $SD$  und  $S_1D_1$  beschreibt, wenn  $C$  sich in  $s$  bewegt, eine Kurve, die durch die Ecken des durch die drei festen Geraden gebildeten Dreiseits geht und die Geraden  $A_1S$  und  $A_1S_1$  berührt.

<sup>z</sup> *Zusatz.* Wiederholen wir unsere Konstruktion für den Fall, daß  $A$  und  $A_1$  zusammenfallen in  $P$  und  $B$  und  $B_1$  in  $Q$ , so erkennen wir, daß  $C$  und  $C_1$  durch  $P$  und  $Q$  harmonisch getrennt werden<sup>(24z)</sup>. Da sie perspektiv liegen zu den Strahlenbüscheln  $SD$  und  $S_1D_1$ , die durch  $A_1$  projektiv auf einander bezogen sind, so können wir sagen, indem wir das Ergebnis auf beliebige Grundgebilde übertragen<sup>(33)</sup>:

Die Elemente eines Grundgebildes und die von ihnen durch zwei feste Elemente harmonisch getrennten sind einander projektiv. Die festen Elemente sind die Ordnungselemente der von den einander harmonisch zugeordneten Elementen gebildeten Involution.

In Zeichen: Sind  $PQ \cdot A A_1, PQ \cdot B B_1$  u. s. w. harmonische Würfe, so folgt

$$PQ \cdot A B A_1 \dots \overline{\wedge} PQ \cdot A_1 B_1 A \dots$$

**66. Ordnungspunkte einer Involution.** Sind  $A A_1$ <sup>66</sup> und  $B B_1$  irgend zwei Punktpaare einer in dem Träger  $s$  liegenden Involution und  $X X_1$  irgend ein weiteres Punktpaar, so wird, weil<sup>(63<sub>2</sub>)</sup>  $A A_1 B X \overline{\wedge} A_1 A B_1 X_1$  ist, der Punkt  $X_1$  den Träger  $s$  im Sinn<sup>(6)</sup>  $A_1 A B_1$  durchlaufen, wenn der Punkt  $X$  den Träger im Sinn  $A A_1 B$  durchläuft<sup>(30<sub>4</sub>)</sup>. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

I. Der Wurf  $A A_1 \cdot B B_1$  ist elliptisch, d. h.<sup>(10<sub>2</sub>)</sup> die beiden Punktpaare trennen einander.

In diesem Fall ist der Sinn  $A_1 A B_1$  derselbe wie der Sinn  $A A_1 B$  (siehe Fig. 53). Wenn also  $X$  die Strecken

$$A \cdot B_1; B_1 A_1; A_1 B; B A$$

durchläuft, durchläuft  $X_1$  die Strecken

$$A_1 B; B A; A \cdot B_1; B_1 A_1.$$

Es wird daher keine Strecke von beiden Punkten gleichzeitig durchlaufen;  $X$  fällt also in keinem Punkt mit  $X_1$  zusammen, d. h.<sup>(37<sub>2</sub>)</sup> die Involution hat keinen Ordnungspunkt:

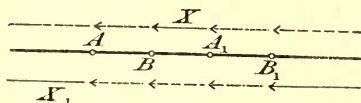


Fig. 53.

1. Eine Involution hat keinen Ordnungspunkt, wenn einer ihrer Würfe elliptisch ist.

II. Der Wurf  $A A_1 \cdot B B_1$  ist hyperbolisch; d. h.<sup>(10<sub>2</sub>)</sup> die beiden Punktpaare trennen einander nicht.

In diesem Fall ist der Sinn  $A_1 A B_1$  dem Sinn  $A A_1 B$  (siehe Fig. 54) entgegengesetzt. Wenn also  $X$  die Strecken

$$A A_1; A_1 B; B \cdot B_1; B_1 A$$

durchläuft, durchläuft  $X_1$  die Strecken

$$A_1 A; A B_1; B_1 \cdot B; B A_1.$$

Da die Strecke  $AA_1$  sowohl wie  $B'B_1$  gleichzeitig und in entgegengesetztem Sinn durchlaufen wird, so giebt es auf der Strecke  $AA_1$  und auf der Strecke  $B'B_1$  je einen Punkt, in dem  $X$  und  $X_1$  zusammenfallen, einen Ordnungspunkt:

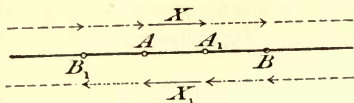


Fig. 54.

2. Eine Involution hat zwei Ordnungspunkte, wenn einer ihrer Würfe hyperbolisch ist. —

67. **Parabolischer Wurf.** Halten wir von den beiden Punktpaaren  $AA_1$ ,  $BB_1$ , die eine Involution bestimmen<sup>(63a)</sup>, drei Punkte  $AA_1B$  fest und lassen  $B_1$  den Träger durchlaufen, so entspricht jeder Lage von  $B_1$  eine bestimmte Involution. Nehmen wir an, daß  $B$  auf  $AA_1$  liegt, so sehen wir: So lange  $B_1$  sich auf der Strecke  $AA_1$  befindet, hat die Involution zwei Ordnungspunkte<sup>(66a)</sup>; liegt  $B_1$  auf  $A'A_1$ <sup>(6)</sup>, so hat die Involution keinen Ordnungspunkt<sup>(66i)</sup>. Von Interesse ist nun noch der Augenblick des Übergangs, wo  $B_1$  sich in  $A_1$  (oder in  $A$ ) befindet. In diesem Fall ist der Wurf  $AA_1$ ,  $BB_1$  weder elliptisch noch hyperbolisch. Wir nennen einen solchen Wurf, dessen beide Punktpaare einen Punkt ( $A_1$ ) gemeinsam haben, *parabolisch*. Suchen wir für diese Lage der Punkte nach Nr. 65 zu einem beliebigen Punkte  $C$  den homologen  $C_1$ , so finden wir, daß  $C_1$  in  $A_1$  ( $B_1$ ) fällt; es entspricht daher jedem Punkte  $C$  der Punkt  $A_1$ , d. h. jeder Wurf ist parabolisch. Nennen wir den Punkt  $A_1$ , der allen Punkten (auch sich selbst) entspricht, einen Ordnungspunkt, so können wir den Satz aussprechen:

*Eine Involution hat einen Ordnungspunkt, wenn einer ihrer Würfe parabolisch ist.*

68. **Eine Involution und ihre Würfe.** Für die Ergebnisse von Nr. 66 und 67, die sich auf alle Grundgebilde übertragen lassen<sup>(83)</sup>, finden wir einen kurzen Ausdruck, wenn wir noch die folgenden Bezeichnungen einführen:

1. Definition: Eine gerade Involution heißt elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, je nachdem sie *kein* Ordnungselement, *zwei* Ordnungselemente oder *ein* Ordnungselement hat.

Da sich auch noch ergibt, daß jeder Wurf z. B. einer elliptischen Involution elliptisch sein muß, so können wir zusammenfassend sagen:

2. *Eine gerade Involution und ihre Würfe sind gleichnamig.*

## § 6. Projektive Verwandtschaft krummer Grundgebilde.

### 69. Krumme Würfe.

69

Ist  $S$  ein beliebiger Punkt einer Kurve zweiter Ordnung, so schneidet jeder Strahl von  $S$  die Kurve noch in einem zweiten Punkte<sup>(52)</sup>. Bezeichnen wir nun die Punkte, in denen die Strahlen  $abc$  und  $x$  von  $S$  die Kurve zum zweiten Male schneiden, durch  $AB\Gamma$  und  $X$ , so wird, wenn der Strahl  $x$  sich um  $S$  im Sinn  $abc$ <sup>(4)</sup> dreht, der Punkt  $X$  von  $A$  nach  $B$  gelangen, ohne mit  $\Gamma$  zusammengefallen zu sein; dreht sich dagegen  $x$  im entgegengesetzten Sinn, so gelangt  $X$  von  $A$  nach  $\Gamma$  und dann erst nach  $B$ :

1. Ein Punkt  $X$ , der eine krumme Punktreihe beschreibt, kann auf zwei Weisen von einem Punkte  $A$  nach einem Punkte  $B$  gelangen, einmal indem er den Punkt  $\Gamma$  überschreitet, das andere Mal indem er den Punkt  $\Gamma$  nicht überschreitet.

Wir wollen auch hier wieder den ersten Bewegungssinn

Ist  $s$  ein beliebiger Strahl eines Büschels zweiter Ordnung, so geht durch jeden Punkt von  $s$  noch ein zweiter Strahl<sup>(52)</sup>. Bezeichnen wir nun die zweiten Strahlen des Büschels, welche durch die Punkte  $ABC$  und  $X$  von  $s$  gehen, durch  $\alpha\beta\gamma$  und  $x$ , so wird, wenn der Punkt  $X$  sich auf  $s$  im Sinn  $ABC$ <sup>(5)</sup> bewegt, der Strahl  $x$  von  $\alpha$  nach  $\beta$  gelangen, ohne mit  $\gamma$  zusammengefallen zu sein; bewegt sich dagegen  $X$  im entgegengesetzten Sinn, so gelangt  $x$  von  $\alpha$  nach  $\gamma$  und dann erst nach  $\beta$ :

1. Ein Strahl  $x$ , der einen krummen Strahlenbüschel beschreibt, kann auf zwei Weisen von einem Strahl  $\alpha$  nach einem Strahl  $\beta$  gelangen, einmal indem er den Strahl  $\gamma$  überschreitet, das andere Mal indem er den Strahl  $\gamma$  nicht überschreitet.

Wir wollen auch hier wieder den ersten Bewegungssinn

durch  $A \Gamma B$ , den zweiten durch  $A B \Gamma$  bezeichnen. —

Setzen wir nun fest, daß der Punkt  $X$  die krumme Punktreihe im Sinne  $A B \Gamma$  beschreibt, so ist damit eine bestimmte *Reihenfolge* der Kurvenpunkte festgelegt. Ist  $\Delta$  irgend ein vierter Punkt der Kurve, so kann die Reihenfolge der vier Punkte sein:  $A \Delta B \Gamma$ ,  $A B \Delta \Gamma$  oder  $A B \Gamma \Delta$ . Fassen wir die vier Punkte zu zwei Punktpaaren zusammen, deren Inbegriff wir zum Unterschied von einem geraden Punktwurf<sup>(10.)</sup> einen *krummen Punktwurf* nennen, so kann in dem Wurf  $A B . \Gamma \Delta$ , je nach der Lage des Punktes  $\Delta$ , das Punktpaar  $A B$  das Punktpaar  $\Gamma \Delta$  trennen (bei der Reihenfolge  $A \Delta B \Gamma$ ) oder nicht trennen (bei der Reihenfolge  $A B \Delta \Gamma$  und bei der Reihenfolge  $A B \Gamma \Delta$ ). Berücksichtigen wir auch noch den Fall, daß  $\Delta$  in  $A$  (oder in  $B$ ) fällt, so können wir für den krummen Punktwurf, wie wir es für den geraden gethan haben<sup>(10 u. 67)</sup>, die drei Definitionen aufstellen:

2. Ein *krummer Punktwurf* heißt *elliptisch*, wenn seine *Punktpaare* einander trennen; *hyperbolisch*, wenn seine *Punktpaare* einander nicht trennen; *parabolisch*, wenn die beiden *Punktpaare* einen Punkt *gemeinsam* haben. —

durch  $\alpha \gamma \beta$ , den zweiten durch  $\alpha \beta \gamma$  bezeichnen. —

Setzen wir nun fest, daß der Strahl  $x$  den krummen Strahlenbüschel im Sinne  $\alpha \beta \gamma$  beschreibt, so ist damit eine bestimmte *Reihenfolge* der Büschelstrahlen festgelegt. Ist  $\delta$  irgend ein vierter Strahl des Büschels, so kann die Reihenfolge der vier Strahlen sein:  $\alpha \delta \beta \gamma$ ,  $\alpha \beta \delta \gamma$  oder  $\alpha \beta \gamma \delta$ . Fassen wir die vier Strahlen zu zwei Strahlenpaaren zusammen, deren Inbegriff wir zum Unterschied von einem geraden<sup>(11)</sup> Strahlenwurf einen *krummen Strahlenwurf* nennen, so kann in dem Wurf  $\alpha \beta . \gamma \delta$ , je nach der Lage des Strahles  $\delta$ , das Strahlenpaar  $\alpha \beta$  das Strahlenpaar  $\gamma \delta$  trennen (bei der Reihenfolge  $\alpha \delta \beta \gamma$ ) oder nicht trennen (bei der Reihenfolge  $\alpha \beta \delta \gamma$  und bei der Reihenfolge  $\alpha \beta \gamma \delta$ ). Berücksichtigen wir auch noch den Fall, daß  $\delta$  in  $\alpha$  (oder in  $\beta$ ) fällt, so können wir für den krummen Strahlenwurf, wie wir es für den geraden gethan haben, die drei Definitionen aufstellen:

2. Ein *krummer Strahlenwurf* heißt *elliptisch*, wenn seine *Strahlenpaare* einander trennen; *hyperbolisch*, wenn seine *Strahlenpaare* einander nicht trennen; *parabolisch*, wenn die beiden *Strahlenpaare* einen *Strahl* *gemeinsam* haben. —



Vier Kurvenpunkte  $A B \Gamma \Delta$  werden aus irgend zwei weiteren Kurvenpunkten  $S$  und  $S_1$  durch zwei projektive Strahlengruppen  $S (A B \Gamma \Delta) \overline{\wedge} S_1 (A B \Gamma \Delta)$  projiziert<sup>(50)</sup>. Da zwei projektive Strahlengruppen die Endglieder einer Kette von perspektiven Gliedern sind<sup>(30,1)</sup>, so folgt aus Nr. 11<sub>1</sub>, daß zwei projektive Strahlengruppen immer gleichnamig sind; daher:

3. Ein krummer Punktwurf wird aus jedem Kurvenpunkt durch einen gleichnamigen Strahlenwurf projiziert.

Hieraus folgt, daß Nr. 10<sub>4</sub> sich auf krumme Punktwürfe ausdehnen läßt:

4. *Von den drei krummen Würfen, die man aus vier Kurvenpunkten bilden kann, sind zwei hyperbolisch und einer elliptisch.*

*Anmerkung.* Weil für einen krummen Strahlenbüschel  $A$  unsere Betrachtungen der Vorstellung schwerer zugänglich sind als für eine krumme Punktreihe, so sind noch einmal<sup>(34)</sup> die dualen<sup>(7)</sup> Begründungen hinzugefügt.

**70. Harmonische Elemente eines krummen Grundgebildes.** Diese und die folgende Nummer dienen dazu, die Worte harmonisch und projektiv auf die krumme Punktreihe und den krummen Strahlenbüschel zu übertragen. Diese Übertragung wird vermittelt durch die geraden Gebilde und stützt sich auf den Satz<sup>(50)</sup> von der projektiven Verwandtschaft gerader Gebilde, die perspektiv zu einem krummen Gebilde liegen. Sie bietet uns vor allem den Vorteil größserer Kürze beim Übersetzen unserer geometrischen Ergebnisse ins Deutsche, da wir beim Aussprechen

Vier Büschelstrahlen  $\alpha \beta \gamma \delta$  schneiden irgend zwei weitere Büschelstrahlen  $s$  und  $s_1$  in zwei projektiven Punktgruppen  $s(\alpha \beta \gamma \delta) \overline{\wedge} s_1(\alpha \beta \gamma \delta)$ <sup>(50)</sup>. Da zwei projektive Punktgruppen die Endglieder einer Kette von perspektiven Gliedern sind<sup>(30,1)</sup>, so folgt aus Nr. 11<sub>1</sub>, daß zwei projektive Punktgruppen immer gleichnamig sind; daher:

3. Ein krummer Strahlenwurf schneidet jeden Büschelstrahl in einem gleichnamigen Punktwurf.

Hieraus folgt, daß Nr. 11<sub>2</sub> sich auf krumme Strahlenwürfe ausdehnen läßt:

4. *Von den drei krummen Würfen, die man aus vier Büschelstrahlen bilden kann, sind zwei hyperbolisch und einer elliptisch.*

unserer Sätze die beim Beweise eingeschalteten geraden Gebilde weglassen können. —

1. Definition: Vier Punkte einer krummen Punktreihe heißen harmonisch, wenn sie aus *einem* Punkte der Kurve durch vier harmonische Strahlen projiziert werden.

2. Lehrsatz: *Vier harmonische Punkte einer krummen Punktreihe werden aus jedem Kurvenpunkte durch vier harmonische Strahlen projiziert*<sup>(50)</sup>.

3. Lehrsatz: Durch ein Punktpaar und einen Punkt einer krummen Punktreihe ist der vierte harmonische Punkt bestimmt<sup>(23)</sup>.

4. Lehrsatz: Bilden vier Punkte einer krummen Punktreihe einen harmonischen Wurf, so geht der Träger des einen Punktpaares durch den Punkt, in dem sich die beiden Tangenten des andern Punktpaares schneiden.

Beweis: Projizieren wir den krummen harmonischen Wurf  $AB \cdot \Gamma \Delta$  aus  $A$  und  $B$ , so erhalten wir<sup>(70<sub>2</sub>)</sup> die beiden harmonischen Strahlenwürfe  $A(AB \cdot \Gamma \Delta)$  und  $B(AB \cdot \Gamma \Delta)$ ; folglich<sup>(40<sub>2</sub>)</sup>  $A(AB \cdot \Gamma \Delta) \overline{\wedge} B(BA \cdot \Gamma \Delta)$ . Da dem Strahl  $AB$  der Strahl  $BA$  homolog ist, so schneiden sich<sup>(34)</sup> die Projektionsstrahlen  $AA$  und  $BB$ , das sind<sup>(50<sup>2</sup>)</sup> die Tangenten in  $A$  und  $B$ , auf der Verbindungslinie  $\Gamma \Delta$ . —

Da durch das Punktpaar  $AB$  und den Punkt  $\Gamma$  der vierte harmonische Punkt  $\Delta$  bestimmt ist<sup>(70<sub>3</sub>)</sup>, so gilt auch die

5. Umkehrung: Geht der Träger des einen von zwei Punktpaaren einer krummen

1. Definition: Vier Strahlen eines krummen Strahlenbüschels heißen harmonisch, wenn sie *einen* Strahl des Büschels in vier harmonischen Punkten schneiden.

2. Lehrsatz: *Vier harmonische Strahlen eines krummen Strahlenbüschels schneiden jeden Büschelstrahl in vier harmonischen Punkten.*

3. Lehrsatz: Durch ein Strahlenpaar und einen Strahl eines krummen Strahlenbüschels ist der vierte harmonische Strahl bestimmt.

4. Lehrsatz: Bilden vier Strahlen eines krummen Strahlenbüschels einen harmonischen Wurf, so liegt der Schnittpunkt des einen Strahlenpaares auf der Gerade, die die beiden Berührungspunkte des andern Strahlenpaares verbindet.

5. Umkehrung: Liegt der Schnittpunkt des einen von zwei Strahlenpaaren eines

Reihe durch den Punkt, in dem sich die Tangenten des andern Paares schneiden, so bilden die beiden Punktpaare einen harmonischen Wurf.

krummen Büschels in der Gerade, die die Berührungspunkte des andern Strahlenpaares verbindet, so bilden die beiden Strahlenpaare einen harmonischen Wurf.

### 71. Projektive Verwandtschaft krummer Grundgebilde. 71

1. Definition: Die Punkte  $ABC\dots$  einer geraden Punktreihe (Die Strahlen  $abc\dots$  eines geraden Büschels) heißen zu den Punkten  $AB\Gamma\dots$  einer krummen Punktreihe  $k^2$  projektiv, wenn der Strahlenbüschel, der die Kurvenpunkte  $AB\Gamma\dots$  aus irgend einem Kurvenpunkte  $S$  projiziert, projektiv ist zu der Punktreihe  $ABC\dots$  (zu dem Strahlenbüschel  $abc\dots$ ).

2. Definition: Die Punkte  $AB\Gamma\dots$  einer krummen Punktreihe  $k^2$  heißen projektiv zu den Punkten  $A_1B_1\Gamma_1\dots$  einer krummen Punktreihe  $k_1^2$ , wenn der Strahlenbüschel, der  $AB\Gamma\dots$  aus einem Punkte  $S$  von  $k^2$  projiziert, projektiv ist zu dem Strahlenbüschel, der die Punkte  $A_1B_1\Gamma_1\dots$  aus irgend einem Punkte  $S_1$  von  $k_1^2$  projiziert.

3. Lehrsatz: Projiziert man jede von zwei projektiven krummen Punktfolgen aus einem beliebigen ihrer Punkte, so erhält man zwei projektive gerade Strahlenbüschel<sup>(60)</sup>.

1. Definition: Die Strahlen  $abc\dots$  eines geraden Büschels (Die Punkte  $ABC\dots$  einer geraden Punktfolge) heißen zu den Strahlen  $\alpha\beta\gamma\dots$  eines krummen Strahlenbüschels  $\alpha^2$  projektiv, wenn die Punktfolge, in der die Büschelstrahlen  $\alpha\beta\gamma\dots$  irgend einen Büschelstrahl  $s$  schneiden, projektiv ist zu dem Strahlenbüschel  $abc\dots$  (zu der Punktfolge  $ABC\dots$ ).

2. Definition: Die Strahlen  $\alpha\beta\gamma\dots$  eines krummen Strahlenbüschels  $\alpha^2$  heißen projektiv zu den Strahlen  $\alpha_1\beta_1\gamma_1\dots$  eines krummen Strahlenbüschels  $\alpha_1^2$ , wenn die Punktfolge, die  $\alpha\beta\gamma\dots$  in irgend einem Strahl  $s$  von  $\alpha^2$  ausschneiden, projektiv ist zu der Punktfolge, die die Strahlen  $\alpha_1\beta_1\gamma_1\dots$  in irgend einem Strahl  $s_1$  von  $\alpha_1^2$  ausschneiden.

3. Lehrsatz: Schneidet man jeden von zwei projektiven krummen Strahlenbüscheln durch einen beliebigen seiner Strahlen, so erhält man zwei projektive gerade Punktfolgen.

4. Definition: Eine krumme Punktreihe und ein krummer Strahlenbüschel heißen projektiv, wenn der Strahlenbüschel, der die Punktreihe aus einem ihrer Punkte projiziert, projektiv ist der Punktreihe, die der Strahlenbüschel in einem seiner Strahlen ausschneidet.

Wenn wir den von den Tangenten einer krummen Punktreihe gebildeten krummen Strahlenbüschel <sup>(60)</sup> den der Punktreihe *zugeordneten* Tangentenbüschel nennen, so läßt sich der zweite Satz in Nr. 60 kurz so aussprechen:

5. Lehrsatz: *Eine krumme Punktreihe und der ihr zugeordnete Tangentenbüschel sind einander projektiv.*

In Zeichen: Sind  $A B \Gamma \Delta$  irgend vier Punkte einer krummen Punktreihe und  $\alpha \beta \gamma \delta$  ihre Tangenten, so ist  $A B \Gamma \Delta \overline{\wedge} \alpha \beta \gamma \delta$ .

Die weitem Sätze sprechen wir für Punktreihe und Strahlenbüschel gemeinsam aus, indem wir jedem Satz die Nummer hinzufügen, auf die er sich stützt.

6. Sind zwei krumme Grundgebilde einem dritten geraden oder krummen Grundgebilde projektiv, so sind sie einander projektiv <sup>(30a)</sup>.

7. In zwei krummen projektiven Grundgebilden sind vier Elementen, die einen harmonischen Wurf bilden, vier Elemente homolog, die wieder einen harmonischen Wurf bilden <sup>(30b)</sup>.

8. Wenn zwei projektive krumme Grundgebilde, die in einander liegen, drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie *jedes* Element entsprechend gemein <sup>(33a)</sup>.

9. *Die projektive Verwandtschaft zwischen zwei krummen Grundgebilden ist durch drei Paar homologe Elemente bestimmt* <sup>(33b)</sup>.

72

**72. Die krumme Involution.** Nachdem wir in den beiden vorhergehenden Nummern die Worte harmonisch und projektiv auf die krummen Gebilde übertragen haben, stellen wir im folgenden die Sätze zusammen, die sich aus den über gerade Involutionen bewiesenen für die krumme Punktreihe und den krummen Strahlenbüschel ohne weiteres ergeben.

1. Der Inbegriff zweier projektiven krummen Grund-

gebilde, die in einander liegen, heißt eine krumme Projektivität <sup>(37<sub>1</sub>)</sup>.

2. Eine krumme Projektivität, in der ein Element seinem homologen zweifach entspricht, heißt eine krumme Involution <sup>(63<sub>1</sub>)</sup>.

3. In einer krummen Involution entspricht jedes Element seinem zugeordneten zweifach <sup>(63<sub>2</sub>)</sup>.

4. Eine krumme Involution ist durch einen Wurf bestimmt <sup>(63<sub>3</sub>)</sup>.

5. Eine krumme Involution, die ein Ordnungselement hat, hat noch ein zweites Ordnungselement <sup>(63<sub>4</sub>)</sup>.

6. Eine krumme Involution heißt elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, je nachdem sie kein Ordnungselement, zwei Ordnungselemente oder ein Ordnungselement hat <sup>(68<sub>1</sub>)</sup>.

7. Eine krumme Involution und ihre Würfe sind gleichnamig <sup>(68<sub>2</sub>)</sup>.

8. Die Elemente eines krummen Grundgebildes und die ihnen involutorisch zugeordneten sind einander projektiv <sup>(63<sub>7</sub>)</sup>.

9. Ist eine krumme Involution hyperbolisch, so wird jedes Elementenpaar durch die beiden Ordnungselemente harmonisch getrennt <sup>(63<sub>8</sub>)</sup>.

73. **Projektionsachse.** In einer Kurve sei uns eine krumme Projektivität <sup>(72<sub>1</sub>)</sup>  $SAB \dots \overline{\wedge} S_1 A_1 B_1 \dots$  (Fig. 55) gegeben. Projizieren wir die Punkte  $SAB \dots$  aus dem Punkte  $S_1$  und die homologen Punkte  $S_1 A_1 B_1 \dots$  aus  $S$ , so erhalten wir die beiden projektiven <sup>(71<sub>2</sub>)</sup> Strahlenbüschel  $S_1(SAB \dots) \overline{\wedge} S(S_1 A_1 B_1 \dots)$ . Da die Verbindungslinie  $SS_1$  der Mittelpunkte sich selbst entspricht, so liegen die Schnittpunkte homologer Strahlen in einer Geraden  $p$  <sup>(34)</sup>, die bestimmt ist durch den Schnittpunkt der Strahlen  $S_1 A$  und  $SA_1$  und den Schnittpunkt der Strahlen  $S_1 B$  und  $SB_1$ . Diese Gerade  $p$  ist die Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks

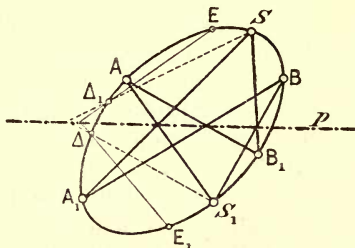


Fig. 55.

$\overline{\wedge} SA_1 B_1 S_1 A B_1$ ; auf ihr schneiden sich daher <sup>(54)</sup> auch noch die Verbindungslinien  $A_1 B$

und  $AB_1$ . Würden wir also die beiden projektiven krummen Punktreihen nicht aus  $S_1$  und  $S$ , sondern aus  $A_1$  und  $A$  projiziert haben, so hätten wir dieselbe Gerade  $p$  erhalten. Die Gerade  $p$ , die demnach nur abhängig ist von der Projektivität, nicht aber von der Wahl des Punktes  $S_1$  ( $S$ ), heißt die *Projektionsachse* (Projektivitätsachse) der krummen Projektivität  $SAB \dots \overline{S_1 A_1 B_1} \dots$ .

**Lehrsatz:** Die Gerade, welche einen beliebigen Punkt  $\Delta$  einer krummen Projektivität mit dem ebenfalls beliebigen Punkte  $E_1$  verbindet, schneidet die Gerade, die die homologen Punkte  $\Delta_1$  und  $E$  verbindet, in einem Punkte der Projektionsachse (Vergl. 36).

**A** *Anmerkung.* Beschränken wir diesen Satz auf drei Paar homologe Punkte und befreien ihn vom Begriff der projektiven Verwandtschaft<sup>(36 Z)</sup>, so erkennen wir, daß er nur eine andere Form des Pascalschen Satzes ist. — Da wir<sup>(44)</sup> zwei Geraden als einen besondern Fall einer krummen Punktreihe auffassen können, so läßt sich auch der Satz 36 als ein besonderer Fall des eben bewiesenen auffassen.

**74** **74. Konstruktion einer krummen Projektivität.** Will man zwei krumme Punktreihen, die in einander liegen, projektiv so auf einander beziehen, daß den Punkten  $SAB$  die Punkte  $S_1 A_1 B_1$  homolog werden, so kann man<sup>(71s)</sup> die Punkte  $SAB$  aus einem beliebigen Kurvenpunkte und  $S_1 A_1 B_1$  aus einem zweiten beliebigen Kurvenpunkte projizieren und die erhaltenen geraden Strahlenbüschel projektiv auf einander beziehen<sup>(31)</sup>. Eine einfachere Konstruktion ergibt sich mit Hülfe der Projektionsachse<sup>(73)</sup>:

Wir konstruieren die Projektionsachse  $p$  als Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks  $SA_1 B S_1 A B_1$  (Fig. 55) und bestimmen dann zu einem beliebigen Punkte  $\Delta$  den homologen  $\Delta_1$  mittelst des Strahles von  $S$  (oder  $A$  oder  $B$ ), der  $p$  in demselben Punkte schneidet wie  $S_1 \Delta$  (oder  $A_1 \Delta$  oder  $B_1 \Delta$ ).

**Z** *Zusatz.* Schneidet die Projektionsachse  $p$  die Kurve in den Punkten  $K$  und  $L$ , so ergibt unsere Konstruktion, daß der Punkt  $K$  mit seinem homologen  $K_1$  und ebenso  $L$  mit  $L_1$  zusammenfällt, daß also die Schnittpunkte der Projektionsachse mit der Kurve die Ordnungspunkte der

Projektivität sind. Ebenso ergibt sich umgekehrt, daß die Verbindungslinie der Ordnungspunkte die Projektionsachse ist.

Eine krumme Projektivität hat demnach zwei Ordnungspunkte oder keinen Ordnungspunkt, je nachdem die Projektionsachse zwei Punkte oder keinen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat. Wir können noch hinzufügen, daß die Projektivität *einen* Ordnungspunkt hat, wenn die Projektionsachse eine Tangente der Kurve ist.

### 75. Ordnungselemente einer geraden Projektivität. <sup>75</sup>

Die vorhergehende Konstruktion läßt sich auch für jede gerade Projektivität verwerten. Wir wählen als Beispiel zwei in einem und demselben Träger  $s$  liegende projektive gerade Punktreihen  $ABC \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1$  (Fig. 56). Wir nehmen eine beliebige Kurve zu Hülfe und projizieren aus

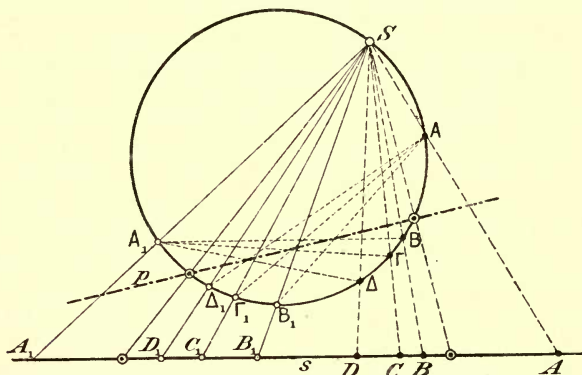


Fig. 56.

einem beliebigen Kurvenpunkte  $S$  sowohl die Punktreihe  $ABC$  wie die Punktreihe  $A_1 B_1 C_1$  und bezeichnen die zweiten <sup>(52)</sup> Schnittpunkte der Projektionsstrahlen mit der Kurve durch  $AB\Gamma$  und  $A_1 B_1 \Gamma_1$ . Konstruieren wir dann für die krumme Projektivität <sup>(71, und 71a)</sup>  $AB\Gamma \overline{\wedge} A_1 B_1 \Gamma_1$  die Projektionsachse  $p$  als Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks  $AB_1 \Gamma A_1 B \Gamma_1$  <sup>(73)</sup> so erhalten wir zu einem beliebigen Punkte  $D$  mittelst  $\Delta$  und  $\Delta_1$  den homologen  $D_1$ .

*Anmerkung.* Diese Konstruktion empfiehlt sich, wenn <sup>A</sup> man gleichzeitig untersuchen will, ob die gerade Pro-

ektivität Ordnungspunkte hat oder nicht. Schneidet die Projektionsachse die Kurve, so liefern die Projektionen der Schnittpunkte die Ordnungspunkte (Fig. 56). — Die Konstruktion wird am einfachsten, wenn man als Hilfskurve einen Kreis<sup>(42 Z)</sup> nimmt.

76 76. **Projektionszentrum.** Mit einer krummen Punktprojektivität  $SAB \dots \overline{\wedge} S_1 A_1 B_1 \dots$  ist auch immer eine krumme Strahlenprojektivität gegeben. Bezeichnen wir nämlich die zugeordneten Tangenten durch  $s\alpha\beta \dots$  und  $s_1\alpha_1\beta_1 \dots$ , so ist  $SAB \dots \overline{\wedge} s\alpha\beta \dots$  und  $S_1 A_1 B_1 \dots \overline{\wedge} s_1\alpha_1\beta_1 \dots$ <sup>(71a)</sup>, daher<sup>(71a)</sup>  $s\alpha\beta \dots \overline{\wedge} s_1\alpha_1\beta_1 \dots$ . Schneiden wir den krummen Strahlenbüschel  $s\alpha\beta \dots$  durch die Tangente  $s_1$  und  $s_1\alpha_1\beta_1 \dots$  durch  $s$ , so erhalten wir die projektiven<sup>(71a)</sup> geraden Punktreihen  $s_1(s\alpha\beta \dots) \overline{\wedge} s(s_1\alpha_1\beta_1 \dots)$ . Da der Schnittpunkt  $s_1$  der Träger sich selbst entspricht, so gehen die Verbindungslinien homologer Punkte durch einen Punkt  $P$ <sup>(34)</sup>. Dieser Punkt  $P$

ist der Brianchonsche Punkt des Kurvensechsecks  $s\alpha_1\beta_1 s_1\alpha\beta_1$ ; durch ihn geht auch die Verbindungslinie der Punkte  $\alpha_1\beta_1$  und  $\alpha\beta_1$ <sup>(54)</sup>. Würden wir also unsere beiden Strahlenbüschel nicht durch  $s_1$  und  $s$ , sondern durch  $\alpha_1$  und  $\alpha$  geschnitten haben, so hätten wir denselben Punkt  $P$  erhalten. Der Punkt  $P$ , der demnach unabhängig von der Wahl der Tangente  $s_1$  ( $s$ ) und nur abhängig von der Projektivität ist, heißt *Projektionszentrum* (Projektivitätszentrum) der krummen Projektivität  $SAB \dots \overline{\wedge} S_1 A_1 B_1 \dots$ .

Hat die krumme Punktprojektivität zwei Ordnungspunkte  $K$  und  $L$ , die krumme Strahlenprojektivität  $s\alpha\beta \dots \overline{\wedge} s_1\alpha_1\beta_1 \dots$  mithin zwei Ordnungsstrahlen  $\kappa$  und  $\lambda$ , so ist, weil der Strahl  $\kappa(\lambda)$  mit seinem homologen  $\kappa_1(\lambda_1)$  zusammenfällt, die Verbindungslinie der Schnittpunkte  $s_1\kappa$  und  $s\kappa_1$  der Ordnungsstrahl  $\kappa$ ; das Projektionszentrum  $P$  ist daher in diesem Fall der Schnittpunkt der Ordnungsstrahlen.

Unser Ergebnis fassen wir mit dem in Nr. 73 gewonnenen zusammen zu dem

**Lehrsatz:** Durch eine krumme Punktprojektivität  $SAB \dots \overline{\wedge} S_1 A_1 B_1 \dots$  ist die Projektionsachse  $p$  und das Projektionszentrum  $P$  bestimmt. Die Projektionsachse ist die Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks  $S A_1 B S_1 A B_1$  und das Projektionszentrum der



Brianchonsche Punkt des zugeordneten Kurvensechsecks. — Jede Verbindungslinie  $\Delta E_1$  wird von der zugeordneten  $\Delta_1 E$  in einem Punkte der Projektionsachse  $p$  geschnitten und jeder Schnittpunkt zweier Tangenten  $\delta \varepsilon_1$  liegt mit dem zugeordneten  $\delta_1 \varepsilon$  in einem Strahl des Projektionszentrums  $P$ . —

*Zusatz.* Hat die Projektivität zwei Ordnungspunkte,  $z$  so ist ihre Verbindungslinie die Projektionsachse und der Schnittpunkt ihrer Tangenten das Projektionszentrum. — Hat die Projektivität *einen* Ordnungspunkt, so ist seine Tangente die Projektionsachse <sup>(74 Z)</sup> und der Ordnungspunkt das Projektionszentrum <sup>(50 Z)</sup>.

**77. Die einer krummen Projektivität zugeordneten <sup>77</sup> Projektivitäten der Projektionsachse und des Projektionszentrums.** Projizieren wir eine krumme Projektivität  $AB\Gamma \dots \overline{\wedge} A_1 B_1 \Gamma_1 \dots$  aus einem beliebigen  $M$  ihrer Punkte, so erhalten wir in  $M$  zwei projektive <sup>(71a)</sup> Strahlenbüschel, die die Projektionsachse <sup>(73)</sup>  $p$  in zwei projektiven Punktreihen  $ABC \dots \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 \dots$  schneiden. Es soll gezeigt werden, daß man immer dieselbe gerade Projektivität in der Achse erhält, welchen Punkt der Kurve man auch zur Konstruktion wählt.

Ist  $N$  ein zweiter beliebiger Punkt der krummen Punktreihe, so ist also zu beweisen, daß bei der Projektion der krummen Projektivität aus  $N$  auf die Achse z. B.  $A$  und  $A_1$  wieder zwei homologe Punkte werden.

Weil  $MA_1$  (Fig. 57) durch  $A_1$  geht, muß  $M_1 A$  ebenfalls durch  $A_1$  gehen <sup>(76)</sup>, d. h. der Punkt, in dem die Verbindungslinie  $AA_1$  die Kurve zum zweiten Male schneidet, ist der dem Punkte  $M$  homologe Punkt  $M_1$ . Schneidet ferner der Strahl  $NA$  die Kurve zum zweiten Male in  $\Delta$ , so zeichnen wir den homologen Punkt  $\Delta_1$ , indem wir den Punkt

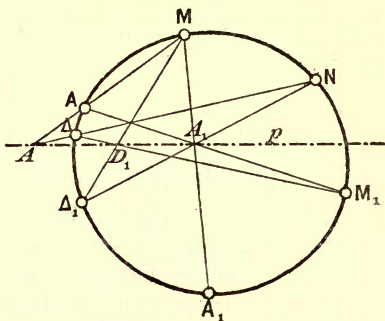


Fig. 57.

$D_1$ , in dem  $M_1 \Delta$  die Achse schneidet, aus  $M$  auf die Kurve projizieren<sup>(76)</sup>.

Weil nun  $N \Delta$  durch  $A$  geht, so sind auch für die Projektion aus  $N$  die Punkte  $A$  und  $A_1$  homolog, wenn  $N \Delta_1$  durch  $A_1$  geht. Dies aber ergibt sich aus dem

Kurvensechseck  $\overline{M A M_1 \Delta N \Delta_1}$ ; denn von diesem liegen nach der Konstruktion die Diagonalepunkte  $A$  und  $D_1$  in der Achse; es muß daher<sup>(54)</sup> die Seite  $N \Delta_1$  ihre Gegenseite  $A M_1$  in einem Punkte der Achse schneiden, d. i. in  $A_1$ .

Die gerade Projektivität der Achse haben wir eben dadurch konstruiert, daß wir die krumme Projektivität aus einem beliebigen ihrer Punkte projizierten. Man kann aber auch, wie die Figur zeigt, die gerade Projektivität aus der krummen erhalten, indem man den Kurvenpunkt  $A$  aus den beiden homologen Punkten  $M$  und  $M_1$  projiziert. Da, wie wir sahen,  $N \Delta_1$  durch  $A_1$  geht, so schneidet die (in der Figur nicht gezogene) Verbindungslinie  $\Delta A_1$  die Kurve zum zweiten Male in  $N_1$ <sup>(73)</sup>. Projizieren wir also den Kurvenpunkt  $\Delta$  aus  $N$  und  $N_1$ , so ergeben sich ebenfalls  $A$  und  $A_1$  als homologe Punkte der geraden Projektivität. Wir können daher die gerade Projektivität auch dadurch aus der krummen herleiten, daß wir die Kurvenpunkte aus irgend zwei festen homologen Punkten projizieren.

1. *Jeder krummen Projektivität ist in der Projektionsachse eine gerade Punktprojektivität zugeordnet. Diese zugeordnete Projektivität der Achse erhalten wir, indem wir die Projektionsachse schneiden*

*entweder durch die Strahlenpaare, welche die homologen Punkte der krummen Projektivität aus irgend einem festen Kurvenpunkte projizieren,*

*oder durch die Strahlenpaare, welche die Kurvenpunkte aus irgend zwei festen homologen Punkten der krummen Projektivität projizieren. —*

Durch die zugeordnete<sup>(76)</sup> Strahlenprojektivität  $\alpha \beta \gamma \dots$   $\overline{\wedge} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots$  erhalten wir in der beliebigen Tangente  $\mu$  zwei projektive Punktreihen, die aus dem Projektionszentrum  $P$  durch zwei projektive Strahlenbüschel  $a b c \dots$   $\overline{\wedge} a_1 b_1 c_1 \dots$  projiziert werden. Wählen wir eine andere Tangente  $\nu$ , so erhalten wir, wie sich durch die den vorhergehenden

dualen<sup>(7)</sup> Betrachtungen zeigen läßt, in  $P$  dieselben projektiven Strahlenbüschel.

2. Jeder krummen Projektivität ist im Projektionszentrum eine gerade Strahlenprojektivität zugeordnet. Diese zugeordnete Projektivität des Zentrums erhalten wir, indem wir aus dem Zentrum projizieren

entweder die Punktpaare, in denen irgend eine feste Kurventangente von den homologen Tangenten der krummen Projektivität geschnitten wird,

oder die Punktpaare, in denen irgend zwei feste homologe Tangenten der krummen Projektivität von den Kurventangenten geschnitten werden.

78. **Involutionsachse.** Entspricht in einer krummen<sup>78</sup> Projektivität<sup>(72<sub>1</sub>)</sup> ein Punkt seinem homologen zweifach, in Zeichen  $S S_1 A \dots \overline{\wedge} S_1 S A \dots$ , so entspricht jeder Punkt<sup>(72<sub>2</sub>)</sup> seinem homologen zweifach, in Zeichen  $S S_1 A A_1 \dots \overline{\wedge} S_1 S A_1 A \dots$ . Projizieren wir die Punktreihe  $S A A_1 \dots$  aus  $S_1$  (Fig. 58)

und die projektive Punktreihe  $S_1 A_1 A \dots$  aus  $S$ , so erhalten wir die projektiven<sup>(71<sub>2</sub>)</sup> Strahlenbüschel  $S_1 (S A A_1 \dots) \overline{\wedge} S (S_1 A_1 A \dots)$ . Die homologen Strahlen schneiden sich in den Punkten der Projektionsachse  $p$ <sup>(73)</sup>, die also hiernach die Verbindungslinie zweier Diagonalepunkte des Kurvenvierecks  $S S_1 A A_1$  ist. Die Tangenten  $\alpha$  und  $\alpha_1$  in den homologen Punkten  $A$

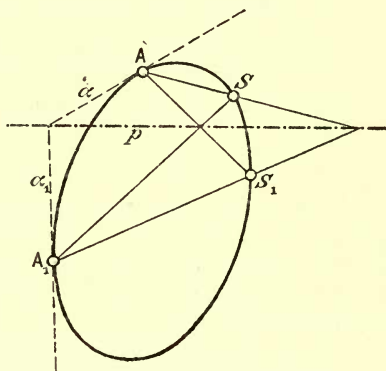


Fig. 58.

und  $A_1$  schneiden sich daher in einem Punkte von  $p$ <sup>(53)</sup>. Nennen wir  $p$  jetzt nicht mehr Projektionsachse, sondern *Involutionsachse*, so haben wir den

**Lehrsatz:** Die Schnittpunkte der Tangenten in den homologen Punkten einer krummen Involution liegen in einer Gerade, der *Involutionsachse*.

79. **Involutionszentrum.** Die der krummen Punkt-<sup>79</sup> projektivität  $S A A_1 \dots \overline{\wedge} S_1 A_1 A \dots$  zugeordnete<sup>(76)</sup> Strahlen-

projektivität  $s \alpha \alpha_1 \dots \overline{\wedge} s_1 \alpha_1 \alpha \dots$  ist ebenfalls in involutorischer Lage<sup>(72a)</sup>. Schneiden wir die Tangenten  $s \alpha \alpha_1 \dots$  durch  $s_1$  und  $s_1 \alpha_1 \alpha \dots$  durch  $s$ , so erhalten wir die beiden projektiven<sup>(71a)</sup> geraden Punktreihen  $s_1 (s \alpha \alpha_1 \dots) \overline{\wedge} s (s_1 \alpha_1 \alpha \dots)$ . Die Verbindungslinien homologer Punkte dieser in  $s_1$  und  $s$  liegenden projektiven Punktreihen gehen durch das Projektionszentrum<sup>(76)</sup> oder, wie wir hier sagen wollen, durch das *Involutionszentrum*  $P$ , das also hiernach der Schnittpunkt zweier Diagonallinien des Kurvenvierseits  $s s_1 \alpha \alpha_1$  ist. Da der Schnittpunkt zweier Diagonallinien des Kurvenvierseits  $s s_1 \alpha \alpha_1$  ein Diagonalpunkt des zugeordneten Kurvenvierecks  $S S_1 A A_1$  ist<sup>(59)</sup>, so geht auch die Verbindungslinie  $A A_1$  durch  $P$ . Weil  $A$  und  $A_1$  zwei beliebige homologe Punkte unserer krummen Involution sind, so haben wir den

*Lehrsatz: Die Verbindungslinien homologer Punkte einer krummen Involution gehen durch einen Punkt, das Involutionszentrum.*

### 80. Viereck und Vierseit einer krummen Involution.

Die beiden vorhergehenden Sätze<sup>(78 u. 79)</sup> bilden die Grundlage der in § 7 folgenden Polarentheorie; wir sprechen sie deshalb noch in einer zweiten, für die spätern Anwendungen bequemern Form aus.

In Nr. 79 sahen wir, daß der Diagonalpunkt, durch den die Gegenseiten  $S S_1$  und  $A A_1$  des Kurvenvierecks  $S S_1 A A_1$  gehen, das Involutionszentrum ist, und in Nr. 78, daß die Verbindungslinie der beiden andern Diagonalpunkte die Involutionsachse ist. Da nun  $S S_1$  und  $A A_1$  zwei beliebige Punktpaare unserer krummen Involution sind, so ergibt sich:

1. Je zwei Punktpaare einer krummen Involution bilden ein Kurvenviereck, von dem ein Diagonalpunkt das Involutionszentrum ist, während die beiden andern Diagonalpunkte in der Involutionsachse liegen.

In Zeichen: Ist  $S S_1 . A A_1$  irgend ein Wurf der krummen Involution, so ist der Schnittpunkt  $(S S_1)(A A_1)$  das Involutionszentrum und die Verbindungslinie von  $(S A)(S_1 A_1)$  und  $(S A_1)(S_1 A)$  die Involutionsachse.

Ferner sahen wir in Nr. 79, daß der Schnittpunkt zweier Diagonallinien des Kurvenvierseits  $s s_1 \alpha \alpha_1$  das Involutionszentrum ist, und in Nr. 78, daß sich die Seiten

$\alpha$  und  $\alpha_1$  (und ebenso  $s$  und  $s_1$ ) in einem Punkte der Involutionssachse schneiden:

2. Je zwei Tangentenpaare einer krummen Involution bilden ein Kurvenvierseit, von dem eine Diagonallinie die Involutionssachse ist, während die beiden andern durch das Involutionzentrum gehen.

In Zeichen: Sind  $s s_1 . \alpha \alpha_1$  die irgend einem Wurf der krummen Involution zugeordneten Tangenten, so ist die Verbindungslinie ( $s s_1$ ) ( $\alpha \alpha_1$ ) die Involutionssachse und der Schnittpunkt von ( $s \alpha$ ) ( $s_1 \alpha_1$ ) und ( $s \alpha_1$ ) ( $s_1 \alpha$ ) das Involutionzentrum.

*Zusatz.* Ist die krumme Punktinvolution hyperbolisch<sup>(72a)</sup>, so ist die Verbindungslinie ihrer Ordnungspunkte die Involutionssachse und der Schnittpunkt ihrer Tangenten das Involutionzentrum. — Ist die krumme Involution parabolisch, so ist der Ordnungspunkt das Involutionzentrum und seine Tangente die Involutionssachse<sup>(76 Z)</sup>.

Die erste Bemerkung kann man zur Konstruktion der Ordnungselemente einer geraden Involution benutzen. Ist uns z. B. eine gerade Strahleninvolution  $a a_1 . b b_1$  gegeben, so schneidet sie in einer beliebigen Gerade  $s$  eine Punktinvolution aus. Projizieren wir diese aus irgend einem Punkte  $S$  einer beliebigen Kurve, so erhalten wir in  $S$  eine Strahleninvolution, die die Kurve in einer krummen Punktinvolution schneidet. Trifft die Achse dieser krummen Involution die Kurve, so hat die Involution zwei Ordnungspunkte. Projizieren wir diese aus  $S$  auf die Hilfsgerade  $s$ , so werden die erhaltenen Punkte aus dem Mittelpunkt des gegebenen geraden Strahlenbüschels durch die gesuchten Ordnungsstrahlen projiziert (vgl. 75).

**81. Die einer krummen Involution zugeordneten geraden Involutionen der Involutionssachse und des Involutionzentrums.** Aus Nr. 77 haben wir noch einen Satz abzuleiten, indem wir die Projektivität zur Involution werden lassen. Der sich ergebende Satz wird seine Verwendung in der Theorie der konjugierten Involutionen (§ 8) finden. —

Projizieren wir eine krumme Involution aus irgend einem Kurvenpunkte, so erhalten wir in diesem eine gerade

Strahleninvolution<sup>(71a)</sup>, die die Involutionssache wieder in einer Punktinvolution schneidet. Diese Punktinvolution der Achse ist unabhängig von der Wahl des Kurvenpunktes<sup>(77a)</sup>.

Ist nun  $SS_1.AA_1$  (Fig. 59) irgend ein Wurf der krummen Involution, so ist der Schnittpunkt der Gegenseiten  $SS_1$  und  $AA_1$  das Involutionzentrum  $P$ , während die Diagonalepunkte  $A$  und  $A_1$ , in denen sich die Gegenseiten

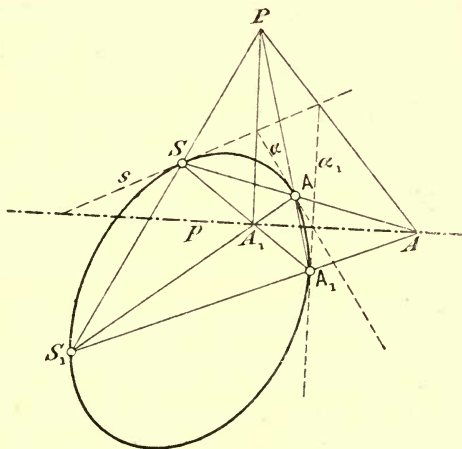


Fig. 59.

$SA$  und  $S_1A_1$ ,  $SA_1$  und  $S_1A$  schneiden, in der Involutionssache  $p$  liegen<sup>(80a)</sup>. Projizieren wir die krumme Involution aus  $S$ , so liefern die Strahlen  $SA$  und  $SA_1$  die beiden homologen Punkte  $A$  und  $A_1$  der in der Involutionssache liegenden Involution.

Schneiden wir ferner die der krummen Punktinvolution zugeordnete<sup>(76)</sup> krumme Strahleninvolution durch irgend eine Tangente, so erhalten wir in dieser eine gerade Punktinvolution<sup>(71a)</sup>, die aus dem Involutionzentrum wieder durch eine Strahleninvolution projiziert wird. Diese Strahleninvolution ist unabhängig von der Wahl der Kurventangente<sup>(77a)</sup>.

Wählen wir die Tangente  $s$ , so werden  $s\alpha$  und  $s\alpha_1$  aus dem Involutionzentrum  $P$  durch zwei homologe Strahlen der in  $P$  induzierten Involution projiziert. Der Schnittpunkt  $s\alpha$  liegt aber<sup>(53)</sup> in der Diagonallinie  $PA_1$  des Kurvenvierecks  $SS_1AA_1$  und der Schnittpunkt  $s\alpha_1$  in der Diagonal-

linie  $PA$ . Die beiden homologen Strahlen der Strahleninvolution des Involutionenzentrums gehen also durch homologe Punkte der Punktinvolution der Involutionssachse:

*Die durch eine krumme Involution in der Involutionssachse induzierte Punktinvolution ist ein Schnitt (liegt perspektiv zu) der im Involutionzentrum induzierten Strahleninvolution.*

## § 7. Pol und Polare.

82. Die einem Punkte zugeordnete krumme Involution. Ist  $P$  ein beliebiger Punkt und sind  $SS_1$  und  $AA_1$  irgend zwei Punktpaare der Kurve, deren Verbindungslinien durch  $P$  gehen, so ist  $P$  das Zentrum der durch den Wurf  $SS_1 \cdot AA_1$  bestimmten<sup>(72a)</sup> krummen Involution<sup>(79)</sup>. — Sind  $\Delta$  und  $\Delta_1$  irgend zwei Punkte, deren Verbindungslinie durch  $P$  geht, so sind  $\Delta$  und  $\Delta_1$  auch zwei homologe Punkte unserer Involution  $SS_1 \cdot AA_1$ ; denn die Gerade, welche den Punkt  $\Delta$  mit seinem homologen verbindet, geht durch  $P$ <sup>(79)</sup> und die Gerade  $P\Delta$  schneidet die Kurve zum zweiten Male in  $\Delta_1$ <sup>(52)</sup>.

*Wir finden also den einem Punkte  $\Delta$  homologen Punkt  $\Delta_1$ , indem wir  $P\Delta$  ziehen und den zweiten Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit der Kurve bestimmen.* Die so mittelst des festen Punktes  $P$  konstruierte Involution wollen wir die dem Punkte  $P$  zugeordnete krumme Involution nennen:

Jedem Punkte  $P$  ist eine krumme Punktinvolution zugeordnet, deren Zentrum der Punkt  $P$  ist.

*Zusatz.* Gehen durch den Punkt  $P$  zwei Tangenten, so ist nach unserer Konstruktion der Berührungspunkt jeder Tangente ein sich selbst homologer Punkt, d. h.<sup>(37a)</sup> ein Ordnungspunkt:

1. Einem Punkte  $P$ , durch den zwei Tangenten gehen, ist eine hyperbolische<sup>(72a)</sup> krumme Involution zugeordnet, deren Ordnungspunkte die Berührungspunkte der beiden Tangenten sind. —

Ist  $P$  ein Kurvenpunkt, so ist nach unserer Konstruktion dem Punkt  $P$  jeder Punkt, auch der Punkt  $P$  selbst, homolog, so daß unsere Involution *einen* Ordnungspunkt hat:

2. Jedem Kurvenpunkt  $P$  ist eine parabolische<sup>(72a)</sup> krumme Involution zugeordnet, deren Ordnungspunkt der Punkt  $P$  ist.

83 **83. Die einer Gerade  $p$  zugeordnete krumme Punktinvolution.** Ist  $p$  eine beliebige Gerade und sind  $s s_1$  und  $\alpha \alpha_1$  irgend zwei Tangentenpaare der Kurve, deren Schnittpunkte in  $p$  liegen, so ist  $p$  die Achse der durch den Wurf  $s s_1 . \alpha \alpha_1$  bestimmten<sup>(72a)</sup> krummen Involution<sup>(78)</sup>. — Sind  $\delta$  und  $\delta_1$  irgend zwei Tangenten, deren Schnittpunkt in  $p$  liegt, so sind  $\delta$  und  $\delta_1$  auch zwei homologe Strahlen unserer Involution  $s s_1 . \alpha \alpha_1$ ; denn der Punkt, in dem der Strahl  $\delta$  von seinem homologen geschnitten wird, liegt in  $p$ <sup>(78)</sup> und durch den Punkt  $p \delta$  geht die Tangente  $\delta_1$ <sup>(52)</sup>.

*Wir finden also die einer Tangente  $\delta$  homologe  $\delta_1$ , indem wir  $p \delta$  bestimmen und durch diesen Schnittpunkt die zweite Tangente legen.* Auf die angegebene Weise können wir mittelst der festen Gerade  $p$  eine Tangenteninvolution konstruieren. Die von den Berührungspunkten dieser Tangenten gebildete Punktinvolution<sup>(71a)</sup> wollen wir die der festen Gerade  $p$  zugeordnete krumme Punktinvolution nennen:

Jeder Gerade  $p$  ist eine krumme Punktinvolution zugeordnet, deren Achse die Gerade  $p$  ist.

*z* **Zusatz.** Schneidet die Gerade  $p$  die Kurve in zwei Punkten, so ist nach unserer Konstruktion die Tangente jedes Schnittpunktes ein sich selbst homologer Strahl, der Berührungspunkt also ein sich selbst homologer Punkt der konjugierten Punktinvolution:

1. Einer Gerade  $p$ , die mit der Kurve zwei Punkte gemeinsam hat, ist eine hyperbolische krumme Punktinvolution zugeordnet, deren Ordnungspunkte die Schnittpunkte sind. —

Ist  $p$  eine Kurventangente, so ist nach unserer Konstruktion der Gerade  $p$  jede Tangente, auch  $p$  selbst, homolog, so daß unsere Tangenteninvolution eine Ordnungstangente, die zugeordnete krumme Punktinvolution also *einen* Ordnungspunkt hat:

2. Jeder Kurventangente  $p$  ist eine parabolische<sup>(72a)</sup> krumme Punktinvolution zugeordnet, deren Ordnungspunkt der Berührungspunkt der Tangente  $p$  ist.



84. **Pol und Polare.** Wir haben in aller Ausführlichkeit <sup>84</sup> gezeigt, daß mit einer krummen Punktinvolution ein Punkt  $P$ , das Involutionzentrum<sup>(79)</sup>, und eine Gerade  $p$ , die Involutionachs<sup>(78)</sup>, verbunden ist und ferner, daß auch umgekehrt mit jedem Punkte  $P^{(82)}$  und mit jeder Gerade  $p^{(83)}$  eine krumme Punktinvolution verbunden ist. Es ist also auch mit jedem Punkte  $P$  eine bestimmte Gerade und mit jeder Gerade  $p$  ein bestimmter Punkt verbunden. Für die folgenden Anwendungen nun ist es vorteilhaft, diesen Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade [scheinbar] loszulösen von dem vermittelnden Begriff der krummen Punktinvolution, um [wenigstens in Worten] einen direkten Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade herzustellen. Diesem Zwecke dienen die folgenden beiden Definitionen. —

Da eine Involution durch zwei Elementenpaare bestimmt ist<sup>(72)</sup>, so kann es weder zwei Punkte noch zwei Geraden geben, die dieselbe krumme Punktinvolution erzeugen<sup>(82 u 83)</sup>; wohl aber kann ein Punkt dieselbe Involution erzeugen wie eine Gerade.

1. Definition: *Die Gerade, welche dieselbe krumme Punktinvolution erzeugt wie der Punkt  $P$ , heißt die Polare des Punktes  $P$ .*

2. Definition: *Der Punkt, der dieselbe krumme Punktinvolution erzeugt wie die Gerade  $p$ , heißt der Pol der Gerade  $p$ .*

Aus dieser Definition ergibt sich sofort der

3. Lehrsatz: Der Punkt  $P$  ist der Pol der Gerade  $p$ , wenn  $p$  die Polare von  $P$  ist, oder

Die Gerade  $p$  ist die Polare des Punktes  $P$ , wenn  $P$  der Pol von  $p$  ist;

und ferner:

4. Die Involutionachs ist die Polare des Involutionzentrums oder

Das Involutionzentrum ist der Pol der Involutionachs.

85. **Poldreieck.** Aus vier Kurvenpunkten  $\Delta A B \Gamma$  lassen <sup>85</sup> sich drei krumme Würfe<sup>(69)</sup> bilden:  $\Delta A . B \Gamma$ ;  $\Delta B . \Gamma A$ ;  $\Delta \Gamma . A B$ . Jeder Wurf bestimmt eine krumme Involution<sup>(72)</sup>; von der ersten z. B. ist der Diagonalepunkt  $P = (\Delta A) (B \Gamma)$  das Involutionzentrum und die Verbindungslinie der beiden

andern Diagonalpunkte die Involutionssachse<sup>(80<sub>1</sub>)</sup>. Von dem Kurvenviereck  $\Delta A B \Gamma$  ist daher<sup>(84)</sup> jeder Diagonalpunkt der Pol der gegenüberliegenden Diagonallinie. Nennen wir ein Dreieck, dessen Ecken die Pole ihrer Gegenseiten sind, ein *Poldreieck*, so können wir das Ergebnis kurz so aussprechen:

1. Das Diagonaldreieck jedes Kurvenvierecks ist ein Poldreieck.

Ebenso ergibt sich<sup>(80<sub>2</sub>)</sup>:

2. Das Diagonaldreieck jedes Kurvenvierseits ist ein Poldreieck.

86. 86. Punkte, die in der Polare liegen. Ist  $P$  der Diagonalpunkt  $(S S_1)(A A_1)$  des Kurvenvierecks  $S S_1 A A_1$  (Fig. 60), mit andern Worten, ist  $P$  das Zentrum<sup>(82)</sup> der durch  $S S_1 . A A_1$  bestimmten krummen Involution, so liegen

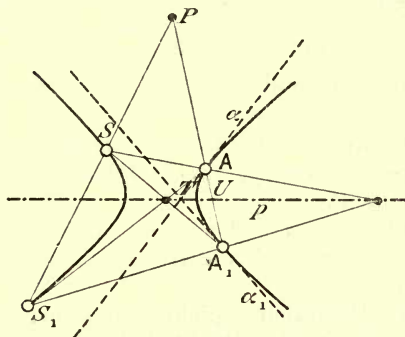


Fig. 60.

die beiden andern Diagonalpunkte in der Involutionssachse<sup>(80<sub>1</sub>)</sup>, also<sup>(84)</sup> in der Polare  $p$  von  $P$ . — Schneidet  $p$  die Seite  $A A_1$  in  $U$ , so ist  $U$  von  $P$  durch  $A$  und  $A_1$  harmonisch getrennt<sup>(24<sub>3</sub>)</sup>. — Die Tangenten  $\alpha$  und  $\alpha_1$  in  $A$  und  $A_1$  schneiden sich in einem Punkte  $T$  von  $p$ <sup>(78)</sup>. — Wir haben also den

Lehrsatz: In der Polare eines Punktes  $P$  liegen

1. zwei Diagonalpunkte jedes Kurvenvierecks, dessen dritter Diagonalpunkt  $P$  ist;

2. jeder Punkt  $U$ , der durch zwei Kurvenpunkte, deren Verbindungslinie durch  $P$  geht, von  $P$  harmonisch getrennt ist;

3. jeder Punkt  $T$ , in dem sich zwei Tangenten schneiden, deren Berührungspunkte mit  $P$  in einer Gerade liegen.

*Zusatz.* Gehen durch den Punkt  $P$  zwei Tangenten  $z$  der Kurve, so ist ihm eine hyperbolische Involution<sup>(82 Z 1)</sup> zugeordnet; die Verbindungslinie der Ordnungspunkte ist die Achse der hyperbolischen Involution<sup>(80 Z)</sup>, also<sup>(84)</sup> die Polare von  $P$ :

1. Gehen durch einen Punkt  $P$  zwei Tangenten, so liegen die Berührungspunkte dieser Tangenten in der Polare von  $P$ . —

Ist  $P$  ein Kurvenpunkt, so ist die zugeordnete Involution parabolisch<sup>(82 Z 2)</sup>; die Involutionssache einer parabolischen Involution ist die Tangente<sup>(80 Z)</sup>:

2. Die Polare eines Kurvenpunktes ist seine Tangente. —

3. Jeder Punkt, der in seiner Polare liegt, ist ein Kurvenpunkt.

Wäre  $P$  nicht ein Punkt der Kurve, so würde die Gerade, welche  $P$  mit einem beliebigen Kurvenpunkt  $A$  verbindet, die Kurve noch in einem zweiten<sup>(52)</sup>, von  $P$  verschiedenen Punkt  $A_1$  schneiden; die Polare von  $P$  müßte dann durch den von  $P$  durch  $A$  und  $A_1$  harmonisch getrennten Punkt  $U$  gehen<sup>(86)</sup>, während sie doch durch  $P$  geht.

87. Geraden, die durch den Pol gehen. Ist  $p$  die<sup>87</sup> Diagonallinie ( $s s_1$ ) ( $\alpha \alpha_1$ ) des Kurvenvierseits  $s s_1 \alpha \alpha_1$  (Fig. 61), mit andern Worten ist  $p$  die Achse<sup>(83)</sup> der durch die Be-

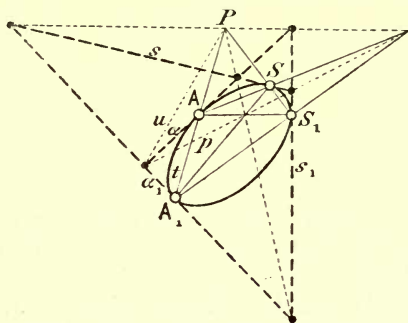


Fig. 61.

rührungspunkte  $S S_1$ .  $A A_1$  bestimmten Involution, so gehen die beiden andern Diagonallinien durch das Involutionsszentrum<sup>(80)</sup>, also<sup>(84)</sup> durch den Pol  $P$  von  $p$ . — Wird  $P$  aus der Ecke  $\alpha \alpha_1$  durch  $u$  projiziert, so ist  $u$  von  $p$  durch  $\alpha$

und  $\alpha_1$  harmonisch getrennt<sup>(25a)</sup>. — Die Berührungspunkte der Tangenten  $\alpha$  und  $\alpha_1$  liegen in einem Strahle  $t$  von  $P$ <sup>(79)</sup>. — Wir haben also den

**Lehrsatz:** *Durch den Pol einer Gerade  $p$  gehen*

1. *zwei Diagonallinien jedes Kurvenvierseits, dessen dritte Diagonallinie  $p$  ist;*
2. *jede Gerade  $u$ , die durch zwei Tangenten, deren Schnittpunkt in  $p$  liegt, von  $p$  harmonisch getrennt ist;*
3. *jede Gerade  $t$ , die zwei Kurvenpunkte verbindet, deren Tangenten sich in einem Punkte von  $p$  schneiden.*

**Zusatz.** Schneidet die Gerade  $p$  die Kurve in zwei Punkten, so ist ihr eine hyperbolische Involution<sup>(83 Z 1)</sup> zugeordnet; der Schnittpunkt der Tangenten in den Ordnungspunkten ist das Involutionzentrum<sup>(80 Z)</sup>, also<sup>(84a)</sup> der Pol von  $p$ :

1. *Schneidet die Gerade  $p$  die Kurve in zwei Punkten, so gehen die Tangenten dieser Schnittpunkte durch den Pol von  $p$ . —*

Ist  $p$  eine Tangente, so ist die zugeordnete Involution parabolisch<sup>(83 Z 2)</sup>; das Involutionzentrum einer parabolischen Involution ist der Berührungspunkt von  $p$ <sup>(80 Z)</sup>:

2. *Der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt.*
3. *Jede Gerade, die durch ihren Pol geht, ist eine Tangente (vgl. 86 Z 3).*

**88. Konstruktion der Polare.** Die Polare eines Punktes  $P$  finden wir<sup>(86)</sup>

1. *vermittelt ein Kurvenviereck, dessen einer Diagonalpunkt  $P$  ist: indem wir die beiden andern Diagonalpunkte verbinden;*

2. *vermittelt zweier Punktpaare  $SS_1$  und  $AA_1$ , deren Träger durch  $P$  gehen: indem wir die von  $P$  durch diese beiden Punktpaare harmonisch getrennten Punkte mit einander verbinden;*

3. *vermittelt zweier Tangentenpaare  $ss_1$  und  $\alpha\alpha_1$ , deren Berührungspunkte mit  $P$  in einer Gerade liegen: indem wir die Schnittpunkte dieser Tangentenpaare mit einander verbinden.*

**89. Konstruktion des Pols.** Den Pol einer Gerade  $p$  finden wir<sup>(87)</sup>

1. vermittelt eines Kurvenvierseits, dessen eine Diagonallinie  $p$  ist: indem wir den Schnittpunkt der beiden andern Diagonallinien bestimmen;

2. vermittelt zweier Tangentenpaare  $ss_1$  und  $aa_1$ , deren Schnittpunkte in  $p$  liegen: indem wir den Schnittpunkt der durch diese beiden Tangentenpaare von  $p$  harmonisch getrennten Geraden bestimmen;

3. vermittelt zweier Punktpaare  $SS_1$  und  $AA_1$ , deren Tangenten sich auf  $p$  schneiden: indem wir den Schnittpunkt der Träger dieser beiden Punktpaare bestimmen.

### 90. Involutorische Lage von Pol und Polare.

90

1. Lehrsatz: Ist  $P$  ein beliebiger Punkt und  $Q$  irgend ein Punkt seiner Polare, so läßt sich stets ein Kurvenviereck zeichnen, von dem  $P$  und  $Q$  zwei Diagonalepunkte sind und von dem eine Ecke in den beliebigen Kurvenpunkt  $S$  fällt.

Lösung: Wir verbinden den beliebigen Kurvenpunkt  $S$  (Fig. 62) mit  $P$  und den Punkt  $S_1$ , in dem diese Verbindungslinie die Kurve zum zweiten Male schneidet, mit  $Q$ . Schneidet  $QS_1$  die Kurve zum zweiten Male in  $A$ , so ziehen wir noch  $AP$  und bezeichnen den zweiten Schnittpunkt von  $AP$  und der Kurve durch  $A_1$ .

Da von diesem Kurvenviereck  $SS_1AA_1$  nach der Konstruktion  $P$  ein Diagonalepunkt ist, so muß jeder der beiden andern Diagonalepunkte in der Polare  $p$  liegen<sup>(86,1)</sup>; es muß daher, weil  $S_1A$  die Polare in  $Q$  schneidet,  $SA_1$  durch  $Q$  gehen, so daß  $SS_1AA_1$  das verlangte Kurvenviereck ist. —

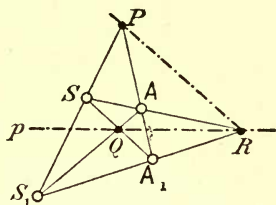


Fig. 62.

Auch die Gegenseiten  $SA$  und  $S_1A_1$  des gezeichneten Kurvenvierecks schneiden sich in einem Punkte  $R$  (Fig. 62) der Polare  $p$ <sup>(86,1)</sup>; und da die Diagonallinie  $RP$  des Kurvenvierecks  $SS_1AA_1$  die Polare des gegenüberliegenden Diagonalepunktes  $Q$  ist<sup>(85)</sup>, so haben wir gleichzeitig zum Punkte  $Q$  die Polare, die Gerade  $PR$ , gefunden. Da  $Q$  ein beliebiger Punkt von  $P$  ist, so haben wir den

2. Lehrsatz: Die Polaren der Punkte einer Gerade gehen durch einen Punkt, den Pol der Gerade. —

Halten wir (Fig. 62) den Punkt  $P$  und den Punkt  $S$ , und mithin auch  $S_1$ , fest und lassen  $Q$  auf der Polare sich bewegen, so ist

$$Q \overline{\wedge} S (Q) \overline{\wedge} S_1 (A) \overline{\wedge} S (A) \overline{\wedge} R \overline{\wedge} P (R).$$

Der Strahlenbüschel  $P(R)$  beschreibt also einen zu der Punktreihe  $Q$  projektiven Strahlenbüschel. Wenn  $Q$  in  $R$  fällt, so fällt  $A_1$  in  $A$ ,  $R$  also in  $Q$ . Der Strahlenbüschel  $P(R)$  und die Punktreihe  $Q$  haben also involutorische Lage<sup>(63a)</sup>. Da  $P(R)$  die Polare von  $Q$  ist<sup>(85)</sup>, so haben wir:

3. *Die Punkte einer Gerade und die Strahlen ihres Pols sind involutorisch auf einander bezogen, wenn man jedem Punkte der Gerade seine Polare zuweist. —*

Wir gehen jetzt nicht wie bisher von einer Gerade  $p$ , sondern von einem beliebigen Punkte  $P$  aus;  $a$  und  $b$  seien zwei seiner Strahlen und  $A$  und  $B$  die Pole von  $a$  und  $b$ . Ziehen wir die Verbindungslinie  $AB = p$ , so müssen, weil  $a$  und  $b$  die Polaren von  $A$  und  $B$  sind<sup>(84a)</sup>, die Polaren der Punkte  $ABC\dots$  der Gerade  $p$  durch  $P$  gehen<sup>(90a)</sup> und projektiv auf  $ABC\dots$  bezogen sein<sup>(90a)</sup>. Da demnach den Strahlen  $abc$  eines beliebigen Punktes  $P$  die Punkte einer Gerade  $p$  als Pole zugeordnet sind, so können wir den beiden vorhergehenden Sätzen die folgenden hinzufügen:

4. *Die Pole der Strahlen eines Punktes liegen in einer Gerade, der Polare des Punktes.*

5. *Die Strahlen eines Punktes und die Punkte seiner Polare sind involutorisch auf einander bezogen, wenn man jedem Strahl des Punktes seine Polare zuweist.*

91. **Die Pole eines krummen Strahlenbüschels.** Ist uns eine krumme Punktreihe, die wir kurz mit  $k^2$  bezeichnen wollen, gegeben und außerdem zwei projektive gerade Punktreihen  $ABC\dots \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1\dots$  in den Trägern  $s$  und  $s_1$ , so wissen wir, daß die Polaren  $abc\dots$  der Punkte  $ABC\dots$  den geraden Strahlenbüschel  $S$  und die Polaren  $a_1 b_1 c_1\dots$  von  $A_1 B_1 C_1\dots$  den geraden Strahlenbüschel  $S_1$  bilden<sup>(90a)</sup> und daß  $abc\dots \overline{\wedge} a_1 b_1 c_1\dots$  ist<sup>(90a u. 30a)</sup>. Von der Verbindungslinie  $AA_1 = \alpha$  ist der Schnittpunkt  $aa_1 = A$  der Pol<sup>(90a)</sup>. Da nun die Geraden  $\alpha\beta\gamma\dots$ , die die homologen Punkte zweier projektiven geraden Punktreihen  $s$  und  $s_1$  verbinden, die Strahlen eines krummen Strahlenbüschels

$s^2$ <sup>(42)</sup>; und die Punkte  $AB\Gamma\dots$ , in denen sich die homologen Strahlen zweier projektiven geraden Strahlenbüschel  $S$  und  $S_1$  schneiden, die Punkte einer krummen Punktreihe  $S^2$  sind, so haben wir den

1. Lehrsatz: Die Pole der Strahlen eines krummen Büschels bilden eine krumme Punktreihe. —

Bezeichnen wir den Schnittpunkt  $s s_1$  der Träger  $s$  und  $s_1$  durch  $M$ , so ist die Polare von  $M = s s_1$  die Verbindungslinie  $S S_1 = m$ <sup>(90)</sup>. Ist  $M_1$  der dem Punkte  $M$  in  $s_1$  homologe Punkt, also<sup>(45)</sup> der Berührungspunkt des Strahles  $s_1$ , und  $m_1$  seine Polare, so ist  $m_1$  der dem Strahl  $S S_1 = m$  homologe Strahl und daher<sup>(45)</sup> die Tangente in  $S_1$ . Dem Berührungspunkte  $M_1$  von  $s_1$  entspricht also die Tangente  $m_1$  des Poles  $S_1$ . Da wir zur Konstruktion von  $s^2$  statt des Strahles  $s_1$  jeden andern Strahl des krummen Büschels verwenden können<sup>(50)</sup>, so können wir dem vorhergehenden Satze den folgenden hinzufügen:

2. Die Polaren der Berührungspunkte des krummen Strahlenbüschels  $s^2$  sind die Tangenten der krummen Punktreihe  $S^2$ .

*Zusatz.* Man nennt die krummen Grundgebilde  $s^2$  und  $S^2$  *Polarfiguren* und die Konstruktion, durch die wir die eine Figur aus der andern erhalten haben, *Polarisation*. Durch eine solche Polarisation erhalten wir zu jedem Satze einen dualen<sup>(7)</sup>.

Wählen wir z. B. sechs Strahlen von  $s^2$ , so sind ihre sechs Pole Punkte von  $S^2$ . Nehmen wir nun an, daß der Satz des Pascal bewiesen wäre, so würde, weil die Polaren dreier Punkte, die in einer Gerade (der Pascalschen) liegen, durch einen Punkt gehen<sup>(90)</sup>, aus unserer Polarisation der Lehrsatz des Brianchon<sup>(54)</sup> folgen. *Die hier gelehrte Polarisation berechtigt uns also zur Verwendung des Gesetzes der Dualität<sup>(7)</sup>.*

## § 8. Konjugierte Involutionen.

92. **Konjugierte Involution.** Wenn der Punkt  $Q$ <sup>92</sup> in der Polare  $p$  von  $P$  liegt, so geht die Polare  $q$  von  $Q$  durch  $P$ <sup>(90)</sup>. Wenn also ein Punkt  $Q$  in der Polare eines andern Punktes  $P$  liegt, so liegt auch dieser zweite Punkt  $P$

in der Polare des ersten Punktes  $Q$ . Wir können demnach die folgende Definition aufstellen:

1. Definition. *Zwei Punkte heißen hinsichtlich einer Kurve konjugiert, wenn der eine in der Polare des andern liegt.*

1. Definition. *Zwei Geraden heißen hinsichtlich einer Kurve konjugiert, wenn die eine durch den Pol der andern geht.*

Hieraus ergibt sich:

2. Sind zwei Punkte einem dritten konjugiert, so ist ihre Verbindungslinie die Polare des dritten Punktes (Definition).

2. Sind zwei Geraden einer dritten konjugiert, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der dritten Gerade (Definition).

3. Ein Diagonalkpunkt eines Kurvenvierecks ist jedem der beiden andern Diagonalkpunkte konjugiert<sup>(85<sub>1</sub>)</sup>.

3. Eine Diagonallinie eines Kurvenvierecks ist jeder der beiden andern Diagonallinien konjugiert<sup>(85<sub>2</sub>)</sup>.

4. Zwei konjugierte Punkte werden durch zwei Kurvenpunkte, die mit ihnen in einer Gerade liegen, harmonisch getrennt<sup>(86<sub>2</sub>)</sup>. —

4. Zwei konjugierte Geraden werden durch zwei Kurventangenten, die mit ihnen durch einen Punkt gehen, harmonisch getrennt<sup>(87<sub>2</sub>)</sup>. —

Ist  $p$  eine beliebige Gerade,  $P$  ihr Pol und  $Q$  ein beliebiger Punkt von  $p$ ; schneidet ferner die (durch  $P$  gehende) Polare  $q$  von  $Q$  die Gerade  $p$  in  $R$ , so sind  $Q$  und  $R$  zwei konjugierte Punkte,  $PQ$  und  $PR$  zwei konjugierte Geraden. Lassen wir  $Q$  in der Gerade  $p$  sich bewegen, so bilden  $Q$  und  $R$  zwei projektive Punktreihen in involutorischer Lage<sup>(90<sub>2</sub>)</sup>:

5. *Die konjugierten Punkte, die in einer Gerade liegen, sind Punktpaare einer Involution; diese Involution heißt die konjugierte Punktinvolution der Gerade.*

5. *Die konjugierten Strahlen, die durch einen Punkt gehen, sind Strahlenpaare einer Involution; diese Involution heißt die konjugierte Strahleninvolution des Punktes.*

6. Die konjugierte Punktinvolution einer Gerade liegt perspektiv zu der konjugierten Strahleninvolution ihres Poles. —

Schneidet die Gerade  $p$  die Kurve in einem Punkte  $K$ , so ist die Polare von  $K$  die Tangente in  $K$ <sup>(86<sub>2</sub>)</sup>; der Punkt  $K$  ist demnach sich selbst konjugiert, also ein Ordnungspunkt<sup>(87<sub>2</sub>)</sup> der konjugierten Involution von  $p$ .



Ist  $p$  die Tangente in  $K$ , so fällt die Polare von  $K$  mit  $p$  zusammen<sup>(86 Z<sub>2</sub>)</sup>; jeder Punkt von  $p$  ist daher als dem Punkte  $K$  konjugiert anzusehen. Die konjugierte Punktinvolution einer Tangente ist daher parabolisch<sup>(67)</sup>.

7. Jeder Kurvenpunkt ist sich selbst konjugiert; er ist daher ein Ordnungspunkt in der konjugierten Involution jeder durch ihn gehenden Gerade, insbesondere auch der Ordnungspunkt der parabolischen Involution seiner Tangente.

7. Jede Tangente ist sich selbst konjugiert; sie ist daher ein Ordnungsstrahl in der konjugierten Involution jedes in ihr liegenden Punktes, insbesondere auch der Ordnungsstrahl der parabolischen Involution ihres Berührungspunktes.

**93. Elliptische, hyperbolische und parabolische konjugierte Involutionen.** Hat die konjugierte Punktinvolution einer Gerade  $p$  zwei Ordnungspunkte  $K$  und  $L$ , so heisst das<sup>(92)</sup>,  $K$  sowohl wie  $L$  liegt in seiner Polare;  $K$  und  $L$  sind daher<sup>(86 Z<sub>2</sub>)</sup> Kurvenpunkte, d. h. die Gerade  $p$  schneidet die Kurve in  $K$  und  $L$ .

Ist die konjugierte Involution von  $p$  parabolisch, so heisst das, die Polaren aller Punkte der Gerade gehen durch den Ordnungspunkt; dieser ist also der Pol der Gerade<sup>(90<sub>2</sub>)</sup>. Der Ordnungspunkt ist daher, weil er in seiner Polare liegt, ein Kurvenpunkt<sup>(86 Z<sub>2</sub>)</sup> und die Gerade  $p$  eine Tangente<sup>(87 Z<sub>2</sub>)</sup>.

Wir fassen die Ergebnisse noch einmal zusammen:

*Die Kurve erzeugt*

*in jeder Gerade eine konjugierte Punktinvolution.*

*in jedem Punkte eine konjugierte Strahleninvolution.*

*Ist diese konjugierte Involution*

1. *elliptisch,*

*so hat die Gerade keinen Punkt mit der Kurve gemeinsam;*

*so geht durch den Punkt keine Tangente;*

2. *hyperbolisch,*

*so schneidet die Gerade die Kurve in zwei Punkten;*

*so gehen durch den Punkt zwei Tangenten;*

3. *parabolisch,*

*so ist die Gerade eine Tangente.*

*so liegt der Punkt auf der Kurve.*

A *Anmerkung.* Durch diesen Satz sind sämtliche Geraden und Punkte in Beziehung zur Kurve gesetzt, während wir bis jetzt nur von solchen Geraden und Punkten etwas auszusagen wußten<sup>(52)</sup>, die die Kurve in *einem* Punkte schnitten oder von denen aus sich *eine* Tangente ziehen ließe. Da wir unsere fernern Sätze auf diese konjugierten Involutionsen stützen, ergibt sich für uns nirgendwo das Bedürfnis, das aus der Algebra in die Geometrie eingedrungene Wort *imaginär* zu gebrauchen.

94 94. **Zwei Poldreiecke.** Die Punkte  $A$  einer Gerade  $p$  und ihre Polaren  $a$  sind einander projektiv<sup>(90)</sup>; die Polaren  $a$  schneiden daher jede Gerade  $p_1$  in einer zur Punktreihe  $A$  projektiven Punktreihe  $A_1$ . Da  $A$  und  $A_1$  einander konjugiert sind<sup>(92)</sup>, so können wir sagen:

1. *Zwei gerade Punktreihen sind projektiv auf einander bezogen, wenn man den Punkten der einen die ihnen konjugierten der andern zuweist. —*

1. *Zwei gerade Strahlenbüschel sind projektiv auf einander bezogen, wenn man den Strahlen des einen die ihnen konjugierten des andern zuweist. —*

Ist  $PQR$  ein Poldreieck<sup>(85)</sup> und  $P_1Q_1R_1$  ein zweites Poldreieck, so läßt sich beweisen, daß die Punkte  $QRQ_1R_1$  aus  $P$  und  $P_1$  durch projektive Strahlengruppen projiziert werden. — Da nach der Definition  $R$  der Pol von  $PQ$  ist, so sind  $P(Q)$  und  $P_1(R)$  konjugierte Strahlen<sup>(92)</sup>. Ebenso sind  $P(R)$  und  $P_1(Q)$  konjugierte Strahlen und ferner  $P(Q_1)$  und  $P_1(R_1)$ ,  $P(R_1)$  und  $P_1(Q_1)$ ; mithin

$P(QRQ_1R_1)$ <sup>(94)</sup>  $\overline{\wedge}$   $P_1(RQ_1R_1)$ <sup>(39)</sup>  $\overline{\wedge}$   $P_1(QRQ_1R_1)$ ,  
d. h. die sechs Punkte  $PQR P_1Q_1R_1$  liegen in einer Kurve<sup>(42)</sup>.

Da die Seiten der beiden Poldreiecke die Polaren ihrer Gegenecken sind, so ergibt sich ebenso, daß die sechs Seiten einem krummen Strahlenbüschel angehören:

2. Die sechs Ecken zweier Poldreiecke gehören einer krummen Punktreihe, ihre sechs Seiten einem krummen Strahlenbüschel an

oder

Es gibt immer eine Kurve, der zwei beliebige Poldreiecke eingeschrieben sind, und eine zweite Kurve, der die beiden Poldreiecke umgeschrieben sind.

**95. Konjugierte Punkte und Strahlen in den Seiten** <sup>95</sup>  
**und Ecken eines Dreiecks.** Ist  $ABC$  (Fig. 63) ein beliebiges Dreieck und  $A_1$  der Punkt der Seite  $BC$ , der der Gegenecke  $A$  konjugiert ist;

sind ferner  $B_1$  und  $C_1$  die Punkte der Seiten  $CA$  und  $AB$ , die den Gegenecken  $B$  und  $C$  konjugiert sind, so soll bewiesen werden, daß  $A_1 B_1 C_1$  in einer Geraden liegen.

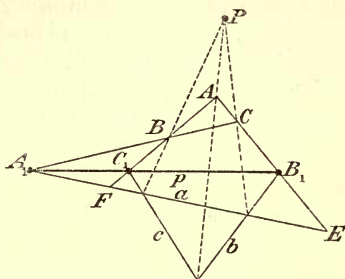


Fig. 63.

Wenn die Polare  $a$  des Punktes  $A$ , die durch  $A_1$  geht, die Seite  $CA$  in  $E$  und die Seite  $AB$  in  $F$  schneidet, so sind den Punkten  $ACB_1E$  die Punkte  $FC_1BA$  konjugiert:

den Punkten  $ACB_1E$  die Punkte  $FC_1BA$  konjugiert:

$$ACB_1E \text{ } ^{(94)} \overline{\wedge} FC_1BA \text{ } ^{(39)} \overline{\wedge} ABC_1F.$$

Es geht daher <sup>(34)</sup>  $B_1 C_1$  durch den Schnittpunkt  $A_1$  von  $BC$  und  $EF$ :

1. Die Punkte in den Seiten eines Dreiecks, die den Gegenecken konjugiert sind, liegen in einer Gerade. —

Sind ferner  $b$  und  $c$  (Fig. 63) die Polaren der Ecken  $B$  und  $C$  des Dreiecks  $ABC$ , so bilden die drei Polaren  $abc$  ein Dreieck, dessen Seiten die Seiten des Dreiecks  $ABC$  in drei Punkten  $A_1 B_1 C_1$  schneiden, die, wie wir eben bewiesen haben, in einer Geraden liegen. Die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $abc$  haben daher <sup>(15)</sup> perspektive Lage:

2. Das Dreieck, das von drei beliebigen Punkten gebildet wird, liegt perspektiv zu dem Dreieck, das von den Polaren der drei Punkte gebildet wird. —

Die Verbindungslinien homologer Ecken  $A$  und  $(bc)$ ,  $B$  und  $(ca)$ ,  $C$  und  $(ab)$  gehen durch einen Punkt  $P$  <sup>(15)</sup>. Weil nun  $(bc)$  der Pol von  $(BC)$  ist <sup>(90a)</sup>, so ist  $A(bc)$  der Strahl von  $A$ , der der Gegenseite  $BC$  konjugiert ist; ebenso sind  $B(ca)$  und  $C(ab)$  die den Gegenseiten  $CA$  und  $AB$  konjugierten Strahlen:

3. Die Strahlen in den drei Ecken eines Dreiecks,

die den Gegenseiten konjugiert sind, gehen durch einen Punkt. —

Da  $A_1$  als Punkt von  $BC$  dem Pole  $bc$  von  $BC$  und ferner dem Punkte  $A$  konjugiert ist, so ist  $A(bc)$  die Polare von  $A_1$  <sup>(92a)</sup>. Ebenso ist  $B(ca)$  die Polare von  $B_1$ :

4. Der Punkt  $P$ , in dem sich die den Gegenseiten konjugierten Strahlen der drei Ecken eines beliebigen Dreiecks schneiden, ist der Pol der Gerade, in der die drei Punkte der Seiten liegen, die den Gegenecken konjugiert sind.

96. **Satz von Hesse** <sup>(217)</sup>. Sind  $A$  und  $A_1$  (Fig. 64) irgend zwei konjugierte Punkte und ebenfalls  $B$  und  $B_1$ , so erhält man, wenn man die Verbindungslinien  $AB = p$  und  $A_1B_1 = p_1$  zieht, in  $p$  und  $p_1$  zwei projektive Punktreihen, wenn man den Punkten von  $p$  die ihnen konjugierten von  $p_1$  zuordnet <sup>(94a)</sup>. Wenn die Polare des Schnittpunktes  $C$  von  $p$  und  $p_1$  die Gerade  $p$  in  $D$  und  $p_1$  in  $D_1$  schneidet, so ist dem Punkte  $C$  in  $p$  der Punkt  $D$  und in  $p_1$  der Punkt  $D_1$  konjugiert <sup>(92a)</sup>:

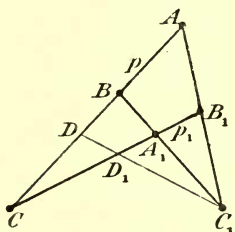


Fig. 64.

$$ABCD \text{ (94a)} \overline{\wedge} A_1B_1D_1C \text{ (39)} \overline{\wedge} B_1A_1CD_1.$$

Da der Schnittpunkt  $C$  der beiden Träger sich selbst entspricht, so schneiden sich  $AB_1$  und  $A_1B$  in einem Punkte  $C_1$  von  $DD_1$  <sup>(34)</sup>, also <sup>(92a)</sup> in einem dem Punkte  $C$  konjugierten Punkte. Da  $AA_1, BB_1, CC_1$  die Gegenecken des von  $pp_1 (AB_1)(A_1B)$  gebildeten Vierseits sind, so läßt sich das Ergebnis so in Worte kleiden:

*Sind zwei Ecken eines Vierseits ihren Gegenecken konjugiert, so ist auch die dritte Ecke ihrer Gegenecke konjugiert.*

*Sind zwei Seiten eines Viersecks ihren Gegenseiten konjugiert, so ist auch die dritte Seite ihrer Gegenseite konjugiert.*

97. **Poldreieck und Kurvenviereck.** Zu einem beliebigen Punkte  $P$  und irgend einem Punkte  $Q$  seiner Polare  $p$  haben wir, ausgehend von einem beliebigen Kurvenpunkte  $S$ , in Nr. 90<sub>1</sub> ein Kurvenviereck gezeichnet, von dem  $P$  und  $Q$  zwei Diagonalepunkte sind. Mit Hilfe des Begriffes der konjugierten Punkte können wir den Satz Nr. 90<sub>1</sub> nunmehr so aussprechen:

1. Wenn von einem Kurvenviereck zwei Gegenseiten sich in dem Punkte  $P$  schneiden und eine dritte Seite durch den dem Punkte  $P$  konjugierten Punkt  $Q$  geht, so geht auch die Gegenseite dieser dritten Seite durch  $Q$ . — Die fünfte und sechste Seite gehen durch den Pol  $R$  von  $PQ$  <sup>(90a)</sup>.

1. Wenn von einem Kurvenvierseit zwei Gegenecken in der Gerade  $p$  liegen und eine dritte Ecke in der der Gerade  $p$  konjugierten Gerade  $q$  liegt, so liegt auch die Gegenecke dieser dritten Ecke in  $q$ . — Die fünfte und sechste Ecke liegen in der Polare  $r$  von  $pq$ .

Da durch die beiden konjugierten Punkte  $P$  und  $Q$  der Pol  $R$  ihrer Verbindungslinie  $PQ$  bestimmt ist, mit andern Worten, da durch zwei konjugierte Punkte ein Poldreieck bestimmt ist, so ergibt die vorhergehende Konstruktion, *dafs es unendlich viele Kurvenvierecke giebt, von denen ein beliebiges Poldreieck ein Diagonaldreieck ist.* —

An unsere Betrachtungen schliessen wir die (sich selbst duale)

2. Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, von der ein Punkt, seine Tangente und ein Poldreieck gegeben ist.

In Zeichen:  $S\sigma(PQR)$ .

Ist uns ein Punkt  $P$ , seine Polare  $p$  und ein Kurvenpunkt  $S$  gegeben, so ist der von  $S$  durch  $P$  und  $p$  harmonisch getrennte Punkt  $S_1$  ein neuer Kurvenpunkt <sup>(86a)</sup>. Wir erhalten also aus den gegebenen Stücken sofort drei

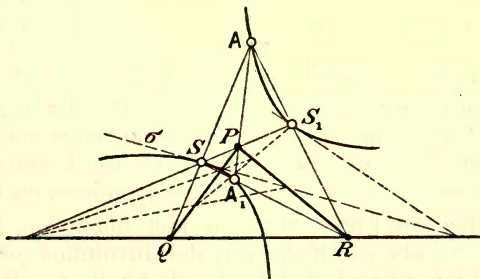


Fig. 65.

neue Kurvenpunkte. — Ein aufmerksames Verfolgen der Fig. 65 ergibt, wie man neue Kurvenpunkte und durch sie die Kurve zeichnen kann.

Zur Übung <sup>(47 A)</sup>:  $S S_1 A (P p)$ ;  $S S_1 \sigma (P p)$ ;  $S \sigma \sigma_1 (P p)$ ;  $\sigma \sigma_1 \alpha (P p)$ ;  $S \infty (P p) (Q q)$ .

98 **98. Konjugierte gerade und krumme Involution.**

Weil die Punkte einer Gerade  $p$  und die ihnen involutorisch zugeordneten einander projektiv sind<sup>(637)</sup>, so erhält man durch Projektion der homologen Punkte einer geraden Involution aus zwei festen Punkten  $S$  und  $S_1$  eine Kurve  $k^2$ <sup>(42)</sup>. — Sind  $Q$  und  $R$  (Fig. 66) zwei homologe Punkte der gegebenen geraden Involution, die wir kurz durch  $p^2$  bezeichnen wollen,

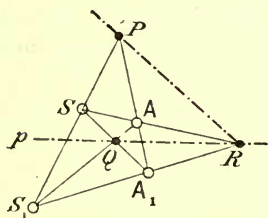


Fig. 66.

so schneiden sich  $S(R)$  und  $S_1(Q)$  in einem Kurvenpunkt  $A$  und  $S(Q)$  und  $S_1(R)$  in einem zweiten Kurvenpunkt  $A_1$ . Weil  $Q$  und  $R$  zwei Diagonalepunkte des Kurvenvierecks  $S S_1 A A_1$  sind, so sind sie hinsichtlich  $k^2$  konjugiert<sup>(92a)</sup>; die Involution  $p^2$  ist also der gezeichneten Kurve konjugiert<sup>(92b)</sup>. — Die Verbindungslinie  $AA_1$  schneidet  $S S_1$

in dem dritten Diagonalepunkt  $P$ , der von  $p$  durch  $S$  und  $S_1$  harmonisch getrennt ist<sup>(24a)</sup>;  $P$  ist der Pol von  $QR = p$ <sup>(861)</sup>.

Das Ergebnis ist:

1. Die Schnittpunkte der Strahlen, welche die homologen Punkte einer geraden Punktinvolution  $p^2$  aus zwei beliebigen Punkten  $S$  und  $S_1$  projizieren, bilden eine Kurve zweiter Ordnung; dieser Kurve ist die Involution  $p^2$  konjugiert; der Pol des Trägers  $p$  ist der von  $p$  durch  $S$  und  $S_1$  harmonisch getrennte Punkt. —

1. Die Verbindungslinien der Punkte, in denen die homologen Strahlen einer geraden Strahleninvolution  $P^2$  zwei beliebige Geraden  $s$  und  $s_1$  schneiden, bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung; diesem Strahlenbüschel ist die Involution  $P^2$  konjugiert; die Polare des Strahlenmittelpunktes  $P$  ist die von  $P$  durch  $s$  und  $s_1$  harmonisch getrennte Gerade. —

Zu derselben Figur, die wir hier benutzten, gelangten wir in Nr. 90, als wir nicht von der Involution  $p^2$ , sondern von der Kurve  $k^2$  und den beiden konjugierten Punkten  $P$  und  $Q$  ausgingen. Aus der damals aufgestellten Kette von perspektiven Gliedern können wir die Umkehrungen des eben bewiesenen Satzes ablesen. Diese Umkehrungen sind zwar im Grunde nur eine Wiederholung der Polarensätze

von Nr. 90; es ist aber vorteilhaft, diesen Sätzen mit Hülfe des Wortes konjugiert ein neues Gewand zu geben, da sie in diesem sich den spätern Anwendungen bequemer anpassen. —

Wir haben also die in der Kette perspektiver Gebilde<sup>(90)</sup>

$$Q \overline{\wedge} S(Q) \overline{\wedge} S_1(A) \overline{\wedge} S(A) \overline{\wedge} R$$

enthaltene Aussage mit Hülfe des Wortes konjugiert aus der Zeichensprache ins Deutsche zu übersetzen.

Da  $S_1(A)$  und  $S(A)$  die Gerade  $p$  in den konjugierten Punkten  $Q$  und  $R$  schneiden:

2. Wir finden die konjugierte Punktinvolution einer beliebigen Gerade  $p$ , indem wir aus irgend zwei festen Kurvenpunkten  $S$  und  $S_1$ , die mit dem Pole  $P$  von  $p$  in einer Gerade liegen, die Kurvenpunkte auf  $p$  projizieren;

und umgekehrt:

3. Wir finden die Kurvenpunkte, indem wir die homologen Punkte der konjugierten Involution einer beliebigen Gerade  $p$  aus irgend zwei Kurvenpunkten  $S$  und  $S_1$  projizieren, die mit dem Pole  $P$  von  $p$  in einer Gerade liegen.

Da  $S(A_1)$  und  $S(A)$  durch die konjugierten Punkte  $Q$  und  $R$  gehen und  $A$  und  $A_1$  mit  $P$  in einer Gerade liegen:

4. Die einem Punkte  $P$  zugeordnete<sup>(82)</sup> krumme Punktinvolution wird aus jedem Kurvenpunkt durch eine Strahleninvolution projiziert, die perspektiv liegt zu der konjugierten geraden Punktinvolution der Polare  $p$  von  $P$  (Vgl. 77);

2. Wir finden die konjugierte Strahleninvolution eines beliebigen Punktes  $P$ , indem wir die Schnittpunkte der Kurventangenten mit irgend zwei festen Tangenten  $s$  und  $s_1$ , die sich auf der Polare  $p$  von  $P$  schneiden, mit  $P$  verbinden;

3. Wir finden die Kurventangenten, indem wir die Punkte miteinander verbinden, in denen die homologen Strahlen der konjugierten Involution eines beliebigen Punktes  $P$  durch irgend zwei Tangenten  $s$  und  $s_1$  geschnitten werden, die mit der Polare  $p$  von  $P$  durch einen Punkt gehen.

4. Die einer Gerade  $p$  zugeordnete<sup>(83)</sup> Tangenteninvolution wird von jeder Tangente in einer Punktinvolution geschnitten, die perspektiv liegt zu der konjugierten geraden Strahleninvolution des Poles  $P$  von  $p$ ;

und umgekehrt:

5. Die Strahleninvolution, durch welche die konjugierte gerade Punktinvolution eines Trägers  $p$  aus einem beliebigen Kurvenpunkte projiziert wird, schneidet die Kurve in einer krummen Punktinvolution, deren Zentrum der Pol  $P$  von  $p$  ist.

5. Die Punktinvolution, welche die konjugierte gerade Strahleninvolution eines Punktes  $P$  in einer beliebigen Tangente ausschneidet, induziert eine krumme Strahleninvolution, deren Achse die Polare  $p$  von  $P$  ist.

99 **99. Konjugierte Punkte in den Seiten eines Kurvenvierecks.** Den vorstehenden Sätzen wollen wir noch eine andere, für manche Anwendungen sehr bequeme Form geben. — Von dem Kurvendreieck  $SS_1A$  (Fig. 66 oder 62) sind  $S$  und  $A$  nach unserer Konstruktion<sup>(90)</sup> zwei beliebige Punkte, während  $S_1$  durch die Bedingung bestimmt ist, daß  $SS_1$  durch den Pol  $P$  von  $p$  geht. Wir haben daher:

1. *Zwei Seiten eines Kurvendreiecks schneiden jede Gerade, die der dritten Seite konjugiert ist, in zwei konjugierten Punkten.*

1. *Zwei Ecken eines Kurvendreiecks werden aus jedem Punkte, der der dritten Ecke konjugiert ist, durch zwei konjugierte Strahlen projiziert.*

Unser Satz gilt auch für den Fall, daß der Punkt  $A$  in den Punkt  $S$  fällt; nicht aber unsere Einkleidung, da wir in diesem Fall nicht wohl von einem Kurvendreieck sprechen können. Wir müssen also, um unsern Satz vollständig auszusprechen, noch einen Zusatz machen. Da, wenn  $A$  in  $S$  fällt,  $AS_1$  die Gerade ist, welche  $S$  mit dem Pole  $P$  verbindet, so können wir sagen:

2. Die Tangente und ein beliebiger Strahl eines Kurvenpunktes schneiden jede Gerade, die dem beliebigen Strahl konjugiert ist, in zwei konjugierten Punkten.

2. Der Berührungspunkt und ein beliebiger Punkt einer Tangente werden aus jedem Punkte, der dem beliebigen Punkt der Tangente konjugiert ist, durch zwei konjugierte Strahlen projiziert.

Ferner:

3. Jede Gerade, welche von zwei Seiten eines Kurvendreiecks in zwei konjugierten

3. Jeder Punkt, aus dem zwei Ecken eines Kurvendreiecks durch zwei konju-



Punkten geschnitten wird, ist der dritten Seite konjugiert<sup>(98a)</sup>. —

gierte Strahlen projiziert werden, ist der dritten Ecke konjugiert. —

Die letzten Sätze über das Dreieck benutzen wir zur Ableitung eines Viereckssatzes. — Schneidet die Gerade  $p$  die Seiten  $SA$  und  $S_1A$  des Kurvendreiecks  $SS_1A$  in zwei konjugierten Punkten, so ist sie der Seite  $SS_1$  konjugiert und schneidet daher die Seiten  $SB$  und  $S_1B$  eines zweiten Kurvendreiecks  $SS_1B$ , das mit dem ersten die Ecken  $S$  und  $S_1$  gemeinsam hat, in zwei konjugierten Punkten. Fassen wir die beiden Kurvendreiecke  $SS_1A$  und  $SS_1B$  als ein Kurvenviereck  $SS_1AB$  auf, so sind  $AS$  und  $AS_1$  zwei anstossende Seiten dieses Vierecks und  $BS_1$  und  $BS$  die Gegenseiten dieser anstossenden Seiten:

4. Wenn zwei anstossende Seiten eines Kurvenvierecks eine Gerade in zwei konjugierten Punkten schneiden, so schneiden auch die Gegenseiten dieser beiden anstossenden Seiten die Gerade in zwei konjugierten Punkten (vgl. 215 Z).

4. Wenn zwei anliegende Ecken eines Kurvenvierecks aus einem Punkte durch zwei konjugierte Strahlen projiziert werden, so werden auch die beiden Gegenecken dieser beiden anliegenden Ecken aus dem Punkte durch zwei konjugierte Strahlen projiziert.

**100. Kurve durch einen Punkt und zwei konjugierte Involutionen.** Soll jedes Punktpaar einer geraden Involution  $g^2$  aus zwei Punkten bestehen, die hinsichtlich einer Kurve  $k^2$  einander konjugiert sind, so wollen wir diese Bedingung kurz dadurch ausdrücken, daß wir sagen: Für eine Kurve ist eine konjugierte Involution  $g^2$  gegeben. Hat die Involution Ordnungspunkte, so sind diese Punkte der Kurve<sup>(93)</sup>, so daß für diesen Fall unsere Bedingung gleichbedeutend ist mit der, daß für die Kurve zwei Punkte gegeben sind. — Wir können demnach unsere Fundamentalaufgabe<sup>(46)</sup>: Eine Kurve zu zeichnen, von der fünf Punkte gegeben sind, verallgemeinern zu der

Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, für die ein Punkt und zwei konjugierte Punktinvolutionen gegeben sind.

In Zeichen:  $S g^2 h^2$ .

Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, für die eine Tangente und zwei konjugierte Strahleninvolutionen gegeben sind.

In Zeichen:  $s G^2 H^2$ .

Analysis: Die Träger  $g$  und  $h$  (Fig. 67) der gegebenen Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  mögen sich in  $U$  schneiden und dem Punkte  $U$  möge in  $g^2$  der Punkt  $G$  und in  $h^2$  der Punkt  $H$  homolog sein; dann ist, weil die Polare von  $U$  sowohl durch den konjugierten Punkt  $G$  als auch durch den konjugierten Punkt  $H$  gehen muß, die Gerade  $GH = u$  die Polare von  $U^{(92a)}$ ; folglich ist der von  $S$  durch  $U$  und  $u$  harmonisch getrennte Punkt  $L$  ein zweiter Kurvenpunkt<sup>(86a)</sup>. — Die Verbindungslinie  $SH$  möge den Träger  $g$  in  $C$  und die Kurve in dem noch unbekanntem Punkte  $L_1$  schneiden; die Verbindungslinie  $LG$  möge den Träger  $h$  in  $\Gamma$  und die Kurve in dem noch unbekanntem Punkte  $S_1$  schneiden. Von

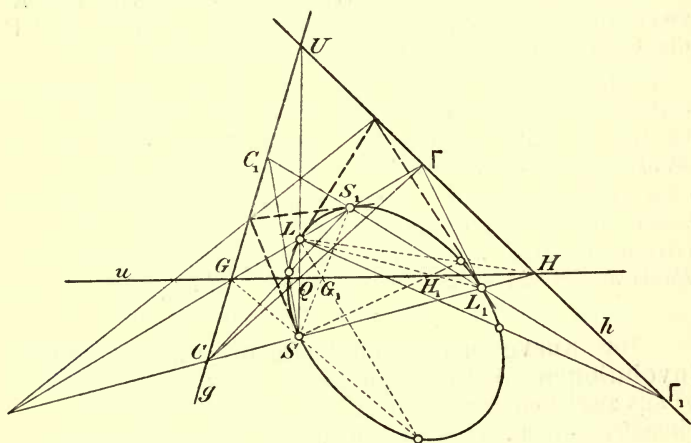


Fig. 67.

dem Kurvenviereck  $SS_1LL_1$  gehen die beiden anstossenden Seiten  $LS$  und  $LS_1$  durch die beiden konjugierten Punkte  $U$  und  $G$  von  $g^2$ , die dritte Seite  $SL_1$  geht durch  $C$ ; folglich muß die vierte (noch unbekannte) Seite  $S_1L_1$  durch den dem Punkte  $C$  homologen Punkt  $C_1$  von  $g^2$  gehen<sup>(99a)</sup>. Ferner gehen die beiden anstossenden Seiten  $SL$  und  $SL_1$  durch die konjugierten Punkte  $U$  und  $H$  von  $h^2$ , die dritte Seite  $LS_1$  geht durch  $\Gamma$ ; folglich muß die vierte Seite  $S_1L_1$  durch den dem Punkte  $\Gamma$  konjugierten Punkt  $\Gamma_1$  von  $h^2$  gehen. Die Kurvenpunkte  $S_1$  und  $L_1$  sind daher bestimmt als die Punkte, in denen  $LG$  und  $SH$  von  $C_1\Gamma_1$  geschnitten werden. —

Weil die Gerade  $g$  die Seiten  $LS$  und  $LS_1$  des Kurvendreiecks  $LS S_1$  in zwei konjugierten Punkten  $U$  und  $G$  schneidet, so ist sie der dritten Seite konjugiert<sup>(99a)</sup>, d. h.<sup>(92i)</sup>  $SS_1$  geht durch den Pol von  $g$ ; da ferner die Polare  $u$  von  $U$  durch den Pol von  $g$  geht<sup>(90a)</sup>, so ist der Punkt  $G_1$ , in dem  $SS_1$  die Gerade  $u$  schneidet, der Pol von  $g$ ; aus denselben Gründen ist der Punkt  $H_1$ , in dem  $LL_1$  die Gerade  $u$  schneidet, der Pol von  $h$ . —

Da  $GG_1$  und  $HH_1$  konjugierte Punkte von  $u$  sind<sup>(92i)</sup>, so ist, weil eine Involution durch zwei Punktpaare bestimmt ist<sup>(63a)</sup>, durch unsere Konstruktion auch die konjugierte Involution der Gerade  $u$  gezeichnet.

Wir erhalten daher<sup>(98a)</sup> die Punkte der gesuchten Kurve, indem wir die konjugierte Involution

$$\begin{aligned} g^2 &= UG \cdot CC_1 \text{ aus } S \text{ und } S_1 \text{ oder} \\ h^2 &= UH \cdot \Gamma\Gamma_1 \text{ aus } L \text{ und } L_1 \text{ oder} \\ &GG_1 \cdot HH_1 \text{ aus } S \text{ und } L \end{aligned}$$

projizieren.

Konstruktion: Schneiden die Geraden, welche den gegebenen Punkt  $S$  mit den Ecken  $H$  und  $U$  des Dreiecks  $UGH$  verbinden, die Gegenseiten  $g$  und  $u$  in  $C$  und  $Q$ , schneidet ferner die Verbindungslinie  $CQ$  die Seite  $h$  in  $\Gamma$ , so ist der Schnittpunkt von  $G\Gamma$  und  $C_1\Gamma_1$ , wie sich zeigen wird, ein Kurvenpunkt. Bezeichnen wir diesen durch  $S_1$ , so sind die Schnittpunkte der Strahlen, welche  $S$  und  $S_1$  mit den homologen Punkten der Involution  $g^2$  verbinden, die Punkte der gesuchten Kurve.

Beweis: Weil  $SU$  und  $S_1G$ ,  $SC$  und  $S_1C_1$  homologe Punkte von  $g^2$  projizieren, so sind ihre Schnittpunkte  $L$  und  $L_1$  Punkte der gezeichneten Kurve. — Wie das Viereck  $GH C \Gamma$  zeigt, ist  $Q$  von  $U$  durch  $S$  und  $L$  harmonisch getrennt<sup>(24a)</sup>;  $GQ = u$  schneidet daher  $SS_1$  in dem von  $g$  durch  $S$  und  $S_1$  harmonisch getrennten Punkte<sup>(21i)</sup>  $G_1$ , d. i. im Pole von  $g$ <sup>(98i)</sup>. Da die Involution  $g^2$  der gezeichneten Kurve konjugiert ist<sup>(98i)</sup>, so sind die homologen Punkte  $U$  und  $G$  einander konjugiert;  $GG_1 = u$  ist daher die Polare von  $U$  und schneidet als solche den Träger  $h$  in dem dem Punkte  $U$  konjugierten Punkte  $H$ <sup>(92i)</sup>.

Es bleibt noch zu zeigen, daß auch  $\Gamma$  dem Punkte  $\Gamma_1$  konjugiert ist. Durch Projektion des harmonischen Wurfes

$SL$ .  $UQ$  aus  $H$  erkennt man, daß  $HQ = u$  die Gerade  $LL_1$  in dem von  $h$  durch  $L$  und  $L_1$  harmonisch getrennten Punkte  $H_1$  schneidet. Weil der Punkt  $H_1$  in  $u$ , der Polare von  $U$ , liegt, so geht seine Polare durch  $U$  und da sie ferner durch den von  $H_1$  durch  $L$  und  $L_1$  harmonisch getrennten Punkt geht<sup>(86a)</sup>, so ist  $H_1$  der Pol von  $h$ . Die Polare des in  $h$  liegenden Punktes  $\Gamma$  geht daher durch  $H_1$ <sup>(90a)</sup>; außerdem geht sie durch den von  $\Gamma$  durch  $S_1$  und  $L$  harmonisch getrennten Punkt<sup>(86a)</sup>; die Verbindungslinie dieses Punktes mit  $H_1$  geht aber durch  $\Gamma_1$ <sup>(40i)</sup>;  $\Gamma$  und  $\Gamma_1$  sind also zwei konjugierte Punkte<sup>(92i)</sup>.

**Z** *Zusatz.* Für die Ausführung der Zeichnung ist noch zu bemerken, daß die Diagonallinie des Kurvenvierecks  $SS_1LL_1$ , die den Gegenseiten  $SS_1$  und  $LL_1$  zugeordnet ist<sup>(16 Z)</sup>, die Träger  $g$  und  $h$  in den Polen der Seiten  $SS_1$  und  $LL_1$  schneidet<sup>(90a)</sup>, daß unsere Konstruktion uns also auch die Tangenten<sup>(87 Zi)</sup> in den Kurvenpunkten  $SS_1LL_1$  liefert.

**A** *Anmerkung.* Eine allgemeinere Lösung dieser Fundamentalaufgabe geben wir in Nr. 203 (vgl. auch 200).

**101** **101. Der vierte gemeinsame Punkt zweier Kurven.** Die vorhergehende Konstruktion<sup>(100)</sup> lehrt zugleich für eine durch  $Sg^2h^2$  gegebene Kurve den Pol von  $g$  (und  $h$ ) finden: der Pol von  $g$  ist, wie wir sahen, der Schnittpunkt  $T$  (in der vorigen Nummer nannten wir diesen Punkt  $G_1$ ) von  $SS_1$  und  $u$ . Da wir diesen Schnittpunkt immer zeichnen können, so dürfen wir von jetzt an eine Kurve als gegeben ansehen durch  $Sg^2$  und  $T$ , also durch einen Punkt, eine Involution und den Pol des Trägers dieser Involution: Wir erhalten dann die Punkte der Kurve<sup>(100)</sup>, indem wir die homologen Punkte der Involution  $g^2$  aus  $S$  und dem Punkte  $S_1$  projizieren, der von  $S$  durch  $g$  und  $T$  harmonisch getrennt ist. —

Damit haben wir dieselbe Vereinfachung vorgenommen wie in Nr. 56 Z. Nachdem wir dort gezeigt hatten, daß man für eine durch fünf Punkte  $SS_1AB\Gamma$  gegebene Kurve immer den Schnittpunkt  $T$  der in  $S$  und  $S_1$  gezogenen Tangenten konstruieren kann, durften wir eine Kurve als gegeben ansehen durch  $SS_1A$  und  $T$ . Beachten wir, daß wir nach unserer jetzigen Ausdrucksweise  $T$  den Pol der

Gerade  $SS_1$  (<sup>87</sup>  $Z_1$ ) nennen würden und das  $S$  und  $S_1$  als Ordnungspunkte einer in ihrer Verbindungslinie liegenden Involution aufgefaßt werden können (vgl. 100 Analysis), so erkennen wir, das Nr. 56 Z einen besondern Fall unserer jetzigen Bemerkung ausspricht. —

1. Zwei Kurven, die drei Punkte gemeinsam haben, haben noch einen vierten Punkt gemeinsam.

1. Zwei Kurven, die drei Tangenten gemeinsam haben, haben noch eine vierte Tangente gemeinsam.

Konstruktion des vierten gemeinsamen Punktes: Die erste Kurve sei durch die drei gemeinsamen Punkte  $SS_1A$  (Fig. 68) und den Pol  $T$  von  $SS_1$  gegeben (<sup>66</sup>  $Z$ ); für die zweite Kurve sei  $T_1$  der Pol von  $SS_1$ . Ziehen wir nun  $TT_1$  und projizieren die Punkte  $D$  und  $D_1$ , in denen diese Verbindungslinie die Seiten  $AS_1$  und  $AS$  des gemeinsamen Kurvendreiecks  $SS_1A$  schneidet, aus  $S$  und  $S_1$ , so erhalten wir (<sup>48</sup>) den vierten gemeinsamen Punkt  $\Delta$ . —

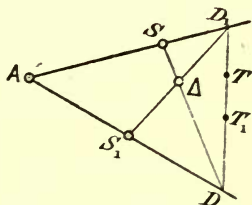


Fig. 68.

2. Zwei Kurven, die einen Punkt und eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Punkt gemeinsam.

2. Zwei Kurven, die eine Tangente und eine konjugierte Strahleninvolution gemeinsam haben, haben noch eine zweite Tangente gemeinsam.

Konstruktion des zweiten gemeinsamen Punktes: Die erste Kurve sei durch den gemeinsamen Punkt  $S$  (Fig. 69), die gemeinsame Involution  $g^2$  und den Pol  $T$  von  $g$  gegeben; für die zweite Kurve sei  $T_1$  der Pol von  $g$ . Der von  $S$  durch  $T$  und  $g$  harmonisch getrennte Punkt  $S_1$  ist ein zweiter Punkt der ersten Kurve, deren Punkte wir erhalten, indem wir aus  $S$  und  $S_1$  die homologen Punkte von  $g^2$  projizieren (<sup>98</sup>  $1$ ); ebenso erhalten wir die Punkte der zweiten Kurve, indem wir die homologen Punkte von  $g^2$  aus  $S$  und dem von  $S$  durch  $T_1$  und  $g$  harmonisch getrennten Punkt  $S_2$  projizieren. Da nun die Verbindungslinien  $S_1S_2$

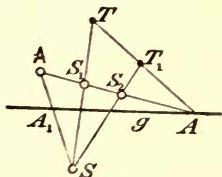


Fig. 69.

und  $TT_1$  sich in einem Punkte  $A$  von  $g$  schneiden<sup>(40)</sup>, so erhalten wir den zweiten gemeinsamen Punkt  $A$ , indem wir den Punkt  $A_1$ , welcher dem Punkt  $A$  in  $g^2$  homolog ist, aus  $S$  projizieren; dem Strahl  $SA_1$  sind nämlich die beiden zusammenfallenden Strahlen  $S_1A$  und  $S_2A$  zugeordnet. —

Aus der Konstruktion ergibt sich unmittelbar:

3. Drei Kurven, die einen Punkt und eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Punkt gemeinsam, wenn die drei Pole des Trägers der konjugierten Involution in einer Gerade liegen.

3. Drei Kurven, die eine Tangente und eine konjugierte Strahleninvolution gemeinsam haben, haben noch eine zweite Tangente gemeinsam, wenn die drei Polaren des Mittelpunktes der konjugierten Involution durch einen Punkt gehen.

*A* *Anmerkung.* Der erste Lehrsatz ist ein besonderer Fall des zweiten.

102 **102. Kurvenbüschel.** Die Gegenseiten  $KK_1$  und  $LL_1$  eines Vierecks  $KK_1LL_1$  wollen wir durch  $g$  und  $h$  bezeichnen; ihren Schnittpunkt, einen Diagonalpunkt des Vierecks, durch  $U$ ; die beiden andern Diagonalpunkte durch  $V$  und  $W$ ; die Verbindungslinie  $VW$  durch  $u$  und die Punkte, in denen  $u$  von  $g$  und  $h$  geschnitten wird, durch  $G$  und  $H$ . Da eine Kurve erst durch vier Punkte und die Tangente des einen dieser vier Punkte<sup>(49 Z)</sup> bestimmt ist, so gibt es unendlich viele Kurven, die unserm Viereck  $KK_1LL_1$  umgeschrieben sind.

1. Definition: Der Inbegriff der Kurven, die einem Viereck umgeschrieben sind, heißt ein Kurvenbüschel. —

1. Definition: Der Inbegriff der Kurven, die einem Viereck eingeschrieben sind, heißt eine Kurvenschar. —

Alle Kurven des Büschels haben, weil sie das Kurvenviereck gemeinsam haben, folgende Eigenschaften gemeinsam:

2. Die konjugierten Involutionen der Träger  $g$  und  $h$  sind durch die Ordnungspunkte  $KK_1$  und  $LL_1$  bestimmt<sup>(92s)</sup>;

3. die Diagonallinie  $u$  ist die Polare des Diagonalpunktes  $U$ <sup>(85s)</sup>;

4. die Diagonalpunkte  $V$  und  $W$  sind für alle Kurven des Büschels einander konjugiert<sup>(92s)</sup>.

*Zusatz.* Die Gegenseiten des Vierecks  $KK_1LL_1$  z schneiden jede Gerade  $a$  in Punktpaaren einer Involution<sup>(64 Z)</sup>; diese Involution soll kurz die *Hauptinvolution* der Gerade  $a$  heißen (vgl. 134 A). Die Hauptinvolution der Diagonale  $u$ , die durch die Ordnungspunkte  $V$  und  $W$  bestimmt ist, soll zum Unterschied von den übrigen die *diagonale* Involution heißen (vgl. 133). Ein allgemeinerer Begriff des Büschels wird sich in Nr. 192 ergeben. —

103. **Lehrsatz des Desargues.** Wird eine beliebige <sup>103</sup> Gerade  $a$  (Fig. 70) von irgend einer Kurve des Büschels in dem Punkte  $E$  und daher<sup>(52)</sup> noch in einem zweiten Punkte  $F$  geschnitten, so läßt sich zeigen, daß  $E$  und  $F$  zwei

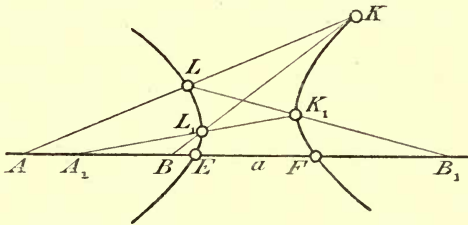


Fig. 70.

homologe Punkte der Hauptinvolution<sup>(102 Z)</sup> von  $a$  sind. — Projizieren wir die vier Kurvenpunkte  $LL_1EF$  aus  $K$  und  $K_1$ , so erhalten wir<sup>(50)</sup>

$$K(LL_1EF) \overline{\wedge} K_1(LL_1EF).$$

Bezeichnen wir also die Punkte, in denen  $a$  von  $KL$ ,  $KL_1$ ,  $K_1L$ ,  $K_1L_1$  geschnitten wird, durch  $AB B_1 A_1$ , so haben wir

$$ABEF \overline{\wedge} B_1 A_1 EF^{(39)} \overline{\wedge} A_1 B_1 FE.$$

Da der Punkt  $E$  dem Punkte  $F$  zweifach entspricht, so bilden die sechs Punkte  $AA_1.BB_1.EF$  eine Involution<sup>(63a)</sup>, mit andern Worten:  $E$  und  $F$  sind zwei homologe Punkte der durch  $AA_1.BB_1$  bestimmten<sup>(63a)</sup> Hauptinvolution von  $a$ .

Wird eine Gerade  $a$  von einer Kurve des Büschels geschnitten, so sind die Schnittpunkte zwei homologe Punkte der Hauptpunktinvolution von  $a$ .

Lassen sich von einem Punkte  $A$  an eine Kurve der Schar zwei Tangenten ziehen, so sind diese Tangenten zwei homologe Strahlen der Hauptstrahleninvolution von  $A$ .

**A** *Anmerkung.* Eine Verallgemeinerung dieses Satzes werden wir in Nr. 169 kennen lernen.

104 104. Geraden, die durch die Gegenecken eines Vierseits harmonisch getrennt sind. Geht eine Kurve des Büschels durch den beliebigen Punkt  $A$  (Fig. 71) der Diagonale  $u$ , so schneidet sie die Diagonale, weil  $V$  und  $W$  zwei konjugierte Punkte sind<sup>(102a)</sup>, zum zweiten Male in dem von  $A$  durch  $V$  und  $W$  harmonisch getrennten Punkte  $B$ <sup>(86a)</sup>. Ist nun  $a$  eine beliebige durch  $A$  gehende Gerade, die die Kurve zum zweiten Mal in  $A$  schneidet, so können wir auf das Kurvendreieck  $ABA$  und die Gerade  $g$  den Satz Nr. 99<sub>1</sub> anwenden; danach wird die Gerade  $g$ , weil sie durch den Pol  $U$  der Dreiecksseite  $AB = u$ <sup>(102s)</sup> geht, von  $AA$  und  $AB$  in zwei konjugierten Punkten  $C$  und  $C_1$  geschnitten. Da  $h$

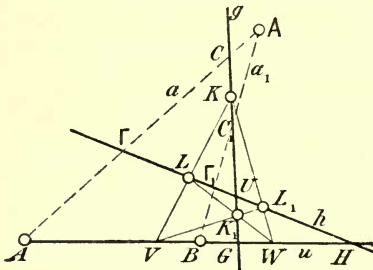


Fig. 71.

ebenfalls durch den Pol  $U$  von  $AB$  geht, so wird  $h$  ebenfalls von  $AA$  und  $AB$  in zwei konjugierten Punkten  $\Gamma$  und  $\Gamma_1$  geschnitten. — Da wir von einem beliebigen Punkte  $A$  ausgingen und durch ihn eine beliebige Gerade  $AA$  legten, so sehen wir, dass den drei Punkten  $C\Gamma A$ , in denen eine beliebige

Gerade von den beiden Gegenseiten  $g$  und  $h$  und der Diagonale  $u$  geschnitten wird, in den konjugierten Involutionen von  $g$  und  $h$  und in der diagonalen Involution drei Punkte  $C_1\Gamma_1B$  homolog sind, die wieder in einer Gerade liegen. Da diese beiden Geraden durch die Punkte  $C\Gamma$  und  $C_1\Gamma_1$  bestimmt sind, so lässt sich das Ergebnis so aussprechen:

1. Zwei Geraden  $a$  und  $a_1$ , die die Gegenseiten  $g$  und  $h$  in homologen Punkten  $CC_1$  und  $\Gamma\Gamma_1$  der konjugierten Involution schneiden, schneiden die Diagonale  $u$  in zwei homologen Punkten  $A$  und  $B$  der diagonalen Punktinvolution. —

1. Zwei Punkte  $A$  und  $A_1$ , die aus den Gegenecken  $G$  und  $H$  durch homologe Strahlen  $cc_1$  und  $\gamma\gamma_1$  projiziert werden, werden aus dem Diagonalepunkte  $U$  durch zwei homologe Strahlen  $a$  und  $b$  der diagonalen Strahleninvolution projiziert. —



Weil  $A$  und  $A$  zwei Punkte sind, in denen eine Kurve des Büschels die Gerade  $a$  schneidet, so sind sie homologe Punkte der Hauptinvolution von  $a$  <sup>(103)</sup>. Da die Gerade  $C_1 \Gamma_1 = a_1$ , welche wir der Gerade  $C \Gamma = a$  zugeordnet nennen wollen, durch  $A$  geht, so haben wir den (in Nr. 134A zu benutzenden) Satz:

2. Jede Gerade  $a$  wird von der ihr zugeordneten Gerade  $a_1$  und der Diagonale  $u$  in zwei homologen Punkten ihrer Hauptinvolution geschnitten.

2. Aus jedem Punkte  $A$  wird der zugeordnete Punkt  $A_1$  und der Diagonalpunkt  $U$  durch zwei homologe Strahlen der Hauptinvolution von  $A$  projiziert.

*Zusatz.* Der erste Satz läßt sich vom Begriff der konjugierten Involution und der Kurve lösen. Die konjugierten Punkte (Fig. 71)  $C C_1$  (und  $\Gamma \Gamma_1$ ) werden durch die Kurvenpunkte  $K K_1$  (und  $L L_1$ ) harmonisch getrennt <sup>(92)</sup>; ebenso die konjugierten Punkte  $V$  und  $W$  <sup>(102)</sup> durch die Kurvenpunkte  $A$  und  $B$ . Wir können also die drei Punkte  $C_1 \Gamma_1 B$  auffassen als die von  $a$  durch  $K K_1, L L_1, V W$  harmonisch getrennten Punkte; unser Satz sagt dann aus, daß diese drei Punkte in einer Gerade liegen. Da  $K K_1, L L_1, V W$  die Gegenecken des von  $K L, L K_1, K_1 L_1, L_1 K$  gebildeten Vierseits sind, so haben wir den Satz:

Die drei Punkte, die von einer beliebigen Gerade durch die Gegenecken eines Vierseits harmonisch getrennt sind, liegen in einer Gerade.

Die drei Geraden, die von einem beliebigen Punkte durch die Gegenseiten eines Vierecks harmonisch getrennt sind, gehen durch einen Punkt.

Wir geben für diesen Satz noch einen direkten Beweis. — Die Gegenecken des Vierseits seien  $K K_1, L L_1, V W$ , (Fig. 71), die beliebige Gerade  $a$  schneide die Diagonallinien in  $C \Gamma A$ , die drei von  $a$  durch die Gegenecken getrennten Punkte seien  $C_1 \Gamma_1 B$ . Wird die Gerade  $a$  von der Verbindungslinie  $C_1 \Gamma_1$  in  $A$  geschnitten, so sind  $A(C C_1 . K K_1)$  und  $A(C C_1 . L L_1)$  zwei harmonische Würfe, folglich <sup>(65 Z)</sup>  $A(C C_1 K L K_1) \overline{\wedge} A(C C_1 K_1 L_1 K)$ . Ferner ist, weil die Gegenecken eines Vierseits aus jedem Punkte durch die homologen Strahlen einer Involution projiziert werden <sup>(64 Z)</sup>:  $A(K L K_1 V W) \overline{\wedge} A(K_1 L_1 K W V)$ , folglich <sup>(33 Z<sub>2</sub>)</sup>  $A(C C_1$

$VW) \overline{\wedge} A(C C_1 W V)$ , folglich  $A(C C_1 . V W)$  ein harmonischer Wurf<sup>(40a)</sup>. Es schneiden also  $AC$  und  $AC_1$ , d. i.  $C\Gamma$  und  $C_1\Gamma_1$ , die Diagonale  $u$  in zwei von einander durch  $V$  und  $W$  harmonisch getrennten Punkten<sup>(21a)</sup>. Da  $C\Gamma$  die Diagonale in  $A$  schneidet, so geht  $C_1\Gamma_1$  durch  $B$ <sup>(20a)</sup>. —

Nimmt man den besondern Fall, daß  $u$  mit der unendlich fernen Gerade<sup>(3)</sup> zusammenfällt, so sind  $C_1\Gamma_1 B$  die Mitten der Strecken  $KK_1$ ,  $LL_1$ ,  $VW$ <sup>(27a)</sup>. Wir erkennen daraus, daß unser Satz eine Verallgemeinerung ist von einem Satz von Gauß: Die Mitten der drei von den Gegenecken eines Vierseits begrenzten Strecken liegen in einer Gerade.

<sup>A</sup> *Anmerkung.* Die allgemeinste Form dieses Satzes werden wir in Nr. 133 kennen lernen.

## § 9. Elliptische und hyperbolische Punkte und Geraden.

<sup>105</sup> 105. **Elliptische, hyperbolische, parabolische Punkte und Geraden.** In Nr. 93 haben wir gesehen, daß eine Kurve  $k^2$  in jeder Gerade eine konjugierte Punktinvolution und in jedem Punkt eine konjugierte Strahleninvolution induziert; diese konjugierten Involutionen konnten entweder elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch sein. Um die folgenden Sätze kurz aussprechen zu können, wollen wir uns folgender Bezeichnungen bedienen.

1. Definition: Eine Gerade, deren konjugierte Punktinvolution elliptisch (hyperbolisch, parabolisch) ist, nennen wir eine elliptische (hyperbolische, parabolische) Gerade.

1. Definition: Einen Punkt, dessen konjugierte Strahleninvolution elliptisch (hyperbolisch, parabolisch) ist, nennen wir einen elliptischen (hyperbolischen, parabolischen) Punkt.

Der Inhalt von Nr. 93 lautet dann:

2. Eine elliptische Gerade hat keinen Punkt, eine hyperbolische Gerade hat zwei Punkte mit der Kurve gemein; eine parabolische Gerade ist eine Tangente.

2. Durch einen elliptischen Punkt geht keine, durch einen hyperbolischen gehen zwei Tangenten; ein parabolischer Punkt ist ein Kurvenpunkt.

Da die konjugierte Involution einer Gerade perspektiv liegt zu der konjugierten Involution ihres Poles <sup>(92a)</sup>, so haben wir:

3. Jede Gerade hat einen gleichnamigen Pol.	3. Jeder Punkt hat eine gleichnamige Polare.
---	--

106. **Ecken und Seiten eines Poldreiecks.** Sind <sup>106</sup>  $\Delta A B \Gamma$  vier beliebige Punkte einer Kurve, so lassen sich aus ihren drei krumme Würfe bilden <sup>(69a)</sup>:  $\Delta A . B \Gamma$ ,  $\Delta B . \Gamma A$ ,  $\Delta \Gamma . A B$ . Nennen wir den Punkt, in dem sich z. B. die Verbindungslinien  $\Delta A$  und  $B \Gamma$  schneiden, das *Zentrum* des Wurfes  $\Delta A . B \Gamma$ , so sind die Zentren unserer drei Würfe die Diagonalepunkte des von  $\Delta A B \Gamma$  gebildeten Kurvenvierecks:  $P = (\Delta A)(B \Gamma)$ ,  $Q = (\Delta B)(\Gamma A)$ ,  $R = (\Delta \Gamma)(A B)$ .

Jeder dieser Würfe wird aus einem beliebigen fünften Kurvenpunkte  $S$  durch einen gleichnamigen Strahlenwurf projiziert <sup>(69a)</sup>; der krumme Wurf  $\Delta \Gamma . A B$  z. B., dessen Zentrum der Diagonalepunkt  $R$  ist, wird aus  $S$  durch den gleichnamigen Strahlenwurf  $S(\Delta \Gamma . A B)$  projiziert. Die Strahlenpaare dieses Wurfes  $S(\Delta \Gamma . A B)$  schneiden die Polare <sup>(85.1)</sup>  $P Q$  des Wurfzentrums  $R$  in Punktpaaren der konjugierten Involution <sup>(98a)</sup>; der Wurf  $S(\Delta \Gamma . A B)$  ist also der konjugierten Involution von  $P Q$  gleichnamig <sup>(68a)</sup>. Diese konjugierte Involution von  $P Q$  ist aber, weil  $R$  der Pol von  $P Q$  ist, der konjugierten Strahleninvolution von  $R$  gleichnamig <sup>(105a)</sup>; also ist auch der krumme Wurf  $\Delta \Gamma . A B$  der konjugierten Strahleninvolution seines Zentrums  $R$  gleichnamig:

1. Das Zentrum eines krummen Punktwurfes ist ein dem Wurfes gleichnamiger Punkt.	1. Die Achse eines krummen Strahlenwurfes ist eine dem Wurfes gleichnamige Gerade.
--	--

Hieraus ergibt sich <sup>(72.7)</sup>:

2. Das Zentrum <sup>(79)</sup> einer krummen Punktinvolution ist ein der Involution gleichnamiger Punkt. —	2. Die Achse einer krummen Strahleninvolution ist eine der Involution gleichnamige Gerade. —
--	--

Von den drei Würfen, die sich aus vier Kurvenpunkten  $\Delta A B \Gamma$  bilden lassen, sind immer zwei hyperbolisch und einer elliptisch <sup>(69a)</sup>. Da von diesen drei Würfen die Diagonalepunkte des Kurvenvierecks die Zentren sind, so er-

giebt sich aus dem ersten der eben bewiesenen Sätze der folgende:

3. Von den drei Diagonalknoten eines Kurvenvierecks ist immer einer ein elliptischer Punkt; die beiden andern sind hyperbolische Punkte.

3. Von den drei Diagonalen eines Kurvenvierseits ist immer eine eine elliptische Gerade; die beiden andern sind hyperbolische Geraden.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, da sich zu jedem Poldreieck ein Kurvenviereck zeichnen läßt<sup>(97)</sup>:

4. Von den drei Ecken eines Poldreiecks ist eine Ecke ein elliptischer Punkt; die beiden andern Ecken sind hyperbolische Punkte. Die eine Seite ist daher<sup>(105a)</sup> eine elliptische Gerade; die beiden andern Seiten sind hyperbolische Geraden.

107 **107. Die Strahlen eines elliptischen Punktes.** Ist  $P$  ein elliptischer Punkt, so ist jeder Strahl  $q$  von  $P$ , wie wir zeigen wollen, eine hyperbolische Gerade. Schneidet nämlich der Strahl  $q$  die Polare  $p$  von  $P$  in  $R$ , so ist durch die beiden konjugierten Punkte  $P$  und  $R$  ein Poldreieck bestimmt<sup>(97)</sup>, dessen dritte Ecke wir durch  $Q$  bezeichnen. Da in diesem Poldreieck  $PQR$  nach unserer Annahme  $P$  die elliptische Ecke ist, so ist  $p$  die elliptische Seite<sup>(105a)</sup>; die Seite  $q$  ist daher eine hyperbolische Gerade<sup>(106a)</sup>. — Ist  $p$  eine elliptische Gerade und  $R$  ein beliebiger Punkt von  $p$ , so ist  $R$  ein hyperbolischer Punkt. Ist nämlich  $r$  die Polare von  $R$ , welche  $p$  in  $Q$  schneidet, so ist  $q = PR$  die Polare von  $Q$ <sup>(90a)</sup> und  $pqr$  bilden ein Poldreieck, von dem  $p$  die elliptische Seite, also  $P$  die elliptische Ecke ist;  $R$  ist daher ein hyperbolischer Punkt.

*Alle Strahlen eines elliptischen Punktes sind hyperbolische Geraden; alle Punkte einer elliptischen Gerade sind hyperbolische Punkte.*

108 **108. Kennzeichen für eine elliptische und eine hyperbolische Gerade.** Ist  $p$  eine beliebige Gerade und  $Q$  irgend ein Punkt von  $p$ , so wissen wir<sup>(107)</sup>, daß  $p$  eine hyperbolische Gerade ist, wenn  $Q$  ein elliptischer Punkt ist. — Ist aber  $Q$  ein hyperbolischer Punkt, so müssen wir noch irgend einen zweiten (hyperbolischen) Punkt  $T$  von  $p$  zu Hilfe nehmen. Sind die Berührungspunkte der von  $Q$  und  $T$  an die Kurve gehenden Tangenten<sup>(105a)</sup>  $KK_1$  und

$LL_1$ , so ist der Punkt  $P$ , in dem die Berührungsehne  $KK_1$  von der Berührungsehne  $LL_1$  geschnitten wird, der Pol von  $QT = p$  <sup>(86 Z<sub>1</sub> u. 90<sub>2</sub>)</sup>. Dieser Schnittpunkt  $P$ , und mithin <sup>(106<sub>2</sub>)</sup> auch seine Polare  $p$ , ist aber ein elliptischer oder hyperbolischer Punkt, je nachdem der Wurf  $KK_1 \cdot LL_1$  elliptisch oder hyperbolisch ist <sup>(106<sub>1</sub>)</sup>.

Lassen sich von den Punkten  $Q$  und  $T$  die Tangenten  $Q$  ( $KK_1$ ) und  $T$  ( $LL_1$ ) an die Kurve ziehen, so schneidet die Verbindungslinie  $QT$  die Kurve nicht, wenn die Punkt-paare  $KK_1$  und  $LL_1$  einander trennen;  $QT$  schneidet dagegen die Kurve, wenn  $KK_1$  und  $LL_1$  einander nicht trennen.

Schneiden die Geraden  $q$  und  $t$  die Kurve in  $KK_1$  und  $LL_1$ , so geht durch den Schnittpunkt  $qt$  keine Tangente, wenn die Punkt-paare  $KK_1$  und  $LL_1$  einander trennen; durch  $qt$  gehen dagegen zwei Tangenten, wenn die Punkt-paare  $KK_1$  und  $LL_1$  einander nicht trennen.

109. Kennzeichen für die Strahlen eines hyper-<sup>109</sup>  
**bolischen Punktes.** Nennen wir, unter Einführung einer von der bisherigen abweichenden Bezeichnung, den hyperbolischen Punkt  $T$  (Fig. 72), die Berührungspunkte der durch ihn gehenden Tangenten  $s$   $s_1$  <sup>(105<sub>2</sub>)</sup>  $SS_1$  und einen beliebigen dritten Punkt der Kurve  $A$ , so ist die Kurve gegeben durch  $SS_1A$  und  $T$  <sup>(56 Z)</sup>. Jeder Strahl  $a$  von  $T$  wird, weil er durch den Pol  $T$  <sup>(87 Z<sub>1</sub>)</sup> der Seite  $SS_1A$  des Kurvendreiecks  $SS_1A$  geht, von den beiden andern Kurvenseiten  $AS_1$  und  $AS$  in zwei konjugierten Punkten  $D$  und  $D_1$  geschnitten <sup>(99<sub>1</sub>)</sup>; ferner sind der Pol  $T$  und der Punkt  $T_1$ , in dem  $a$  von der Polare  $SS_1$  des Punktes  $T$  geschnitten wird, zwei konjugierte Punkte <sup>(92<sub>1</sub>)</sup>. Die konjugierte Involution von  $a$  ist also gegeben durch den Wurf  $DD_1 \cdot TT_1$ . — Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem die Dreiecksseite  $AS_1$  die Tangente  $s$  der Gegenecke  $S$  schneidet, durch  $K$ , so haben wir <sup>(37 A)</sup>:

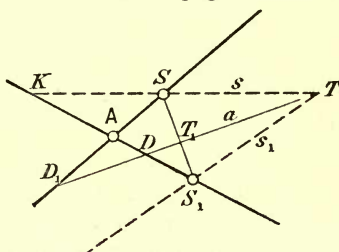


Fig. 72.

$$DD_1 \cdot TT_1 [S] \overline{\wedge} DAKS_1.$$

Der Wurf  $DD_1 . TT_1$  ist also elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem der Wurf  $DA . KS_1$  elliptisch oder hyperbolisch ist<sup>(11)</sup>, d. h. je nachdem der Strahl  $a$  des Punktes  $T$  von dem Kurvenpunkt  $A$  durch die von  $T$  ausgehenden Tangenten  $s, s_1$  getrennt oder nicht getrennt wird:

*Ein Strahl  $a$  des hyperbolischen Punktes  $T$  ist eine elliptische oder hyperbolische Gerade, je nachdem er von irgend einem Kurvenpunkte durch die beiden von  $T$  ausgehenden Tangenten  $s$  und  $s_1$  getrennt wird oder nicht getrennt wird.*

*Ein Punkt  $A$  der hyperbolischen Gerade  $t$  ist ein elliptischer oder hyperbolischer Punkt, je nachdem er von irgend einer Tangente durch die beiden in  $t$  liegenden Kurvenpunkte  $S$  und  $S_1$  getrennt wird oder nicht getrennt wird.*

110 **110. Trennung der elliptischen und hyperbolischen Elemente durch die Kurvenelemente.** Da nach Nr. 109 nur die Strahlen  $a$  des hyperbolischen Punktes  $T$  die Kurve schneiden, die von dem beliebigen Kurvenpunkte  $A$  durch die von  $T$  ausgehenden Tangenten  $s$  und  $s_1$  nicht getrennt werden, so ergiebt sich, dafs es nicht zwei Kurvenpunkte giebt, die durch die Tangenten  $s$  und  $s_1$  getrennt werden:

1. *Zwei beliebige Kurvenpunkte und zwei beliebige Tangenten bilden immer einen hyperbolischen Wurf.* —

Ist  $e$  eine beliebige elliptische und  $h$  eine beliebige hyperbolische Gerade, so ist ihr Schnittpunkt  $T = eh$ , als Punkt von  $e$ , ein hyperbolischer Punkt<sup>(107)</sup>; seine Tangenten seien  $s$  und  $s_1$ . Da die hyperbolische Gerade  $h$  die Kurve schneidet<sup>(105a)</sup>, so mufs  $e$  von  $h$  durch die Tangenten  $s$  und  $s_1$  getrennt sein; denn sonst würde auch  $e$  die Kurve schneiden<sup>(109)</sup>:

2. Jede elliptische Gerade  $e$  wird von jeder hyperbolischen Gerade  $h$  getrennt durch die beiden Tangenten  $s$  und  $s_1$ , die durch den Schnittpunkt  $T$  der beiden Geraden  $e$  und  $h$  gehen.

2. Jeder elliptische Punkt  $E$  wird von jedem hyperbolischen Punkte  $H$  getrennt durch die beiden Kurvenpunkte  $S$  und  $S_1$ , die in der Verbindungslinie  $t$  der beiden Punkte  $E$  und  $H$  liegen.

111 **111. Das zweite gemeinsame Element zweier Kurven.**

Weil durch jeden Punkt einer elliptischen Gerade

Weil in jedem Strahl eines elliptischen Punktes zwei

zwei Tangenten gehen <sup>(107)</sup>, so ergibt sich aus Nr. 110<sub>2</sub>, daß eine Gerade  $x$ , die sich aus der elliptischen Gerade  $e$  in die hyperbolische Gerade  $h$  um den Schnittpunkt von  $e$  und  $h$  dreht, während dieser Drehung einmal mit einer Tangente ( $s$  oder  $s_1$ ) zusammenfallen muß. Da jede Bewegung einer Gerade  $x$  aufgefaßt werden kann als zusammengesetzt aus unendlich vielen, unendlich kleinen Drehungen, so muß die Gerade  $x$  während jeder Bewegung, durch welche sie von  $e$  nach  $h$  gelangt, mindestens einmal mit einer Tangente zusammenfallen. — Sind nun  $k^2$  und  $l^2$  zwei Kurven, die eine Tangente  $s$  gemeinsam haben, so ist von den beiden Tangenten  $u$  und  $v$  von  $k^2$ , welche der gemeinsamen Tangente  $s$  benachbart sind, für die zweite Kurve  $l^2$  die eine eine elliptische, die andere eine hyperbolische Gerade. Die Tangente  $x$  kann die Kurve  $k^2$  beschreiben in dem Sinn  $u s v$  und in dem Sinn  $u v s$  <sup>(69)</sup>; bei jeder Bewegung muß sie, wie wir oben sahen, mindestens einmal mit einer Tangente der Kurve  $l^2$  zusammenfallen. Die Kurve  $k^2$  hat also mit der Kurve  $l^2$  außer  $s$  noch eine zweite Tangente gemeinsam:

Kurvenpunkte liegen <sup>(107)</sup>, so ergibt sich aus Nr. 110<sub>2</sub>, daß ein Punkt  $X$ , der sich von dem elliptischen Punkt  $E$  zum hyperbolischen Punkt  $H$  auf der Verbindungslinie  $EH$  bewegt, während dieser Bewegung einmal mit einem Kurvenpunkt ( $S$  oder  $S_1$ ) zusammenfallen muß. Da jede Bewegung eines Punktes  $X$  aufgefaßt werden kann als zusammengesetzt aus unendlich vielen, unendlich kleinen geradlinigen Bewegungen, so muß der Punkt  $X$  während jeder Bewegung, durch welche er von  $E$  nach  $H$  gelangt, mindestens einmal mit einem Kurvenpunkte zusammenfallen. — Sind nun  $k^2$  und  $l^2$  zwei Kurven, die einen Punkt  $S$  gemeinsam haben, so ist von den beiden Punkten  $U$  und  $V$  von  $k^2$ , welche dem gemeinsamen Kurvenpunkt  $S$  benachbart sind, für die zweite Kurve  $l^2$  der eine ein elliptischer, der andere ein hyperbolischer Punkt. Der Punkt  $X$  kann die Kurve  $k^2$  beschreiben im Sinne  $U S V$  und im Sinne  $U V S$  <sup>(69)</sup>; bei jeder Bewegung muß er, wie wir oben sahen, mindestens einmal mit einem Punkt der Kurve  $l^2$  zusammenfallen. Die Kurve  $k^2$  hat also mit der Kurve  $l^2$  außer  $S$  noch einen zweiten Punkt gemeinsam:

Haben zwei Kurven eine Tangente gemeinsam, so haben sie noch eine zweite Tangente gemeinsam<sup>(69 A)</sup>.

Haben zwei Kurven einen Punkt gemeinsam, so haben sie noch einen zweiten Punkt gemeinsam.

### § 10.\* Konjugierte Durchmesser.

112 112.\* **Zirkulare Involution.** Dreht sich ein rechter Winkel mit den Schenkeln  $a$  und  $l$  um seinen Scheitel  $S$ , so erhalten wir in  $S$ , wenn wir die Strahlen  $a$  und  $l$  homolog nennen, zwei kongruente und daher<sup>(41n)</sup> projektive Strahlenbüschel. Diese beiden Strahlenbüschel haben involutorische Lage<sup>(63v)</sup>, weil  $l$  in  $a$  fällt, wenn  $a$  in  $l$  fällt. Die so durch die Zuordnung auf einander senkrechter Strahlen in  $S$  erhaltene Involution, die wir eine *zirkulare* nennen wollen, schneidet jede Gerade in einer Punktinvolution. Von besonderer Wichtigkeit nun ist die Punktinvolution, in der sie die uneigentliche<sup>(3)</sup> Gerade  $o$  schneidet. Konstruieren wir nämlich eine zweite zirkulare Strahleninvolution  $S_1$ , so sind je zwei homologen (auf einander senkrecht stehenden) Strahlen von  $S_1$  zwei homologe Strahlen von  $S$  parallel; die homologen Strahlen von  $S_1$  schneiden daher  $o$  in einem Punktpaar der von  $S$  ausgeschnittenen Involution.

Wir erhalten also immer dieselbe Punktinvolution in  $o$ , von welcher zirkularen Strahleninvolution wir auch ausgehen, so daß wir uns die Involution  $o^2$  als eine fest in der uneigentlichen Gerade gegebene Involution zu denken haben, die allein vom Begriff des rechten Winkels abhängig, von der Lage eines Punktes oder einer Gerade in der Ebene aber unabhängig ist und daher auch wohl die *absolute Involution* genannt wird. Uns dient sie dazu, manchen Sätzen der Planimetrie eine in unsern Sprachgebrauch besser passende Fassung zu geben.

Daß wir immer dieselbe Involution  $o^2$  erhalten, von welchem Punkte  $S$  wir auch ausgehen, drücken wir vermittelst einer Definition und eines Lehrsatzes aus.

1. Definition: Die Punktinvolution, in der eine beliebige zirkulare Strahleninvolution die uneigentliche Gerade schneidet, heißt die *zirkulare Punktinvolution*.

2. Lehrsatz: Jede zirkulare Strahleninvolution liegt perspektiv zu der zirkularen Punktinvolution. —



Da zwei auf einander senkrechte Strahlen nicht zusammenfallen können, so haben wir:

3. Jede zirkulare Involution ist elliptisch. —

4. Für uns haben die im folgenden gebrauchten Ausdrücke wie: Zwei Strahlen stehen auf einander senkrecht, immer nur die Bedeutung: *Die beiden Strahlen gehen durch zwei homologe Punkte der zirkularen Punktinvolution.*

Schneidet z. B. eine beliebige Gerade die uneigentliche Gerade  $o$  in  $A$  und ist  $A_1$  der  $A$  homologe Punkt von  $o^2$ , so geht durch  $A_1$  (außer unendlich vielen eigentlichen Geraden auch) die uneigentliche Gerade  $o$  selbst.

Wir sagen daher:

5. Jede Gerade steht auf der uneigentlichen Gerade senkrecht. —

6. Stehen zwei Strahlen einer Strahleninvolution auf ihren homologen senkrecht, so steht jeder Strahl auf seinem homologen senkrecht; oder:

Eine Strahleninvolution ist zirkular, wenn zwei Strahlen auf ihren homologen senkrecht stehen.

Denn die Strahleninvolution schneidet die uneigentliche Gerade in einer Punktinvolution, die mit der zirkularen in einem Wurf übereinstimmt und daher <sup>(63s)</sup> mit ihr identisch ist. —

7. Wenn in einem Viereck zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, so steht auch die dritte Seite auf ihrer Gegenseite senkrecht.

Denn die Gegenseiten eines Vierecks schneiden jede Gerade in Punktpaaren einer Involution <sup>(64 Z)</sup>; die Involution aber, welche unser Viereck auf der uneigentlichen Gerade ausschneidet, stimmt mit der zirkularen in zwei Punktpaaren und daher <sup>(63s)</sup> auch im dritten Punktpaar überein. —

Nennen wir das Viereck, in dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen,  $BB_1CC_1$  (Fig. 73) und die Diagonalepunkte  $OSF$ , so bilden die Strahlen  $O(SF \cdot BC)$  einen harmonischen Wurf <sup>(24s)</sup>. Da  $OC$  senkrecht auf  $OB$  steht, so ist  $\angle SOB = BOF$  <sup>(28s)</sup>:

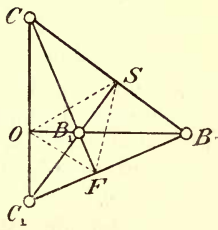


Fig. 73.

8. Die Seiten eines Vierecks, in dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, halbieren die Winkel des Diagonaldreiecks.

A *Anmerkung.* Die beiden letzten Sätze sind identisch mit den planimetrischen: 1. Die Höhen eines Dreiecks gehen durch einen Punkt; 2. die Fußpunkte der Höhen eines Dreiecks bilden ein zweites Dreieck, dessen Winkel von den Höhen des ersten halbiert werden.

113 **113.\* Rechtwinkliges Strahlenpaar einer Involution.**

*Lehrsatz:* In jeder Strahleninvolution gibt es zwei homologe Strahlen, die auf einander senkrecht stehen.

Konstruktion des rechtwinkligen Strahlenpaares: Die Strahleninvolution  $S$  sei durch den Wurf  $aa_1 \cdot bb_1$  (Fig. 74) gegeben <sup>(63s)</sup>. Ein Kreis, der durch den Punkt  $S$  geht, wird, weil der Kreis eine Kurve zweiter Ordnung ist <sup>(42 Z)</sup>, von der Strahleninvolution  $S$  in einer krummen Punktinvolution geschnitten, die durch die Punktpaare  $AA_1 \cdot BB_1$ , in denen die Strahlenpaare  $aa_1 \cdot bb_1$  den Kreis schneiden, bestimmt ist. Verbinden wir das Involutionzentrum <sup>(79)</sup>, den Schnittpunkt von  $AA_1$  und  $BB_1$ , mit dem Mittelpunkt des Kreises und projizieren die Schnittpunkte dieser Verbindungslinie und des

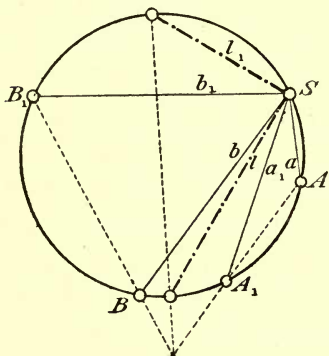


Fig. 74.

Kreises aus  $S$  durch  $l$  und  $l_1$ , so sind  $l$  und  $l_1$  die beiden homologen Strahlen, die auf einander senkrecht stehen.

Z *Zusatz.* 1. Ist die Involution hyperbolisch, so können wir, wenn die Ordnungselemente bekannt sind, die gesuchten Strahlen bequem zeichnen: sie sind die Halbierungslinien der von den Ordnungsstrahlen gebildeten beiden Winkel. Denn diese Halbierungslinien stehen auf einander senkrecht und sind, weil sie durch die Ordnungsstrahlen harmonisch getrennt werden <sup>(28s)</sup>, zwei homologe Strahlen der Involution <sup>(63s)</sup>.

2. Ist der Mittelpunkt der Strahleninvolution ein uneigentlicher Punkt, so bildet die uneigentliche Gerade mit

der ihr homologen eigentlichen Gerade das rechtwinklige Strahlenpaar<sup>(112b)</sup>.

114.\* **Konjugierte Durchmesser.** Die in § 7 bewie- 114  
senen Sätze über Pol und Polare gelten allgemein für jede Gerade und ihren Pol; eine besondere Wichtigkeit haben sie aber für die unendlich ferne Gerade <sup>(3)</sup>  $o$  und ihren Pol  $O$ . Eine Reihe von Sätzen, die man in der Geometrie der Kegelschnitte zu beweisen pflegt, sind nichts anderes als Anwendungen unserer allgemeinen Sätze auf die uneigentliche Gerade. Da aber ihr Zusammenhang mit den Polareigenschaften einer Kurve durch eine von der unsrigen abweichende Ausdrucksweise verdeckt wird, so wollen wir die für die uneigentliche Gerade und ihren Pol geltenden Eigenschaften noch einmal in besondern Sätzen hervorheben. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein.

1. Die Polare eines uneigentlichen Punktes heißt ein *Durchmesser* der Kurve.

2. Der Pol der uneigentlichen Gerade, der Schnittpunkt der Durchmesser<sup>(90a)</sup>, heißt der *Mittelpunkt* der Kurve.

3. Zwei homologe Strahlen der konjugierten Strahleninvolution des Mittelpunktes heißen *konjugierte Durchmesser* oder, mit andern Worten<sup>(92a)</sup>: Zwei Durchmesser, von denen der eine durch den Pol des andern geht, heißen konjugiert.

4. Zwei Richtungen heißen konjugiert, wenn sie zwei konjugierten Durchmessern parallel sind.

5. Ein Durchmesser, der die uneigentliche Gerade in einem Punkte schneidet, der mit dem Pol des Durchmessers ein Punktpaar der zirkularen Punktinvolution<sup>(112a)</sup> bildet, heißt eine *Achse* der Kurve.

6. Jede Kurve hat zwei Achsen<sup>(113)</sup>.

115.\* **Beispiel.** Wie besondere Sätze aus unsern all- 115  
gemeinen gewonnen werden, soll an einem Beispiel ausführlich gezeigt werden. — Ist  $SS_1$  eine beliebige Sehne der Kurve und  $P_\infty$  ihr unendlich ferner Punkt, so geht die Polare von  $P_\infty$  1. weil  $P_\infty$  in der unendlich fernen Gerade liegt, durch den Mittelpunkt der Kurve<sup>(90a)</sup>; 2. durch den von  $P_\infty$  durch  $S$  und  $S_1$  harmonisch getrennten

Punkt <sup>(86a)</sup>, also durch die Mitte der Sehne  $SS_1$  <sup>(27a)</sup>; 3. durch den Schnittpunkt der Tangenten in  $S$  und  $S_1$  <sup>(86a)</sup>.

Lehrsatz: Der Schnittpunkt zweier Tangenten, die Mitte ihrer Berührungsehne und der Mittelpunkt der Kurve liegen in einer Gerade.

116

### 116.\* Parallele Sehnen.

1. Die Polaren der Punkte eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser <sup>(114a)</sup> parallel <sup>(90a)</sup>. Die Polaren der Punkte einer Achse <sup>(114a)</sup> stehen senkrecht auf der Achse <sup>(90a)</sup>.

2. Die Mitten paralleler Sehnen liegen in einem Durchmesser <sup>(86a)</sup>. — Jeder Durchmesser und die von ihm halbierten Sehnen haben konjugierte Richtungen <sup>(114a)</sup>.

3. Jeder Durchmesser, der die Kurve schneidet, wird durch den Mittelpunkt halbiert <sup>(86a)</sup>; die Tangenten in den Endpunkten dieser Durchmesser sind einander <sup>(87 Z<sub>1</sub>)</sup> und den vom Durchmesser halbierten Sehnen parallel <sup>(86a)</sup>.

4. Die Diagonalen jedes eingeschriebenen Parallelogramms schneiden sich im Mittelpunkt der Kurve <sup>(85)</sup>.

5. Die Diagonalen jedes umgeschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser <sup>(92a)</sup>; das zugeordnete Kurvenviereck ist ein Parallelogramm <sup>(59)</sup>.

6. Zwei Seiten eines Kurvendreiecks, dessen dritte Seite ein Durchmesser ist, haben konjugierte Richtungen.

Denn die Geraden, die die Mitte der dritten Seite, den Mittelpunkt der Kurve <sup>(116a)</sup>, mit den Mitten der beiden ersten Seiten verbinden, sind den beiden ersten parallel und konjugierte Durchmesser.

117

117.\* Symmetrische Lage der Kurvenpunkte zu zwei konjugierten Durchmessern. Sind  $d$  und  $d_1$  zwei konjugierte Durchmesser <sup>(114a)</sup> und  $S$  ein beliebiger Punkt der Kurve, so erhält man zwei neue Kurvenpunkte  $S_1$  und  $S_2$ , indem man durch  $S$  Parallelen zu  $d$  und  $d_1$  zieht und auf diesen die beiden Punkte  $S_1$  und  $S_2$  so bestimmt, daß die Strecken  $SS_1$  und  $SS_2$  durch  $d_1$  und  $d$  halbiert werden <sup>(86a)</sup>. Verbindet man noch  $S$  mit dem Schnittpunkt  $O$  der Durchmesser, dem Mittelpunkt der Kurve <sup>(114a)</sup>, und nimmt auf dieser Verbindungslinie einen Punkt  $S_3$  so an, daß  $SS_3$  durch  $O$  halbiert wird, so hat man vier Kurvenpunkte  $SS_1S_2S_3$ , die ein Parallelogramm bilden, dessen Seiten den konjugierten

Durchmessern parallel sind. Das Ergebnis drücken wir so aus:

Die Kurve liegt symmetrisch zu je zwei konjugierten Durchmessern.

### 118.\* Parallele Tangenten.

118

Aufgabe: *Die Tangente zu zeichnen, die einer gegebenen Tangente parallel ist.*

Lösung: Die Kurve sei durch  $S S_1 A$  und  $T$  gegeben<sup>(66 Z)</sup>. Wir wollen den Berührungspunkt der  $S T$  parallelen Tangente zeichnen. — Wir wählen auf  $S T$  den Punkt  $K$  so, daß  $T$  die Mitte von  $S K$  ist, und zeichnen zu dem Strahl  $S_1 K$  von  $S_1$  den zugeordneten von  $S$ . Wir verbinden also<sup>(48 Z)</sup> den Punkt  $D_1$ , in dem  $S_1 K$  die Sehne  $AS$  schneidet, mit  $T$  und den Punkt  $D$ , in dem diese Verbindungslinie  $D_1 T$  die Sehne  $AS_1$  schneidet, mit  $S$ . Der Schnittpunkt  $\Delta$  von  $SD$  und  $S_1 D_1$  ist der gesuchte; denn seine Tangente wird, wie eine Anwendung von Nr. 51<sub>2</sub> auf das von den Tangenten in  $S S_1 \Delta$  gebildete Dreieck ergibt, von dem Strahl  $\Delta T$  durch  $S$  und  $S_1$  harmonisch getrennt, schneidet also die Tangente von  $S$  in dem von  $T$  durch  $S$  und  $K$  harmonisch getrennten Punkte<sup>(21a)</sup>, d. i. im unendlich fernen<sup>(27a)</sup>. — Schneidet der Strahl  $SD$  den Strahl  $S_1 D_1$  im unendlich fernen Punkt  $\Delta$ , so ist die Tangente, weil sie den Punkt  $\Delta$  mit dem unendlich fernen Punkt von  $S T$  verbindet, die unendlich ferne Gerade. Auf diesen besondern Fall gehen wir in Nr. 127 näher ein.

*Zusatz.* Da sich also zu jeder Tangente eine ihr  $z$  parallele zeichnen läßt, so können wir jede Kurve auch als bestimmt<sup>(56 Z)</sup> ansehen durch zwei Punkte, deren Tangenten sich in einem unendlich fernen Punkte  $T_\infty$  schneiden, und einen beliebigen dritten Punkt  $A$ . Bezeichnen wir die beiden ersten Punkte durch  $S$  und  $S_1$  (nicht mehr, wie in der eben angegebenen Konstruktion, durch  $S$  und  $\Delta$ ), so können wir *jede Kurve als gegeben ansehen durch  $S S_1 A$  und  $T_\infty$ .*

*Anmerkung.* Bei der Zeichnung einer Kurve empfiehlt  $\Delta$  es sich, jedesmal die der Tangente in  $S$  parallele Tangente zu zeichnen, da die Verbindungslinie ihres Berührungspunktes und des Punktes  $S$ , als Polare<sup>(66 Z<sub>1</sub>)</sup> des unendlich fernen Punktes  $T_\infty$ , ein Durchmesser<sup>(114<sub>1</sub>)</sup> und die Mitte dieses Durchmessers der Mittelpunkt der Kurve<sup>(116<sub>a</sub>)</sup> ist.

119

119.\* **Achsen der Kurve.**

Aufgabe: *Die Achsen einer Kurve zu zeichnen.*

Lösung: Wir haben in der Strahleninvolution des Kurvenmittelpunktes die beiden homologen Strahlen zu zeichnen,

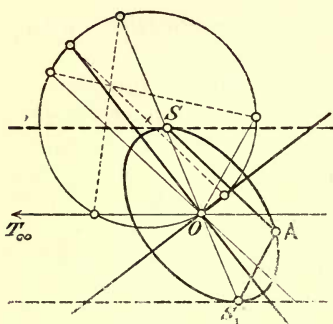



Fig. 75.

die auf einander senkrecht stehen<sup>(114a)</sup>. — Ist die Kurve durch  $SS_1A$  und  $T_\infty$  (Fig. 75) gegeben<sup>(118 Z)</sup>, die Mitte  $O$  von  $SS_1$ , also<sup>(118 A)</sup> der Kurvenmittelpunkt, so sind  $OT_\infty$  und  $OS$  zwei konjugierte Durchmesser; ein zweites Paar erhalten wir, indem wir  $O$  mit den Mitten der Seiten  $AS_1$  und  $AS$  verbinden<sup>(116a)</sup>. In der durch diese beiden Strahlenpaare bestimmten Involution zeichnen wir nach

Nr. 113 die beiden homologen Strahlen, die auf einander senkrecht stehen (Siehe Fig. 75).

120  120.\* **Definition der Ellipse und der Hyperbel.** Die konjugierte Strahleninvolution des Kurvenmittelpunktes  $O$  (oder die perspektiv zu ihr liegende<sup>(92a)</sup> Punktinvolution der unendlich fernen Gerade  $o$ ) ist charakteristisch für die Gestalt der Kurve. Liegt  $O$  auf seiner Polare  $o$ , so ist  $O$  ein Kurvenpunkt<sup>(86 Z<sub>3</sub>)</sup> und  $o$  seine Tangente und die konjugierte Strahleninvolution ist parabolisch<sup>(92<sub>1</sub>)</sup>. Wenn wir diesen Fall (den wir in Nr. 127 betrachten werden) vorläufig ausschließen, also annehmen, daß  $O$  ein eigentlicher Punkt ist, so kann die Strahleninvolution des Kurvenmittelpunktes  $O$  elliptisch oder hyperbolisch sein.

1. Definition: *Eine Kurve, für welche die konjugierte Strahleninvolution des Mittelpunktes elliptisch (hyperbolisch) ist, heißt eine Ellipse (Hyperbel).*

Da die Strahleninvolution von  $O$  perspektiv liegt zu der konjugierten Punktinvolution der Polare  $o$ <sup>(92a)</sup>, so haben wir:

2. Eine Ellipse hat keinen unendlich fernen Punkt; eine Hyperbel hat zwei unendlich ferne Punkte.

121.\* **Durchmesser der Ellipse und der Hyperbel.** <sup>121</sup>

1. Der Mittelpunkt der Ellipse ist ein elliptischer Punkt<sup>(105<sub>1</sub>)</sup>.

2. Jeder Durchmesser schneidet die Ellipse<sup>(107)</sup>; insbesondere: jede der beiden Achsen schneidet die Ellipse; die Schnittpunkte einer Achse mit der Ellipse heißen Scheitel; die Tangenten in den Scheiteln einer Achse stehen senkrecht auf der Achse<sup>(87 Z<sub>1</sub>)</sup>.

3. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist ein hyperbolischer Punkt<sup>(105<sub>1</sub>)</sup>; die durch ihn gehenden Tangenten<sup>(105<sub>2</sub>)</sup> heißen *Asymptoten*. Die Berührungspunkte der Asymptoten sind die unendlich fernen Punkte der Hyperbel<sup>(86 Z<sub>1</sub>)</sup>.

4. Je zwei konjugierte Durchmesser werden durch die Asymptoten harmonisch getrennt<sup>(63<sub>3</sub>)</sup>.

5. Die beiden Geraden, welche die von den Asymptoten gebildeten Winkel halbieren, sind die Achsen der Hyperbel<sup>(113 Z<sub>1</sub>)</sup>.

6. Von zwei konjugierten Durchmessern schneidet der eine die Hyperbel, der andere nicht<sup>(110<sub>1</sub>)</sup>; insbesondere: von den beiden Achsen schneidet die eine die Hyperbel, die andere nicht. Die Achse, welche die Hyperbel schneidet, heißt die Hauptachse; ihre Schnittpunkte mit der Hyperbel heißen Scheitel; die Tangenten in den Scheiteln stehen senkrecht auf der Hauptachse<sup>(87 Z<sub>1</sub>)</sup>.

122.\* **Hyperbeltangenten.** Nennen wir die beiden <sup>122</sup> Asymptoten der Hyperbel  $m$  und  $n$  und ihre unendlich fernen Berührungspunkte<sup>(121<sub>2</sub>)</sup>  $M$  und  $N$  und einen beliebigen Punkt der Hyperbel  $A$ , so bilden  $AMN$  ein Kurvendreieck, von dem die eine Seite  $MN$  die unendlich ferne Gerade ist. Wenden wir auf dies Kurvendreieck den Satz Nr. 51<sub>1</sub> an, so ergibt sich, daß die Seite  $MN$  die Tangente  $\alpha$  der gegenüberliegenden Ecke  $A$  in einem Punkte  $K$  schneidet, der von  $A$  durch  $m$  und  $n$  harmonisch getrennt ist. Da aber  $K$  der unendlich ferne Punkt von  $\alpha$  ist, so ist  $A$  die Mitte<sup>(27<sub>2</sub>)</sup> der Strecke, die von  $m$  und  $n$  auf  $\alpha$  begrenzt wird:

1. Die Strecke, welche auf einer beliebigen Hyperbeltangente von den beiden Asymptoten begrenzt wird, wird durch den Berührungspunkt halbiert. —

Sind  $A$  und  $B$  (Fig. 76) zwei beliebige Punkte der Hyperbel, so bilden sie mit den beiden unendlich fernen Punkten  $M$  und  $N$  ein Kurvenviereck, dessen einer Diagonal-

punkt  $R$  der unendlich ferne Punkt von  $AB$  ist, während die Verbindungslinie der beiden andern  $P$  und  $Q$  die Sehne  $AB$  in  $C$  halbiert<sup>(86z)</sup>. Schneidet die Tangente  $\alpha$  des Punktes  $A$  die drei Diagonallinien des Kurvenvierecks  $ABMN$

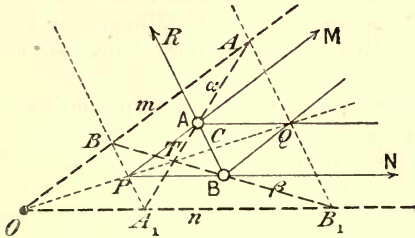


Fig. 76.

in den drei Punkten  $T$ ,  $A$  und  $A_1$ , so ergeben die Verbindungslinien  $TB$ ,  $AM$ ,  $A_1N$  die Tangente  $\beta$  in  $B$  und die beiden Asymptoten  $m$  und  $n$ <sup>(53)</sup>. Die Tangente  $\beta$  schneidet die Asymptote  $m$  in einem Punkte  $B$  der Diagonallinie  $PR$  und die Asymptote  $n$  in einem Punkte  $B_1$  der Diagonallinie  $QR$ . Da  $R$  der unendlich ferne Punkt von  $AB$ , d. h.<sup>(9)</sup> da  $AB_1 \parallel AB \parallel A_1B$  ist, so haben wir:

2. Die Asymptoten einer Hyperbel schneiden zwei beliebige Tangenten in den Ecken eines Trapezes, dessen Grundlinien der Berührungssehne der beiden Tangenten parallel sind. —

Aus  $AB_1 \parallel A_1B$  ergibt sich weiter: Dreieck  $A_1BA = A_1BB_1$ ; addieren wir zu jedem dieser Dreiecke das Dreieck  $A_1BO$ , so ist  $OAA_1 = OBB_1$ :

3. Jede Tangente begrenzt mit den beiden Asymptoten ein Dreieck von unveränderlichem Inhalt.

123 <sup>123</sup>\* **Hyperbelsehne.** Die Diagonallinie  $PQ$  (Fig. 76), welche die Sehne  $AB$  in  $C$  halbiert<sup>(122a)</sup>, geht, weil sie der Vierecksseite  $MN$  zugeordnet ist<sup>(16Z)</sup>, durch den Schnittpunkt  $O$  der Asymptoten  $m$  und  $n$ <sup>(53)</sup>, also durch den Kurvenmittelpunkt<sup>(87Z<sub>1</sub>)</sup>. Da ferner  $R$  der Pol der Diagonallinie  $PQ$  ist<sup>(86<sub>1</sub>)</sup>, so sind  $OR$  und  $OC$  konjugierte Durchmesser<sup>(114<sub>2</sub>)</sup>, werden also<sup>(121<sub>1</sub>)</sup> durch die Asymptoten  $m$  und  $n$  harmonisch getrennt;  $C$  ist daher<sup>(27<sub>2</sub>)</sup> auch die Mitte der von den Asymptoten  $m$  und  $n$  auf der Sehne  $AB$  begrenzten Strecke:

Die Mitte einer Hyperbelsehne ist zugleich die Mitte der von den Asymptoten auf der Sehne begrenzten Strecke.



124.\* **Kennzeichen für die Ellipse und die Hyperbel.** <sup>124</sup>

Ist eine Kurve durch  $SS_1A$  und  $T_\infty$  gegeben<sup>(118 Z)</sup>, so läßt sich ein einfaches Kennzeichen dafür angeben, ob die Kurve eine Ellipse oder Hyperbel ist. Die unendlich ferne Gerade, die durch  $T_\infty$  geht, hat nämlich mit der Kurve keinen Punkt oder zwei Punkte gemein, je nachdem sie von  $A$  durch die parallelen Tangenten  $s$  und  $s_1$  in  $S$  und  $S_1$  getrennt ist oder nicht<sup>(109)</sup>. Ziehen wir also durch  $A$  eine beliebige Gerade, welche  $s$  und  $s_1$  in  $C$  und  $D$  schneidet, so ist die Kurve eine Ellipse oder Tangente, je nachdem  $A$  auf  $CD$  oder auf  $C'D$ <sup>(5)</sup> liegt<sup>(111)</sup>. Sagen wir im ersten Fall, daß der Punkt innerhalb, im zweiten, daß er außerhalb der parallelen Tangenten  $s$  und  $s_1$  liegt, so haben wir den

**Lehrsatz:** Eine Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem ein beliebiger ihrer Punkte durch irgend zwei parallele Tangenten von der unendlich fernen Gerade getrennt wird oder nicht; oder mit andern Worten: je nachdem ein beliebiger Kurvenpunkt innerhalb oder außerhalb irgend zweier parallelen Tangenten liegt.

125.\* **Abschnitte auf zwei parallelen Tangenten.** <sup>125</sup>

Ist eine Kurve durch  $SS_1A$  und  $T_\infty$  (Fig. 77) gegeben<sup>(118 Z)</sup>, so erhalten wir einen neuen Kurvenpunkt  $\Delta$ <sup>(48 Z)</sup>, indem wir irgend eine Parallele zu der Tangente  $ST_\infty = s$  ziehen und die Punkte  $D$  und  $D_1$ , in denen sie von den Seiten  $AS_1$  und  $AS$  des Kurvendreiecks  $AS S_1$  geschnitten wird, aus  $S$  und  $S_1$  projizieren. Bezeichnen wir noch die Punkte, in denen die Tangente  $s$  von  $AS_1$  und  $\Delta S_1$  geschnitten wird, durch  $K$  und  $L$ , und die Punkte, in denen die Tangente  $S_1 T_\infty = s_1$  von  $AS$  und  $\Delta S$  geschnitten wird, durch  $K_1$  und  $L_1$ , so ergibt sich aus der Figur

$$\frac{SK}{L_1 S_1} = \frac{DS}{D L_1} = \frac{D_1 S}{D_1 K_1} = \frac{SL}{K_1 S_1},$$

folglich  $SK \cdot K_1 S_1 = SL \cdot L_1 S_1$ , folglich

$$SK \cdot S_1 K_1 = SL \cdot S_1 L_1.$$

Unser Produkt hat also denselben Wert, ob wir von dem Kurvendreieck  $SS_1A$  oder von dem Kurvendreieck  $S S_1 \Delta$  ausgehen, mit andern Worten: *Das Produkt ist konstant.* Bezeichnen wir diesen konstanten Wert durch  $\pm 4b^2$ , so



sind zwei konjugierte Durchmesser<sup>(114a)</sup>. Schneidet die Verbindungslinie  $A T_\infty$  den Durchmesser  $S S_1$  in  $Q$ , so ist

$$\frac{QA}{SK} = \frac{S_1 Q}{S_1 S}; \quad \frac{QA}{S_1 K_1} = \frac{SQ}{S S_1},$$

folglich 
$$\frac{QA^2}{SK \cdot S_1 K_1} = \frac{SQ \cdot S_1 Q}{S S_1 \cdot S_1 S} = \frac{QS \cdot S_1 Q}{S S_1^2}.$$

Beziehen wir den Kurvenpunkt  $A$  auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Achsen die beiden konjugierten Durchmesser  $OS$  und  $OT_\infty$  sind, und bezeichnen daher  $OQ$  durch  $x$  und  $QA$  durch  $y$ , so ist, wenn wir noch  $S S_1 = 2a$  setzen,  $QS \cdot S_1 Q = a^2 - x^2$  und ferner

für eine Ellipse:  $\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$ , folglich  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

für eine Hyperbel:  $-\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$ , folglich  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

127.\* **Parabel.** Wir wenden uns jetzt zu dem Fall, den <sup>127</sup> wir in Nr. 120 ausgeschlossen haben, dafs nämlich die konjugierte Strahleninvolution des Kurvenmittelpunktes parabolisch ist.

1. Definition: *Eine Kurve, für welche die konjugierte Strahleninvolution des Mittelpunktes parabolisch ist, heifst eine Parabel.*

2. Der Mittelpunkt der Parabel ist ein parabolischer Punkt<sup>(105a)</sup> und daher<sup>(105a)</sup> ein Kurvenpunkt.

3. Die unendlich ferne Gerade, als Polare des Mittelpunktes<sup>(114a)</sup>, ist eine Tangente der Parabel<sup>(86 Z<sub>2</sub>)</sup>. Der Mittelpunkt, als Berührungspunkt dieser Tangente, ist ein unendlich ferner Punkt.

4. Jede Kurve, die die unendlich ferne Gerade berührt, ist eine Parabel; denn der Pol der unendlich fernen Gerade  $o$ , der Mittelpunkt<sup>(114a)</sup>  $O$  der Kurve, ist der Berührungspunkt von  $o$ <sup>(87 Z<sub>2</sub>)</sup>; die konjugierte Strahleninvolution eines Kurvenpunktes aber ist parabolisch<sup>(92<sub>7</sub>)</sup>.

5. Jeder Durchmesser schneidet die Parabel (im unendlich fernen Mittelpunkt und daher<sup>(52)</sup> noch) in einem eigentlichen Punkt. —

Weil die unendlich ferne Gerade eine Tangente ist, so wird die Parabel durch vier Stücke bestimmt<sup>(60 Z)</sup>:



jugierte Punkte des Durchmessers durch  $A$  und  $O$  harmonisch getrennt werden <sup>(92a)</sup>, so sind sie gleich weit von  $A$  entfernt <sup>(27a)</sup>:

2. Der eigentliche Punkt, in dem ein Durchmesser von der Parabel geschnitten wird, ist die Mitte zwischen je zwei konjugierten Punkten des Durchmessers.

129.\* **Tangentendreieck.** Es seien  $SS_1A$  (Fig. 79) <sup>129</sup> drei beliebige Punkte einer Parabel, von der  $O$  der unendlich ferne Punkt sei. Auf das Kurvenviereck  $SS_1AO$  wenden wir den Satz Nr. 59 an: Das Diagonaldreieck  $PQR$  des Kurvenvierecks  $SS_1AO$  ist dasselbe wie das Diagonaldreieck des zugeordneten Kurvenvierecks  $ss_1\alpha o$ ; drei Ecken dieses Vierseits sind die Punkte, in denen die drei Seiten des Diagonaldreiecks  $PQR$  von der unendlich fernen Gerade  $o$  geschnitten werden; die Gegenecken  $TM M_1$  dieser drei Ecken, in denen sich die Tangenten  $s s_1 \alpha$  schneiden, müssen daher die Mitten <sup>(27a)</sup> der Seiten des Diagonaldreiecks  $PQR$  sein:

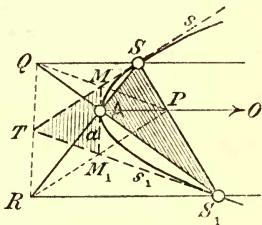


Fig. 79.

1. Die Tangenten in drei beliebigen Parabelpunkten halbieren die Diagonallinien desjenigen Kurvenvierecks, das von den drei Punkten und dem unendlich fernen Punkt der Parabel gebildet wird. —

Vermittelst dieses Lehrsatzes ergibt sich aus der Figur:

$$\text{Dreieck } RS_1Q = RS_1S$$

$$\text{Dreieck } RS_1A = RS_1A$$

$$\text{Dreieck } QRA = SS_1A$$

$$\text{Dreieck } QRA = 2 TMM_1$$

$$\text{Dreieck } SS_1A = 2 TMM_1.$$

2. Jedes Kurvendreieck einer Parabel ist doppelt so groß wie das zugeordnete Kurvendreieck. —

Schalten wir zwischen  $S$  und  $A$  einen Parabelpunkt  $B$  und zwischen  $S_1$  und  $A$  einen Parabelpunkt  $\Gamma$  ein und wenden auf jedes der Kurvendreiecke  $SAB$  und  $S_1A\Gamma$  unsern Satz an, so erkennen wir durch unbegrenzt fortgesetztes Einschalten von Parabelpunkten, daß die von der beliebigen Sehne  $SS_1$  und der Parabel begrenzte Fläche

doppelt so groß ist wie das außerhalb der Parabel liegende Flächenstück des Dreiecks  $SS_1T$ :

3. Das Dreieck, welches von zwei Parabeltangente und ihrer Berührungsehne gebildet wird, ist  $\frac{3}{2}$  mal so groß wie das zugehörige Parabelsegment.

130. \* **Gleichung der Parabel.** Sehen wir eine Parabel als gegeben an durch  $SS_1A$  und  $T_\infty$  <sup>(118 Z)</sup>, so muß, weil  $SS_1$  ein Durchmesser ist <sup>(118 A)</sup>, der Punkt  $S_1$  (oder  $S$ ) in den unendlich fernen Punkt  $O$  der Parabel fallen <sup>(127 s)</sup>, so daß  $T_\infty O$  ( $T_\infty S_1$ ) die unendlich ferne Gerade <sup>(3)</sup> ist. — Wir zeichnen einen vierten Kurvenpunkt  $\Delta$  <sup>(48 Z)</sup>, indem wir irgend zwei Punkte  $D$  und  $D_1$  (Fig. 80) in den Seiten  $AO$  und  $AS$  des Kurvendreiecks  $AOS$ , die mit  $T_\infty$  in einer Gerade liegen, aus  $S$  und  $O$  projizieren,

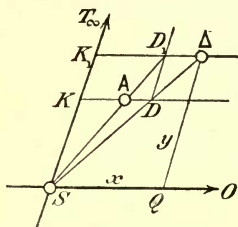


Fig. 80.

und bezeichnen die Punkte, in denen die Tangente  $ST_\infty$  von  $OA$  und  $O\Delta$  geschnitten wird, durch  $K$  und  $K_1$ . Weil  $KD = K_1D_1$  ist, so ergibt sich

$$\frac{SK}{KA} = \frac{SK_1}{K_1D_1}; \quad \frac{SK}{KD} = \frac{SK_1}{K_1\Delta},$$

$$\text{folglich: } \frac{SK^2}{KA} = \frac{SK_1^2}{K_1\Delta}.$$

Ziehen wir durch  $\Delta$  zur Tangente  $ST_\infty$  eine Parallele, welche den Durchmesser  $SO$  in  $Q$  schneidet, und bezeichnen  $SQ = K_1\Delta$  durch  $x$  und  $Q\Delta = SK_1$  durch  $y$ , so ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung, daß  $Q\Delta^2 : SQ = y^2 : x$  einen konstanten Wert hat. Bezeichnen wir diesen durch  $2p$ , so ist

$$y^2 = 2px$$

die Gleichung einer Parabel, bezogen auf ein Achsensystem, das gebildet wird von einer beliebigen Tangente und dem durch ihren Berührungspunkt gehenden Durchmesser.

131. \* **Kreis.**

1. Definition: Eine Kurve, für welche die konjugierte Strahleninvolution des Mittelpunktes zirkular <sup>(112)</sup> ist, heißt ein Kreis.

2. Eine Kurve ist ein Kreis, wenn zwei Durchmesser auf ihren konjugierten senkrecht stehen <sup>(112<sub>a</sub>)</sup>.

3. Eine Kurve, der die zirkuläre Punktinvolution der unendlich fernen Gerade konjugiert ist, ist ein Kreis <sup>(92<sub>a</sub> u. 112<sub>a</sub>)</sup>.

4. Der Mittelpunkt des Kreises ist ein elliptischer Punkt <sup>(112<sub>b</sub>)</sup>.

5. Der Kreis wird von jedem seiner Durchmesser geschnitten <sup>(107)</sup>.

6. Zwei Seiten eines Kreisdreiecks, dessen dritte Seite ein Durchmesser ist, stehen auf einander senkrecht <sup>(116<sub>a</sub>)</sup>; oder: Der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ist ein rechter.

7. Die Durchmesser eines Kreises sind einander gleich; denn die Strecke, welche die Mitte der Hypotenuse mit der Gegenecke verbindet, ist halb so groß wie die Hypotenuse. —

8. Das von einem beliebigen Punkt auf seine Polare gefällte Lot geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Ist nämlich  $P$  ein beliebiger Punkt, so ist dem durch  $P$  gehenden Durchmesser  $OP$  das in  $O$  auf  $OP$  errichtete Lot konjugiert <sup>(131<sub>1</sub>)</sup>; die Polare des Punktes  $P$  steht daher, weil sie durch den unendlich fernen Punkt dieses Lotes gehen muß <sup>(90<sub>2</sub>)</sup>, senkrecht auf  $OP$ . —

Ein besonderer Fall des vorhergehenden Satzes ist:

9. Jede Kreistangente steht auf dem Radius ihres Berührungspunktes senkrecht;

denn die Polare eines Kreispunktes ist seine Tangente <sup>(86 Z<sub>3</sub>)</sup>.

132.\* **Konstruktion des Kreises.** In Nr. 100 haben <sup>132</sup> wir eine Kurve gezeichnet, für welche ein Punkt und zwei konjugierte Involutionen gegeben sind. Ein besonderer Fall dieser Aufgabe ist die folgende

1. Aufgabe: *Einen Kreis zu zeichnen, für welchen ein Punkt und eine konjugierte Punktinvolution gegeben sind.*

Zu den gegebenen Stücken tritt noch hinzu die zirkuläre Punktinvolution der unendlich fernen Gerade  $o$  <sup>(131<sub>2</sub>)</sup>. Wir erhalten daher, der *Analysis* von Nr. 100 entsprechend, indem wir  $g^2$  mit der zirkulären Punktinvolution  $o^2$  zusammenfallen lassen, die folgende Konstruktion. — Ist dem unendlich fernen Punkte  $U$  von  $h$  der Punkt  $H$  (Fig. 81)







den Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  durch die Eigenschaft verbunden, daß je drei Punkten  $C \Gamma A$  der Träger  $g h u$ , die in einer Gerade liegen, drei Punkte  $C_1 \Gamma_1 B$  homolog sind, die wieder in einer Gerade liegen.

ist mit den Involutionen  $G^2$  und  $H^2$  durch die Eigenschaft verbunden, daß je drei Strahlen  $e \gamma a$  der Strahlenmittelpunkte  $G H U$ , die durch einen Punkt gehen, drei Strahlen  $e_1 \gamma_1 b$  homolog sind, die wieder durch einen Punkt gehen.

z *Zusatz.* Von dem vorstehenden Satze soll noch ein zweiter Beweis gegeben werden, da wir von den in ihm benutzten Schlüssen später<sup>(141s u. 169)</sup> Gebrauch zu machen haben. — Dreht sich ein Strahl  $a$ , der  $g$  und  $h$  in  $C$  und  $\Gamma$  und  $u$  in  $A$  schneidet, um einen beliebigen Punkt  $S$ , so beschreibt die Verbindungslinie  $a_1$  der homologen Punkte  $C_1$  und  $\Gamma_1$  einen krummen Strahlenbüschel<sup>(42)</sup>; denn es ist

$$C_1^{(63\gamma)} \overline{\wedge} C \overline{\wedge} S(C) \overline{\wedge} \Gamma^{(63\gamma)} \overline{\wedge} \Gamma_1.$$

Geht der Strahl  $a$  durch  $U = g h$ , so fällt  $C_1$  in  $G$  und  $\Gamma_1$  in  $H$ , die Diagonale  $u$  ist also ein Strahl des krummen Büschels. Bezeichnen wir daher  $u(a_1)$  durch  $B$ , so beschreiben  $A$  und  $B$  in  $u$  zwei projektive Punktreihen<sup>(50)</sup>. Wenn  $a$  durch  $G$  geht, fällt  $a_1$  in  $h$  und daher  $B$  in  $H$ ; wenn  $a$  durch  $H$  geht, fällt  $a_1$  in  $g$  und daher  $B$  in  $G$ . Der Punkt  $G$  entspricht also dem Punkt  $H$  zweifach, so daß die von  $A$  und  $B$  beschriebenen Punktreihen in involutorischer Lage sind<sup>(63a)</sup>.

Dreht sich der Strahl  $a$  um einen andern beliebigen Punkt  $S_1$ , so erhalten wir, wie sich in derselben Weise ergibt, in  $u$  wiederum eine Involution; diese ist aber mit der ersten identisch<sup>(63s)</sup>, weil sie mit ihr außer dem Punktpaar  $G H$  noch ein zweites Punktpaar gemeinsam hat, dasjenige Punktpaar nämlich, welches sich ergibt, wenn  $a$  in die Verbindungslinie  $S S_1$  fällt.

A *Anmerkung.* Zur Begründung der eingeführten Namen weisen wir auf den besondern Fall hin, daß die beiden Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  hyperbolisch sind. Bezeichnen wir die Ordnungspunkte von  $g^2$  durch  $K$  und  $K_1$ , die Ordnungspunkte von  $h^2$  durch  $L$  und  $L_1$  und den Punkt, in dem die Diagonallinie  $u$  von der Verbindungslinie  $K L$  geschnitten wird, durch  $V$ , so muß der Punkt  $V$ , weil  $K$  und  $L$  und daher auch die Verbindungslinie  $K L$  sich selbst entsprechen,

ein Ordnungspunkt der diagonalen Involution  $u^2$  sein. Aus denselben Gründen muß die Verbindungslinie  $K_1 V$  den Träger  $h$  in einem sich selbst entsprechenden Punkte, also in  $L_1$  schneiden, so daß  $V$  ein Diagonalkpunkt des von den Ordnungspunkten  $K K_1 L L_1$  gebildeten Vierecks ist. Ebenso ergibt sich, daß der Schnittpunkt  $W$  der Gegenseiten  $K L_1$  und  $K_1 L$  ein Ordnungspunkt der diagonalen Involution  $u^2$  ist. Die drei Paar Ordnungspunkte  $K K_1, L L_1, V W$  sind also die drei Paar Gegenecken eines Vierseits, so daß unser Satz eine Verallgemeinerung von Nr. 104<sub>1</sub> und mithin eine weitergehende Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes<sup>(104 Z)</sup> ist. — Den Inbegriff der beiden Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  nennt man sonst wohl imaginäres Viereck; wenn wir auch diese Bezeichnung ablehnen, so haben wir doch, um keine neuen Namen bilden zu müssen, die Bezeichnungen Gegenseiten, Diagonalkpunkt und Diagonallinie beibehalten.

**134. Hauptinvolution.** Eine beliebige Gerade  $a$ , welche die Gegenseiten und ihre Diagonallinie in den Punkten  $C \Gamma A$  schneidet, möge von der Gerade  $a_1$ , in der die homologen Punkte  $C_1 \Gamma_1 B$  liegen<sup>(133)</sup>, in dem Punkte  $A$  geschnitten werden. Der Wurf  $C \Gamma . A A$  bestimmt in  $a$  eine Involution<sup>(63a)</sup>, die wir die *Hauptinvolution* der Gerade  $a$  nennen.

**Definition:** Zwei Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$  induzieren in jeder Gerade  $a$  eine Involution, die wir die den Gegenseiten  $(gh)$  zugeordnete Hauptinvolution von  $a$  nennen. Ein Punktpaar dieser Hauptinvolution  $a^2$  wird gebildet von den Punkten  $C$  und  $\Gamma$ , in denen  $a$  von  $g$  und  $h$  geschnitten wird; ein zweites von den Punkten  $A$  und  $A$ , in denen  $a = C \Gamma$  von der Diagonallinie  $u$  und der Verbindungslinie der homologen Punkte  $C_1$  und  $\Gamma_1$  geschnitten wird.

**Definition:** Zwei Gegenecken  $G^2$  und  $H^2$  induzieren in jedem Punkte  $A$  eine Involution, die wir die den Gegenecken  $(GH)$  zugeordnete Hauptinvolution von  $A$  nennen. Ein Strahlenpaar dieser Hauptinvolution  $A^2$  wird gebildet von den Strahlen  $c$  und  $\gamma$ , welche  $G$  und  $H$  aus  $A$  projizieren; ein zweites von den Strahlen  $a$  und  $\alpha$ , durch welche der Diagonalkpunkt  $U$  und der Schnittpunkt der homologen Strahlen  $c_1$  und  $\gamma_1$  aus  $A = c \gamma$  projiziert werden.

**Zusatz.** Geht die Gerade  $a$  durch  $U$ , so daß  $C$  und  $z$

$\Gamma$  in  $U$  liegen, so fällt  $C_1$  in  $G$  und  $\Gamma_1$  in  $H$ , die Gerade  $a_1 = C_1 \Gamma_1$  also in  $u$ . Weil mithin die Punkte  $C$  und  $\Gamma$ ,  $A$  und  $A$  zusammenfallen, so haben wir:

Geht die Gerade  $a$  durch den Diagonalepunkt  $U$ , so ist ihre Hauptinvolution hyperbolisch und hat die Ordnungspunkte  $U$  und  $A$ .

Liegt der Punkt  $A$  in der Diagonallinie  $u$ , so ist seine Hauptinvolution hyperbolisch und hat die Ordnungsstrahlen  $u$  und  $a$ .

**A** *Anmerkung.* Sind die Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  hyperbolisch, so werden die Punkte  $C$  und  $C_1$  durch die Ordnungspunkte  $K$  und  $K_1$  harmonisch getrennt<sup>(63a)</sup>. Wir wissen daher aus Nr. 104<sub>2</sub>, daß  $A$  und  $A$  zwei homologe Punkte derjenigen Involution sind, die die Gegenseiten des Vierecks  $KK_1LL_1$  in  $a$  ausschneiden; da auch  $g$  und  $h$  zwei Gegenseiten dieses Vierecks sind, so sind auch  $C$  und  $\Gamma$  zwei homologe Punkte dieser Involution. *Unsere Hauptinvolution*  $a^2 = C\Gamma \cdot AA$  ist also für den Fall, daß  $g^2$  und  $h^2$  hyperbolisch sind, *identisch mit der Involution, welche durch die Gegenseiten des von den Ordnungspunkten gebildeten Vierecks in  $a$  ausgeschnitten wird*<sup>(102 Z)</sup>.

135

**135. Darstellung zweier Gegenseiten.** Bei der großen Wichtigkeit, welche den Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$  und ihrer diagonalen Involution  $u^2$  für unsere weiteren Betrachtungen zukommt, ist es notwendig, sich eine klare Vorstellung zu bilden von der Figur, durch welche diese drei Involutionen dargestellt werden. — Sie besteht aus fünf Geraden (Fig. 83), die beliebig angenommen werden können: den Trägern  $ghu$ , die das Dreieck  $UGH$  bilden, und zwei Geraden  $a$  und  $a_1$ , die die Seiten dieses Dreiecks in den Punkten  $C\Gamma A$  und  $C_1\Gamma_1 B$ , und einander in  $A$

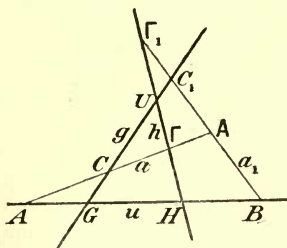


Fig. 83.

schneiden. Die Involutionen sind dann

1. Gegenseiten:  $g^2 = UG \cdot CC_1$ ;  $h^2 = UH \cdot \Gamma\Gamma_1$ ;
2. Diagonale Involution:  $u^2 = GH \cdot AB$ ;
3. Hauptinvolutionen:  $a^2 = C\Gamma \cdot AA$ ;  $a_1^2 = C_1\Gamma_1 \cdot BA$ .

**A** *Anmerkung.* Da zwei Gegenseiten ein Viereck darstellen<sup>(133 A)</sup>, wenn sie hyperbolisch sind, so stellt unsere

Figur eine Verallgemeinerung des Vierecks dar; sie ist daher für die folgenden Betrachtungen ebenso wichtig wie für die früheren das Viereck.

136. **Konstruktion von homologen Punkten der diagonalen Involution.** Um weitere Punktpaare der diagonalen Involution  $GH.AB^{(135a)}$  zu erhalten, legt man

durch  $A$  (Fig. 84) einen beliebigen Strahl, welcher  $g$  und  $h$  in  $D$  und  $\Delta$  schneidet. Die vier Punkte  $C_1 \Gamma_1 D \Delta$  bilden dann ein Viereck, von dem zwei Paar Gegenseiten die Diagonallinie  $u$

in homologen Punkten schneiden; es schneiden daher<sup>(64 z)</sup> auch die Gegenseiten  $C_1 \Delta$  und  $\Gamma_1 D$  die Diagonallinie  $u$  in zwei homologen Punkten  $G_1$  und  $H_1$  der diagonalen Involution.

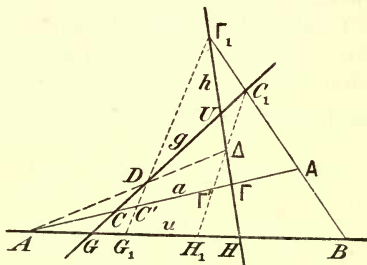


Fig. 84.

*Zusatz.* Da zwei Paar Gegenseiten des Vierecks  $C_1 \Gamma_1 D \Delta$  auch die Gerade  $C\Gamma = a$  in homologen Punkten der Hauptinvolution  $a^2 = C\Gamma.AA^{(135a)}$  schneiden, so schneiden die Gegenseiten  $C_1 \Delta$  und  $\Gamma_1 D$  auch die Gerade  $a$  in homologen Punkten  $C'$  und  $\Gamma'$  der Hauptinvolution. Man erhält also mit den Punktpaaren der diagonalen Involution zugleich die Punktpaare der Hauptinvolution  $a^2$ .

137. **Ordnungspunkte zweier Gegenseiten und ihrer diagonalen Involution.** Um aus einzelnen der folgenden Sätze besondere Fälle ableiten zu können, haben wir uns mit der Frage zu beschäftigen, wann die diagonale Involution Ordnungspunkte hat.

Sind die Punktwürfe  $UG.CC_1$  (Fig. 83) und  $UH.\Gamma\Gamma_1$  beide elliptisch, so sind auch die Strahlenwürfe  $A(UG.CC_1)$  und  $A(UH.\Gamma\Gamma_1)$  beide elliptisch<sup>(111)</sup>, d. h.<sup>(102)</sup> der Strahl  $A(G)$  wird von dem Strahle  $A(U)$  durch  $a$  und  $a_1$  getrennt und der Strahl  $A(H)$  wird von  $A(U)$  durch  $a$  und  $a_1$  getrennt; der Strahl  $A(G)$  wird also von dem Strahl  $A(H)$  durch  $a$  und  $a_1$  nicht getrennt; d. h. die vier Strahlen  $A(GH.AB)$  und mithin<sup>(111)</sup> auch die Punkte  $GH.AB$  bilden einen hyperbolischen Wurf. — Sind  $UG.CC_1$  und  $UH.\Gamma\Gamma_1$  beide

hyperbolisch, so ergibt sich ebenso, daß  $GH.AB$  ein hyperbolischer Wurf ist.

Ist der Wurf  $UG.CC_1$  elliptisch, der Wurf  $UH.\Gamma\Gamma_1$  hyperbolisch, so wird  $A(G)$  von  $A(U)$  durch  $a$  und  $a_1$  getrennt;  $A(H)$  dagegen wird von  $A(U)$  durch  $a$  und  $a_1$  nicht getrennt; folglich wird  $A(G)$  von  $A(H)$  getrennt; der Punktwurf  $GH.AB$  ist daher elliptisch:

1. Sind die Würfe, welche von zwei Geraden in zwei Seiten eines Dreiecks bestimmt werden, entweder beide elliptisch oder beide hyperbolisch, so ist der in der dritten Seite bestimmte Wurf hyperbolisch. — Ist der eine der beiden Würfe elliptisch, der andere hyperbolisch, so ist der dritte elliptisch. —

1. Sind die Würfe, welche von zwei Punkten in zwei Ecken eines Dreiseits bestimmt werden, entweder beide elliptisch oder beide hyperbolisch, so ist der in der dritten Ecke bestimmte Wurf hyperbolisch. — Ist der eine der beiden Würfe elliptisch, der andere hyperbolisch, so ist der dritte elliptisch. —

Jeder Wurf bestimmt eine Involution<sup>(63.)</sup>; die beiden Geraden  $a$  und  $a_1$  bestimmen daher in den drei Seiten des Dreiecks  $UGH$  drei Involutionen. Sehen wir zwei von diesen als Gegenseiten an, so ist die dritte die diagonale Involution:

2. Wenn die beiden Gegenseiten gleichnamige (ungleichnamige) Involutionen sind, so ist die diagonale Involution hyperbolisch (elliptisch). —

2. Wenn die beiden Gegenecken gleichnamige (ungleichnamige) Involutionen sind, so ist die diagonale Involution hyperbolisch (elliptisch). —

Sind die Gegenseiten und die diagonale Involution hyperbolisch, so bilden, wie wir in Nr. 133 A gesehen haben, die Ordnungspunkte die Gegenecken eines Vierseits. Wir können daher dem ersten der beiden vorhergehenden Sätze die Form geben:

3. Zwei Geraden bestimmen in den drei Seiten eines Dreiecks drei Punktinvolutionen, von denen mindestens eine Ordnungspunkte hat. Haben alle drei Ordnungspunkte, so bilden diese die Gegenecken eines Vierseits.

3. Zwei Punkte bestimmen in den drei Ecken eines Dreiseits drei Strahleninvolutionen, von denen mindestens eine Ordnungspunkte hat. Haben alle drei Ordnungspunkte, so bilden diese die Gegenseiten eines Vierecks.

138.\* **Fluchtpunkt und Potenz einer Involution.** 138

Ist  $X$  der unendlich ferne Punkt einer geraden Involution  $g^2$  und  $O$  der ihm homologe, so heißt  $O$  der *Fluchtpunkt* der Involution  $g^2$ . Sind  $A$  und  $A_1$  irgend zwei weitere homologe Punkte von  $g^2$ , so ist die Involution  $g^2$  elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem das Punktpaar  $AA_1$  durch das Punktpaar  $OX$  getrennt wird oder nicht getrennt wird<sup>(63a)</sup>. Da  $X$  auf  $A \cdot A_1$ <sup>(5)</sup> liegt, so ist demnach die Involution elliptisch, wenn  $O$  auf  $AA_1$  liegt; sie ist hyperbolisch, wenn  $O$  auf  $A \cdot A_1$  liegt. Im ersten Falle werden die Strecken  $OA$  und  $OA_1$  in entgegengesetztem, im zweiten in gleichem Sinn gemessen. Das Produkt  $OA \cdot OA_1$  ist also negativ oder positiv<sup>(41)</sup>, je nachdem die Involution elliptisch oder hyperbolisch ist. Und umgekehrt. —

Bezeichnen wir die unendlich ferne Gerade durch  $o$ <sup>(3)</sup> und ihre zirkuläre Involution<sup>(112a)</sup> durch  $o^2$ , so lassen sich  $g^2$  und  $o^2$  als zwei Gegenseiten ansehen, deren diagonale Involution wir nach Nr. 133 zeichnen wollen. Entspricht dem Schnittpunkt  $X$  (Fig. 85) der Träger  $g$  und  $o$  in  $g^2$  der Punkt  $O$  und in  $o^2$  der Punkt  $Y$ , so ist  $OY$  die Diagonale; weil aber  $OX$  und  $OY$  durch zwei homologe Punkte  $X$  und  $Y$  der zirkulären Involution gehen, so ist  $OY$  das in  $O$  auf  $g$  errichtete Lot<sup>(112a)</sup>. Sind nun  $A$  und  $A_1$  irgend zwei homologe Punkte von  $g^2$  und  $E$  und  $E_1$  zwei homologe Punkte der diagonalen Involution, so müssen die Geraden  $AE$  und  $A_1E_1$ , weil sie auch die unendlich ferne Gerade in zwei homologen Punkten der zirkulären Involution schneiden<sup>(133)</sup>, auf einander senkrecht stehen<sup>(112a)</sup>. Es sind also  $AA_1EE_1$  die Ecken eines Vierecks, dessen Gegenseiten auf einander senkrecht stehen<sup>(112a)</sup>.

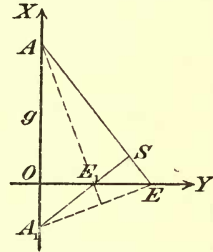


Fig. 85.

Da die Seiten des Dreiecks  $AOE_1$  senkrecht stehen auf denen des Dreiecks  $EOA_1$ , also Dreieck  $AOE_1 \sim EOA_1$  ist, so haben wir die Proportion  $OA : OE = OE_1 : OA_1$ . Da die zirkuläre Involution elliptisch ist<sup>(112a)</sup>, so sind die Involution  $g^2$  und die diagonale Involution ungleichnamig<sup>(137a)</sup>. Von den Produkten  $OA \cdot OA_1$  und  $OE \cdot OE_1$  ist also

das eine positiv, das andere negativ, so daß sich aus unserer Proportion ergibt:

$$OA \cdot OA_1 = -OE \cdot OE_1.$$

Halten wir die homologen Punkte  $E$  und  $E_1$  der diagonalen Involution fest und lassen den Punkt  $A$  und damit auch  $A_1$  den Träger  $g$  durchlaufen, so erkennen wir, daß das Produkt  $OA \cdot OA_1$  seinen Wert nicht ändert.

*Lehrsatz: Der Fluchtpunkt einer Punktinvolution teilt jede von zwei homologen Punkten begrenzte Strecke so, dass das Produkt aus den beiden Teilstrecken konstant ist. Dies konstante Produkt wird die Potenz der Involution genannt. Die Potenz einer elliptischen Involution ist negativ; die Potenz einer hyperbolischen Involution ist positiv.*

139

### 139.\* Konstruktion von Fluchtpunkt und Potenz.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Strahlen  $AE$  und  $A_1E_1$  (Fig. 85) durch  $S$ , so ist, weil die Punkte  $A O E_1 S$  in einem Kreise liegen, nach einem planimetrischen Satz  $ES \cdot EA = EE_1 \cdot EO$ . Das Produkt  $ES \cdot EA$  bleibt also, wenn  $A$  den Träger  $g$  durchläuft, unverändert. In der Planimetrie wird das Produkt  $ES \cdot EA$  die Potenz des Punktes  $E$  für den über dem Durchmesser  $AA_1$  konstruierten Kreis genannt. Da, wie wir eben gesehen haben, für einen Kreis, der durch irgend ein anderes Punktpaar  $BB_1$  von  $g^2$  bestimmt ist, die Potenz des Punktes  $E$  dieselbe ist, so ist  $E$  ein Punkt der Potenzlinie der beiden über  $AA_1$  und  $BB_1$  als Durchmesser konstruierten Kreise. Aus dieser Bemerkung ergibt sich, daß die planimetrische Aufgabe: Die Potenzlinie (Chordale) zweier Kreise zu zeichnen, dazu verwandt werden kann, den Fluchtpunkt und die Potenz einer Involution  $g^2$  zu finden (vgl. 191 Z).

1. *Elliptische Involution:* Da für zwei Kreise, die sich schneiden, die Potenzlinie die gemeinsame Sehne ist, so läßt sich für eine elliptische Involution, die durch die beiden sich trennenden Punktpaare  $AA_1$  und  $BB_1$  gegeben sein möge, der Fluchtpunkt durch die folgende Konstruktion bestimmen. Man schlägt über den Durchmessern  $AA_1$  und  $BB_1$  zwei Kreise, die sich in  $Q$  und  $R$  schneiden; die Verbindungslinie  $QR$  schneidet  $g$  in dem gesuchten Fluchtpunkt  $O$  und  $-OQ^2$  ist die Potenz der Involution  $g^2$ .



2. *Hyperbolische Involution*: Ist die gegebene Involution hyperbolisch, so hat man noch einen dritten Kreis (Fig. 86), der die beiden über  $AA_1$  und  $BB_1$  geschlagenen Kreise schneidet, zu zeichnen und von dem Schnittpunkt der gemeinsamen Sehnen das Lot auf  $g$  zu fallen.

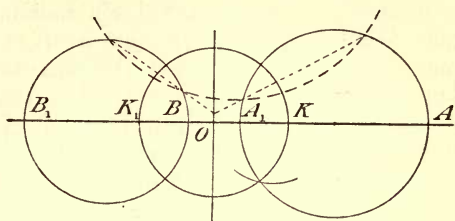


Fig. 86.

3. Sind von einer hyperbolischen Involution die Ordnungspunkte  $K$  und  $K_1$  bekannt, so ist die Mitte  $O$  von  $KK_1$ , weil  $O$  dem unendlich fernen Punkte homolog ist<sup>(63s und 27a)</sup>, der Fluchtpunkt und  $+OK^2$  die Potenz von  $g^2$ .

4. Ist die hyperbolische Involution durch die beiden Punktpaare  $AA_1$  und  $BB_1$  gegeben, so können wir mit Hilfe des Fluchtpunktes  $O$  die Ordnungspunkte finden. Ziehen wir von  $O$  (Fig. 86) die Tangente an einen der beiden über  $AA_1$  und  $BB_1$  konstruierten Kreise, so trifft der mit der Tangente um  $O$  geschlagene Kreis den Träger  $g$  in den Ordnungspunkten  $K$  und  $K_1$ .

5. Ist der Fluchtpunkt der hyperbolischen Involution *nicht* gegeben, so lassen sich die Ordnungspunkte finden (entweder nach Nr. 80 Z oder), indem man aus einem beliebigen Punkte  $S$  des über dem Durchmesser  $AA_1$  geschlagenen Kreises die Punkte  $B$  und  $B_1$  auf die Peripherie projiziert und von dem Punkte, in dem die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte  $B$  und  $B_1$  den Träger schneidet, Tangenten an den Kreis zieht. Projiziert man die Berührungspunkte dieser Tangenten wieder aus  $S$  auf den Träger, so erhält man die Ordnungspunkte der geraden Involution  $AA_1 \cdot BB_1$ .

6. In den Anwendungen unserer Sätze auf die Geometrie des Malfes werden wir noch häufig die Potenz einer Involution, die einer Kurve konjugiert ist, zu bilden haben; an dieser Stelle wollen wir die Potenz einer dem Kreise konjugierten Involution bestimmen. — Da jedem Kreise die zirkuläre Punktinvolution konjugiert ist<sup>(131a)</sup>, so ist die Polare des unendlich fernen Punktes  $X$  des Trägers  $g$  der Durchmesser, welcher senkrecht auf  $g$  steht. Nennen wir also den

Kreismittelpunkt  $E$  (Fig. 85) und fällen von ihm auf  $g$  das Lot  $EO$ , so ist  $O$  der Fluchtpunkt<sup>(92<sub>1</sub>)</sup> der konjugierten Involution  $g^2$ . — Ist ferner  $A$  ein beliebiger Punkt von  $g$ , so geht seine Polare durch den in  $EO$  liegenden<sup>(90<sub>0</sub>)</sup> Pol  $E_1$  von  $g$  und steht auf dem Durchmesser  $AE$  senkrecht<sup>(131<sub>8</sub>)</sup>. Schneidet diese Polare von  $A$  den Träger  $g$  in  $A_1$ , so sind  $A$  und  $A_1$  zwei konjugierte Punkte. Nach Nr. 138 ist daher  $OA \cdot OA_1$  die Potenz der konjugierten Involution  $g^2$  und gleich  $-OE \cdot OE_1$ . Nun ist<sup>(41)</sup>

$$OE \cdot OE_1 = OE \cdot (OE + EE_1) = OE^2 - EO \cdot EE_1.$$

Da  $E$  der Mittelpunkt des Kreises ist, so ist die konjugierte Involution von  $EO$  hyperbolisch<sup>(131<sub>5</sub>)</sup> und zwar gleich  $r^2$ <sup>(131<sub>7</sub>)</sup>. Von dieser konjugierten Involution sind aber, weil nach unserer Konstruktion  $E_1$  der Pol von  $g$  ist,  $E_1$  und  $O$  zwei konjugierte Punkte; daher ist  $EO \cdot EE_1 = r^2$ . Bezeichnen wir noch den Abstand  $OE$  des Trägers  $g$  vom Kreismittelpunkt durch  $d$ , so haben wir gefunden, daß die Potenz der dem Kreise konjugierten Involution  $g^2$  ist

$$OA \cdot OA_1 = r^2 - d^2.$$

## § 12.\* Die fokale Involution.

140.\* **Steinersche Parabel.** Ist  $k^2$  eine beliebige Kurve und  $x$  eine ihrer beiden Achsen<sup>(119)</sup>, so schneidet  $x$  die uneigentliche Gerade  $o$  in einem Punkte  $X$ , der dem Pol  $Y$  von  $x$  in der zirkularen Punktinvolution  $o^2$  homolog ist<sup>(114<sub>5</sub>)</sup>. Jeder Strahl von  $Y$ , d. h. jede der Achse konjugierte Gerade steht daher auf der Achse senkrecht<sup>(112<sub>4</sub>)</sup>:

1. Jede einer Achse konjugierte Gerade steht auf der Achse senkrecht. —

Ist  $a$  eine beliebige Gerade (nicht etwa eine der Achsen) und  $A_1$  ihr Pol für die Kurve  $k^2$ , so giebt es unter den durch  $A_1$  gehenden Strahlen einen, der auf  $a$  senkrecht steht. Schneidet nämlich  $a$  die uneigentliche Gerade  $o$  im Punkte  $A$  und ist  $A_1$  der dem Punkte  $A$  homologe Punkt in  $o^2$ , so ist die Verbindungslinie  $A_1 A = a_1$ , weil sie durch  $A_1$  geht, der Gerade  $a$  konjugiert und, weil sie durch  $A_1$  geht, ein Lot auf  $a$ <sup>(112<sub>4</sub>)</sup>. Nennen wir  $a_1$  kurz das der Gerade  $a$  konjugierte Lot, so haben wir:

2. Zu jeder Gerade, welche nicht mit einer der Achsen zusammenfällt, giebt es *ein* konjugiertes Lot. Ferner ergibt sich aus Nr. 113:

3. Durch jeden Punkt gehen zwei einander konjugierte Lote. —

Geht der Strahl  $a$  durch den Kurvenmittelpunkt  $O$ , so ist sein Pol  $A_1$  ein uneigentlicher Punkt<sup>(114.)</sup>; die Verbindungslinie  $A_1 A_1$  ist daher die uneigentliche Gerade:

4. Das einem (nicht mit einer der Achsen zusammenfallenden) Durchmesser konjugierte Lot ist die eigentliche Gerade. —

Dreht sich  $a$  um einen Punkt  $P$ , der in keiner der beiden Achsen liegt, so beschreibt der Pol  $A_1$  in der Polare  $p$  von  $P$  eine dem Strahlenbüschel  $P$  projektive Punktreihe<sup>(90.)</sup> und der Punkt  $A_1$ , welcher dem Schnittpunkt  $o(a) = A$  in  $o^2$  homolog ist, in  $o$  eine zu  $a$  projektive Punktreihe<sup>(63.)</sup>. Die Verbindungslinie  $A_1 A_1 = a_1$  umhüllt<sup>(60)</sup> daher eine Kurve zweiter Ordnung und zwar eine Parabel<sup>(127.)</sup>, weil  $o$  als Träger der einen Punktreihe eine Tangente ist<sup>(45)</sup>. — Liegt dagegen  $P$  z. B. in der Achse  $x$ , so ist  $x$  einer der Strahlen von  $P$ ; da der Pol  $Y$  von  $x$  zugleich der dem Punkte  $X = o(x)$  in  $o^2$  homologe Punkt ist, so fallen  $A_1$  und  $A_1$  gleichzeitig in  $Y$ . Die beiden von  $A_1$  und  $A_1$  in  $p$  und  $o$  beschriebenen projektiven Punktreihen haben daher perspektive Lage<sup>(34)</sup> und die konjugierten Lote bilden zwei gerade Strahlenbüschel  $P_1$  und  $Y$ <sup>(44)</sup>; der parabolische Büschel zerfällt, wie wir sagen, in zwei gerade Strahlenbüschel:

5. *Die den Strahlen eines geraden Büschels  $P$  konjugierten Lote bilden einen projektiven parabolischen Büschel. Dieser Büschel heißt die Steinersche Parabel.*

6. *Die Steinersche Parabel zerfällt in zwei gerade Strahlenbüschel, wenn  $P$  in einer der beiden Achsen liegt.*

141.\* **Fokale Involutionen.** Geht der Strahl  $a$  des 141 Punktes  $P$  durch den uneigentlichen Punkt  $X$  der Achse  $x$ , d. h. fällt  $o(a) = A$  in  $X$ , so fällt  $A_1$  in den Pol  $Y$  von  $x$ <sup>(114.)</sup>; der Pol  $A_1$  von  $a$  liegt, weil  $a$  durch  $X$  geht, in der Polare  $y$  von  $X$ <sup>(90.)</sup>; die Verbindungslinie  $A_1 A_1$ , das konjugierte Lot, ist daher die zweite Achse  $y$ . Da dasselbe von  $x$  gilt, wenn  $a$  parallel  $y$  ist, so ergibt sich:

1. Die beiden Achsen sind Tangenten jeder Steinerschen Parabel. —

Die einander konjugierten Lote, welche durch  $P$  gehen<sup>(140s)</sup>, sind Tangenten der dem geraden Büschel  $P$  zugeordneten Steinerschen Parabel; daher<sup>(127s)</sup>:

2. *Die einem Punkte  $P$  zugeordnete Parabel ist bestimmt durch die beiden Achsen der Kurve und die beiden konjugierten Lote, welche durch  $P$  gehen.* —

Weil die Achsen Tangenten der Steinerschen Parabel sind, schneiden die Strahlen  $a$  des geraden Büschels  $P$  jede Achse in einer Punktreihe, die projektiv ist zu der von den homologen Strahlen des parabolischen Büschels ausgeschnittenen Punktreihe<sup>(140s)</sup>. Geht  $a$  durch  $X$ , so ist  $y$ , wie wir eben sahen, das konjugierte Lot; dem Punkte  $X$  ist daher der Schnittpunkt  $xy = O$ , der Mittelpunkt der Kurve, homolog; geht der Strahl  $a$  durch  $O$ , so ist ihm die uneigentliche Gerade homolog<sup>(140t)</sup>, dem Punkt  $O$  also der Punkt  $X$ . Die beiden in  $x$  liegenden projektiven Punktreihen bilden daher<sup>(63s)</sup> eine Involution. — Ist  $Q$  irgend ein zweiter Punkt, so ergibt sich für ihn ebenso, daß seine Strahlen und die ihnen konjugierten Lote die Achse in Punktpaaren einer Involution schneiden, von der  $X$  und  $O$  zwei homologe Punkte sind. Da der Strahlenbüschel  $Q$  mit dem eben betrachteten  $P$  einen Strahl gemeinsam hat (vgl. 133 Z), so haben die beiden durch  $P$  und  $Q$  in  $x$  induzierten Involutionen auch noch das Punktpaar gemeinsam, welches von diesem Strahl  $PQ$  und seinem konjugierten Lote ausgeschnitten wird; die beiden Involutionen sind daher identisch<sup>(63s)</sup>. Das Ergebnis sprechen wir durch eine Definition und einen Lehrsatz aus.

3. Definition: Die Involution, welche durch einen beliebigen geraden Büschel und die ihm konjugierten Lote in einer Achse bestimmt wird, heißt eine fokale Involution.

4. Lehrsatz: *Jeder Strahl und das ihm konjugierte Lot schneiden jede der beiden Achsen in zwei homologen Punkten der fokalen Involution.* —

Ist  $P$  ein Kurvenpunkt, so ist seine Tangente zugleich seine Polare<sup>(86 Z<sub>2</sub>)</sup>; das in dem Kurvenpunkte  $P$  auf der Tangente errichtete Lot, das wir die *Normale* des Punktes  $P$

nennen wollen, ist daher das konjugierte, so dafs wir als besondern Fall des vorhergehenden Satzes den folgenden aussprechen können:

5. Tangente und Normale eines Kurvenpunktes schneiden jede der beiden Achsen in zwei homologen Punkten der fokalen Involution. —

6. Ferner folgt noch für den Fall, dafs  $P$  ein Punkt einer Achse ist, der zugeordnete parabolische Büschel also in zwei gerade Büschel  $P_1$  und  $Y$  zerfällt<sup>(140a)</sup>, dafs  $P$  und  $P_1$  zwei homologe Punkte der fokalen Involution sind.

142.\* **Brennpunkte.** Wenn die Achsen  $x$  und  $y$  von dem Strahl  $a$  in  $B$  und  $C$  und von dem ihm konjugierten Lot  $a_1$  in  $B_1$  und  $C_1$  geschnitten werden, so sind  $B$  und  $B_1$  zwei homologe Punkte der fokalen Involution  $x^2$  und  $C$  und  $C_1$  zwei homologe Punkte der fokalen Involution  $y^2$ <sup>(141a)</sup>. Da  $a$  und  $a_1$  durch zwei homologe Punkte  $A$  und  $A_1$  der zirkularen Punktinvolution gehen, so lassen sich die beiden fokalen Involutionen auffassen als zwei Gegenseiten<sup>(133)</sup>, deren diagonale Involution die zirkulare Punktinvolution  $o^2$  ist. Da die zirkulare Involution elliptisch ist<sup>(112a)</sup>, so haben wir<sup>(137a)</sup>:

1. Von den beiden fokalen Involutionen ist die eine elliptisch, die andere hyperbolisch. — Die Achse, welche der Träger der hyperbolischen Involution ist, heifst die *Hauptachse*, die andere die *Nebenachse*. — Die in der Hauptachse liegenden Ordnungspunkte der fokalen Involution heifsen die *Brennpunkte* der Kurve. —

Jeder Strahl eines Brennpunktes  $F$  wird von dem ihm konjugierten Lote in  $F$  geschnitten<sup>(141a)</sup>, mit andern Worten: die konjugierten Strahlen des Brennpunktes stehen aufeinander senkrecht:

2. *Die konjugierte Strahleninvolution jedes Brennpunktes ist zirkular.* —

Bilden die den Strahlen eines Punktes  $P$  konjugierten Lote einen geraden Strahlenbüschel  $P_1$ , so muß  $P$  ein Punkt der Achse sein<sup>(140a)</sup> und der Mittelpunkt  $P_1$  des von den konjugierten Loten gebildeten geraden Büschels muß der dem Punkte  $P$  in der fokalen Involution homologe sein<sup>(141a)</sup>. — Ist die konjugierte Strahleninvolution eines Punktes  $P$  zirkular, so heifst das: die den Strahlen von  $P$

konjugierten Lote bilden einen geraden Büschel, dessen Mittelpunkt mit  $P$  zusammenfällt; der Mittelpunkt muß also ein Ordnungspunkt der fokalen Involution, d. h. ein Brennpunkt sein:

3. Ein Punkt, dessen konjugierte Strahleninvolution zirkular ist, ist ein Brennpunkt. —

Sind uns für eine Kurve die beiden Brennpunkte  $F$  und  $G$  gegeben, so ist ihre Verbindungslinie die Hauptachse  $x$ . Da der uneigentliche Punkt  $X$  der Hauptachse  $x$  in der fokalen Involution, wie wir in der Begründung von Nr. 141<sub>4</sub> sahen, dem Kurvenmittelpunkt  $O$  homolog ist, so ist die Mitte<sup>(63s)</sup> von  $F G$  der Kurvenmittelpunkt, das Mittellot von  $F G$  also die Nebenachse. — Je zwei aufeinander senkrechte Strahlen von  $F$  schneiden die Nebenachse in homologen Punkten der fokalen Involution<sup>(141<sub>4</sub>)</sup>:

4. Sind uns von einer Kurve die beiden Brennpunkte  $F$  und  $G$  gegeben, so ist  $F G$  die Hauptachse und das Mittellot von  $F G$  die Nebenachse. — Die fokale Involution der Nebenachse liegt perspektiv zur konjugierten (zirkularen) Strahleninvolution jedes Brennpunktes. —

Die konjugierten Lote, die durch einen Punkt  $P$  gehen<sup>(140s)</sup>, schneiden die Hauptachse in homologen Punkten der fokalen Involution<sup>(141<sub>4</sub>)</sup> und bilden daher mit  $P F$  und  $P G$  einen harmonischen Wurf<sup>(63s)</sup>. Nennen wir die durch einen Brennpunkt gehenden Strahlen  $P F$  und  $P G$  kurz Brennstrahlen, so haben wir<sup>(28s)</sup>:

5. Die konjugierten Lote eines beliebigen Punktes  $P$  halbieren die von den Brennstrahlen  $P F$  und  $P G$  gebildeten Winkel.

Ein besonderer Fall dieses Satzes ist der folgende (vgl. 141<sub>5</sub>):

6. Tangente und Normale eines Kurvenpunktes halbieren die von den Brennstrahlen des Kurvenpunktes gebildeten Winkel.

143 <sup>143</sup> 143.\* **Hauptkreis.** Da die konjugierte Strahleninvolution des Brennpunktes zirkular<sup>(142s)</sup>, also elliptisch<sup>(112s)</sup> ist, so ist die konjugierte Punktinvolution der Hauptachse, weil diese ein Strahl des Brennpunktes ist, hyperbolisch<sup>(107)</sup>:



für den Kreis konjugiert sind, die Fluchtpunkte der konjugierten Involutionen von  $Y(Q)$  und  $Y(R)$  sind, so haben wir in  $Y(Q)$  für die Kurve die Potenz  $QC \cdot Q\Gamma_1^{(138)}$  und für den Hauptkreis die Potenz  $QC \cdot QC_1$ ; das Verhältnis der beiden Potenzen ist also  $Q\Gamma_1 : QC_1$ . Entsprechend haben wir in  $Y(R)$  die Potenzen  $RD \cdot R\Delta_1$  und  $RD \cdot RD_1$  und das Verhältnis  $R\Delta_1 : RD_1$ . Da nun nach einem Satz der Proportionenlehre

$$Q\Gamma_1 : QC_1 = R\Delta_1 : RD_1$$

ist, so haben wir:

4. *Die Potenzen der Involutionen, welche der Kurve und ihrem Hauptkreise in einem Lote der Hauptachse konjugiert sind, haben ein konstantes Verhältnis.*

Zu den Loten der Hauptachse gehört auch die Nebenachse<sup>(142a)</sup>, in welcher der Hauptkreis eine Involution erzeugt, deren Potenz  $+a^2$  ist<sup>(139a)</sup>. Bezeichnen wir die Involutionspotenz, welche die Kurve in der Nebenachse induziert, durch  $[b]$ , so ist das konstante Verhältnis der Involutionspotenzen  $[b] : a^2$ . — Wählen wir ein Lot  $Y(Q)$ , welches die Kurve in  $S$  schneidet, so ist, wenn wir  $QS = y$  und  $OQ = x$  setzen, die Potenz dieses Lotes für die Kurve  $+y^2$ <sup>(139a)</sup> und für den Hauptkreis  $a^2 - x^2$ <sup>(139a)</sup>. Es ist daher  $y^2 : a^2 - x^2 = [b] : a^2$ . — Damit haben wir zum zweiten Male (vgl. 126) die Kurvengleichung abgeleitet, und zwar für ein Koordinatensystem, dessen Achsen mit den Kurvenachsen zusammenfallen. Ist die Kurve eine Ellipse, so schneidet die Nebenachse die Kurve<sup>(121a)</sup>, die Potenz  $[b]$  ist also positiv:  $+b^2$ <sup>(139a)</sup>; ist sie eine Hyperbel, so ist  $[b]$  negativ:  $-b^2$ <sup>(121a)</sup>, so daß sich ergibt als Gleichung

$$\text{für die Ellipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\text{für die Hyperbel: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

z *Zusatz.* Die eben entwickelte Kurvengleichung ist nur ein besonderer Fall der in Nr. 126 abgeleiteten, welche auf zwei beliebige konjugierte Durchmesser als Achsen bezogen war. Auch diese allgemeine Gleichung läßt sich mit Hilfe des hier verwendeten Begriffs der Potenz einer Involution ableiten. — Ist uns die Kurve durch  $SS_1A$  und  $T_\infty$ <sup>(118 Z)</sup>



gegeben, so ist, wenn  $O$  die Mitte von  $SS_1$  ist,  $OT_\infty$  (Fig. 88) der dem Durchmesser  $SS_1$  konjugierte. Er wird, weil er durch den Pol  $T_\infty$  der Seite  $SS_1$  des Kurvendreiecks  $SS_1A$  geht, von den beiden andern Seiten  $AS$  und  $AS_1$  in zwei konjugierten Punkten  $A$  und  $A_1$  geschnitten<sup>(99.)</sup>. Da  $O$  der Fluchtpunkt<sup>(138)</sup> von  $OT_\infty$  ist, so ist die Potenz der konjugierten Involution von  $OT_\infty$ :  $[b] = OA \cdot OA_1$ . Ziehen wir  $QA$  parallel  $OT_\infty$  und bezeichnen  $OQ$  durch  $x$ ,  $QA$  durch  $y$  und  $OS_1 = -OS$  durch  $a$ , so ergibt sich:

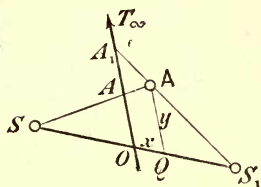


Fig. 88.

$$QA : OA = SQ : SO \text{ und } QA : OA_1 = S_1Q : S_1O,$$

woraus unter Berücksichtigung der Zeichenregel<sup>(41)</sup> folgt:

$$\frac{y^2}{[b]} = \frac{(SO + OQ)(S_1O + OQ)}{OS_1 \cdot OS} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}.$$

144.\* **Konstruktion der Ellipse aus ihren beiden Achsen**<sup>(157)</sup>. Für eine Ellipse<sup>(121.)</sup> sowohl wie für einen Kreis<sup>(131.)</sup> ist der Mittelpunkt  $O$  ein elliptischer Punkt. Es ist also, wenn wir die Bezeichnung der vorigen Nummer (Fig. 87) beibehalten,  $Y(O)$  eine hyperbolische Gerade<sup>(107)</sup> und folglich<sup>(110.)</sup> auch jeder Strahl  $Y(Q)$ , der von  $Y(O)$  durch die Scheiteltangenten  $Y(A)$  und  $Y(A_1)$  nicht getrennt wird; mit andern Worten: jedes in einem Punkte der Hauptachse  $AA_1$ <sup>(5)</sup> errichtete Lot schneidet sowohl die Ellipse wie ihren Hauptkreis. Errichten wir in einem solchen auf  $AA_1$  liegenden Punkte  $Q$  das Lot und nennen seine Schnittpunkte mit der Ellipse und dem Hauptkreise  $P$  und  $P_1$ , so sind  $QP^2$  und  $QP_1^2$  die Potenzen<sup>(139.)</sup> der der Ellipse und dem Hauptkreise konjugierten Involutionen des Lotes; es ist daher<sup>(143.)</sup>  $QP : QP_1 = b : a$ .

Auf jedem Lote der Hauptachse werden von der Ellipse und ihrem Hauptkreise zwei Sehnen begrenzt, deren Verhältnis konstant ist, und zwar gleich dem Verhältnis der Nebenachse zur Hauptachse.

Ziehen wir durch den Ellipsenpunkt  $P$  (Fig. 89) zum Kreisradius  $P_1O$  die Parallele, welche die Hauptachse in  $C$ ,

die Nebenachse in  $D$  schneidet, so ist  $PC : P_1 O = QP : QP_1 = b : a$ ; folglich ist, da  $P_1 O = a$  ist,  $PC = b$ .  $PD$  ist gleich  $P_1 O = a$ . Daraus ergibt sich eine in der Darstellenden

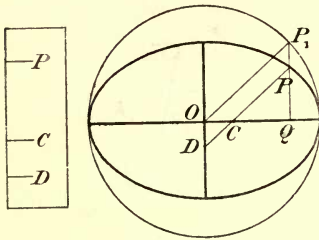


Fig. 89.

Geometrie viel benutzte Konstruktion einer Ellipse, von der die beiden Achsen gegeben sind:

Man trägt auf einem Papierstreifen (Fig. 89)  $PD = a$  und  $PC = b$  ab und bewegt ihn so, daß  $C$  auf der Hauptachse und  $D$  auf der Nebenachse gleitet; die mit der Bleifeder bezeichneten Lagen des Punktes  $P$  sind dann Ellipsenpunkte. —

Weil, wie wir bei der Begründung von Nr. 143<sub>3</sub> sahen, jedes Lot der Hauptachse für die Ellipse und den Hauptkreis denselben Punkt als Pol hat, so geht die Ellipsentangente in  $P$  durch den Punkt, in dem die Kreistangente in  $P_1$  die Hauptachse schneidet<sup>(87 Z<sub>1</sub>)</sup>. Diese Bemerkung wird in der Darstellenden Geometrie zur Konstruktion einer Ellipsentangente gebraucht.

145. \* **Kurve aus den beiden Brennpunkten und einer Tangente.** Ist uns für eine Kurve ein Brennpunkt  $G$  gegeben, so kennen wir, da die konjugierte Strahleninvolution des Brennpunktes zirkular ist<sup>(142<sub>2</sub>)</sup>, die der Kurve in  $G$  konjugierte Strahleninvolution. Aus dieser Bemerkung ergibt sich die Lösung der

*Aufgabe<sup>(154)</sup>: Eine Kurve zu zeichnen, von der die beiden Brennpunkte und eine Tangente gegeben sind.*

Die beiden Brennpunkte bezeichnen wir durch  $G$  und  $H$ , die gegebene Tangente durch  $s$ . Da je zwei homologe Strahlen  $c$  und  $c_1$  der Strahleninvolution  $G^2$  auf einander senkrecht stehen und ebenso je zwei homologe Strahlen  $\gamma$  und  $\gamma_1$  von  $H^2$ , so ist der Verbindungslinie  $GH = u$  in  $G^2$  das Lot  $g$  auf  $u$  und in  $H^2$  das Lot  $h$  auf  $u$  homolog; den unendlich fernen Schnittpunkt dieser Lote  $g$  und  $h$  nennen wir  $U$ . — Die gesuchte Kurve erhalten wir nun durch Übertragung der in Nr. 100 gegebenen Konstruktion ins Duale<sup>(7)</sup>:

Werden die Punkte, in denen die gegebene Gerade  $s$



jetzt an wieder der bis dahin gebrauchten Buchstaben  $F$  und  $G$  bedienen und dem entsprechend die Polaren von  $F$  und  $G$ , die Richtlinien, durch  $f$  und  $g$  bezeichnen. Ist nun  $T$  ein beliebiger Punkt der Richtlinie  $f$ , so geht seine Polare durch den Punkt  $F$  und steht, da sie dem Brennstrahl  $F T$  konjugiert ist<sup>(92<sub>1</sub>)</sup>, senkrecht auf  $T F$ <sup>(142<sub>2</sub>)</sup>:

2. Die Polare eines Punktes  $T$  der Richtlinie  $f$  ist das im Brennpunkt  $F$  auf  $T F$  errichtete Lot.

Ist demnach  $Y$  der uneigentliche Punkt der Richtlinie  $f$ , so ist seine Polare das von  $F$  auf  $f$  gefällte Lot  $F F_1$ ; dieses schneidet die uneigentliche Gerade  $o$  in dem dem Punkte  $Y$  homologen Punkte  $X$  der zirkularen Punktinvolution, ist also eine Achse<sup>(114<sub>6</sub>)</sup> der Kurve und, weil es durch  $F$  geht, die Hauptachse<sup>(142<sub>1</sub>)</sup>:

3. Das von einem Brennpunkt auf seine Richtlinie gefällte Lot ist die Hauptachse.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall des folgenden. — Weil die konjugierte Strahleninvolution eines Brennpunktes  $F$  elliptisch ist<sup>(112<sub>2</sub>)</sup>, so ist die Richtlinie  $f$  eine elliptische Gerade<sup>(105<sub>2</sub>)</sup>; durch jeden Punkt  $T$  von  $f$  gehen daher<sup>(107)</sup> zwei Tangenten  $s$  und  $s_1$ , die als Ordnungsstrahlen die konjugierte Involution von  $T$  bestimmen<sup>(92<sub>2</sub>)</sup> und daher die Polare von  $T$  in zwei Kurvenpunkten schneiden<sup>(92<sub>2</sub>)</sup>:

4. Wenn  $T$  ein Punkt der Richtlinie  $f$  ist, so schneidet das in dem Brennpunkte  $F$  auf  $T F$  errichtete Lot die von  $T$  ausgehenden Tangenten in zwei Kurvenpunkten.

Man giebt diesem Satze auch wohl die Form: Die auf einer Tangente durch ihren Berührungspunkt und eine Richtlinie begrenzte Strecke erscheint in dem zugeordneten Brennpunkt unter einem rechten Winkel. —

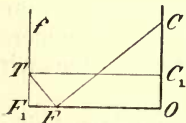


Fig. 91.

Schneidet die Polare eines beliebigen Punktes  $T$  (Fig. 91) der Richtlinie  $f$  die Nebenachse in  $C$ , so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $O C F$  und  $F_1 F T$ :  $O C \cdot F_1 T = O F \cdot F F_1$ . Die Polare von  $C$  geht durch  $T$  und ist der Hauptachse parallel<sup>(90<sub>2</sub>)</sup>; schneidet sie die Nebenachse

in  $C_1$ , so ist  $O C \cdot O C_1$  die Potenz<sup>(138)</sup> der konjugierten Involution der Nebenachse, die wir wieder mit  $[b]$  be-

zeichnen wollen. Wir haben daher die auch im Vorzeichen richtige Gleichung

$$[b] = OC \cdot OC_1 = OC \cdot F_1 T = OF \cdot FF_1.$$

Ferner ist<sup>(41)</sup>

$$OF \cdot FF_1 = OF \cdot (FO + OF_1) = -OF^2 + OF \cdot OF_1.$$

Das Produkt  $OF \cdot OF_1$  ist die Involutionspotenz der Hauptachse, also  $OF \cdot OF_1 = a^2$ <sup>(139a)</sup>; bezeichnen wir noch  $OF = \frac{1}{2} GF$  durch  $e$ , so haben wir

$$5. a^2 - e^2 = [b].$$

147.\* Zweites<sup>(124)</sup> Kennzeichen für die Ellipse und die Hyperbel. Ist eine Kurve durch die beiden Brennpunkte  $F$  und  $G$  und eine Tangente  $t$  gegeben<sup>(145)</sup>, so läßt sich ein Kennzeichen dafür angeben, ob die Kurve eine Ellipse oder Hyperbel ist. — Schneidet die Tangente  $t$  (Fig. 92) die Hauptachse  $x$  in  $B$  und die Nebenachse  $y$  in  $C$ , so schneidet die Normale  $n$  ihres Berührungspunktes  $P$  die Achsen  $x$  und  $y$  in den homologen Punkten  $B_1$  und  $C_1$  der fokalen Involutionen<sup>(141a)</sup>. Die Polare des uneigentlichen Punktes  $Z$  der Tangente  $BC$  geht durch den Berührungspunkt  $P$ <sup>(87 Z<sub>2</sub>)</sup> und den Kurvenmittelpunkt  $O$ <sup>(114a)</sup>;  $OP$  und  $OZ$  sind also zwei konjugierte Durchmesser und die Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel<sup>(120<sub>1</sub>)</sup>, je nachdem die konjugierte Strahleninvolution  $O(BC.PZ)$  elliptisch oder hyperbolisch ist.

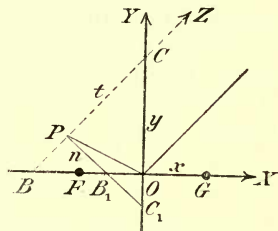


Fig. 92.

Wir nehmen nun an, die Tangente schneidet (wie in der Figur) die Hauptachse in einem Punkte  $B$  von  $F \cdot G$ <sup>(5)</sup>, so daß also  $OB > OF$  ist. Da  $OB \cdot OB_1 = OF^2$  ist, so ist  $OB_1 < OF$ , d. h.  $B_1$  liegt in  $OB$  oder, wenn wir den uneigentlichen Punkt der Hauptachse  $X$  nennen,  $OB \cdot B_1 X$  ist ein elliptischer Wurf. Da die fokale Involution der Nebenachse elliptisch ist<sup>(142<sub>1</sub>)</sup>, so ist, wenn ihr uneigentlicher Punkt  $Y$  genannt wird,  $OY \cdot CC_1$  ein elliptischer,  $OC \cdot YC_1$  also<sup>(104)</sup> ein hyperbolischer Wurf. Die Verbindungslinie  $B_1 C_1$  und die Verbindungslinie  $XY$ , die uneigentliche Gerade, bestimmen also in den Seiten  $OB$  und  $OC$  des Dreiecks

$OBC$  einen elliptischen und einen hyperbolischen Wurf, folglich<sup>(137)</sup> ist der in  $BC$  ausgeschnittene Wurf  $BC.PZ$  elliptisch, die Kurve also eine Ellipse:

1. Eine Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Punkt, in dem eine beliebige Tangente die Hauptachse schneidet, von dem Kurvenmittelpunkt durch die Brennpunkte getrennt oder nicht getrennt wird. —

Bemerkt mag noch werden, dafs als besonderer Fall aus Nr. 109 folgt:

2. Die Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Punkt, in dem eine beliebige Tangente die Hauptachse schneidet, von dem Kurvenmittelpunkt durch die Scheitel getrennt oder nicht getrennt wird.

148. \* 148.\* **Entfernungen eines Kurvenpunktes von Brennpunkt und Richtlinie.** Die in Nr. 145 gegebene Konstruktion lehrt uns, zu der gegebenen Tangente  $s$  eine zweite  $s_1$  und mit Hülfe der beiden Tangenten  $s$  und  $s_1$  und der zirkularen Strahleninvolution eines Brennpunktes die übrigen finden. Wir können daher *jede* Kurve erzeugen,

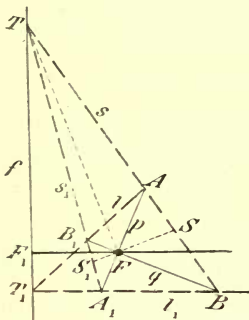


Fig. 93.

indem wir einen rechten Winkel sich um seinen Scheitel  $F$  drehen lassen und den Punkt, in dem  $s$  von dem einen Schenkel geschnitten wird, verbinden mit dem Punkte, in dem  $s_1$  von dem andern Schenkel geschnitten wird.

Wir zeigen nun, dafs wir, ausgehend von zwei beliebigen Geraden  $s$  und  $s_1$  und einem beliebigen Punkte  $F$ , die Tangenten einer Kurve erhalten, wenn wir um  $F$  einen rechten Winkel sich drehen lassen. — Die Schenkel des rechten Winkels bezeichnen wir durch  $p$  und  $q$  (Fig. 93), die Schnittpunkte  $s(p)$  und  $s_1(q)$  durch  $A$  und  $B_1$ . Wenn  $p$  sich um  $F$  dreht, so ist

$$A \overline{\wedge} p^{(112)} \overline{\wedge} q \overline{\wedge} B_1;$$

die Verbindungslinie  $AB_1 = l$  umhüllt also in der That eine Kurve<sup>(42)</sup>. Bezeichnen wir ferner die Schnittpunkte

$s(q)$  und  $s_1(p)$  durch  $B$  und  $A_1$ , so ist, weil  $q$  in  $p$  fällt, wenn  $p$  in  $q$  fällt, auch die Verbindungslinie  $BA_1 = l_1$  eine Tangente dieser Kurve. Bezeichnen wir noch die Schnittpunkte  $ss_1$  und  $ll_1$  durch  $T$  und  $T_1$  und ihre Verbindungslinie  $TT_1$  durch  $f$ , so bilden die Tangenten  $ss_1 ll_1$  ein Vierseit, von dem  $AA_1, BB_1, TT_1$  die Gegenecken sind.

1. Da die Diagonallinien  $AA_1 = p$  und  $BB_1 = q$  einander konjugiert sind<sup>(92a)</sup>, so ist die konjugierte Involution von  $F$  zirkular,  $F$  also ein Brennpunkt<sup>(142a)</sup>; seine Polare<sup>(85a)</sup>  $f$  also die Richtlinie, und das von  $F$  auf  $f$  gefällte Lot  $FF_1$  die Hauptachse<sup>(146a)</sup>; das in  $F$  auf  $Tf$  errichtete Lot schneidet  $s$  und  $s_1$  in den Kurvenpunkten<sup>(146a)</sup>  $S$  und  $S_1$ . —

Ist von einer Kurve ein Brennpunkt  $F$ , die zugeordnete Richtlinie  $f$  und eine Tangente  $s$  gegeben, die die Richtlinie in  $T$  schneidet, so kennen wir die konjugierte Strahleninvolution von  $T$ : Von dieser ist  $s$  ein Ordnungsstrahl<sup>(92c)</sup>,  $f$  und  $T(F)$  sind zwei konjugierte Strahlen<sup>(92c)</sup>; die zweite Tangente  $s_1$  ist daher die von  $s$  durch  $f$  und  $F$  harmonisch getrennte Gerade. Da wir aus  $ss_1$  und  $F$  die Kurve zeichnen können, so haben wir:

2. Eine Kurve ist durch einen Brennpunkt, seine Richtlinie und eine Tangente bestimmt. —

Da das Kurvenvierseit  $ss_1 ll_1$  und das zugeordnete Kurvenviereck  $SS_1 LL_1$  das Diagonaldreieck  $p q f$  gemeinsam haben<sup>(59)</sup>, so geht  $SL$  (Fig. 94) durch den Diagonaldreieckspunkt  $qf = P$ <sup>(53)</sup>; es werden daher<sup>(24a)</sup>  $S$  und  $L$  und folglich auch  $F(S)$  und  $F(L)$  durch  $p$  und  $q$  harmonisch getrennt. Weil  $p$  senkrecht auf  $q$  steht, so ist<sup>(41a)</sup>  $FS : FL = PS : PL$ . Füllen wir nun von  $S$  und  $L$  die Lote  $SR$  und  $LR_1$  auf die Richtlinie  $f$ , so ist nach einem Satze der Proportionenlehre  $PS : PL = SR : LR_1$ , folglich  $SF : SR = LF : LR_1$ .

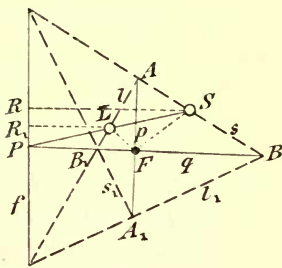


Fig. 94.

3. Das Verhältnis aus den Entfernungen eines Kurvenpunktes von einem Brennpunkt und der zugeordneten Richtlinie ist konstant.





schneiden<sup>(141)</sup> und die von den Brennstrahlen  $PF$  und  $PG$  gebildeten Winkel halbieren<sup>(142)</sup>. Nehmen wir an, daß die Tangente (wie in der Figur) die Hauptachse in einem Punkte von  $F'G$ <sup>(5)</sup> schneidet, daß also<sup>(147)</sup> die Kurve eine Ellipse ist, so halbiert die Tangente den Nebenwinkel von  $GPF$ . Das von  $F$  auf die Tangente  $s$  gefällte Lot  $FH$  trifft also die Verlängerung der Seite  $PG$  des Dreiecks  $PF'G$ . Weil aus  $\angle FPH = HPD$  folgt, daß  $PF = PD$  und  $FH = HD$  ist, so ergibt sich:

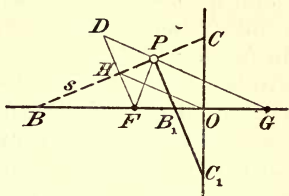


Fig. 96.

$$PF + PG = GD = 2HO = 2a^{(149)};$$

1. Die Summe aus den Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes ist konstant und zwar gleich der Länge der Hauptachse.

Für eine Hyperbel ergibt sich in derselben Weise:

2. Die Differenz aus den Brennstrahlen eines Hyperbelpunktes ist konstant und zwar gleich der Länge der Hauptachse.

150.\* Vierseit mit zwei rechtwinkligen Gegenecken. 150

In Nr. 148 haben wir die Aufgabe gelöst: Aus zwei Tangenten  $s$  und  $s_1$  und der zirkularen Involution des Punktes  $F$  die Kurve zu zeichnen. Es bleibt noch der besondere Fall zu erledigen, daß die Geraden  $s$  und  $s_1$  aufeinander senkrecht stehen. Da auch die homologen Strahlen  $p$  und  $q$  (Fig. 97) der Involution  $F^2$  aufeinander senkrecht stehen, so bilden, wenn wir die frühere Bezeichnung<sup>(148)</sup> beibehalten,  $AB A_1 B_1$  die Ecken eines Vierecks, von dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen; es ist daher<sup>(112)</sup> auch  $AB_1 = l$  senkrecht auf  $A_1 B = l_1$ ; es stehen also je zwei Tangenten, die sich in einem Punkte der Richtlinie schneiden, aufeinander senkrecht.

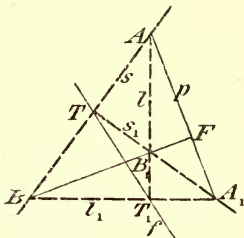


Fig. 97.

Kommt  $p$  bei seiner Drehung um  $F$  (vgl. 149) in die Lage des von  $F$  auf  $s$  gefällten Lotes, so wird zugleich  $p$

parallel  $s_1$  und  $q$  parallel  $s$ ; die Tangente  $A_1 B$  ist daher, weil  $A_1$  und  $B$  die uneigentlichen Punkte von  $s_1$  und  $s$  sind, die uneigentliche Gerade, unsere Kurve also<sup>(127<sub>a</sub>)</sup> eine Parabel (vgl. 145 Z). — Um dies Ergebnis in Worte kleiden zu können, wollen wir den Schnittpunkt zweier Seiten eines Vierseits, die aufeinander senkrecht stehen, eine *rechtwinklige Ecke* des Vierseits nennen und entsprechend einen Diagonalpunkt, in dem sich zwei aufeinander senkrecht stehende Diagonallinien schneiden, einen *rechtwinkligen Diagonalpunkt*:

Ein Vierseit mit zwei rechtwinkligen Gegenecken hat einen rechtwinkligen Diagonalpunkt. *Von der durch die Seiten eines solchen Vierseits bestimmten Parabel<sup>(127<sub>a</sub>)</sup> ist der rechtwinklige Diagonalpunkt der Brennpunkt und die Verbindungslinie der rechtwinkligen Gegenecken die Richtlinie.*

A *Anmerkung.* Man kann diesem Satze eine andere Form geben, wenn man von dem Dreieck  $A A_1 B$  (Fig. 97) ausgeht, in welchem die beiden Seiten  $BA$  und  $BA_1$  und ihre Höhen unsere Tangenten  $ss_1 ll_1$  sind: Zwei Seiten eines Dreiecks und ihre Höhen bestimmen eine Parabel, von welcher der Fußpunkt der dritten Höhe der Brennpunkt ist, während die Fußpunkte der beiden ersten Höhen in der Richtlinie liegen.

151 151.\* **Parabelsätze.** Da für eine Parabel die uneigentliche Gerade eine Tangente ist<sup>(127<sub>a</sub>)</sup>, so folgt aus Nr. 148<sub>2</sub>:

1. Eine Parabel ist durch einen Brennpunkt und seine Richtlinie bestimmt.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Richtlinie  $f$  und der uneigentlichen Gerade  $o$  durch  $Y$ , so ist die zweite durch  $Y$  gehende Tangente (vgl. 148<sub>2</sub>) der von  $o$  durch  $F$  und  $f$  harmonisch getrennte Strahl  $t$  des Punktes  $Y$ , den wir z. B. dadurch erhalten<sup>(27<sub>a</sub>)</sup>, daß wir durch die Mitte  $A$  des von  $F$  auf  $f$  gefällten Lotes  $FF_1$  die Parallele zu  $f$  ziehen. Da  $Y$  der Pol von  $FF_1$  ist<sup>(148<sub>1</sub>)</sup>, so schneiden die Ordnungsstrahlen der konjugierten Involution  $Y^2$  die Gerade  $FF_1$  in zwei Kurvenpunkten<sup>(92<sub>a</sub>)</sup>  $A$  und  $A_1$ , die zugleich die Scheitel<sup>(143<sub>1</sub>)</sup> sind, weil  $FF_1$  die Hauptachse ist<sup>(148<sub>1</sub>)</sup>. Der Strahl  $t$  ist also die Tangente in dem Scheitel  $A$  der Parabel; der zweite Scheitel  $A_1$  ist, als Punkt von  $o$ , der uneigent-

liche Punkt der Hauptachse, seine Tangente die uneigentliche Gerade.

Aus der in Nr. 148<sub>1</sub> gezeigten Konstruktion einer Kurve wird also für die Parabel, wenn wir  $s$  und  $s_1$  in  $t$  und  $o$  fallen lassen, die folgende:

2. Die Tangenten einer durch den Brennpunkt und die (eigentliche) Scheiteltangente gegebenen Parabel sind die Lote, die man auf den Brennstrahlen in ihren Schnittpunkten mit der Scheiteltangente errichtet.

Der uneigentliche Scheitel  $A_1$  ist der Pol<sup>(87 Z<sub>2</sub>)</sup> von  $o$ , also der Mittelpunkt<sup>(114<sub>2</sub>)</sup> der Parabel. Da ferner der Mittelpunkt und der uneigentliche Punkt der Hauptachse homologe Punkte der fokalen Involution sind<sup>(141<sub>2</sub>)</sup> und diese beiden Punkte zusammenfallen, so ist  $A_1$  ein Ordnungspunkt der fokalen Involution, d. h.<sup>(142<sub>1</sub>)</sup> ein Brennpunkt:

3. Für eine Parabel fallen der Mittelpunkt, ein Brennpunkt und ein Scheitel in den uneigentlichen Punkt der Hauptachse.

Schneidet die Tangente des Parabelpunktes  $P$  die Achse in  $Q_1$ , so ist die Polare von  $Q_1$  das von  $P$  auf die Hauptachse gefällte Lot  $PQ$ <sup>(90<sub>2</sub>)</sup>;  $Q_1$  und  $Q$  sind also zwei konjugierte Punkte der Hauptachse; da die konjugierte Involution der Hauptachse durch die beiden Scheitel als Ordnungspunkte bestimmt ist, so ist  $A$  die Mitte der (*Subtangente* genannten) Strecke  $Q_1Q$ :

4. Jede Subtangente einer Parabel wird durch den Scheitel halbiert.

Da Tangente und Normale die Hauptachse in homologen Punkten  $Q_1$  und  $N$  der fokalen Involution schneiden<sup>(141<sub>2</sub>)</sup>, so wird, weil der eine Brennpunkt der Parabel ein uneigentlicher Punkt ist, die Strecke  $Q_1N$  in  $F$  halbiert, folglich  $Q_1F = \frac{1}{2} Q_1N$ ; vorher fanden wir  $Q_1A = \frac{1}{2} Q_1Q$ , also durch Subtraktion:  $AF = \frac{1}{2} QN$ . Die Strecke  $QN$ , die *Subnormale* genannt wird, hat also den konstanten Wert  $2AF$ . Die Größe  $2AF$  heißt der halbe *Parameter* der Parabel, so daß wir haben:

5. Die Subnormale einer Parabel ist gleich dem halben Parameter.

Da der (eigentliche) Scheitel  $A$  die Mitte von  $FF_1$  ist,

also von  $F$  und  $f$  gleiche Entfernungen hat, so folgt aus Nr. 148<sub>3</sub>:

6. Jeder Parabelpunkt hat von dem (eigentlichen) Brennpunkt und der (eigentlichen) Richtlinie gleiche Entfernungen.

152

152.\* **Der Hauptkreis der Parabel.** Verbinden wir zwei Punkte  $A$  und  $A_1$  mit den homologen Punkten  $E$  und  $E_1$  der zirkularen Punktinvolution, so liegen die Schnittpunkte der Strahlen  $A(E)$  und  $A_1(E_1)$  in einem Kreise mit dem Durchmesser  $AA_1$  (98<sub>1</sub> u. 131<sub>1</sub>). Fällt der Punkt  $A_1$  in die uneigentliche Gerade, so ist der Strahl  $A_1(E_1)$ , so lange  $E_1$  nicht in  $A_1$  fällt, die uneigentliche Gerade; fällt aber  $E$  in den dem Punkte  $A_1$  homologen Punkt der zirkularen Involution,  $E_1$  also in  $A_1$ , so ist jeder Strahl von  $A_1$  als Verbindungslinie  $A_1(E_1)$  zu betrachten, mithin jeder Punkt von  $A(E)$  als Schnittpunkt homologer Strahlen:

1. Fällt der Punkt  $A_1$  in die uneigentliche Gerade, so zerfällt der Kreis, der  $AA_1$  zum Durchmesser hat, in die uneigentliche Gerade und das in  $A$  auf  $AA_1$  errichtete Lot.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich<sup>(151a)</sup>:

2. Für eine Parabel zerfällt der Hauptkreis<sup>(143a)</sup> in die uneigentliche Gerade und die Scheiteltangente.

Nun wissen wir<sup>(149)</sup>, daß die Fußpunkte der vom Brennpunkte auf die Tangente gefällten Lote im Hauptkreise liegen; für die Parabel müssen sie also in der uneigentlichen Gerade und in der Scheiteltangente liegen. Füllen wir aber von einem eigentlichen Punkte auf eine eigentliche Gerade das Lot, so kann der Fußpunkt kein uneigentlicher Punkt sein, weil Tangente und Lot die uneigentliche Gerade in zwei homologen Punkten der zirkularen Involution schneiden<sup>(112a)</sup> und von dieser elliptischen<sup>(112a)</sup> Involution nicht zwei Punkte zusammenfallen. Jede eigentliche Gerade ist aber ein Lot der uneigentlichen Gerade<sup>(112b)</sup>. Die Fußpunkte der vom Brennpunkt auf die eigentlichen Parabeltangente gefällten Lote liegen daher in der Scheiteltangente und die Fußpunkte der vom Brennpunkt auf die uneigentliche Gerade gefällten Lote in der uneigentlichen Gerade:

3. Die Fußpunkte der vom Brennpunkt auf die

(eigentlichen) Parabeltangente gefällt Lote liegen in der Scheiteltangente.

*Anmerkung.* Wir haben gezeigt, daß der letzte Satz <sup>A</sup> aus einem allgemeinen als besonderer Fall abgeleitet werden kann. Kürzer wäre es gewesen, ihn direkt aus der Parabelkonstruktion<sup>(150)</sup> abzuleiten: er ergibt sich daraus, daß  $s$  und  $s_1$  die von  $T(F)$  und  $f$  gebildeten Winkel (Fig. 97) halbieren.

153.\* **Krümmungskreis.** Die Steinersche Parabel<sup>(140b)</sup> <sup>153</sup> lieferte uns die fokalen Involutionen; diese zeigten uns ein ganz neues Bild der Kurve, indem sie uns zu den Brennpunkten und Richtlinien führten und den Zusammenhang zwischen der Kurve und ihrem Hauptkreise aufdeckten. Die fokalen Involutionen sind aber nicht die einzige Erweiterung unserer Kenntnisse, die wir dieser Entdeckung Steiners verdanken; die Steinersche Parabel führt uns auch noch zu dem Begriff des Krümmungskreises.

Wir haben gefunden<sup>(141b)</sup>, daß dem parabolischen Büschel, welches einem Kurvenpunkte zugeordnet ist, Tangente und Normale dieses Kurvenpunktes als Strahlen angehören. Diese Strahlen, die wir durch  $t$  und  $n$  bezeichnen wollen, berühren die Steinersche Parabel in zwei Punkten  $N$  und  $K$ , deren Bedeutung für die Kurve wir aufsuchen wollen.

Da die Polare eines Kurvenpunktes  $S$  seine Tangente ist<sup>(86 Z<sub>2</sub>)</sup>, so wissen wir<sup>(140b)</sup>, daß die den Strahlen  $a$  von  $S$  konjugierten Lote  $a_1$  die Geraden sind, welche die homologen Punkte  $A_1$  und  $A_1$  der in  $t$  und  $o$  liegenden projektiven Punktreihen verbinden. Dem Schnittpunkt  $o(t)$  ist in der zirkularen Punktinvolution, weil  $t$  senkrecht auf  $n$  steht, der Punkt  $o(n)$  homolog. Fällt daher  $a$  in  $n$ , d. h.  $A$  in  $o(n)$  und  $A_1$  in  $o(t)$ , so fällt  $A_1$ , der Pol des in die Normale fallenden Strahles  $a$ , in den Punkt von  $t$ , welcher dem Schnittpunkt  $o t$  der beiden Träger in der Punktreihe von  $t$  homolog ist, d. i.<sup>(45)</sup> in den Punkt  $N$ , in dem  $t$  die Steinersche Parabel berührt:

1. Jede Kurventangente berührt die ihrem Berührungspunkte zugeordnete Steinersche Parabel im Pol der Normale. —

Die Bedeutung des Punktes  $K$ , in dem die Normale  $n$  die Steinersche Parabel berührt, finden wir durch eine Beweisart, von der wir bisher noch keinen Gebrauch gemacht haben, die aber sonst vielfach, auch in der Geometrie der Lage, benutzt wird: die Betrachtung des Schnittpunktes zweier unendlich nahen Geraden (der dual gegenübersteht die Betrachtung der Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte).

Ist  $S$  ein Punkt einer Kurve  $k^2$ ,  $S_1$  ein zweiter und  $T$  der Schnittpunkt der Tangenten in  $S$  und  $S_1$ , so ergibt sich, wenn wir für den Punkt  $T$  die Steinersche Parabel zeichnen, daß zu ihren Strahlen auch die Normalen in  $S$  und  $S_1$  gehören; denn dem Strahl  $T(S)$  entspricht als konjugiertes Lot die Normale in  $S$  und ebenso dem Strahle  $T(S_1)$  die Normale in  $S_1$ . Lassen wir den Punkt  $S$  sich dem Punkte  $S_1$  unbegrenzt nähern, so daß  $T(S)$  und  $T(S_1)$  zwei auf einander folgende Strahlen des geraden Büschels  $T$  werden, so werden die beiden Normalen zwei auf einander folgende Parabeltangente; ihr Schnittpunkt fällt also, wenn  $S_1$  (mithin auch  $T$ ) in  $S$  fällt, in den Punkt, in dem die Normale in  $S$  die zu  $S$  gehörende Steinersche Parabel berührt. —

Der Schnittpunkt  $K$  zweier unendlich nahen Normalen hat für das Zeichnen einer Kurve große Bedeutung. Ziehen wir nämlich um  $K$  mit dem Halbmesser  $KS$  einen Kreis, so hat dieser mit der Kurve in zwei unendlich nahen Punkten die Tangente gemeinsam; er nähert sich also der Kurve in der Nähe des Punktes  $S$  mehr als irgend ein anderer Kreis. Einen solchen Kreis nennt man *Krümmungskreis* und seinen Mittelpunkt *Krümmungsmittelpunkt*:

2. Die einem Kurvenpunkte zugeordnete Steinersche Parabel berührt die Normale des Kurvenpunktes im Krümmungsmittelpunkt.

Für einen Punkt der Achse zerfällt die Steinersche Parabel in zwei gerade Strahlenbüschel<sup>(140)</sup>; der Mittelpunkt des einen ist der dem Punkte in der fokalen Involution homologe. Daraus ergibt sich:

3. Der einem Scheitel der Kurve zugeordnete Krümmungsmittelpunkt ist der dem Scheitel in der fokalen Involution homologe Punkt.

4. *Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes.* Sind uns von einer Kurve die Achsen und für den Kurvenpunkt  $S$  (Fig. 98) die Tangente  $t$  und die Normale  $n$  bekannt, so können wir die dem Punkte  $S$  zugeordnete Steinersche Parabel<sup>(141<sub>2</sub>)</sup> und damit den Krümmungskreis zeichnen. Werden nämlich die Achsen von  $t$  in  $B$  und  $C$ , von  $n$  in  $B_1$  und  $C_1$  geschnitten, so ist der Schnittpunkt  $F'$  von  $BC_1$  und  $B_1C$  der Brennpunkt der Steinerschen Parabel und  $S$  ein Punkt der Richtlinie<sup>(150)</sup>; das in  $F'$  auf  $SF'$  errichtete Lot schneidet daher die Normale  $n$  in dem Krümmungsmittelpunkte  $K$ <sup>(146<sub>4</sub>)</sup>.

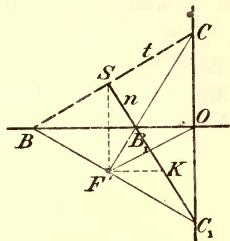


Fig. 98.

5. Dieser Konstruktion soll noch eine Bemerkung angefügt werden, von der wir später<sup>(157)</sup> Gebrauch zu machen haben. Weil (Fig. 98) als Peripheriewinkel  $\angle SF'C = SC_1C$  und  $CF'O = CBO$  ist, so ist  $\angle SF'O = 1R$ , wenn  $\angle SC_1C = CBO = \frac{1}{2}R$  ist. Der Krümmungsmittelpunkt  $K$  liegt daher in der Verbindungslinie  $F'O$ , wenn die Tangente mit den beiden Achsen gleiche Winkel bildet.

154.\* **Erste Kurvenkonstruktion durch Krümmungskreise.** Das Ergebnis der vorigen Nummer setzt uns in den Stand, eine bessere Zeichnung einer Kurve zu geben, als es uns bis jetzt möglich war. Unser bisheriges Verfahren bestand darin, daß wir eine Anzahl von Punkten konstruierten und dann die fehlenden durch Schätzung einfügten. Dies Eintragen der fehlenden Punkte nun läßt sich mit Hilfe der Krümmungskreise genauer ausführen, als es durch bloßes Schätzen möglich ist.

Gehen wir von der Aufgabe aus: Durch fünf Punkte eine Kurve zu legen, so ist der Gang der Lösung folgender. — Wir zeichnen<sup>(48 Z)</sup> den Schnittpunkt der Tangenten in zwei Kurvenpunkten, konstruieren<sup>(118 A)</sup> den Mittelpunkt und dann<sup>(119)</sup> die Achsen der Kurve; mit Hilfe der Achsen und der Tangente und Normale eines Kurvenpunktes  $S$  läßt sich dann der Krümmungskreis für  $S$  zeichnen<sup>(153<sub>4</sub>)</sup>. — Statt diese Konstruktionen, die sich an einer Figur doch nicht übersichtlich würden darstellen lassen, hier noch einmal im einzelnen durchzuführen, wollen wir von solchen gegebenen

Stücken ausgehen, die uns die Achsen unmittelbar ergeben. Wir lösen noch einmal<sup>(145)</sup> die

Aufgabe: Eine Kurve aus den beiden Brennpunkten und einer Tangente zu zeichnen.

Schneidet die gegebene Tangente  $t$  (Fig. 99) die Hauptachse in  $B$ , so erhalten wir die Normale  $n$  ihres Berührungspunktes  $S$ <sup>(141<sub>b</sub>)</sup>, indem wir auf  $t$  das Lot  $n$  fallen aus dem Punkte  $B_1$ , der von  $B$  durch die Brennpunkte  $F'$  und  $G$

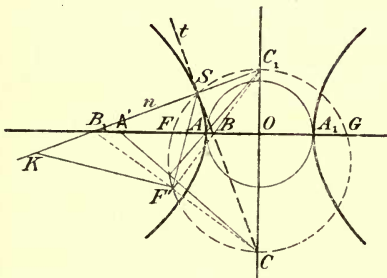


Fig. 99.

harmonisch getrennt ist. Wird das Mittellot von  $F'G$ , die Nebenachse<sup>(142<sub>i</sub>)</sup>, von  $t$  in  $C$  und von  $n$  in  $C_1$  geschnitten, so ist<sup>(153<sub>d</sub>)</sup> der Schnittpunkt  $F'$  von  $BC_1$  und  $B_1C$  der Brennpunkt der dem Punkt  $S$  zugeordneten Steiner'schen Parabel und der Punkt  $K$ , in dem das in  $F'$  auf  $SF'$  errichtete

Lot die Normale schneidet, der Krümmungsmittelpunkt. — Fällen wir von dem Brennpunkt  $F$  auf die Tangente  $t$  das (in der Figur nicht gezeichnete) Lot  $F'H$ , so ist der um die Mitte  $O$  von  $F'G$  mit  $OH$  geschlagene Kreis der Hauptkreis<sup>(149)</sup>, durch den wir die Scheitel  $A$  und  $A_1$  der Hauptachse erhalten. Zeichnen wir noch den von  $A$  durch  $F$  und  $G$  harmonisch getrennten Punkt  $A'$ , so ist dies der dem Scheitel  $A$  zugeordnete Krümmungsmittelpunkt<sup>(153<sub>s</sub>)</sup>.

**A** *Anmerkung.* Die Figur ist allein mit Hilfe der beiden Krümmungskreise um  $K$  und  $A'$  gezeichnet. — Es ist vorteilhaft den Kreis über dem Durchmesser  $CC_1$  zu zeichnen; er geht durch  $S$  und durch  $F$ <sup>(142<sub>d</sub>)</sup> und kann (siehe Fig. 99) zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $A'$  benutzt werden<sup>(98<sub>2</sub>)</sup>.

**155** **155.\* Krümmungskreise der Parabel.** Die vorhergehende<sup>(154)</sup> Konstruktion wird besonders einfach, wenn der eine Brennpunkt ein uneigentlicher Punkt, also<sup>(145<sub>Z</sub>)</sup> die Kurve eine Parabel ist. Für eine Parabel ist der Mittelpunkt  $O$  ein uneigentlicher Punkt<sup>(127<sub>3</sub>)</sup>, die Nebenachse also die uneigentliche Gerade. Die Punkte  $C$  und  $C_1$  sind daher die



uneigentlichen Punkte von  $t$  und  $n$ , und  $BC_1$  ist parallel  $n$  und  $B_1C$  parallel  $t$ ;  $SBF'B_1$  sind also die Ecken eines Rechtecks, so daß  $F'$  die Mitte von  $SF'$  ist. Daraus ergibt sich die folgende

*Konstruktion der Parabel:* Schneidet die gegebene Tangente die Hauptachse in  $B$  (Fig. 100), so schlagen wir um den Brennpunkt  $F$  mit  $FB$  einen Kreis, der die Tangente in  $S$ , die Hauptachse in  $B_1$  und die Verbindungslinie  $FS$  in  $F'$  zum zweiten Male schneidet; das in  $F'$  auf  $FS$  errichtete Lot trifft die Normale  $SB_1$  im Krümmungsmittelpunkt  $K$ .

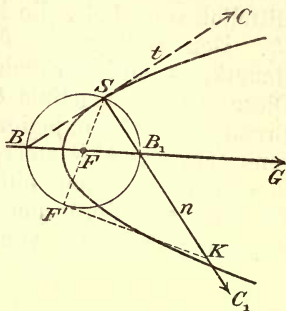


Fig. 100.

156.\* **Zweite Kurvenkonstruktion durch Krümmungskreise.** In Nr. 148 sahen wir, wie sich aus zwei Tangenten  $s$  und  $s_1$  und dem Brennpunkte  $F$  eine Kurve zeichnen läßt. Indem wir jetzt von dem besondern Falle ausgehen, daß der Schnittpunkt  $T$  der Tangenten  $s$  und  $s_1$  ein uneigentlicher Punkt ist, geben wir eine zweite Kurvenkonstruktion durch Krümmungskreise. Das in  $F$  auf  $TF$  errichtete Lot, welches die Tangenten in zwei Kurvenpunkten schneidet<sup>(146<sub>a</sub>)</sup>, steht in diesem Fall auch senkrecht auf der (durch  $T$  gehenden) Richtlinie und ist daher<sup>(148<sub>1</sub>)</sup> die Hauptachse. Die parallelen Tangenten liefern uns also die Scheitel  $A$  und  $A_1$  der Kurve. Umgekehrt können wir auch  $s$  und  $s_1$  als bestimmt ansehen durch die Scheitel  $A$  und  $A_1$  und unsere Aufgabe demnach so fassen:

*Eine Kurve zu zeichnen, von der die beiden (Haupt-<sup>(143<sub>1</sub>)</sup>) Scheitel und ein Punkt ihrer Verbindungslinie als Brennpunkt gegeben sind.*

Ist  $F_1$  der dem Brennpunkt  $F$  in der konjugierten Involution der Hauptachse homologe Punkt, so gehen durch ihn zwei Tangenten, die von dem im Brennpunkt  $F$  auf der Hauptachse errichteten Lot in zwei Kurvenpunkten<sup>(146<sub>a</sub>)</sup> geschnitten werden. Auf diese Bemerkung und die weitere, daß die Fußpunkte der vom Brennpunkte auf die Tangenten gefällten Lote im Hauptkreis liegen<sup>(149)</sup>, stützt sich die folgende

*Konstruktion:* Wir zeichnen den Hauptkreis der durch die Scheitel  $A A_1$  und den Brennpunkt  $F$  (Fig. 101) gegebenen Kurve und bezeichnen die Punkte, in denen er das Mittellot von  $A A_1$ , die Nebenachse, schneidet, durch  $C$  und  $C_1$ . Den Brennpunkt  $F$  projizieren wir aus  $C_1$  auf den Hauptkreis und verbinden den erhaltenen Punkt  $D$  mit  $C$ . Diese Verbindungslinie  $CD$  ist, weil sie durch den dem Brennpunkt  $F$  konjugierten Punkt  $F_1$  geht<sup>(93<sub>2</sub> und 143<sub>2</sub>)</sup> und senkrecht auf  $F'D$  steht, eine Tangente der Kurve<sup>(149)</sup>, die von dem im Brennpunkt  $F$  auf der Hauptachse errichteten Lot in ihrem Berührungspunkte  $S$  geschnitten wird. Tangente und Normale von  $S$  liefern uns den zugeordneten

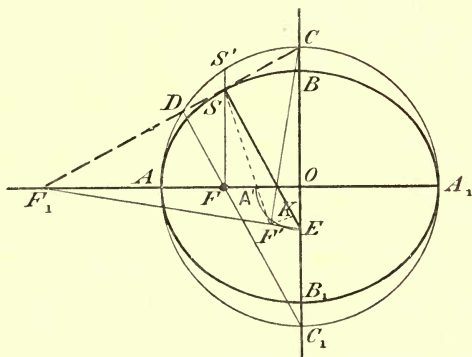


Fig. 101.

Krümmungskreis<sup>(153<sub>4</sub>)</sup>. — Zu bemerken ist noch: Die Normale in  $S$  schneidet die Nebenachse in einem Punkte  $E$ , der dem Punkte  $C$  in der fokalen Involution der Nebenachse homolog ist<sup>(141<sub>6</sub>)</sup>. Das von  $E$  auf  $AC$  gefällte Lot schneidet daher die Hauptachse in dem Punkte  $A'$ , der dem Scheitel  $A$  in der fokalen Involution homolog ist; daraus folgt, weil  $OA = OC$  ist, dafs auch  $OA' = OE$  ist. Man erhält also den Krümmungsmittelpunkt des Scheitels, indem man  $OA' = OE$  macht. — Liegt  $F$  auf  $AA_1$ ,  $F_1$  also<sup>(24<sub>1</sub>)</sup> auf  $A'A_1$ , so ist die Kurve eine Ellipse<sup>(147<sub>2</sub>)</sup> und das im Brennpunkt auf der Hauptachse errichtete Lot schneidet auch den Hauptkreis<sup>(144)</sup>. Nennen wir den einen Schnittpunkt  $S'$ , so ist nach dem Pythagoras  $FS'^2 = a^2 - e^2$ , also gleich  $b^2$ <sup>(146<sub>6</sub>)</sup>; wir kennen mithin auch die Punkte  $B$  und  $B_1$ , in denen die Nebenachse die Kurve schneidet.

*Anmerkung.* Da die im Text erwähnten Krümmungskreise zur Zeichnung der Figur 101 nicht ausreichen, so mußte eigentlich zwischen  $A$  und  $S$  noch ein Kurvenpunkt eingeschaltet und auch für diesen der Krümmungskreis gezeichnet werden. Infolge der Fehler aber, die beim Zeichnen unvermeidlich sind, erhält man eine ebenso gute Figur, wenn man den letzten Krümmungskreis durch Schätzung einträgt.

157.\* **Zweite<sup>(144)</sup> Konstruktion der Ellipse aus ihren beiden Achsen.** Die letzte Bemerkung der vorigen Nummer zeigte, daß wir aus  $AA_1$  und  $F$  die Länge  $OB$  der Nebenachse zeichnen konnten, wenn  $F$  auf  $AA_1$  liegt, die Kurve also eine Ellipse ist. Umgekehrt ergibt sich, daß uns eine Kurve durch  $AA_1$  und  $B$  gegeben ist. Da sich in diesem Falle eine besonders einfache Konstruktion für einzelne Krümmungskreise ergibt, so mag hier noch folgen die Lösung der

Aufgabe: *Eine Ellipse aus ihren beiden Achsen zu zeichnen.*

Schneiden sich die Lote, welche wir in  $A$  (Fig. 102) auf der Hauptachse und in  $B$  auf der Nebenachse errichten, in  $D$ , so ist  $D$ , als Schnittpunkt der Tangenten in  $A$  und  $B$ , der Pol von  $AB$ <sup>(87 z.)</sup>; das von  $D$  auf  $AB$  gefällte Lot ist daher das der Gerade  $AB$  konjugierte und schneidet mithin<sup>(141.)</sup> die Achsen in zwei Punkten  $A'$  und  $B'$ , die den Scheiteln  $A$  und  $B$  in den fokalen Involutionen homolog sind, d. i.<sup>(153.)</sup> in den den Scheiteln zugeordneten Krümmungsmittelpunkten. — Bezeichnen wir den Fußpunkt des von  $D$  auf  $AB$  gefällten Lotes durch  $P$ , so ergibt sich, wenn wir  $OA = a$  und  $OB = b$  setzen, nach einem planimetrischen Satze aus dem rechtwinkligen Dreieck  $ABD$ :

$$PA = b^2 : \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad PB = a^2 : \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Machen wir  $OQ = PB$  und errichten in  $Q$  auf der Hauptachse das Lot, so ist die Potenz der konjugierten Involution dieses Lotes für den Hauptkreis<sup>(139.)</sup>  $a^2 b^2 : a^2 + b^2$ . Folglich<sup>(143.)</sup> finden wir die Potenz  $y^2$  der der Kurve konjugierten Involution dieses Lotes aus

$$y^2 : \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = b^2 : a^2;$$

es ist also  $y = PA$ . Wir erhalten demnach einen Kurven-

punkt  $S$ , wenn wir  $PB$  und  $PA$  als Abszisse und Ordinate benutzen, d. h.  $QS = PA$  auf dem in  $Q$  errichteten Lote abtragen. — Nennen wir noch den nicht gezeichneten Schnittpunkt dieses Lotes mit dem Hauptkreis  $S'$ , so wissen wir<sup>(143a)</sup>, daß die Tangente des Ellipsenpunktes  $S$  die Hauptachse in demselben Punkte  $Q_1$  schneidet, wie die Tangente des Kreispunktes  $S'$ . Es ist also  $QQ_1 = QS'^2 : OQ$ , folglich  $QQ_1 = QS = PA$ . Die Normale des Kurvenpunktes  $S$  schneidet also die Hauptachse in einem Punkte  $N$ , so daß  $NQ = QS = PA$  ist. — Konstruieren wir<sup>(153a)</sup> aus Tangente und Normale und den beiden Achsen den Brennpunkt  $F'$  der Steinerschen Parabel, so liegt<sup>(153a)</sup>, weil  $\angle SF'O$  ein Rechter ist, der Krümmungsmittelpunkt  $K$  in  $F'O$ . Da noch  $\angle SOQ = \angle OF'Q$  ist<sup>(112a)</sup>, so schneidet  $OF'$  das Lot  $QS$  in einem Punkte  $S_1$  so, daß  $Q$  die Mitte von  $SS_1$  ist. — Aus diesen Bemerkungen ergibt sich die folgende

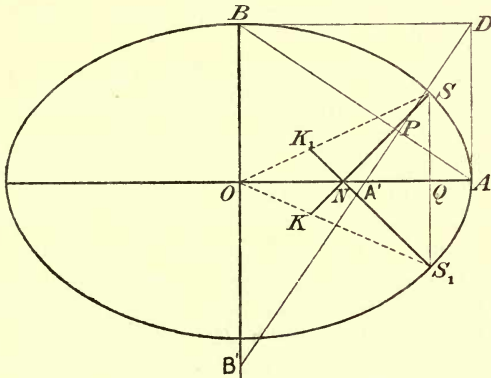


Fig. 102.

*Konstruktion:* Wir errichten in dem Scheitel  $A$  (Fig. 102) der Hauptachse und in dem Scheitel  $B$  der Nebenachse die Lote und fällen von ihrem Schnittpunkte  $D$  das Lot auf  $AB$ , welches  $AB$  in  $P$  und die Achsen in  $A'$  und  $B'$ , den zu  $A$  und  $B$  gehörigen Krümmungsmittelpunkten, schneidet. Wir machen  $OQ = PB$  und schlagen um  $Q$  mit  $PA$  einen Kreis, der die Hauptachse in  $N$  und das in  $Q$  auf der Hauptachse errichtete Lot in den Kurvenpunkten  $S$  und  $S_1$  schneidet; die Verbindungslinie  $SN$  schneidet dann  $OS_1$  in dem dem Punkte  $S$  zugeordneten Krümmungsmittelpunkte  $K$ .

## Zweiter Teil.

# Das Polarfeld.

### § 13. Die resultierende Involution.

158. **Art der Beweisführung.** Durch den Satz<sup>(50)</sup>, daß <sup>158</sup> die Punkte einer Kurve aus zwei beliebigen unter ihnen durch zwei projektive Strahlenbüschel projiziert werden, kamen wir zum Begriff projektiver krummer Punktreihen<sup>(71)</sup>. Indem wir zwei in derselben Kurve liegende projektive Punktreihen betrachteten, in denen zwei Punkte einander zweifach entsprechen, kamen wir zum Begriff der krummen Punkt- und Strahleninvolution<sup>(72)</sup>, durch diese zum Begriff der Involutionsachse<sup>(78)</sup> und des Involutionenzentrums<sup>(79)</sup>, durch diese zu den Begriffen Pol und Polare<sup>(84)</sup>, durch diese zum Begriff der konjugierten Punkte<sup>(92)</sup>. Jetzt wollen wir, in umgekehrter Richtung uns bewegend, von dem Begriff der konjugierten Punkte ausgehen und mit Hülfe der Polarentheorie Sätze über Involutionen und Projektivitäten beweisen.

Da es sich demnach um eine Anwendung der Sätze über Pol und Polare handelt, so werden wir im folgenden keine neuen Beweismittel kennen lernen. Dadurch aber, daß wir die so gewonnenen Sätze von dem Begriff der konjugierten Punkte loslösen können, gelangen wir zu Involutions- und Projektivitätssätzen von großer Fruchtbarkeit; sie erst ermöglichen, die Geometrie der Lage in allgemein gültigen Sätzen darzustellen.

*Anmerkung.* Die folgenden Sätze (sowie solche des § 14 <sup>A</sup> und des § 18) hat Herr H. Wiener in seiner Abhandlung: *Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen*

durch Punktgruppen auf der Geraden, Darmstadt 1885, ohne Hülfe der Polarentheorie bewiesen.

159

### 159. Resultierende Involution.

1. *Definition:* Von zwei krummen Punktinvolutionen, die in derselben Kurve liegen, heißt die eine eine resultierende der andern, wenn die Zentren konjugierte Punkte sind. —

Um eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, bezeichnen wir im folgenden eine krumme Punktinvolution, deren Zentrum der Punkt  $P$  ist<sup>(82)</sup>, durch  $[P]$ .

2. Sind  $B$  und  $B_1$  irgend zwei homologe Punkte einer krummen Involution  $[Q]$  und  $BB$  und  $B_1B_1$  zwei Paar homologe Punkte der resultierenden Involution  $[P]$ , so sind  $B$  und  $B_1$  wieder zwei homologe Punkte von  $[Q]$ .

Beweis: Die vier Punkte  $BB_1B_1B_1$  bilden ein Kurvenviereck, von dem zwei Seiten  $BB$  und  $B_1B_1$  nach der Voraussetzung durch das Zentrum  $P$  der Involution  $[P]$  gehen, während die dritte Seite  $BB_1$  durch den dem Punkte  $P$  konjugierten Punkt  $Q$  geht; es geht daher<sup>(97.)</sup> die Gegenseite  $BB_1$  dieser dritten Seite ebenfalls durch  $Q$ ;  $B$  und  $B_1$  sind also zwei homologe Punkte der krummen Involution  $[Q]$ <sup>(82)</sup>.

160

160. **Übertragung auf beliebige Involutionen.** Um diesen Satz<sup>(159)</sup> auf beliebige Involutionen zu übertragen, müssen wir die Definition der resultierenden Involution von dem Begriff der konjugierten Punkte loslösen. Das erreichen wir durch die für zwei beliebige in demselben Träger liegende Involutionen  $P^2$  und  $Q^2$  gültige

1. *Definition:* Von zwei Involutionen  $P^2$  und  $Q^2$  heißt die eine eine resultierende der andern, wenn zwei homologen Elementen von  $Q^2$  in  $P^2$  zwei Elemente homolog sind, die einander wieder in  $Q^2$  homolog sind.

In Zeichen: Wenn  $P^2 = AA \cdot A_1A_1$  und  $Q^2 = AA_1 \cdot AA_1$  ist, so heißt von den beiden Involutionen  $P^2$  und  $Q^2$  die eine eine resultierende der andern. —

2. *Lehrsatz:* Sind  $B$  und  $B_1$  zwei beliebige homologe Elemente der Involution  $Q^2$  und  $BB$  und  $B_1B_1$  zwei Paar homologe Elemente einer resultierenden Involution  $P^2$ , so sind  $B$  und  $B_1$  einander homolog in  $Q^2$ .

In Zeichen: Aus  $P^2 = AA \cdot A_1A_1 \cdot BB \cdot B_1B_1$  und  $Q^2 = AA_1 \cdot AA_1 \cdot BB_1$  folgt, daß  $B$  und  $B_1$  einander homolog sind in  $Q^2$ .

Beweis: Wir zeigen die Richtigkeit des Satzes zunächst für krumme Punktinvolutionen. — Betrachten wir das Kurvenviereck  $AA_1AA_1$  (Fig. 103), so ist, weil  $P^2 = AA \cdot A_1A_1$  ist, der Schnittpunkt  $P$  der Gegenseiten  $AA$  und  $A_1A_1$  das Zentrum der Involution  $P^2$  und, weil  $Q^2 = AA_1 \cdot AA_1$  ist, der Schnittpunkt  $Q$  der Gegenseiten  $AA_1$  und  $AA_1$  das Zentrum der Involution  $Q^2$ .  $P$  und  $Q$  sind aber als Diagonalepunkte eines Kurvenvierecks

konjugierte Punkte<sup>(92<sub>3</sub>)</sup>; daher<sup>(159<sub>2</sub>)</sup> sind  $B$  und  $B_1$  einander homolog in  $Q^2$ .

Um die Richtigkeit unsers Satzes z. B. für zwei gerade Strahleninvolutionen mit dem Mittelpunkte  $S$  darzuthun, legen wir durch  $S$  eine beliebige Kurve  $k^2$ . Diese wird von den beiden in  $S$  gegebenen Involutionen in zwei krummen

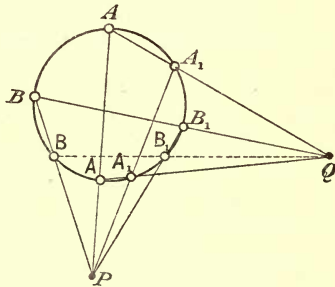


Fig. 103.

Involutionen geschnitten. Da für diese krummen Involutionen der Satz bewiesen ist, gilt er auch für die in  $S$  gegebenen geraden Strahleninvolutionen.

*Anmerkung.* Von jetzt an werden wir unsere Sätze  $A$  nur für krumme Punktinvolutionen beweisen und sie dann gleich als gültig für alle Involutionen aussprechen.

**161. Ordnungselemente.** Da einem Punkte  $P$  jeder 161 Punkt  $Q$  seiner Polare  $p$  konjugiert ist, so giebt es zu einer Involution  $[P]$  unendlich viele resultierende  $[Q]$ . Ist  $P$  ein hyperbolischer Punkt, gehen also<sup>(105<sub>2</sub>)</sup> durch  $P$  zwei Tangenten, die die Kurve in  $K$  und  $K_1$  berühren, so sind  $K$  und  $K_1$  die Ordnungspunkte der krummen Involution  $[P]$ <sup>(82<sub>Z</sub>)</sup> und  $KK_1$  ist die Polare von  $P$ <sup>(86<sub>Z</sub>)</sup>. Das Zentrum  $Q$  jeder resultierenden Involution liegt daher, weil  $Q$  und  $P$  konjugierte Punkte sind, mit  $K$  und  $K_1$  in einer Gerade;  $K$  und  $K_1$  sind also homologe Punkte von  $[Q]$ :

1. Die Ordnungselemente einer Involution sind einander homolog in jeder resultierenden Involution.

Ist auch  $Q$  ein hyperbolischer Punkt, so daß von ihm die beiden Tangenten  $Q(LL_1)$  an die Kurve gehen, so bilden, weil  $KK_1$  durch  $Q$  geht, die Ordnungselemente  $KK_1 \cdot LL_1$  einen harmonischen Wurf<sup>(70a)</sup>:

2. *Die Ordnungselemente einer Involution werden durch die Ordnungselemente jeder resultierenden Involution harmonisch getrennt.*

Ist  $[P]$  eine elliptische Involution,  $P$  also<sup>(106a)</sup> ein elliptischer Punkt, so ist jeder Punkt  $Q$  der Polare  $p$  ein hyperbolischer Punkt<sup>(107)</sup>:

3. *Hat eine Involution keine Ordnungselemente, so hat jede resultierende Involution Ordnungselemente.*

162

### 162. Konstruktion der resultierenden Involution.

Sind  $Q$  und  $R$  zwei beliebige Punkte, also  $[Q]$  und  $[R]$  zwei beliebige Involutionen, so giebt es immer eine Involution  $[P]$ , die eine resultierende sowohl von  $[Q]$  als von  $[R]$  ist. Es ist das die Involution, deren Zentrum  $P$  der Pol der Verbindungslinie  $QR$  ist. — Es genügt aber nicht zu wissen, daß es zu zwei Involutionen immer eine gemeinsame resultierende giebt; wir müssen auch die resultierende aus den beiden komponierenden zeichnen können. Dazu müssen wir die eben angestellte Betrachtung, durch welche sich  $P$  als der Pol von  $QR$  ergab, von dem Begriffe Pol und Polare loslösen.

1. Aufgabe: *Zu zwei Involutionen die gemeinsame resultierende zu zeichnen.*

Lösung: Entspricht dem beliebigen Elemente  $A$  in der ersten gegebenen Involution  $Q^2$  das Element  $A_1$  und diesem in der zweiten gegebenen Involution  $R^2$  das Element  $A_{12}$ ; entspricht ferner dem Element  $A$  in  $R^2$  das Element  $A_2$  und diesem in  $Q^2$  das Element  $A_{21}$ , so ordnen wir dem Elemente  $A$  das von  $A$  durch  $A_{12}$  und  $A_{21}$  harmonisch getrennte Element  $A$  zu.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß die durch unsere Konstruktion einander zugeordneten Elemente  $A$  und  $A$  eine Involution bilden und daß diese Involution eine resultierende sowohl der Involution  $Q^2$  wie der Involution  $R^2$  ist. — Diesen Nachweis führen wir wieder<sup>(160 A)</sup> für zwei krumme Involutionen  $[Q]$  und  $[R]$ . Da nach der Konstruktion



$AA_1 \cdot A_2 A_{21}$  (Fig. 104) Punktpaare von  $[Q]$  sind, so schneiden sich die Verbindungslinien  $AA_1$  und  $A_2 A_{21}$  in  $Q$ ; ebenso schneiden sich  $AA_2$  und  $A_1 A_{12}$  in  $R$ . Aus dem

Schema  $\overbrace{AA_1 A_{12} A_{21} A_2 A}$  geht dann hervor<sup>(55)</sup>, daß die Tangente in  $A$  die Gerade  $QR$  in demselben Punkte  $S$  schneidet wie die Verbindungslinie  $A_{12} A_{21}$ . Der Punkt  $S$  bestimmt also in der Kurve eine hyperbolische Involution, von der  $A$  ein Ordnungspunkt und  $A_{12} A_{21}$  zwei homologe Punkte sind. Der zweite Ordnungspunkt dieser krummen Involution  $[S]$  ist der von  $A$

durch  $A_{12}$  und  $A_{21}$  harmonisch getrennte Punkt<sup>(72a)</sup>.

Das ist nach unserer Konstruktion der Punkt  $A$ . Die Verbindungslinie  $AA$  ist daher die Polare von  $S$ <sup>(86 Z<sub>1</sub>)</sup>,

und diese geht, weil  $S$  in  $QR$  liegt, durch den Pol  $P$  von  $QR$ . Das durch unsere Konstruktion gewon-

nene Punktpaar  $AA$  ist mithin ein Punktpaar der krummen Involution  $[P]$ , und diese ist, weil  $P$  der Pol von  $QR$  ist, eine resultierende sowohl von der Involution  $[Q]$  wie von der Involution  $[R]$ <sup>(159<sub>1</sub>)</sup>.

*Zusatz.* Um die Involutionen  $Q^2$  und  $R^2$  kurz bezeichnen zu können, wollen wir sie *komponierende* der Involution  $P^2$  nennen.

163. **Ordnungselemente der resultierenden Invo-** 163  
**lution.** Wenn eine der beiden komponierenden<sup>(162 Z)</sup> Involutionen elliptisch ist, so ist die resultierende  $P^2$  hyperbolisch<sup>(161a)</sup>. Es bleibt also noch die Frage nach den Ordnungselementen der resultierenden Involution zu erledigen für den Fall, daß beide komponierende hyperbolisch sind. — Sind  $Q$  und  $R$  die Zentren der beiden komponierenden krummen Involutionen, so handelt es sich, weil das Zentrum der resultierenden Involution der Pol  $P$  von  $QR$  ist, darum, zu wissen, unter welchen Umständen die Verbindungslinie  $QR$  die Kurve schneidet. Diese Frage ist in Nr. 108 erledigt. Aus dieser Nummer ergibt sich, daß  $QR$  die Kurve nicht schneidet, also  $P$  ein elliptischer Punkt ist<sup>(105<sub>3</sub>)</sup>,

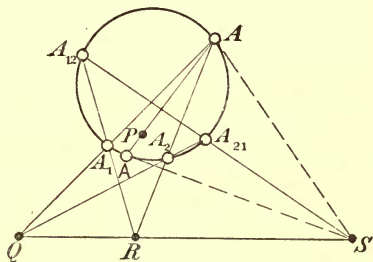


Fig. 104.

wenn die Ordnungselemente von  $[Q]$  und  $[R]$  einander trennen; trennen sie sich nicht, so ist  $P$  ein hyperbolischer Punkt.

**Lehrsatz:** Die resultierende Involution hat nur dann keine Ordnungselemente, wenn die beiden komponierenden Ordnungselemente haben *und* diese einander trennen.

164 **164. Staudtscher Satz.** Wir unterbrechen in dieser Nummer die Betrachtung der resultierenden Involution, um den Satz zu beweisen, auf dem v. Staudt<sup>(1)</sup> die projektive Verwandtschaft aufgebaut hat. — Wir wissen<sup>(1612)</sup>, daß die Ordnungselemente einer Involution durch die Ordnungselemente jeder resultierenden Involution harmonisch getrennt werden. Bezeichnen wir also die Ordnungselemente der Involutionen  $P^2, Q^2, R^2$  durch  $EF, AB, CD$ , so heißt der vorhergehende Satz<sup>(163)</sup>, losgelöst vom Begriff der resultierenden Involution:

1. Ist  $AB.CD$  ein hyperbolischer Wurf, so giebt es ein Punktpaar  $EF$ , welches gleichzeitig  $AB$  und  $CD$  harmonisch trennt.

Um mit Hilfe dieses Satzes die Umkehrung von Nr. 30<sub>5</sub> zu beweisen, führen wir für den Augenblick das Wort *harmonische Verwandtschaft* ein durch die

2. Definition: Zwei einförmige Grundgebilde heißen harmonisch verwandt, wenn je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische des andern entsprechen.

Wir führen unsern Beweis für zwei harmonisch verwandte Punktreihen  $s$  und  $s_1$ . Wählen wir in  $s$  vier beliebige Punkte, so lassen sich aus diesen drei Würfe bilden<sup>(104)</sup>, von denen zwei hyperbolisch sind und einer elliptisch. Bezeichnen wir die vier Punkte der Reihe nach durch  $ABCD$ , so sind  $AB.CD$  und  $AD.BC$  die hyperbolischen Würfe, während  $AC.BD$  elliptisch ist. Es giebt daher zwei Punkte  $E$  und  $F$ , welche gleichzeitig  $AB$  und  $CD$  harmonisch trennen, und zwei Punkte  $G$  und  $H$ , welche gleichzeitig  $AD$  und  $BC$  harmonisch trennen. Nach der Definition müssen daher die entsprechenden Punkte  $E_1$  und  $F_1$  gleichzeitig die Punktpaare  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$ , und  $G_1$  und  $H_1$  gleichzeitig die Punktpaare  $A_1D_1$  und  $B_1C_1$  harmonisch trennen. Folglich sind  $A_1B_1.C_1D_1$  und

$A_1 D_1 . B_1 C_1$  hyperbolische Würfe,  $A_1 C_1 . B_1 D_1$  also ein elliptischer Wurf. Unser erstes Ergebnis ist also:

3. In zwei harmonisch verwandten Grundgebilden entspricht jedem Wurf ein gleichnamiger Wurf.

Hieraus folgt:

4. Wenn ein Punkt  $X$  die Punktreihe  $s$  im Sinne  $A B C$  durchläuft, so muß der entsprechende Punkt  $X_1$  die Punktreihe  $s_1$  im Sinne  $A_1 B_1 C_1$  durchlaufen.

Es gelten also für harmonisch verwandte Grundgebilde dieselben Sätze, die wir in Nr. 32 benutzt haben, um zu beweisen, daß zwei projektive Grundgebilde zusammenfallen, wenn sie drei Elemente entsprechend gemein haben. Eine Wiederholung jenes Beweises ergibt daher:

5. Wenn zwei harmonisch verwandte Grundgebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie jedes Element entsprechend gemein. —

Schneiden wir die Träger  $s$  und  $s_1$  zweier harmonisch verwandten Punktreihen durch eine beliebige Gerade  $\sigma$  in  $B$  und  $C_1$  (vergl. Nr. 35 und Fig. 29), verbinden  $B$  mit  $B_1$  und  $C_1$  mit  $C$  und bezeichnen die Punkte, in denen die Verbindungslinie irgend zweier entsprechenden Punkte  $A$  und  $A_1$  von  $\sigma$ ,  $B B_1$  und  $C C_1$  geschnitten wird, durch  $A$ ,  $S_1$  und  $S$ , so erhalten wir in  $\sigma$  zwei harmonisch verwandte Punktreihen, wenn wir die Punktreihe  $s$  aus  $S$  und die Punktreihe  $s_1$  aus  $S_1$  auf  $\sigma$  projizieren. Die beiden in  $\sigma$  gewonnenen Punktreihen, die harmonisch verwandt sind, haben die drei Punkte  $A B C_1$  und daher jeden Punkt entsprechend gemein; es lassen sich also  $s$  und  $s_1$  als die Endglieder einer Kette von perspektiven Gliedern auffassen; daher<sup>(301)</sup>:

6. *Zwei einförmige Grundgebilde sind projektiv, wenn je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische Elemente des andern entsprechen.*

*Zusatz.* Da in zwei kongruenten Grundgebilden vier  $z$  harmonischen Elementen vier harmonische Elemente entsprechen, so folgt aus dem eben bewiesenen Satze:

Kongruente Grundgebilde sind projektiv,

ein Satz, den wir früher<sup>(411)</sup> nur durch die Geometrie des Mafses beweisen konnten.

165 **165. Kennzeichen für drei komponierende Involu-  
tionen.** Weil die aus zwei Involutionsen  $[Q]$  und  $[R]$  resul-  
tierende  $[P]$  den Pol  $P$  von  $QR$  als Zentrum hat<sup>(162)</sup>, so  
ergeben je zwei von den drei Involutionsen  $[Q][R][S]$  die-  
selbe resultierende, wenn ihre Zentren  $QRS$  in einer  
Gerade liegen. Um diesen Satz auf beliebige Involutionsen  
übertragen zu können, müssen wir die Bedingung, daß die  
Zentren  $QRS$  in einer Gerade liegen, in eine andere Form  
bringen. — Sind in  $[Q][R][S]$  dem Punkte  $A$  die Punkte  
 $A_1 A_2 A_3$  und dem Punkte  $B$  die Punkte  $B_1 B_2 B_3$  homolog,  
so ist  $AB_1 B_2 B_3 \overline{\wedge} BA_1 A_2 A_3$  die notwendige und hin-  
reichende Bedingung dafür, daß die drei Zentren  $QRS$  in  
einer Gerade liegen; denn projiziert man  $AB_1 B_2 B_3$  aus  $B$   
und  $BA_1 A_2 A_3$  aus  $A$ , so erhält man zwei projektive  
Strahlenbüschel<sup>(60)</sup>, in welchen dem Strahle  $B(A)$  der Strahl  
 $A(B)$  entspricht, so daß die Schnittpunkte je zweier homo-  
loger Strahlen, d. h. die Involutionszentren, in einer Gerade  
liegen<sup>(34)</sup>.

Lehrsatz: Wenn in den Involutionsen  $Q^2 R^2 S^2$  den  
Elementen  $A$  und  $B$  die Elemente  $A_1 A_2 A_3$  und  
 $B_1 B_2 B_3$  homolog sind, so ist  $AB_1 B_2 B_3 \overline{\wedge} BA_1 A_2 A_3$   
die notwendige und hinreichende Bedingung dafür,  
daß die drei Involutionsen komponierende einer und  
derselben resultierenden Involution sind.

166 **166. Gesamtheit der komponierenden Involutionsen.**  
Soll eine Involution  $[Q]$  eine komponierende der Involution  
 $[P]$  sein, so muß ihr Zentrum  $Q$  in der Polare  $p$  von  $P$   
liegen<sup>(159<sub>1</sub>)</sup>; soll in ihr außerdem dem Punkte  $A$  der Punkt  
 $A_1$  homolog sein, so muß  $Q$  in der Verbindungslinie  $AA_1$   
liegen.  $Q$  ist also bestimmt als Schnittpunkt von  $p$  und  
 $AA_1$ .

1. Lehrsatz: *Eine Involution ist bestimmt durch ein  
Elementenpaar und eine resultierende Involution.*

In Zeichen: Entsprechen den Elementen  $A$  und  $A_1$  in  
der resultierenden Involution  $P^2$  die Elemente  $A$  und  $A_1$ , so  
ist die durch das Elementenpaar  $AA_1$  und die resultierende  
Involution  $P^2$  bestimmte Involution  $AA_1 . AA_1$ <sup>(159<sub>2</sub>)</sup>. —

Wenn der Punkt  $Q$  die Polare  $p$  von  $P$  durchläuft, so  
liefert  $Q$  als Involutionszentrum sämtliche Involutionsen  $[Q]$ ,  
welche komponierende von  $[P]$  sind. Ist  $G$  ein fester Punkt

der Kurve  $k^2$  und  $G_1$  der Punkt, in dem die Verbindungslinie  $GQ$  die Kurve zum zweiten Male schneidet, so durchläuft  $G_1$ , wenn  $Q$  die Polare  $p$  durchläuft, die Kurve  $k^2$ . Wir erhalten daher sämtliche komponierende Punktreihen von  $[P]$ , wenn wir irgend einem festen Punkt  $G$  der Reihe nach alle Punkte  $G_1$  zuordnen und die durch die Punkt-paare  $G G_1$  und  $[P]$  bestimmten Involutionen konstruieren.

2. **Lehrsatz:** Man erhält die sämtlichen komponierenden einer Involution  $P^2$ , wenn man irgend einem festen Elemente  $G$  der Reihe nach sämtliche Elemente  $G_1$  als homologe zuweist und die durch diese Zuweisungen bestimmten Involutionen konstruiert. — Wenn  $P^2$  hyperbolisch ist, so giebt es unter den komponierenden zwei parabolische: diejenigen, für welche  $G_1$  mit einem Ordnungselement zusammenfällt<sup>(82a)</sup>. —

Ist  $H$  ein zweiter fester Punkt und  $H_1$  der zweite Schnittpunkt von  $H(Q)$  und  $k^2$ , so beschreiben, während  $Q$  die Polare  $p$  durchläuft,  $G(Q)$  und  $H(Q)$  zwei zu  $p$  perspektive Strahlenbüschel, die Punkte  $G_1$  und  $H_1$  also zwei projektive Punktreihen<sup>(71)</sup>:

3. *Die Elemente  $G_1$  und  $H_1$ , welche zwei festen Elementen  $G$  und  $H$  in den komponierenden einer Involution  $P^2$  homolog sind, sind projektiv auf einander bezogen, wenn man die Elemente  $G_1$  und  $H_1$  einander zuordnet, die den festen Elementen in derselben komponierenden homolog sind.* —

Sind  $G$  und  $H$  zwei homologe Elemente von  $P^2$ , so sind die Elemente  $G_1$  und  $H_1$ , welche ihnen in der komponierenden Involution  $Q^2$  homolog sind, wieder zwei homologe Elemente von  $P^2$ <sup>(159a)</sup>:

4. *Die Elemente  $G_1$  und  $H_1$ , welche zwei homologen Elementen  $G$  und  $H$  von  $P^2$  in irgend einer komponierenden von  $P^2$  homolog sind, sind Elementenpaare der Involution  $P^2$ .*

Als besondere Fälle sind noch hervorzuheben:

5. Fällt  $G_1$  in  $H$ , so fällt  $H_1$  in  $G$ ; fällt  $G_1$  in  $G$ , so fällt  $H_1$  in  $H$ .

167. **Drei Involutionen.** Sind  $A A A_1 A_1$  vier beliebige<sup>167</sup> Punkte einer Kurve  $k^2$ , so ist der Schnittpunkt  $P$  (Fig. 105)

von  $AA$  und  $A_1A_1$  konjugiert dem Schnittpunkt  $Q$  von  $AA_1$  und  $AA_1$  (<sup>92a</sup>); die Involution  $AA_1 \cdot AA_1$  ist daher eine komponierende der Involution  $AA \cdot A_1A_1$  (<sup>159i</sup>). Dasselbe gilt von der Involution  $AA_1 \cdot A_1A$ .

1. Von den drei Involutionen  $AA \cdot A_1A_1$ ;  $AA_1 \cdot AA_1$ ;  $AA_1 \cdot A_1A$  sind je zwei komponierende der dritten. —

Sind je zwei von drei krummen Involutionen  $[P][Q][R]$  komponierende der dritten, so sind die Zentren die Ecken eines Poldreiecks (<sup>159i</sup>). Ist also  $A$  (Fig. 105) ein beliebiger Punkt von  $k^2$ , dem in  $[P][Q][R]$  die drei Punkte  $AA_1A_1$  homolog sind, so bilden  $AA_1A_1$  die Ecken eines Kurvenvierecks, von dem  $PQR$  die Diagonalepunkte sind (<sup>97i</sup>). Die drei Involutionen sind also  $[P] = AA \cdot A_1A_1$ ;  $[Q] = AA_1 \cdot AA_1$ ;  $[R] = AA_1 \cdot A_1A$ :

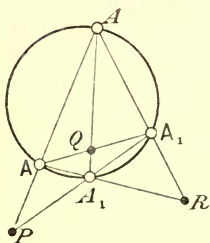


Fig. 105.

2. Wenn in drei Involutionen, von denen je zwei komponierende der dritten sind, einem Elemente  $A$  die Elemente  $AA_1A_1$  homolog sind, so sind die drei Involutionen:  $AA \cdot A_1A_1$ ;  $AA_1 \cdot AA_1$ ;  $AA_1 \cdot A_1A$ .

3. Wenn von drei Involutionen je zwei komponierende der dritten sind, so sind zwei dieser Involutionen hyperbolisch; die dritte ist elliptisch (<sup>69a</sup>).

168

**168. Die konjugierten Involutionen der Strahlen eines Punktes.** Projizieren wir die konjugierte Involution irgend einer Gerade  $p$  aus einem beliebigen Kurvenpunkte  $S$ , so schneidet die in  $S$  gewonnene Strahleninvolution die Kurve in einer krummen Punktinvolution, deren Zentrum der Pol  $P$  von  $p$  ist (<sup>98a</sup>). Ist nun  $A$  irgend ein Punkt von  $p$ , also dem Punkte  $P$  konjugiert (<sup>92i</sup>), so ist die durch das Zentrum  $P$  induzierte krumme Punktinvolution eine komponierende (<sup>162 z</sup>) (oder, was dasselbe ist, eine resultierende) der durch das Involutionszentrum  $A$  bestimmten (<sup>159i</sup>). Dreht sich der Strahl  $p$  um  $A$ , so beschreibt der Pol  $P$  von  $p$  die Polare  $a$  von  $A$  (<sup>90a</sup>); es ergibt sich daher, daß die konjugierten Involutionen sämtlicher Strahlen  $p$  von  $A$  aus  $S$  durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert werden und daß die resultierende aus diesen komponierenden In-

volutionen die durch das Involutionszentrum  $A$  bestimmte ist. Diese resultierende wird aber aus  $S$  durch eine Involution projiziert, die perspektiv zu der konjugierten Involution der Polare  $a$  von  $A$  liegt<sup>(98<sub>a</sub>)</sup>.

**Lehrsatz:** Die konjugierten Punktinvolutionen der Strahlen  $p$  eines Punktes  $A$  werden aus jedem Kurvenpunkte  $S$  durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert. Die resultierende aus diesen komponierenden ist diejenige, welche die konjugierte Punktinvolution der Polare  $a$  von  $A$  in  $S$  erzeugt. — Sie schneidet daher<sup>(98<sub>a</sub>)</sup> die Kurve in einer krummen Punktinvolution, deren Zentrum der Punkt  $A$  ist.

**Lehrsatz:** Die konjugierten Strahleninvolutionen der Punkte  $P$  einer Gerade  $a$  schneiden jede Kurventangente  $s$  in komponierenden Punktinvolutionen. Die resultierende aus diesen komponierenden ist diejenige, welche die konjugierte Strahleninvolution des Poles  $A$  von  $a$  in  $s$  ausschneidet. — Sie bestimmt daher eine krumme Strahleninvolution, deren Achse die Gerade  $a$  ist.

*Zusatz.* Hat die konjugierte Involution irgend eines  $z$  Strahles  $p$  von  $A$  die Ordnungspunkte  $K$  und  $K_1$ , mit andern Worten<sup>(98<sub>a</sub>)</sup> schneidet  $p$  die Kurve in den Punkten  $K$  und  $K_1$ , so sind  $S(K)$  und  $S(K_1)$  homologe Strahlen der resultierenden Involution von  $S$ <sup>(161<sub>1</sub>)</sup>.  $S(K)$  und  $S(K_1)$  schneiden also nach unserm Satze die Polare  $a$  von  $A$  in konjugierten Punkten. Daraus erkennen wir, daß unser Satz eine Verallgemeinerung von Nr. 98<sub>4</sub> ist. Für den Fall, daß  $A$  ein hyperbolischer Punkt ist, wußte dieser Satz nichts auszusagen über die Strahlen, die die Kurve *nicht* schneiden; erst der Begriff der komponierenden Involution vermag diese Lücke auszufüllen. Um für den Satz einen kürzern Ausdruck zu gewinnen, führen wir die *adjungierte* Involution ein durch die

1. Definition: *Jede resultierende einer konjugierten Involution heißt der Kurve adjungiert.*

Es schneidet also die Strahleninvolution, welche die konjugierte Involution der Gerade  $a$  aus  $S$  projiziert, irgend einen Strahl  $p$  des Poles  $A$  von  $a$ , das ist irgend eine der Gerade  $a$  konjugierte<sup>(92<sub>1</sub>)</sup> Gerade, in einer adjungierten Involution :

2. Die Strahleninvolution, durch welche die konjugierte Punktinvolution einer beliebigen Gerade  $a$  aus irgend einem Kurvenpunkte projiziert wird, schneidet jede der Gerade  $a$  konjugierte Gerade in einer der Kurve adjungierten Involution.

2. Die Punktinvolution, in welcher die konjugierte Strahleninvolution eines beliebigen Punktes  $A$  irgend eine Tangente schneidet, wird aus jedem dem Punkte  $A$  konjugierten Punkte durch eine der Kurve adjungierte Involution projiziert.

169. Verallgemeinerung des Satzes von Desargues.

$S S_1 A B$  (Fig. 106) seien die Ecken eines beliebigen Kurvenvierecks,  $p$  eine beliebige Gerade und  $P$  ihr Pol. Wir bezeichnen die Punkte, in denen  $p$  von den Gegenseiten  $S A$  und  $S_1 B$  geschnitten wird, durch  $A$  und  $A_1$ , und die Punkte, in denen  $p$  von den Gegenseiten  $S B$  und  $S_1 A$  geschnitten wird, durch  $B$  und  $B_1$ . Schliesslich mögen die

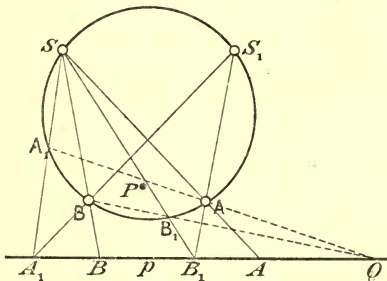


Fig. 106.

Verbindungslinien  $S A_1$  und  $S B_1$  von der Kurve zum zweiten Male in  $A_1$  und  $B_1$  geschnitten werden. Es bilden dann die Kurven-

punkte  $\overline{S A_1 A S_1 B B_1}$  ein Sechseck, aus dem hervorgeht<sup>(54)</sup>, dass auch die Verbindungslinien  $A A_1$  und

$B B_1$  sich in einem Punkte  $Q$  von  $p$  schneiden. Die krumme Involution  $A A_1 . B B_1$ , von der  $Q$  das Zentrum ist, ist, weil  $Q$  in der Polare  $p$  von  $P$  liegt, eine resultierende der krummen Involution, die durch den Pol  $P$  in der Kurve induziert wird<sup>(169a)</sup>. Es wird daher aus dem Kurvenpunkte  $S$  die krumme Involution  $[Q] = A A_1 . B B_1$  durch eine Strahleninvolution projiziert, die eine resultierende ist von der Strahleninvolution, durch welche die krumme Involution  $[P]$  aus  $S$  projiziert wird. Diese Strahleninvolution aber schneidet  $p$  in der der Kurve konjugierten Involution von  $p$ <sup>(98a)</sup>; also ist die Involution  $A A_1 . B B_1$ , welche durch die Strahleninvolution  $S (A A_1 . B B_1)$  in  $p$  ausgeschnitten wird, eine resultierende der konjugierten Involution von  $p$ . Da  $A A_1 . B B_1$  die Punkte sind, in denen zwei Paar Gegen-



seiten des Kurvenvierecks  $SS_1AB$  die Gerade  $p$  schneiden, so haben wir:

1. Die Gegenseiten eines Kurvenvierecks schneiden jede Gerade in einer Punktinvolution, die eine resultierende der konjugierten Involution dieser Gerade ist. —

1. Die Gegenecken eines Kurvenvierecks werden aus jedem Punkte durch eine Strahleninvolution projiziert, die eine resultierende der konjugierten Involution dieses Punktes ist. —

Hat die konjugierte Involution der Gerade Ordnungspunkte, d. h. schneidet die Kurve die Gerade, so sind diese Schnittpunkte einander homolog in der resultierenden Involution<sup>(161)</sup>. Es ist unser Satz also eine Verallgemeinerung des Lehrsatzes von Desargues<sup>(103)</sup>. Die allgemeinste Form dieses Satzes wird sich uns in Nr. 194<sub>3</sub> ergeben. —

Mit Hülfe des Begriffs der adjungierten Involution<sup>(168 Z.)</sup> läßt sich unser Satz so aussprechen:

2. Die Gegenseiten eines Kurvenvierecks schneiden jede Gerade in einer der Kurve adjungierten Punktinvolution.

2. Die Gegenecken eines Kurvenvierecks werden aus jedem Punkte durch eine der Kurve adjungierte Strahleninvolution projiziert.

**170. Die Hauptstrahleninvolution.** Zwei Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$  und ihre diagonale Involution  $u^{2(133)}$  werden aus einem beliebigen Punkte  $S$  durch drei Strahleninvolutionen projiziert. Wir wollen beweisen, daß diese durch zwei Gegenseiten und ihre diagonale Involution in einem beliebigen Punkte  $S$  induzierten drei Strahleninvolutionen komponierende einer und derselben resultierenden sind. Sind also in den drei Strahleninvolutionen den Strahlen  $a$  und  $b$  die Strahlen  $a_1 a_2 a_3$  und  $b_1 b_2 b_3$  homolog, so ist nachzuweisen<sup>(165)</sup>, daß  $b a_1 a_2 a_3 \overline{\wedge} a b_1 b_2 b_3$  ist. Schneidet  $a$  die drei Träger  $ghu$  in  $C \Gamma A$  (Fig. 107), so liegen die drei den Punkten  $C \Gamma A$  in  $ghu$  homologen Punkte  $C_1 \Gamma_1 B$  in einer Gerade  $\alpha^{(133)}$ , und es ist der (in der Figur nicht gezeichnete) Strahl  $S(C_1) = a_1$ ,  $S(\Gamma_1) = a_2$ ,  $S(B) = a_3$ . Schneidet ferner ein zweiter Strahl  $b$  von  $S$  die drei Träger  $ghu$  in  $D \Delta A_1$ , so liegen die drei den Punkten  $D \Delta A_1$  in  $ghu$  homologen Punkte  $D_1 \Delta_1 B_1$  in einer Gerade  $\beta$ , und es ist  $S(D_1) = b_1$ ,  $S(\Delta_1) = b_2$ ,  $S(B_1) = b_3$ . Mit Hülfe von  $a \alpha b \beta$  läßt sich noch zu einem dritten Strahl  $c$  von  $S$  der

zugeordnete  $\gamma$  konstruieren. Bezeichnen wir nämlich die Schnittpunkte  $(a\beta)$ ,  $(\beta\alpha)$ ,  $(\alpha b)$  durch  $PQR$ , so bilden  $a\alpha$  und  $b\beta$  zwei Paar Gegenseiten des Vierecks  $SPQR$ . Da  $a\alpha$  und  $b\beta$  die drei Träger  $ghu$  in Paaren homologer Punkte schneiden, so muß auch das dritte Paar Gegenseiten  $SQ=c$  und  $PR=\gamma$  die drei Träger in Paaren homologer Punkte schneiden<sup>(64 Z)</sup>. Nun wissen wir<sup>(193 Z)</sup>, daß die den Strahlen von  $S$  zugeordneten Geraden einen krummen Strahlenbüschel bilden, dem auch  $ghu$  angehören. Wir haben demnach von diesem Strahlenbüschel die sechs Strahlen  $\alpha\beta\gamma gh u$ . Da irgend zwei Strahlen eines krummen Strahlen-

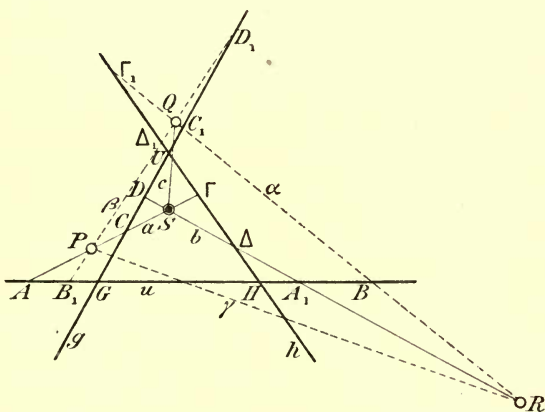


Fig. 107.

büschels von den übrigen in zwei projektiven Punktreihen geschnitten werden<sup>(50)</sup>, so haben wir  $\alpha(\gamma gh u) \overline{\wedge} \beta(\gamma gh u)$ . Nach der Konstruktion ist  $\gamma$  die Verbindungslinie des Punktes  $R = (b\alpha)$  und des Punktes  $P = (a\beta)$ . Die Punkte  $\alpha(\gamma)$  und  $\beta(\gamma)$  werden daher aus  $S$  durch die Strahlen  $b$  und  $a$  projiziert. Die Punkte  $\alpha(ghu)$  sind  $C_1, \Gamma_1, B$ , sie werden daher aus  $S$  durch  $a_1, a_2, a_3$  projiziert; ebenso werden die drei Punkte  $\beta(ghu)$  oder  $D_1, \Delta_1, B_1$  aus  $S$  durch  $b_1, b_2, b_3$  projiziert. Aus  $\alpha(\gamma gh u) \overline{\wedge} \beta(\gamma gh u)$  ergibt sich daher durch Projektion aus  $S$ :  $b_1 a_1 a_2 a_3 \overline{\wedge} a_1 b_1 b_2 b_3$ .

Lehrsatz: Zwei Gegenseiten  
und ihre diagonale Involution  
werden aus jedem Punkte durch

Lehrsatz: Zwei Gegenseiten  
und ihre diagonale Involution  
schneiden jede Gerade in drei

drei komponierende Strahleninvolutionen projiziert. — Die resultierende aus diesen drei Involutionen soll die Hauptstrahleninvolution des Punktes genannt werden.

kompnierenden Punktinvolutionen. — Die resultierende aus diesen drei Involutionen soll die Hauptpunktinvolution der Gerade genannt werden.

Anmerkung. Haben  $g^2$  und  $h^2$  die Ordnungspunkte  $KK_1$  A und  $LL_1$  und folglich  $(^{137a}) u^2$  die Ordnungspunkte  $VW$ , so ist, weil die Ordnungselemente der komponierenden Involution homologe Elemente der resultierenden sind  $(^{161a})$ , die in  $S$  resultierende Involution  $S(KK_1.LL_1.VW)$ . Die Punkt-paare  $KK_1.LL_1.VW$  sind aber, wie wir wissen  $(^{137a})$ , die Gegenecken eines Vierseits. Unser Satz ist daher eine Verallgemeinerung von Nr. 64 Z: Die drei Paar Gegenecken eines Vierseits werden aus jedem Punkte durch drei Strahlenpaare einer Involution projiziert.

Zusatz. Sind (unter Einführung einer neuen Bezeichnung) Z  $a$  und  $b$  zwei homologe Strahlen der Hauptstrahleninvolution von  $E$ , welche  $g$  in  $A$  und  $B$  und  $h$  in  $A$  und  $B$  schneiden, so sind auch die Strahlen von  $E$ , die durch die homologen Punkte  $A_1$  und  $B_1$  von  $g^2$  und durch die homologen Punkte  $A_1$  und  $B_1$  von  $h^2$  gehen, einander homolog in der Hauptinvolution  $E^2(^{166a})$ . Diese Bemerkung wenden wir an auf den Strahl  $E(U)$  und den ihm in  $E^2$  homologen Strahl, der  $gh$  und  $u$  in  $C\Gamma$  und  $A$  (Fig. 108) schneiden möge; es sind dann auch  $E(G)$  und  $E(C_1)$ ,  $E(H)$  und  $E(\Gamma_1)$  je zwei homologe Strahlen der Hauptinvolution, so das wir haben  $E^2 = E(UC.GC_1.H\Gamma_1)$ . Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem  $h$  von  $E(C_1)$  geschnitten wird, durch  $\Delta_1$ , und den Punkt, in dem  $g$  von  $E(\Gamma_1)$  geschnitten wird, durch  $D_1$ , so wissen wir  $(^{64a})$ , weil die Strahlen  $E(CC_1\Gamma_1)$  den durch die Ecken des Dreiecks  $UGH$  gehenden Strahlen  $E(UGH)$  homolog sind:

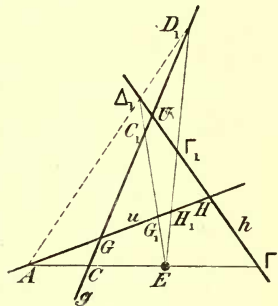


Fig. 108.

1. Die drei Punkte  $AD_1\Delta_1$  liegen in einer Gerade. Bezeichnen wir ferner die Punkte, in denen die Diagonale

$u$  von den Strahlen  $E(C_1)$  und  $E(\Gamma_1)$  geschnitten wird, durch  $G_1$  und  $H_1$ , so ist die von  $E^2$  in  $u$  ausgeschnittene Punktinvolution  $G G_1 . H H_1$ . Diese muß nach unserm Satze<sup>(170)</sup> eine resultierende der diagonalen Involution sein. Da nun  $G$  und  $H$  zwei homologe Punkte der diagonalen Involution sind<sup>(135a)</sup>, so müssen auch<sup>(166a)</sup>  $G_1$  und  $H_1$  zwei homologe Punkte der diagonalen Involution sein:

2. Die Strahlen  $E(C_1)$  und  $E(\Gamma_1)$ , die den Strahlen  $E(G)$  und  $E(H)$  in der Hauptinvolution  $E^2$  homolog sind, schneiden die Diagonale  $u$  in zwei homologen Punkten  $G_1$  und  $H_1$  der diagonalen Involution;

oder

3. Die Hauptstrahleninvolution von  $E$  schneidet die Diagonale in einer komponierenden  $G G_1 . H H_1$  der diagonalen Involution  $G H . G_1 H_1$ .

#### § 14. Konjugierte Projektivitäten.

<sup>171</sup> 171. **Zwei Kurven in doppelter Berührung.** Ist uns in einer Kurve  $k^2$  die krumme Projektivität  $SAB \dots \wedge S_1 A_1 B_1 \dots$  gegeben, so ist durch sie die Projektionsachse  $p$  als Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks  $S A_1 B S_1 A B_1$ <sup>(73)</sup> und das Projektionszentrum  $P$  als Brianchonscher Punkt des zugeordneten Kurvensechsseits  $s \alpha_1 \beta s_1 \alpha \beta_1$ <sup>(76)</sup> bestimmt, also

die Projektionsachse als Verbindungslinie der Schnittpunkte  $(S A_1)(S_1 A)$  und  $(B S_1)(B_1 S)$ ,

das Projektionszentrum als Schnittpunkt der Verbindungslinien  $(s \alpha_1)(s_1 \alpha)$  und  $(\beta s_1)(\beta_1 s)$ .

Daraus ergibt sich<sup>(86 u. 87)</sup>:

1. Die Projektionsachse ist die Polare des Projektionszentrums;

oder auch:

2. Die Pascalsche Gerade eines Kurvensechsecks ist die Polare des Brianchonschen Punktes des zugeordneten Sechsseits. —

Den Schnittpunkt von  $S A_1$  und  $S_1 A$ , der in der Projektionsachse  $p$  liegt<sup>(73)</sup>, wollen wir durch  $X$ ; den Punkt, in dem sich die Verbindungslinien homologer Punkte  $S S_1$  und  $A A_1$  schneiden, durch  $Y$  und den dritten Diagonalpunkt des

Kurvenvierecks  $SS_1AA_1$  durch  $Z$  bezeichnen. Halten wir die Punkte  $S$  und  $S_1$  fest und lassen  $X$  sich in  $p$  bewegen, so beschreibt die Diagonallinie  $x = YZ$ , weil sie die Polare von  $X$  ist<sup>(85)</sup>, einen zu  $X$  projektiven Strahlenbüschel<sup>(90a)</sup> und der Punkt  $Y$ , in dem  $AA_1$  die feste Gerade  $SS_1$  schneidet, eine zu  $X$  projektive Punktreihe.

Gehen wir nicht von den Punkten  $S$  und  $S_1$ , sondern von irgend zwei andern festen homologen Punkten  $L$  und  $L_1$  der gegebenen krummen Projektivität aus, so daß sich  $LA_1$  und  $L_1A$  in einem Punkte  $X_1$  von  $p$  schneiden<sup>(73)</sup>, so beschreibt die Diagonallinie  $Y_1Z_1$  des Kurvenvierecks  $LL_1AA_1$  einen zu  $X_1$  projektiven Strahlenbüschel und der Punkt  $Y_1$ , in dem  $AA_1$  die feste Gerade  $LL_1$  schneidet, beschreibt eine zu  $X_1$  projektive Punktreihe. Wir haben also:

$$Y_1 \overline{\wedge} X_1 \overline{\wedge} L_1(A)^{(50)} \overline{\wedge} S_1(A) \overline{\wedge} X \overline{\wedge} Y.$$

Die Verbindungslinie  $YY_1$ , das ist die Gerade  $AA_1$ , beschreibt daher einen krummen Strahlenbüschel  $\mu_1^{(42)}$ . —

Es läßt sich ferner zeigen, daß die Gerade  $x$ , welche nach der Konstruktion die Polare des Punktes  $X$  für die Kurve  $k^2$  ist, auch für den krummen Strahlenbüschel  $\mu_1^2$  die Polare des Punktes  $X$  ist. — Weil  $x$  von  $X$  durch die Gegenseiten  $SS_1$  und  $AA_1$  des Vierecks  $SS_1AA_1$  harmonisch getrennt ist<sup>(24a)</sup>, so ist  $Y(X)$  eine der Gerade  $x$  für  $\mu_1^2$  konjugierte Gerade<sup>(92a)</sup>. Schneidet  $L_1(X)$  die Kurve zum zweiten Male in  $B$ , so schneidet  $L(X)$  die Kurve zum zweiten Male im homologen Punkte  $B_1$ <sup>(73)</sup>. Von dem Kurvenviereck  $LL_1BB_1$  ist  $X$  der eine Diagonalepunkt; bezeichnen wir die beiden andern durch  $Y_2$  und  $Z_2$ , so fallen<sup>(85)</sup>  $Y_2$  und  $Z_2$  in die Polare  $x$  des Punktes  $X$  für  $k^2$ ; der Gerade  $x$  ist daher<sup>(92a)</sup> auch  $Y_2(X)$  für  $\mu_1^2$  konjugiert. Folglich<sup>(92a)</sup> ist  $X$  der Pol von  $x$  für  $\mu_1^2$ . Da demnach die Polaren  $x$  der Punkte  $X$  von  $p$  für  $k^2$  und  $\mu_1^2$  zusammenfallen, so haben  $k^2$  und  $\mu_1^2$  die konjugierte Punktinvolution von  $p$  und die konjugierte Strahleninvolution von  $P$  gemeinsam.

3. Die Geraden, welche die homologen Punkte einer krummen Projektivität von  $k^2$  verbinden, bilden einen krummen Strahlenbüschel  $\mu_1^2$ . Die krumme Punkt-

3. Die Punkte, in denen sich die homologen Tangenten einer krummen Projektivität von  $k^2$  schneiden, bilden eine krumme Punktreihe  $\mu_1^2$ . Die beiden

<p>reihe <math>k^2</math> und der krumme Strahlenbüschel <math>\mu_1^2</math> haben die konjugierten Involutions der Projektionsachse und des Projektionszentrums gemeinsam. —</p>	<p>krummen Punktreihen <math>k^2</math> und <math>n_1^2</math> haben die konjugierten Involutions des Projektionszentrums und der Projektionsachse gemeinsam. —</p>
--	---

Schneidet die Verbindungslinie der homologen Punkte  $S$  und  $S_1$  die Projektionsachse  $p$  in  $E$ , so geht die Polare von  $E$  für  $k^2$  nach unserm ersten Satze durch das Projektionszentrum  $P$  und<sup>(86a)</sup> den Punkt  $E_1$ , welcher von  $E$  durch  $S$  und  $S_1$  harmonisch getrennt ist. Diese Verbindungslinie  $PE_1$  ist auch die Polare von  $E$  für die Kurve  $\mu_1^2$ , und da sie durch den Pol von  $SS_1$ , das ist<sup>(87a)</sup> durch den Berührungspunkt von  $SS_1$ , geht, so ist  $E_1$  der Berührungspunkt von  $SS_1$ :

4. Die Punkte, welche von der Projektionsachse durch die homologen Punkte der Projektivität harmonisch getrennt sind, bilden die krumme Punktreihe  $m_1^2$ . —

4. Die Strahlen, welche von dem Projektionszentrum durch die homologen Tangenten der Projektivität harmonisch getrennt sind, bilden einen krummen Strahlenbüschel  $\nu_1^2$ . —

Da der Schnittpunkt homologer Tangenten  $s$  und  $s_1$  der Pol der Verbindungslinie homologer Punkte  $S$  und  $S_1$  ist<sup>(87 z<sub>1</sub>)</sup>, so gehen die Kurven  $\mu_1^2$  und  $n_1^2$  ( $m_1^2$  und  $\nu_1^2$ ) durch Polarisierung vermittelst der Kurve  $k^{2(91 z)}$  auseinander hervor.

A *Anmerkung.* Hat die konjugierte Involution von  $p$  Ordnungspunkte und folglich<sup>(92a)</sup> die konjugierte Involution von  $P$  Ordnungsstrahlen, so haben  $k^2$  und  $\mu_1^2$  zwei Punkte und ihre Tangenten gemeinsam<sup>(93a)</sup>. Von zwei Kurven, die einen Punkt und seine Tangente gemeinsam haben, sagt man, daß sie sich berühren.  $k^2$  und  $\mu_1^2$  ( $m_1^2$ ) sind also zwei Kurven in *doppelter Berührung*.

172 **172. Büschel von Kurven in doppelter Berührung.** Weisen wir dem Punkte  $S$  von  $k^2$  nicht den Punkt  $S_1$ , sondern irgend einen andern Punkt  $S_2$  von  $k^2$  als homologen zu, so können wir eine Projektivität konstruieren, für die  $p$  ebenfalls die Projektionsachse ist. Wir haben nur einem beliebigen Punkte  $A$  den Punkt  $A_2$  zuzuordnen, den wir erhalten, wenn wir den Schnittpunkt von  $S_2A$  und  $p$  aus  $S$  auf die Kurve projizieren. Die Verbindungslinien der homologen Punkte  $A$  und  $A_2$  bilden einen krummen Strahlen-

büschel  $\mu_2^2$ , der ebenfalls mit  $k^2$  die konjugierte Involution von  $p$  und  $P$  gemeinsam hat. Jedem weitem Punkte  $S_3$  entspricht ein neuer Strahlenbüschel  $\mu_3^2$ .

1. Die Gesamtheit dieser krummen Büschel  $\mu^2$  nennt man einen *Büschel von Kurven in doppelter Berührung*.

2. Ordnet man dem Punkte  $S$  den Punkt  $S'$  zu, der mit  $S$  und  $P$  in einer Geraden liegt, so geht die Verbindungslinie homologer Punkte  $A$  und  $A'$  durch  $P^{(97)}$  und aus der Projektivität wird eine Involution; der krumme Büschel  $\mu'^2$  zerfällt in den geraden Büschel  $P$ .

3. Ordnet man dem Punkte  $S$  den Punkt  $S$  selbst zu, so fällt auch jeder andre Punkt  $A$  mit seinem homologen zusammen; die Kurve  $\mu^2$  ist der Tangentenbüschel von  $k^2$ . — Die Kurve  $k^2$ , von der wir ausgingen, ist also als eine Kurve des Büschels zu zählen.

**173. Büschel von Projektivitäten.** Ist uns in  $k^2$  <sup>173</sup> eine krumme Projektivität gegeben, so können wir <sup>(172)</sup>, indem wir den Punkt  $S_1$  auf  $k^2$  sich bewegen lassen, für jede Lage des Punktes  $S_1$  eine krumme Projektivität konstruieren, die mit der gegebenen die Projektionsachse (und das Projektionszentrum) gemeinsam hat.

1. Den Inbegriff der krummen Projektivitäten, die die Projektionsachse gemeinsam haben, wollen wir einen *Büschel von Projektivitäten* nennen. — Unter den Projektivitäten eines Büschels befindet sich eine Involution <sup>(172a)</sup>.

Um nun unsere Betrachtungen auf beliebige Projektivitäten übertragen zu können, müssen wir sie von dem Begriffe der Projektionsachse befreien. Dazu gelangen wir auf folgendem Wege.

Jedes Element einer Projektivität ist, weil es zum ersten oder zweiten der die Projektivität erzeugenden Grundgebilde gerechnet werden kann, als ein zweifaches aufzufassen. Einem beliebigen Elemente  $A$  (Fig. 109) entspricht daher, wenn wir es zum ersten Grundgebilde rechnen, ein Element  $A_1$  und, wenn wir es zum zweiten Grundgebilde rechnen, ein von  $A_1$  verschiedenes Element  $A_2$ ; entspricht außerdem noch dem beliebigen Elemente  $B$  als Element des ersten Grundgebildes das Element  $B_1$ , so ist die Projektivität

durch  $AB A_2 \overline{A_1 B_1} A$  bestimmt<sup>(83a)</sup>. Nehmen wir an, daß unsere Projektivität eine krumme Punktprojektivität ist, so ergibt sich die Projektionsachse<sup>(73)</sup> aus dem Schema:

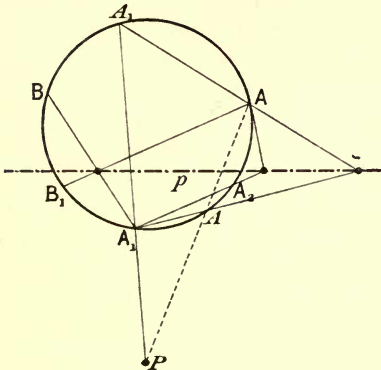


Fig. 109.

$$\overline{A B_1 A_2 A_1 B A}.$$

Zeichnen wir nun den von A durch  $A_1$  und  $A_2$  harmonisch getrennten Punkt  $A$ , so gehen die Tangenten von A und  $A$  durch den Punkt<sup>(70a)</sup>, in dem die Projektionsachse von  $A_1 A_2$  geschnitten wird. Die Verbindungslinie  $AA$  geht daher als Polare

dieses Schnittpunktes<sup>(86 Z1)</sup> durch den Pol P von p, das Projektionszentrum<sup>(171)</sup>. Daher<sup>(82)</sup>:

2. Zeichnen wir zu jedem Elemente A einer Projektivität das von ihm durch  $A_1$  und  $A_2$  harmonisch getrennte Element  $A$ , so sind A und  $A$  Elementenpaare einer Involution. Diese Involution soll die der Projektivität *harmonisch zugeordnete* Involution heißen. Das Element  $A$  wollen wir kurz das dem Elemente A harmonisch zugeordnete nennen.

3. Definition: Der Inbegriff der Projektivitäten, die die harmonisch zugeordnete Involution gemeinsam haben, heißt ein *Büschel von Projektivitäten*. —

Zum Punkte A (Fig. 109) finden wir den homologen Punkt  $A_1$  der Projektivität, indem wir den Punkt, in dem  $A_1 A$  die Projektionsachse schneidet, mit A verbinden und den zweiten Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit der Kurve bestimmen<sup>(73)</sup>. Da  $A_1 A_1$  durch P geht<sup>(97a)</sup>, so haben wir:

4. Sind A und  $A_1$  zwei homologe Elemente einer Projektivität und A und  $A_1$  die ihnen harmonisch zugeordneten, so ist in der Projektivität dem Elemente A das Element  $A_1$  homolog. —

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich beweisen:



5. Eine Projektivität ist bestimmt, wenn ein Elementenpaar  $A A_1$  und die harmonisch zugeordnete Involution gegeben ist.

Konstruktion der Projektivität: Da die harmonisch zugeordnete Involution gegeben ist, so sind die den Elementen  $A$  und  $A_1$  harmonisch zugeordneten Elemente  $A$  und  $A_1$  bekannt; sie bilden, wie wir eben gesehen haben, ein zweites Elementenpaar der Projektivität. Konstruieren wir noch das von  $A_1$  durch  $A$  und  $A$  harmonisch getrennte Element  $A_2$ , so ist diesem das Element  $A$  homolog, so daß die Projektivität bestimmt ist durch  $A A A_2 \overline{\wedge} A_1 A_1 A$ . —

6. Wir erhalten sämtliche Projektivitäten eines Büschels, wenn wir einem festen Elemente  $A$  der Reihe nach sämtliche Elemente  $A_1$  zuordnen. Fällt  $A_1$  in das Element  $A$ , welches dem Elemente  $A$  in der harmonisch zugeordneten Involution homolog ist, so fällt die Projektivität mit der harmonisch zugeordneten Involution zusammen.

#### 174. Konjugierte Projektivitäten.

174

1. Definition: Projizieren wir die Kurvenpunkte  $A$  aus irgend zwei festen Kurvenpunkten  $S$  und  $S_1$ , so erhalten wir in  $S$  und  $S_1$  zwei projektive<sup>(50)</sup> Strahlenbüschel, die jede Gerade  $p$  in einer Projektivität schneiden. Diese gerade Punktprojektivität von  $p$  soll der Kurve *konjugiert* heißen. —

1. Definition: Schneiden wir die Kurventangenten  $\alpha$  durch irgend zwei feste Tangenten  $s$  und  $s_1$ , so erhalten wir in  $s$  und  $s_1$  zwei projektive Punktreihen, die aus jedem Punkte  $P$  durch eine Projektivität projiziert werden. Diese gerade Strahlenprojektivität von  $P$  soll der Kurve *konjugiert* heißen. —

Durch die Gerade  $p$  als Projektionsachse ist in der Kurve ein Büschel von krummen Projektivitäten bestimmt<sup>(173<sub>1</sub>)</sup>; jeder krummen Projektivität des Büschels ist eine gerade Projektivität in der Achse zugeordnet<sup>(77<sub>1</sub>)</sup>, die wir erhalten, indem wir die Kurvenpunkte aus irgend zwei homologen Punkten der krummen Projektivität auf die Achse projizieren; die den krummen Projektivitäten des Büschels zugeordneten geraden Projektivitäten der Achse sind also der Kurve *konjugiert*:

2. Die der Kurve konjugierten Punktprojektivitaten einer Gerade bilden einen Büschel. —

2. Die der Kurve konjugierten Strahlenprojektivitaten eines Punktes bilden einen Büschel. —

Da unter den krummen Projektivitäten des Büschels eine Involution ist<sup>(172a)</sup>, so ist auch unter den geraden Projektivitäten der Achse eine Involution; es ist dieselbe, die wir bereits früher die der Kurve konjugierte Involution von  $p$  genannt haben<sup>(92a)</sup>:

3. Die einer konjugierten Punktprojektivität harmonisch zugeordnete Involution ist die konjugierte Punktinvolution der Gerade.

3. Die einer konjugierten Strahlenprojektivität harmonisch zugeordnete Involution ist die konjugierte Strahleninvolution des Punktes.

4. Sind  $A$  und  $A_1$  zwei homologe Punkte einer konjugierten Projektivität, so sind auch die  $A$  und  $A_1$  konjugierten Punkte einander homolog in der Projektivität<sup>(173a)</sup>.

4. Sind  $a$  und  $a_1$  zwei homologe Strahlen einer konjugierten Projektivität, so sind auch die  $a$  und  $a_1$  konjugierten Strahlen einander homolog in der Projektivität.

5. Ist uns eine konjugierte Projektivität gegeben, so können wir aus ihr die konjugierte Involution zeichnen<sup>(173a)</sup>.

6. Durch die konjugierte Involution und ein Elementenpaar ist eine konjugierte Projektivität bestimmt<sup>(173a)</sup>.

### 175. Perspektive Lage zugeordneter Projektivitäten.

Einer krummen Projektivität ist in der Projektionsachse  $p$  eine gerade Punktprojektivität und in dem Projektionszentrum  $P$  eine gerade Strahlenprojektivität zugeordnet<sup>(77)</sup>. Wir wollen zeigen, daß diese beiden geraden Projektivitäten perspektiv liegen.

Sind  $A$  und  $A_1$  (Fig. 110) zwei beliebige homologe Punkte der krummen Projektivität und  $S$  ein beliebiger Kurvenpunkt, so liefern uns  $S(A)$  und  $S(A_1)$  in der Projektionsachse  $p$  die homologen Punkte  $A$  und  $A_1$ <sup>(77a)</sup>. Es ist zu beweisen, daß  $P(A)$  und  $P(A_1)$  zwei homologe Strahlen der Projektivität von  $P$  sind. Ist  $B$  der dem Punkte  $A$  konjugierte<sup>(92a)</sup> Punkt von  $p$ , so daß  $B$  der Pol von  $P(A)$  ist, so ist  $BS$  die Polare des Punktes  $E$ , in dem die

Tangente in  $S$  von  $PA$  geschnitten wird, und schneidet die Kurve in einem Punkte  $B$ , der der Berührungspunkt der zweiten von  $E$  an die Kurve gezogenen Tangente  $\beta$  ist<sup>(86 z<sub>1</sub>)</sup>; die Verbindungslinie  $AB$  geht durch  $P$ <sup>(98<sub>s</sub>)</sup>. — Ist nun  $B_1$  der dem Punkte  $A_1$  konjugierte Punkt, so ist  $B_1$  dem Punkte  $B$  in der Projektivität homolog<sup>(174<sub>d</sub>)</sup>;  $S(B_1)$  schneidet daher die Kurve

in dem Punkte  $B_1$ , der in der krummen Projektivität dem Punkte  $B$  homolog ist. Die Tangenten  $\beta$  und  $\beta_1$  schneiden daher die Tangente  $s$  in zwei Punkten  $E$  und  $E_1$ , die aus  $P$  durch homologe Strahlen der Projektivität von  $P$  projiziert werden<sup>(77<sub>2</sub>)</sup>. Weil aber  $E_1$  der Pol von  $S(B_1)$  ist<sup>(87 z<sub>1</sub>)</sup>, so liegt  $E_1$  in der Polare von  $B_1$ ; diese Polare ist aber  $PA_1$ <sup>(92<sub>2</sub>)</sup>.

Die homologen Strahlen  $P(E)$  und  $P(E_1)$  der Projektivität von  $P$  gehen also durch  $A$  und  $A_1$ :

*Die geraden Projektivitäten, welche einer krummen Projektivität in der Projektionsachse und in dem Projektionszentrum zugeordnet sind<sup>(77)</sup>, liegen perspektiv.*

*Anmerkung.* Von diesem Satze ist Nr. 92<sub>6</sub> ein besonderer Fall.

### 176.\* Zirkulare Projektivitäten.

176

1. Definition: Eine Punktprojektivität der uneigentlichen Gerade, der die zirkuläre Punktinvolution<sup>(112<sub>d</sub>)</sup> harmonisch zugeordnet ist, soll eine *zirkuläre Punktprojektivität* heißen; eine Strahlenprojektivität, die perspektiv zu einer zirkulären Punktprojektivität liegt, soll eine *zirkuläre Strahlenprojektivität* heißen.

2. Jede Kurve, der eine zirkuläre Punktprojektivität konjugiert ist, ist ein Kreis<sup>(174<sub>2</sub>)</sup>. —

Eine zirkuläre Punktprojektivität ist bestimmt durch zwei homologe Punkte  $A$  und  $A_1$ <sup>(173<sub>b</sub>)</sup>. Projizieren wir diese

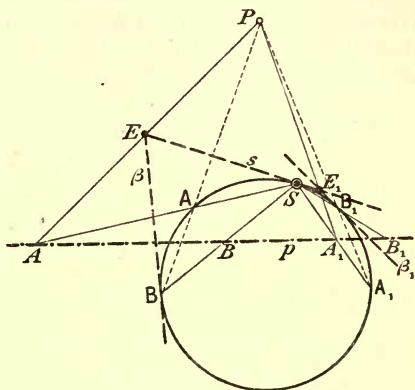


Fig. 110.

aus einem beliebigen Punkte  $S$  durch die Strahlen  $\alpha$  und  $\alpha_1$ , so schneiden die in  $S$  auf  $\alpha$  und  $\alpha_1$  errichteten Lote  $a$  und  $a_1$  die uneigentliche Gerade in den Punkten  $A$  und  $A_1$ , die den Punkten  $A$  und  $A_1$  in der zirkularen Punktinvolution homolog sind<sup>(112a)</sup> und daher<sup>(173a)</sup> ein zweites Punktpaar der Projektivität bilden. Schliesslich schneidet der von  $\alpha_1$  durch  $\alpha$  und  $a$  harmonisch getrennte Strahl  $\alpha_2$  die uneigentliche Gerade in einem Punkte  $A_2$ , dem der Punkt  $A$  homolog ist, so dass die Punktprojektivität bestimmt ist durch  $A A A_2 \bar{\wedge} A_1 A_1 A$ . Gleichzeitig haben wir die zirkulare Strahlenprojektivität  $\alpha a \alpha_2 \bar{\wedge} \alpha_1 a_1 \alpha$  erhalten. In dieser ist Winkel  $\alpha \alpha_1 = a a_1$ , weil die Schenkel aufeinander senkrecht stehen. Da  $\alpha a \alpha_1 \alpha_2$  ein harmonischer Wurf ist und  $\alpha$  senkrecht auf  $a$  steht, so ist  $\angle \alpha \alpha_1 = \alpha_2 a$ <sup>(28a)</sup>:

3. *Die Strahlen einer zirkularen Strahlenprojektivität bilden mit ihren homologen gleiche Winkel — oder Zwei Strahlenbüschel, die eine zirkulare Projektivität erzeugen, sind einander kongruent.*

Daraus ergibt sich weiter:

4. *Zwei Winkel sind gleich, wenn ihre Schenkel die uneigentliche Gerade in zwei Paar homologen Punkten einer zirkularen Punktprojektivität schneiden.*

Dies ist in anderer Form der planimetrische Satz über die Gleichheit der Peripheriewinkel.

Da die konjugierte Involution eines Brennpunktes zirkular ist<sup>(142a)</sup>, so ergibt sich:

5. *Die konjugierten Strahlenprojektivitäten eines Brennpunktes sind zirkular.*

Aus diesem Satze ergibt sich<sup>(174a)</sup> eine Folgerung, die in der Geometrie des Malfes so ausgesprochen wird:

6. *Die Strecke, welche von zwei festen Tangenten auf einer beweglichen Tangente begrenzt wird, erscheint im Brennpunkt unter einem konstanten Winkel.*

## § 15. Kollineare und reziproke Verwandtschaft.

177. **Kollineare Verwandtschaft.** Der Inbegriff der Punkte und Geraden einer Ebene heisst ein ebenes System oder *Feld*. Wie wir bisher die Punkte zweier Geraden oder

die Strahlen zweier Punkte aufeinander bezogen haben, so lassen sich auch, wie wir jetzt zeigen wollen, die Punkte und Geraden zweier ebenen Felder  $\sigma$  und  $\sigma_1$  aufeinander beziehen. Hier bieten sich zwei Wege dar: Wir können jedem Punkte des ebenen Feldes  $\sigma$  einen Punkt des ebenen Feldes  $\sigma_1$  und jeder Gerade von  $\sigma$  eine Gerade von  $\sigma_1$  zuordnen; wir können aber auch jedem Punkte von  $\sigma$  eine Gerade von  $\sigma_1$  und jeder Gerade von  $\sigma$  einen Punkt von  $\sigma_1$  zuordnen. Danach unterscheiden wir zwei Verwandtschaften, die die *kollineare* und die *reziproke* genannt werden. Wir betrachten zunächst die kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Felder, die wir so definieren:

1. Definition: Zwei ebene Felder  $\sigma$  und  $\sigma_1$  heißen kollinear, wenn jeder Gerade  $e$  von  $\sigma$  eine Gerade  $e_1$  von  $\sigma_1$  zugeordnet ist und jedem in  $e$  liegenden Punkte  $F$  ein in  $e_1$  liegender Punkt  $F_1$ .

Wir können zeigen, daß durch unsere Definition vier harmonischen Punkten (Strahlen) der einen Ebene vier harmonische Punkte (Strahlen) der andern zugewiesen sind. Sind  $PQ.WW'$  vier harmonische Punkte von  $\sigma$ , die in der Gerade  $t$  liegen, so entsprechen ihnen nach der Definition vier Punkte  $P_1Q_1.W_1W'_1$ , die in einer Gerade  $t_1$  liegen. Konstruieren wir nun in  $\sigma$  ein Viereck  $\Delta AB\Gamma$ <sup>(17)</sup>, von dem  $P$  und  $Q$  zwei Diagonalepunkte sind, während  $W$  und  $W'$  auf den Gegenseiten des dritten Diagonalepunktes  $R$  liegen, so entspricht diesem nach der Definition ein Viereck  $\Delta_1A_1B_1\Gamma_1$ , von dem  $P_1$  und  $Q_1$  zwei Diagonalepunkte sind, während  $W_1$  und  $W'_1$  auf den Gegenseiten des dritten Diagonalepunktes liegen, da z. B. den beiden Gegenseiten, die sich in  $P$  schneiden, zwei Geraden entsprechen müssen, die sich in  $P_1$  schneiden. Es bilden also auch  $P_1Q_1.W_1W'_1$  einen harmonischen Wurf. Daraus folgt, daß auch vier harmonischen Strahlen des einen Feldes vier Strahlen des andern homolog sind, die ebenfalls einen harmonischen Wurf bilden. Aus Nr. 164<sub>6</sub> ergibt sich demnach, daß die homologen geraden Grundgebilde zweier kollinearen Felder projektiv sind.

Auch zwei homologe *krumme* Grundgebilde sind projektiv; denn den Punkten einer Kurve  $k^2$  z. B., die durch die beiden projektiven Strahlenbüschel  $S$  und  $S'$  erzeugt wird,

sind die Schnittpunkte zweier projektiven Strahlenbüschel  $S_1$  und  $S'_1$  homolog. Wir haben daher:

2. *Homologe einförmige Grundgebilde zweier kollinearen Felder sind projektiv.*

178

### 178. Konstruktion zweier kollinearen Felder.

1. Aufgabe: Zwei ebene Felder kollinear aufeinander zu beziehen.

Es bieten sich zwei Wege dar:

Wir wählen in dem ebenen Felde  $\sigma$  zwei beliebige Geraden  $a$  und  $\alpha$  und in  $\sigma_1$  zwei beliebige Geraden  $a_1$  und  $\alpha_1$  und ordnen der Gerade  $a$  die Gerade  $a_1$  und der Gerade  $\alpha$  die Gerade  $\alpha_1$  zu. Dem Schnittpunkte  $P$  von  $a$  und  $\alpha$  muß der Punkt entsprechen, der sowohl in  $a_1$  als in  $\alpha_1$  liegt, also der Schnittpunkt  $P_1$  von  $a_1$  und  $\alpha_1$ . Nun beziehen wir die Punktreihe  $a$  projektiv<sup>(31)</sup> so auf  $a_1$ , daß dem Punkte  $P$  der Punkt  $P_1$  und außerdem zwei beliebigen Punkten  $\Delta$  und  $A$  von  $a$  zwei beliebige Punkte  $\Delta_1$  und  $A_1$  von  $a_1$  entsprechen. Ebenso beziehen wir die Punktreihen  $\alpha$  und  $\alpha_1$  projektiv so aufeinander, daß dem Punkte  $P$  der Punkt  $P_1$  und außerdem zwei beliebigen Punkten  $B$  und  $\Gamma$  von  $\alpha$  zwei beliebige Punkte  $B_1$  und  $\Gamma_1$  von  $\alpha_1$  entsprechen.

Damit ist jedem Punkte von  $a$  und  $\alpha$  ein bestimmter Punkt von  $a_1$  und  $\alpha_1$  zugewiesen und wir können nun weiter festsetzen, daß einer

Wir wählen in dem ebenen Felde  $\sigma$  zwei beliebige Punkte  $A$  und  $A$  und in  $\sigma_1$  zwei beliebige Punkte  $A_1$  und  $A_1$  und ordnen dem Punkte  $A$  den Punkt  $A_1$  und dem Punkte  $A$  den Punkt  $A_1$  zu. Der Verbindungslinie  $p$  von  $A$  und  $A$  muß die Gerade entsprechen, die sowohl durch  $A_1$  als durch  $A_1$  geht, d. h. die Verbindungslinie  $p_1$  von  $A_1$  und  $A_1$ . Nun beziehen wir den Strahlenbüschel  $A$  projektiv so auf den Strahlenbüschel  $A_1$ , daß dem Strahle  $p$  der Strahl  $p_1$  und außerdem zwei beliebigen Strahlen  $\delta$  und  $\alpha$  von  $A$  zwei beliebige Strahlen  $\delta_1$  und  $\alpha_1$  von  $A_1$  entsprechen. Ebenso beziehen wir die Strahlenbüschel  $A$  und  $A_1$  so aufeinander, daß dem Strahle  $p$  der Strahl  $p_1$  und außerdem zwei beliebigen Strahlen  $\beta$  und  $\gamma$  von  $A$  zwei beliebige Strahlen  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  von  $A_1$  entsprechen.

Damit ist jedem Strahle von  $A$  und  $A$  ein bestimmter Strahl von  $A_1$  und  $A_1$  zugewiesen und wir können nun weiter festsetzen, daß einem

beliebigen Gerade  $e$  von  $\sigma$ , die  $a$  und  $\alpha$  in  $E$  und  $E$  schneidet, die Gerade  $e_1$  von  $\sigma_1$  zugeordnet sein soll, die die zugeordneten Punkte  $E_1$  und  $E_1$  von  $a_1$  und  $\alpha_1$  miteinander verbindet.

Lassen wir den Strahl  $e$  um einen beliebigen Punkt  $F$  sich drehen, so beschreiben  $E$  und  $E$  zwei projektive Punktreihen und folglich auch  $E_1$  und  $E_1$ , und zwar liegen die Punktreihen  $E_1$  und  $E_1$  perspektiv, weil  $E_1$  und  $E_1$  gleichzeitig in  $P_1$  fallen, nämlich dann, wenn der Strahl  $e$  durch  $P$  geht. Die Verbindungslinie  $e_1$  von  $E_1$  und  $E_1$  dreht sich daher um einen Punkt  $F_1^{(34)}$  und dieser soll dem Punkte  $F$  zugeordnet werden.

Damit haben wir jeder Gerade  $e$  von  $\sigma$  eine Gerade  $e_1$  von  $\sigma_1$  und jedem Punkte  $F$  von  $\sigma$  einen Punkt  $F_1$  von  $\sigma_1$  zugewiesen und zwar derart, daß jedem in  $e$  liegenden Punkte  $F$  ein in  $e_1$  liegender Punkt  $F_1$  entspricht.

Da die Schnittpunkte  $P = a\alpha$  und  $P_1 = a_1\alpha_1$ , wie wir sahen, einander zugewiesen werden mußten, so ist die projektive Beziehung von  $a$  und  $a_1$  dadurch bestimmt, daß wir zwei beliebigen Punkten  $\Delta$  und  $\Gamma$  von  $a$  zwei beliebige Punkte  $\Delta_1$  und  $\Gamma_1$  von  $a_1$  zuwiesen; ebenso ist die projektive Beziehung von  $\alpha$  und  $\alpha_1$  dadurch bestimmt, daß wir zwei beliebigen Punkten  $B$  und  $\Gamma$  von  $\alpha$  zwei beliebige Punkte  $B_1$  und  $\Gamma_1$  von  $\alpha_1$  zuwiesen. Da nun mit den Punkten  $\Delta A$  und  $\Delta_1 A_1$  auch die Geraden  $a$  und  $a_1$  und mit  $B\Gamma$  und  $B_1\Gamma_1$  auch die Geraden  $\alpha$  und  $\alpha_1$  gegeben

beliebigen Punkte  $E$  von  $\sigma$ , der aus  $A$  und  $A$  durch die Strahlen  $e$  und  $\varepsilon$  projiziert wird, der Punkt  $E_1$  von  $\sigma_1$  zugeordnet sein soll, in dem sich die zugeordneten Strahlen  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  von  $A_1$  und  $A_1$  schneiden.

Lassen wir den Punkt  $E$  in einer beliebigen durch ihn gehenden Gerade  $f$  sich bewegen, so beschreiben  $e$  und  $\varepsilon$  zwei projektive Strahlenbüschel und folglich auch  $e_1$  und  $\varepsilon_1$ , und zwar liegen die Strahlenbüschel  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  perspektiv, weil  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  gleichzeitig in  $p_1$  fallen, nämlich dann, wenn der Punkt  $E$  in  $p$  fällt. Der Schnittpunkt  $E_1$  von  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  bewegt sich daher in einer Gerade  $f_1$  und diese soll der Gerade  $f$  zugeordnet werden.

Damit haben wir jedem Punkte  $E$  von  $\sigma$  einen Punkt  $E_1$  von  $\sigma_1$  und jeder Gerade  $f$  von  $\sigma$  eine Gerade  $f_1$  von  $\sigma_1$  zugewiesen und zwar derart, daß jeder durch  $E$  gehenden Gerade  $f$  eine durch  $E_1$  gehende Gerade  $f_1$  entspricht.

sind, so sind die Stücke, die wir willkürlich annehmen können, die vier Punkte  $\Delta A B \Gamma$  von  $\sigma$  und die vier Punkte  $\Delta_1 A_1 B_1 \Gamma_1$  von  $\sigma_1$ .

2. Die kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Felder ist bestimmt, wenn den Ecken eines Vierecks von  $\sigma$  die Ecken eines Vierecks von  $\sigma_1$  zugewiesen werden.

2. Die kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Felder ist bestimmt, wenn den Seiten eines Vierseits von  $\sigma$  die Seiten eines Vierseits von  $\sigma_1$  zugewiesen werden.

179

**179. Reziproke Verwandtschaft.** Wichtiger als die kollineare Verwandtschaft ist für uns die reziproke.

1. Definition: Zwei ebene Felder  $\sigma$  und  $\sigma_1$  heißen reziprok, wenn jeder Gerade  $e$  von  $\sigma$  ein Punkt  $E_1$  von  $\sigma_1$  und jedem in  $e$  liegenden Punkte  $F$  eine durch  $E_1$  gehende Gerade  $f_1$  entspricht.

Auch<sup>(177)</sup> hier entsprechen vier harmonischen Punkten  $P Q . W W'$  (vier harmonischen Strahlen  $p q . w w'$ ) von  $\sigma$  vier harmonische Strahlen  $p_1 q_1 . w_1 w'_1$  (vier harmonische Punkte  $P_1 Q_1 . W_1 W'_1$ ) von  $\sigma_1$ . Denn dem Viereck  $\Delta A B \Gamma$  von  $\sigma$ , von welchem  $P$  und  $Q$  zwei Diagonalepunkte sind, während  $W$  und  $W'$  auf den Gegenseiten des dritten Diagonalepunktes liegen, entspricht nach der Definition in  $\sigma_1$  ein Vierseit  $\delta_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ , von dem  $p_1$  und  $q_1$  zwei Diagonallinien sind, während  $w_1$  und  $w'_1$  durch die Gegenecken der dritten Diagonallinie gehen. Daraus ergibt sich dann<sup>(164a)</sup> der

2. Lehrsatz: *Homologe einförmige Grundgebilde zweier reziproken Felder sind projektiv.*

180

**180. Konstruktion zweier reziproken ebenen Felder.**

1. Aufgabe: Zwei ebene Felder reziprok aufeinander zu beziehen.

Wir wählen in der Ebene  $\sigma$  zwei beliebige Geraden  $a$  und  $\alpha$  und in der Ebene  $\sigma_1$  zwei beliebige Punkte  $A_1$  und  $A_1$  und ordnen der Gerade  $a$  den Punkt  $A_1$  und der Gerade  $\alpha$  den Punkt  $A_1$  zu. Dem Schnittpunkte  $P$  von  $a$  und  $\alpha$  muß die Gerade entsprechen, die sowohl durch  $A_1$  als durch  $A_1$  geht, d. h. die Verbindungslinie  $p_1$  von  $A_1$  und  $A_1$ . Nun beziehen wir die Punktreihe  $a$  projektiv so auf den Strahlenbüschel  $A_1$ , daß dem Punkt  $P$  der Strahl  $p_1$  und außer-



dem zwei beliebigen Punkten  $\Delta$  und  $A$  von  $a$  zwei beliebige Strahlen  $\delta_1$  und  $\alpha_1$  von  $A_1$  entsprechen. Ebenso beziehen wir die Punktreihe  $\alpha$  und den Strahlenbüschel  $A_1$  projektiv so aufeinander, daß dem Punkte  $P$  der Strahl  $p_1$  und außerdem zwei beliebigen Punkten  $B$  und  $\Gamma$  von  $\alpha$  zwei beliebige Strahlen  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  von  $A_1$  entsprechen.

Damit ist jedem Punkte von  $a$  und  $\alpha$  ein bestimmter Strahl von  $A_1$  und  $A_1$  zugewiesen, und wir können nun weiter festsetzen, daß einer beliebigen Gerade  $e$  von  $\sigma$ , die  $a$  und  $\alpha$  in  $E$  und  $E$  schneidet, der Punkt  $E_1$  von  $\sigma_1$  zugeordnet sein soll, in dem sich die zugeordneten Strahlen  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  von  $A_1$  und  $A_1$  schneiden.

Lassen wir den Strahl  $e$  um den Punkt  $F$  sich drehen, so beschreiben  $E$  und  $E$  zwei projektive Punktreihen und folglich  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  zwei projektive Strahlenbüschel, und zwar liegen die Strahlenbüschel  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  perspektiv, weil  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  gleichzeitig in  $p_1$  fallen, nämlich dann, wenn der Strahl  $e$  durch  $P$  geht. Der Schnittpunkt  $E_1$  von  $e_1$  und  $\varepsilon_1$  bewegt sich daher in einer Gerade  $f_1$ , und diese soll dem Punkte  $F$  zugeordnet werden.

Damit haben wir jeder Gerade  $e$  von  $\sigma$  einen Punkt  $E_1$  von  $\sigma_1$  und jedem Punkte  $F$  von  $\sigma$  eine Gerade  $f_1$  von  $\sigma_1$  zugewiesen und zwar derart, daß jedem in  $e$  liegenden Punkte  $F$  eine durch  $E_1$  gehende Gerade  $f_1$  entspricht.

Da der Schnittpunkt  $P = a \alpha$  und die Verbindungslinie  $p_1 = A_1 A_1$ , wie wir sahen, einander zugewiesen werden mußten, so ist die projektive Beziehung der Punktreihe  $a$  und des Strahlenbüschels  $A_1$  dadurch bestimmt, daß wir zwei beliebigen Punkten  $\Delta$  und  $A$  von  $a$  zwei beliebige Strahlen  $\delta_1$  und  $\alpha_1$  von  $A_1$  zuweisen; ebenso ist die projektive Beziehung von  $\alpha$  und  $A_1$  dadurch bestimmt, daß wir zwei beliebigen Punkten  $B$  und  $\Gamma$  von  $\alpha$  zwei beliebige Strahlen  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  von  $A_1$  zuweisen. Da nun mit den Punkten  $\Delta A B \Gamma$  die Geraden  $a$  und  $\alpha$  und mit den Strahlen  $\delta_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$  die Punkte  $A_1$  und  $A_1$  gegeben sind, so sind die Stücke, die wir willkürlich annehmen können, die vier Punkte  $\Delta A B \Gamma$  und die vier Strahlen  $\delta_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ . Daher:

2. Die reziproke Verwandtschaft zweier ebenen Felder ist bestimmt, wenn den Ecken eines Vierecks von  $\sigma$  die Seiten eines Vierseits von  $\sigma_1$  zugewiesen werden.

181

## 181. Kennzeichen des zweifachen Entsprechens.

Wir können auch die Punkte und Geraden einer und derselben Ebene  $\sigma$  reziprok aufeinander beziehen, indem wir den Ecken des Vierecks  $\Delta A B \Gamma$  von  $\sigma$  die Seiten des Vierseits  $\delta_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$  von  $\sigma$  zuordnen. Wir wollen, da wir dann jeden Punkt als einen zweifachen und jede Gerade als eine zweifache anzusehen haben, jedes Element mit zwei Buchstaben bezeichnen, um anzudeuten, ob wir es zum ersten oder zweiten Felde rechnen wollen. Einem Punkte  $A(B_1)$  z. B. entsprechen dann zwei Geraden  $a_1$  und  $b$ , die im allgemeinen nicht zusammenfallen werden; es ist aber gerade dieser Fall für uns von Interesse, der Fall also, daß dem Punkte  $A(B_1)$  die Gerade  $a_1$  ( $b$ ) entspricht oder, wie wir uns ausdrücken wollen, daß dem Punkte  $A$  die Gerade  $b$  zweifach entspricht (vgl. 38). Es läßt sich nun der Satz beweisen:

*In zwei reziproken ebenen Feldern entsprechen je zwei zugeordnete Elemente einander zweifach, wenn die Ecken eines Dreiecks ihren Gegenseiten zweifach entsprechen.*

In dem Dreieck  $PQR$  (Fig. 111), dessen Ecken wir mit  $P_1 Q_1 R_1$  bezeichnen wollen, wenn wir sie zum zweiten

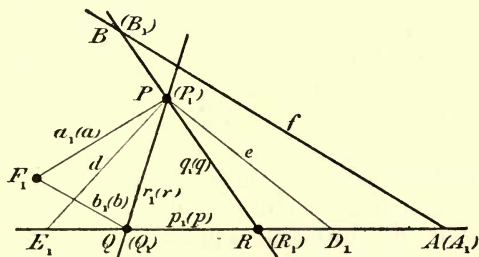


Fig. 111.

Felde rechnen, entspreche dem Punkte  $P$  die Gegenseite  $QR = p_1$ , dem Punkte  $Q$  die Gegenseite  $RP = q_1$ , dem Punkte  $R$  die Gegenseite  $PQ = r_1$ . Nach der Voraussetzung entspricht dann dem Punkte  $P_1$  (dem zum zweiten Felde gerechneten Punkte  $P$ ) ebenfalls die Gerade  $p$ , die wir als Gerade des zweiten Feldes durch  $p_1$  bezeichnet haben, d. h. die Gerade  $p = Q_1 R_1$ ; ebenso entsprechen den Ecken  $Q_1$  und  $R_1$  die Gegenseiten  $q$  ( $q_1$ ) und  $r$  ( $r_1$ ).

Die Punktreihe  $p_1$  ist projektiv auf den Strahlenbüschel  $P$  bezogen<sup>(179a)</sup> und zwar ist dem Punkte  $Q_1$  von  $p_1$  der Strahl  $q$  von  $P$  und dem Punkt  $R_1$  von  $p_1$  der Strahl  $r$  von  $P$  zugeordnet. Da nun  $q$  durch  $R_1$  und  $r$  durch  $Q_1$  geht, so sind die Punktreihe  $p_1$  und der Strahlenbüschel  $P$  in involutorischer Lage<sup>(63a)</sup>; aus denselben Gründen ist auch die Punktreihe  $p$  und der Strahlenbüschel  $P_1$  in involutorischer Lage.

Ist nun  $D_1$  irgend ein weiterer Punkt von  $p_1$ , dem im ersten Felde der durch  $P$  gehende Strahl  $d$  entspreche, so muß dem Schnittpunkte  $E_1 = d p_1$ , weil die Punktreihe  $p_1$  und der Strahlenbüschel  $P$  in involutorischer Lage sind, der Strahl  $e = P D_1$  entsprechen. Nennen wir nun den Punkt  $D_1$  als Punkt des ersten Feldes  $D$ , so muß der ihm zugeordnete Strahl  $d_1$ , weil  $D$  in  $p$  und  $e$  liegt, die Verbindungslinie von  $P_1$  und  $E_1$  sein, d. h.  $d_1$  fällt mit  $d$  zusammen. Damit ist gezeigt, daß jeder Punkt von  $p_1$  ( $p$ ) seinem durch  $P$  ( $P_1$ ) gehenden zugeordneten Strahle zweifach entspricht. Da das, was wir von der Seite  $QR$  und der gegenüberliegenden Ecke  $P$  gezeigt haben, auch von den beiden andern Seiten und ihren Gegenecken gilt, so wissen wir:

Jedem Punkte, der in einer Seite des Dreiecks  $PQR$  liegt, entspricht der zugeordnete Strahl zweifach.

Jetzt können wir zeigen, daß einer beliebigen Gerade  $f$  ( $f_1$ ) der zugeordnete Punkt zweifach entspricht. Schneidet  $f$  ( $f_1$ ) die Dreiecksseiten  $p$  und  $q$  in den Punkten  $A$  ( $A_1$ ) und  $B$  ( $B_1$ ), so entsprechen diesen Punkten die zugeordneten Geraden  $a_1$  ( $a$ ) und  $b_1$  ( $b$ ) zweifach. Weil nun die Gerade  $f$  ( $f_1$ ) durch  $A$  ( $A_1$ ) und  $B$  ( $B_1$ ) geht, so entspricht ihr nach der Definition der reziproken Verwandtschaft im zweiten Felde der Schnittpunkt  $F_1$  der den Punkten  $A$  und  $B$  zugeordneten Geraden  $a_1$  und  $b_1$ , im ersten Felde der Schnittpunkt der den Punkten  $A_1$  und  $B_1$  zugeordneten Geraden  $a$  und  $b$ . Dieser zweite Schnittpunkt fällt aber mit  $F_1$  zusammen, weil  $a$   $a_1$  und  $b$   $b_1$  zusammenfallen.

**182. Involutorische Lage zweier homologen Grundgebilde.** Wenn in zwei reziproken Feldern, die in einer und derselben Ebene liegen, je zwei zugeordnete Elemente einander zweifach entsprechen, so sagt man: Die beiden reziproken Felder sind in *involutorischer Lage*.

Dieser Ausdruck erklärt sich aus dem folgenden: Wir haben bereits gesehen<sup>(181)</sup>, daß die Punkte von  $p_1$  ( $p$ ) und die zugeordneten Strahlen von  $P$  ( $P_1$ ) oder, wie wir von jetzt an schreiben wollen, die Punkte der Gerade  $p$  und die zugeordneten Strahlen von  $P$  in involutorischer Lage sind. Es sind aber auch die Punkte einer beliebigen Gerade  $e$  und die Strahlen des zugeordneten Punktes  $E$  in involutorischer Lage. Ist nämlich  $A$  ein beliebiger Punkt von  $e$  und  $a$  der ihm zugeordnete durch  $E$  gehende Strahl, der  $e$  in  $B$  schneidet, so muß nach der Definition der reziproken Verwandtschaft dem Punkte  $B$ , weil er der Schnittpunkt von  $a$  und  $e$  ist, die Verbindungslinie von  $E$  und  $A$  entsprechen. Die Punktreihe  $A$  von  $e$  und der zugeordnete Strahlenbüschel  $a$  von  $E$  sind also in involutorischer Lage.

*Lehrsatz: In zwei reziproken Feldern, die in involutorischer Lage sind, liegt jede Punktreihe involutorisch zu dem homologen Strahlenbüschel.*

## § 16. Das Polarfeld.

183 183. Das Polarfeld. In zwei reziproken Feldern, die in involutorischer Lage sind, ist jedem Punkte  $E$  und jeder durch  $E$  gehenden Gerade  $f$  von  $\sigma$  eine Gerade  $e$  und ein in ihr liegender Punkt  $F$  derselben Ebene  $\sigma$  zugewiesen<sup>(182)</sup>. Es liegt daher nahe, die beiden reziproken Felder als ein einziges Gebilde aufzufassen.

1. Definition: *Der Inbegriff zweier reziproken Felder in involutorischer Lage heißt ein Polarfeld zweiter Ordnung.*

Um für zwei zugeordnete Elemente kürzere Bezeichnungen zu haben, fügen wir die folgende Definition hinzu:

2. Jeder Punkt heißt der Pol der ihm zugeordneten Gerade. — Jede Gerade heißt die Polare des ihr zugeordneten Punktes.

Mit Hilfe dieser neuen Benennung läßt sich der Definition der reziproken Verwandtschaft die Form geben:

3. Die Polaren der Punkte einer Gerade gehen durch einen Punkt, den Pol der Gerade. — Oder:

4. Die Pole der Strahlen eines Punktes liegen in einer Gerade, der Polare des Punktes.

Der in Nr. 182 bewiesene Satz lautet jetzt:

5. Die von den Punkten einer Gerade gebildete Punktreihe und der von ihren Polen gebildete Strahlenbüschel sind in involutorischer Lage. — Oder:

6. Der von den Strahlen eines Punktes gebildete Strahlenbüschel und die von ihren Polen gebildete Punktreihe sind in involutorischer Lage.

184. **Konjugierte Elemente.** Liegt  $Q$  in der Polare  $p$  <sup>184</sup> von  $P$ , so liegt  $P$  in der Polare  $q$  von  $Q$  <sup>(183a)</sup>. Wir können daher folgende Definitionen und Sätze aufstellen:

1. Zwei Punkte heißen *konjugiert*, wenn der eine in der Polare des andern liegt.

2. Zwei Strahlen heißen *konjugiert*, wenn der eine durch den Pol des andern geht.

3. Sind zwei Punkte einem dritten konjugiert, so ist ihre Verbindungslinie die Polare des dritten Punktes.

4. Sind zwei Geraden einer dritten konjugiert, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der dritten Gerade.

Aus Nr. 183, folgt dann:

5. Je zwei konjugierte Punkte einer Gerade sind Punktpaare einer Involution. — Diese Involution heißt die dem Polarfelde *konjugierte Punktinvolution* der Gerade.

6. Je zwei konjugierte Strahlen eines Punktes sind Strahlenpaare einer Involution. — Diese Involution heißt die dem Polarfelde *konjugierte Strahleninvolution* des Punktes.

7. Die konjugierte Punktinvolution einer Gerade liegt perspektiv zu der konjugierten Strahleninvolution ihres Pols. —

Sind  $P$  und  $Q$  zwei konjugierte Punkte, so bilden, wenn wir den Pol der Verbindungslinie  $PQ = r$ , also <sup>(183a)</sup> den Schnittpunkt der Polaren  $p$  und  $q$ , mit  $R$  bezeichnen, die drei Punkte  $PQR$  ein Dreieck, in dem jede Seite die Polare ihrer Gegenecke ist:

8. Ein Dreieck, in dem jede Seite die Polare ihrer Gegenecke (oder, was dasselbe sagt, jede Ecke der Pol ihrer Gegenseite) ist, heißt ein *Poldreieck*. —

9. Durch zwei konjugierte Punkte ist ein Poldreieck bestimmt.

z *Zusatz.* Früher haben wir die Begriffe Pol und Polare (§ 7) und den Begriff der konjugierten Elemente (§ 8) vermittelt einer Kurve definiert; wir werden erkennen<sup>(190)</sup>, daß unsere jetzige Definition die frühere als besondern Fall enthält. An dieser Stelle läßt sich bereits zeigen, daß die in Nr. 94—96 entwickelten Sätze auch für unsere jetzige Definition gelten. — Bewegt sich ein Punkt  $A$  in der Geraden  $p$ , so dreht sich seine Polare  $a$  um den Pol  $P$  von  $p$ <sup>(183s)</sup> und schneidet jede Gerade in einer Punktreihe, die der von  $A$  beschriebenen projektiv ist. Zwei gerade Punktreihen sind also projektiv aufeinander bezogen, wenn man den Punkten der einen die ihnen konjugierten der andern zuweist. Da wir aus diesem Satze allein den Inhalt der Nrn. 94—96 entwickelt haben, so gilt dieser auch für die einem Polarfeld konjugierten Elemente.

185 **185. Das Poldreieck als Bestimmungsstück eines Polarfeldes.** Nach Nr. 180<sub>2</sub> erhalten wir zwei reziproke Felder, wenn wir den Ecken eines Vierecks die Seiten eines Vierseits zuweisen; sollen die beiden reziproken Felder involutorische Lage haben, so müssen nach Nr. 181 die Ecken *eines* Dreiecks ihren Gegenseiten zweifach entsprechen. Wir können deswegen zwei reziproke Felder in involutorischer Lage in folgender Weise konstruieren: Wir nehmen vier Punkte  $PQRU$  und eine Gerade  $u$  beliebig an und weisen, indem wir die Seiten des Dreiecks  $PQR$  mit  $pqr$  bezeichnen, dem Viereck  $PQRU$  die Seiten des Vierseits  $pqr u$  zu. Da bei dieser Zuweisung die Punkte  $PQR$  ein Poldreieck<sup>(184s)</sup> bilden, so haben wir den

*Lehrsatz:* Ein Polarfeld ist bestimmt durch einen Punkt, seine Polare und ein Poldreieck.

186 **186. Bestimmung eines Polarfeldes durch zwei perspektiv liegende Dreiecke.**

*Lehrsatz:* Ein Polarfeld ist bestimmt durch zwei perspektiv liegende Dreiecke, wenn die Seiten des einen den Ecken des andern als Polaren zugewiesen werden.

Die Ecken des einen Dreiecks seien  $UC\Gamma$  (Fig. 112) und die Seiten des zweiten  $uc\gamma$ . Bezeichnen wir die Punkte, in denen die Seiten  $UC$ ,  $C\Gamma$  und  $\Gamma U$  von den Seiten  $\gamma$ ,  $u$  und  $c$  geschnitten werden, durch  $Q$ ,  $A$  und  $S$ ,

so liegen  $Q, A$  und  $S$ , weil die Dreiecke perspektiv liegen<sup>(16)</sup>, in einer Geraden  $p$ . Bezeichnen wir ferner die Ecken des zweiten Dreiecks  $uc\gamma$  durch  $U_1 = c\gamma$ ,  $H_1 = \gamma u$  und  $G_1 = uc$ , so gehen die Verbindungslinien  $U U_1$ ,  $C H_1$  und  $\Gamma G_1$  durch einen Punkt  $P$ . Die Punkte  $A_1 S_1 R$ , in denen diese Verbindungslinien die Gerade  $p$  schneiden, bilden mit  $A S Q$  die Involution  $A A_1 . S S_1 . Q R$ <sup>(64)</sup>.

In dem Polarfelde nun, das durch das Poldreieck  $PQR$ , den Punkt  $U$  und seine Polare  $u$  bestimmt<sup>(185)</sup> ist, sind, wie wir zeigen wollen, die Seiten des Dreiecks  $UC\Gamma$  die Polaren der Ecken des Dreiecks  $uc\gamma$ . Weil nach der Zuweisung  $Q$  der Pol von  $PR$  und  $U$  der Pol von  $u$  ist, so ist<sup>(183a)</sup>  $UC$  die Polare von  $G_1$ . Ferner ist der Punkt  $A$  als Schnittpunkt von  $pu$  der Pol von  $PU$  und daher dem Punkte  $A_1$  konjugiert<sup>(184)</sup>, sodass

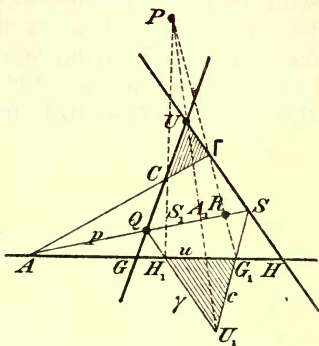


Fig. 112.

die konjugierte Involution von  $p$  bestimmt ist<sup>(63b)</sup> durch den Wurf  $QR . A A_1$ ; da in dieser Involution dem Punkte  $S$ , wie wir eben sahen, der Punkt  $S_1$  entspricht, so ist  $S$  der Pol von  $PS_1$ , die Seite  $U\Gamma$  ( $S$ ) also die Polare des Punktes  $H_1$ . Die Seiten des Dreiecks  $UC\Gamma$  sind also in der That die Polaren der Ecken des von  $uc\gamma$  gebildeten Dreiecks.

*Zusatz.* Und umgekehrt sind auch die Seiten  $uc\gamma$  die z Polaren der Ecken  $UC\Gamma$ <sup>(183a)</sup>.

### 187. Bestimmung eines Polarfeldes durch zwei konjugierte Involutionen und eine komponierende ihrer diagonalen Involution.

*Lehrsatz:* Ein Polarfeld ist bestimmt durch zwei konjugierte Punktinvolutionen und irgend eine komponierende ihrer diagonalen Involution.

*Lehrsatz:* Ein Polarfeld ist bestimmt durch zwei konjugierte Strahleninvolutionen und irgend eine komponierende ihrer diagonalen Involution.

In den Trägern  $g$  und  $h$  (Fig. 113), die sich in  $U$  schneiden, seien die beiden Involutionen  $UG . CC_1$  und  $UH . \Gamma\Gamma_1$  gegeben. In der Diagonale  $GH = u$  bilden  $G$

und  $H$  ein Punktpaar der diagonalen Involution<sup>(135a)</sup> und ferner die beiden Punkte  $A$  und  $B$ , in denen  $u$  von  $C\Gamma$  und  $C_1\Gamma_1$  geschnitten wird. Wird nun irgend eine komponierende der diagonalen Involution durch die Zuweisung  $(G G_1)$ <sup>(166.)</sup> bestimmt, so entspricht in dieser komponierenden dem Punkte  $H$  der Punkt  $H_1$ , der dem Punkte  $G_1$  in der diagonalen Involution zugeordnet ist<sup>(166.)</sup>. Schneiden die Verbindungslinien  $C_1G_1 = c$  und  $\Gamma_1H_1 = \gamma$  die Träger  $h$  und  $g$  in den Punkten  $S$  und  $Q$ , so bilden  $SQC_1\Gamma_1$  ein Viereck, von dem zwei Paar Gegenseiten die Diagonale  $u$  in den Punktpaaren  $GH$  und  $G_1H_1$  der diagonalen Involution treffen; es geht also<sup>(64 z)</sup>  $SQ$  durch

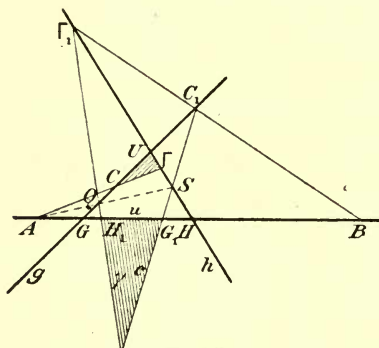


Fig. 113.

$A$ . Es sind daher<sup>(15)</sup> die beiden Dreiecke  $UC\Gamma$  und  $uc\gamma$  perspektiv liegend und bestimmen<sup>(186)</sup> ein Polarfeld. Dieses Polarfeld aber erzeugt, weil  $u$  und  $c$  die Polaren von  $U$  und  $C$  sind, in dem Träger  $g$  die konjugierte Involution  $UG.CC_1$ , und, weil  $u$  und  $\gamma$  die Polaren von  $U$  und  $\Gamma$  sind, in dem Träger  $h$  die konjugierte Involution  $UH.\Gamma\Gamma_1$ , und

in  $u$ , weil  $G_1$  als Schnittpunkt von  $c$  und  $u$  der Pol von  $g$ , und  $H_1$  als Schnittpunkt von  $\gamma$  und  $u$  der Pol von  $h$  ist, die konjugierte Involution  $GG_1.HH_1$ .

<sup>z</sup> *Zusatz.* Weil die komponierende Involution von  $u$  durch die Zuweisung der Punkte  $G$  und  $G_1$  bestimmt wurde, so werden wir das Polarfeld, welches durch die konjugierten Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  und die durch  $(GG_1)$  bestimmte komponierende Involution von  $u$  bestimmt ist, in Zukunft oft kurz *das durch die Zuweisung  $(GG_1)$  bestimmte Polarfeld* nennen. Den Inhalt unsers Beweises können wir dann kurz so zusammenfassen:

*In dem durch  $(GG_1)$  bestimmten Polarfeld ist  $G_1$  der Pol von  $g$  und der dem Punkte  $G_1$  in der diagonalen Involution homologe Punkt  $H_1$  der Pol von  $h$ .*



188. **Bestimmung eines Polarfeldes durch zwei konjugierte Involutionen und einen Ordnungspunkt.** Für ein Polarfeld haben, wie wir sehen werden, die Punkte eine große Wichtigkeit, die in ihrer Polare liegen; wir führen deshalb für sie einen neuen Namen ein durch die

1. Definition: *Ein Punkt, der in seiner Polare liegt, heißt ein Ordnungspunkt des Polarfeldes.*

1. Definition: *Eine Gerade, die durch ihren Pol geht, heißt ein Ordnungsstrahl des Polarfeldes.*

Sind uns nun zwei Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  und ein Punkt  $E$  gegeben, so läßt sich immer ein Polarfeld konstruieren, dem die Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  konjugiert sind und für welches die Polare von  $E$  durch  $E$  geht, mit andern Worten, es läßt sich der Satz beweisen:

2. *Durch zwei konjugierte Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  und einen Ordnungspunkt  $E$  ist ein Polarfeld bestimmt.*

2. *Durch zwei konjugierte Strahleninvolutionen  $G^2$  und  $H^2$  und einen Ordnungsstrahl  $e$  ist ein Polarfeld bestimmt.*

Wir betrachten die Hauptstrahleninvolution<sup>(170)</sup>, welche die Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  in  $E$  induzieren. Schneidet der Strahl von  $E$ , welcher dem Strahle  $E(U)$  in der Hauptinvolution  $E^2$  homolog ist, die Träger  $g$  und  $h$  in  $C$  und  $\Gamma$  (Fig. 114), so schneiden<sup>(170 Z<sub>2</sub>)</sup> die Strahlen  $E(C_1)$  und  $E(\Gamma_1)$ , die den Strahlen  $E(G)$  und  $E(H)$  in der Hauptinvolution homolog sind, die Diagonale in zwei homologen Punkten  $G_1$  und  $H_1$  der diagonalen Involution. Wählen wir also das Polarfeld, welches durch die Zuweisung  $(G G_1)$  bestimmt<sup>(187 Z)</sup> ist, so ist für dieses  $H_1$  der Pol von  $h$ . Es ist daher  $C$  der Pol von  $C_1 G_1$ <sup>(184<sub>a</sub>)</sup> und  $\Gamma$  der Pol von  $\Gamma_1 H_1$ ,  $C\Gamma$  also<sup>(183<sub>a</sub>)</sup> die Polare des Schnittpunktes  $E$  von  $C_1 G_1$  und  $\Gamma_1 H_1$ . Für das Polarfeld  $(G G_1)$  geht also in der That die Polare von  $E$  durch  $E$ . — Die Konstruktion fassen wir noch einmal zusammen:

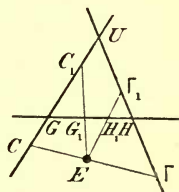


Fig. 114.

3. Die Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$  induzieren in jedem Punkte  $E$  eine Hauptstrahleninvolution  $E^2$ <sup>(170)</sup>. Schneidet der Strahl, welcher in  $E^2$  dem

3. Die Gegenecken  $G^2$  und  $H^2$  induzieren in jeder Gerade eine Hauptpunktinvolution  $e^2$ . Wird der Punkt, welcher in  $e^2$  dem Schnitt-

Strahle  $E(G)$  homolog ist, die Diagonale  $u$  im Punkte  $G_1$ , so erhalten wir durch die Zuweisung  $(G G_1)$  ein Polarfeld, für welches  $E$  ein Ordnungspunkt ist.

punkte  $e(g)$  homolog ist, aus dem Diagonalpunkte  $U$  durch den Strahl  $g_1$  projiziert, so erhalten wir durch die Zuweisung  $(g g_1)$  ein Polarfeld, für welches  $e$  ein Ordnungsstrahl ist.

Ferner ergibt sich durch die Konstruktion:

Für das durch  $g^2$  und  $h^2$  und  $E$  bestimmte Polarfeld

Für das durch  $G^2$  und  $H^2$  und  $e$  bestimmte Polarfeld

4. ist der dem Strahle  $E(U)$  in  $E^2$  homologe Strahl  $E(C)$  die Polare von  $E$ ;

4. ist der dem Punkte  $e(u)$  in  $e^2$  homologe Punkt  $e(c)$  der Pol von  $e$ ;

5. schneidet der dem Strahle  $E(G)$  homologe Strahl  $E(C_1)$  die Diagonale  $u$  in dem Pole  $G_1$  von  $g$  und der dem Strahle  $E(H)$  homologe Strahl  $E(\Gamma_1)$  die Diagonale  $u$  in dem Pole  $H_1$  von  $h$ ;

5. wird der dem Punkte  $e(g)$  homologe Punkt  $e(c_1)$  aus dem Diagonalpunkte  $U$  durch die Polare  $g_1$  von  $G$  projiziert und der dem Punkte  $e(h)$  homologe Punkt  $e(\gamma_1)$  aus dem Diagonalpunkte  $U$  durch die Polare  $h_1$  von  $H$ ;

mit andern Worten:

mit andern Worten:

6. liegt die Hauptstrahleninvolution  $E^2$  perspektiv zu der konjugierten Punktinvolution  $G G_1 \cdot H H_1$  von  $u$ .

6. liegt die Hauptpunktinvolution  $e^2$  perspektiv zu der konjugierten Strahleninvolution  $g g_1 \cdot h h_1$  von  $U$ .

189. **Ordnungskurve.** Für ein Polarfeld, welches durch die konjugierten Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  und den Ordnungspunkt  $S$  (wie wir jetzt statt  $E$  schreiben wollen) bestimmt<sup>(188a)</sup> ist, ist der Punkt  $S$ , weil er in seiner Polare liegt, sich selbst konjugiert und daher ein Ordnungspunkt in der konjugierten Involution jedes durch ihn gehenden Strahles. Es giebt daher in jedem durch  $S$  gehenden Strahl noch einen zweiten Ordnungspunkt<sup>(63a)</sup>. Es läßt sich zeigen, daß alle diese Ordnungspunkte in einer Kurve zweiter Ordnung liegen. — Da der zweite Ordnungspunkt irgend eines durch  $S$  gehenden Strahles der von  $S$  durch zwei konjugierte Punkte harmonisch getrennte Punkt ist<sup>(63a)</sup>, so ist z. B., weil der Punkt  $G_1$  und der Punkt  $C_1$  (Fig. 115)



**Lehrsatz:** *Hat ein Polarfeld einen Ordnungspunkt, so hat es unendlich viele. Die Ordnungspunkte eines solchen Polarfeldes bilden eine krumme Punktreihe. Diese krumme Punktreihe heißt die Ordnungskurve des Polarfeldes.*

**Lehrsatz:** *Hat ein Polarfeld einen Ordnungsstrahl, so hat es unendlich viele. Die Ordnungsstrahlen eines solchen Polarfeldes bilden einen krummen Strahlenbüschel. Dieser krumme Strahlenbüschel heißt der Ordnungsbüschel des Polarfeldes.*

190. **Identische Polarfelder.** Wir wollen jetzt das Polarfeld zeichnen, das durch die eben konstruierte Kurve bestimmt ist. Da die Kurve erzeugt wurde durch Projektion der Involution  $g^2$  aus den beiden mit  $G_1$  in einer Gerade liegenden Punkten  $S$  und  $L$ , so ist  $g^2$  auch für die Kurve eine konjugierte Involution und  $G_1$  der Pol von  $g^{(98_1)}$ . Es läßt sich weiter zeigen, daß auch  $h^2$  eine dieser Kurve konjugierte Involution ist. Zunächst folgt, daß  $G$   $G_1$  die Polare von  $U^{(92_2)}$  und daher  $U$  und  $H$  zwei für die Kurve konjugierte Punkte sind. Da dem Strahle  $L(S)C_1$  der Strahl  $S(C)$  zugeordnet ist, so ist  $S(C)$  die Tangente in  $S^{(45)}$ . Für die Kurve ist also auch  $S$  der Pol von  $C\Gamma^{(87\ 2_2)}$ . Ferner sind, weil, wie wir sahen, der von  $S$  durch  $H_1$  und  $\Gamma_1$  harmonisch getrennte Punkt  $M$  ein Punkt der Kurve ist,  $\Gamma_1$  und  $H_1$  zwei für die Kurve konjugierte Punkte<sup>(86\_2)</sup>, der Punkt  $H_1$  also, weil er auch  $U$  konjugiert ist, der Pol von  $U\Gamma_1 = h$ . Die Polare von  $\Gamma$  geht daher durch  $H_1$  und da sie auch, weil  $\Gamma$  ein Punkt der Tangente von  $S$  ist, durch  $S$  geht, so ist für die Kurve  $\Gamma$  dem Punkte  $\Gamma_1$  konjugiert. Der Ordnungskurve sind also die Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  konjugiert und der Punkt  $G_1$  ist  $G$  konjugiert. Das durch die Kurve erzeugte Polarfeld ist daher identisch<sup>(187)</sup> mit dem Polarfelde, von dem wir ausgingen.

Hat ein Polarfeld eine Ordnungskurve, so ist es identisch mit dem von dieser Ordnungskurve erzeugten Polarfeld. Die Ordnungsstrahlen des Polarfeldes umhüllen daher die Ordnungskurve.

A **Anmerkung.** In § 7 haben wir vermittelt einer Kurve zweiter Ordnung zu jedem Punkte der Ebene die Polare und zu jeder Gerade den Pol zeichnen gelernt. Jetzt haben wir ein Polarfeld, ohne den Begriff der Kurve zu

benutzen, konstruiert und haben vermittelt des so konstruierten Polarfeldes die Kurve als Ort der Ordnungspunkte des Polarfeldes definieren können. Wir hätten also auch mit dem Polarfeld beginnen und aus seinen Eigenschaften die Eigenschaften der Kurve entwickeln können. Das hat thatsächlich v. Staudt gethan und damit die wissenschaftlich richtigere Darstellung gegeben. In einem Buche aber, das für den Lernenden geschrieben ist, muß der anschaulichere Weg, und das ist der von der Kurve ausgehende, dem weniger anschaulichen, dem vom Polarfeld ausgehenden, vorangestellt werden. Nachdem wir nunmehr beide Wege kennen gelernt haben, können wir von jetzt an unsern Betrachtungen den allgemeineren Begriff des Polarfeldes zu Grunde legen. Die Sätze, die wir so erhalten, gelten dann für alle Polarfelder, und wir haben nicht nötig, bei unsern Beweisen die Fälle, in denen eine Ordnungskurve vorhanden ist, zu trennen von den Fällen, in denen eine Ordnungskurve nicht vorhanden ist oder, wie man sonst sagt, in denen die Ordnungskurve imaginär ist.

### 191. Konstruktion der zweiten gemeinsam konjugierten Involution. <sup>191</sup>

1. Aufgabe: *Von zwei Polarfeldern, die eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam haben, die zweite gemeinsam konjugierte Punktinvolution zu zeichnen.*

1. Aufgabe: *Von zwei Polarfeldern, die eine konjugierte Strahleninvolution gemeinsam haben, die zweite gemeinsam konjugierte Strahleninvolution zu zeichnen.*

Konstruktion: Die den beiden Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam konjugierte Punktinvolution sei  $g^2$ , ferner sei  $G_1$  (Fig. 116) der Pol von  $g$  für  $k_1^2$  und  $G_2$  der Pol von  $g$  für  $k_2^2$ . Die Gerade  $G_1 G_2 = u$  schneide  $g$  in dem Punkte  $G$ , dem in der gemeinsam konjugierten Involution  $g^2$  der Punkt  $U$  homolog sei. Wenn dann dem Punkte  $G_1$  für das zweite Polarfeld  $k_2^2$  der Punkt  $G_{12}$  von  $u$  und dem Punkte  $G_2$  für  $k_1^2$  der Punkt  $G_{21}$  von  $u$  konjugiert ist, so ist der Träger der zweiten gemeinsam konjugierten Involution der Strahl  $h$  von  $U$ , welcher von  $G$  durch  $G_{12}$  und  $G_{21}$  harmonisch getrennt ist.

Beweis: Da dem Punkte  $U$  für  $k_1^2$  die Punkte  $G_1$  und  $G$ , für  $k_2^2$  die Punkte  $G_2$  und  $G$  konjugiert sind, so ist

$G_1 G = G_2 G = u$  die Polare des Punktes  $U$  sowohl für  $k_1^2$  wie für  $k_2^2$  (184a). Da dem Punkte  $G_1$  für  $k_2^2$  der Punkt  $G_{12}$  konjugiert ist, so ist  $G_1$  für  $k_2^2$  der Pol von  $G_{12} U$ ; ebenso ist  $G_2$  für  $k_1^2$  der Pol von  $G_{21} U$ .

Sind nun  $C$  und  $C_1$  irgend zwei homologe Punkte von  $g^2$ , so ist  $C_1$  für  $k_1^2$  der Pol von  $C G_1$  und  $C$  für  $k_2^2$  der Pol von  $C_1 G_2$ . Der Punkt  $P$ , in dem  $C G_1$  von  $G_{21} U$  geschnitten wird, ist also für  $k_1^2$  der Pol von  $C_1 G_2$  und der Punkt  $P_1$ , in dem  $C_1 G_2$  von  $G_{12} U$  geschnitten wird, ist für  $k_2^2$  der Pol von  $C G_1$ . Die Punkte  $P$  und  $P_1$ , von denen  $P_1$  in der Polare von  $P$  für  $k_1^2$  und  $P$  in der Polare von  $P_1$  für  $k_2^2$  liegt, sind demnach für beide Polarfelder einander konjugiert. Da auch die Punkte  $U$  und

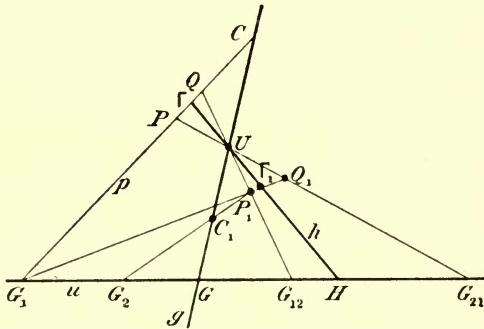


Fig. 116.

$G_1$  einander für beide Polarfelder konjugiert sind, so bestimmen die beiden Punktpaare  $P P_1$  und  $U G_1$  noch ein drittes Paar konjugierter Punkte (96; siehe 184 Z). Die Verbindungslinie  $P G_1$  wird von der Verbindungslinie  $P_1 U$  in einem Punkte  $Q$  geschnitten, der für beide Polarfelder konjugiert ist dem Punkte  $Q_1$ , in dem  $P U$  von  $P_1 G_1$  geschnitten wird. Den Punkten  $C P Q G_1$ , die in einer Gerade  $p$  liegen, sind also für die beiden Polarfelder die Punkte  $C_1 P_1 Q_1 U$  konjugiert.

Diese Punkte nun, die den Punkten einer Gerade  $p$  für beide Polarfelder konjugiert sind, können wir noch auf einem zweiten Wege konstruiert denken, indem wir zu jedem Punkte  $X$  von  $p$  die Polaren  $x_1$  und  $x_2$  für  $k_1^2$  und  $k_2^2$  zeichnen und ihren Schnittpunkt  $X_1$  bestimmen. Durch-

läuft  $X$  die Gerade  $p$ , so beschreibt sowohl  $x_1$ , wie  $x_2$  einen zu  $X$  projektiven Strahlenbüschel<sup>(183a)</sup>; die Punkte  $X_1$  liegen daher in einer zu  $p$  projektiven Kurve zweiter Ordnung. Bezeichnen wir also noch den Schnittpunkt von  $p$  und  $h$  durch  $\Gamma$  und den (noch unbekanntenen) ihm für beide Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  konjugierten durch  $\Gamma_1$ , so wissen wir, daß die Punkte  $P_1 Q_1 C_1 \Gamma_1 U$  in einer zu  $P Q C \Gamma G_1$  projektiven Kurve liegen; es ist daher

$$U(P Q C \Gamma) \overline{\wedge} U(P_1 Q_1 C_1 \Gamma_1).$$

Weil aber  $P Q . C \Gamma$  nach der Konstruktion vier harmonische Punkte sind, so ist<sup>(40a)</sup>

$$U(P Q C \Gamma) \overline{\wedge} U(Q P C \Gamma),$$

also<sup>(30a)</sup>

$$U(Q P C \Gamma) \overline{\wedge} U(P_1 Q_1 C_1 \Gamma_1).$$

Da die Strahlen  $UQ$  und  $UP_1$ ,  $UP$  und  $UQ_1$ ,  $UC$  und  $UC_1$  zusammenfallen, so müssen auch  $U\Gamma$  und  $U\Gamma_1$  zusammenfallen<sup>(33a)</sup>, d. h.  $\Gamma_1$  ist ein Punkt von  $h$  und beiden Polarfeldern ist in  $h$  die Involution  $UH . \Gamma \Gamma_1$  konjugiert. —

Wenn zwei Kurven einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch einen zweiten Punkt gemeinsam<sup>(111)</sup>. Diese beiden gemeinsamen Punkte bestimmen als Ordnungspunkte<sup>(92a)</sup> in ihrer Verbindungslinie eine beiden Kurven gemeinsam konjugierte Involution; die beiden Kurven haben daher nach unserm Satze noch eine zweite konjugierte Punktinvolution gemeinsam:

2. Haben zwei Kurven einen Punkt gemeinsam, so haben sie noch einen zweiten Punkt und eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam.

2. Haben zwei Kurven eine Tangente gemeinsam, so haben sie noch eine zweite Tangente und eine konjugierte Strahleninvolution gemeinsam.

*Zusatz.\** Da jedem Kreise die zirkuläre Punktinvolution  $z$  konjugiert ist<sup>(131a)</sup>, so haben zwei Kreise nach unserm Satze noch eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam. Diese zweite gemeinsame Punktinvolution zweier Kreise, deren Träger in der Planimetrie Chordale genannt wird, finden wir nach der oben gegebenen Konstruktion auf folgende Weise:

Die den beiden Kreisen gemeinsam konjugierte Involution ist die zirkuläre  $o^2$ ;  $O_1$  und  $O_2$  seien die beiden Pole von  $o$ ,

d. i.<sup>(114)</sup> die Mittelpunkte der beiden Kreise. Schneidet die Zentrale  $O_1 O_2 = u$  die uneigentliche Gerade  $o$  in  $O$ , so erhalten wir den dem Punkt  $O$  in der zirkularen Involution  $o^2$  homologen Punkt  $U$ , indem wir in  $O_1$  (oder  $O_2$ ) auf der Zentrale das Lot errichten<sup>(112)</sup>. Ist nun dem Mittelpunkt  $O_1$  des ersten Kreises für den zweiten Kreis der Punkt  $O_{12}$  und dem Mittelpunkt  $O_2$  des zweiten Kreises für den ersten Kreis der Punkt  $O_{21}$  konjugiert, so ist<sup>(191)</sup> das in der Mitte<sup>(27)</sup> von  $O_{12} O_{21}$  errichtete Lot die Chordale der beiden Kreise (vgl. 139).

### § 17. Büschel und Schar von Polarfeldern.

<sup>192</sup> 192. Büschel von Polarfeldern. Wenn wir unter Beibehaltung unserer bisherigen Bezeichnungsweise den Punkt, der dem Schnittpunkte  $U$  der Träger  $g$  und  $h$  in  $g^2$  entspricht, durch  $G$  und den dem Punkte  $U$  in  $h^2$  homologen Punkt durch  $H$  bezeichnen, so ist  $GH = u$  die Polare<sup>(184)</sup> des Punktes  $U$  für jedes Polarfeld, dem die Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  konjugiert sind. Der Pol von  $g$ , den wir durch  $G_1$  bezeichnen wollen, muß daher<sup>(183)</sup> in  $u$  liegen. Sind  $C$  und  $C_1$  zwei weitere homologe Punkte von  $g^2$ , so ist  $C_1 G_1$  die Polare von  $C$  und der Punkt  $\Gamma_1$ , in dem  $C_1 G_1$  den Träger  $h$  schneidet, der Pol der Verbindungslinie von  $C$  und  $\Gamma$ ;  $C\Gamma$  schneidet daher die Diagonale  $u$  in dem Pole  $H_1$  von  $h$ . Es ist also  $GG_1.HH_1$  die dem Polarfeld konjugierte<sup>(184)</sup> Involution der Diagonale  $u$ . Da sie eine komponierende<sup>(167)</sup> der diagonalen<sup>(135)</sup> Involution  $GH.G_1H_1$  ist, so können wir die unserm Polarfeld in der Diagonale konjugierte Involution als bestimmt ansehen durch die beiden Bedingungen<sup>(166)</sup>, daß sie eine komponierende der diagonalen Involution ist und daß in ihr dem Punkte  $G$  der Punkt  $G_1$  homolog ist. Jedes Polarfeld, dem die Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  konjugiert sind, läßt sich also als durch die Zuweisung  $(GG_1)$  bestimmt<sup>(187)</sup> ansehen. Wir erhalten daher sämtliche Polarfelder, denen  $g^2$  und  $h^2$  konjugiert sind, wenn wir den Punkt  $G_1$  die Diagonale  $u$  durchlaufen lassen und für jede Lage von  $G_1$  das durch die Zuweisung  $(GG_1)$  bestimmte Polarfeld zeichnen.

Führen wir für die Gesamtheit der betrachteten Polarfelder einen neuen Namen ein durch die



1. Definition: *Der Inbegriff der Polarfelder, denen zwei gegebene Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  konjugiert sind, heißt ein Büschel von Polarfeldern,*

so können wir das Gesagte so zusammenfassen:

2. Für sämtliche Polarfelder des Büschels ist  $U$  der Pol der Diagonallinie  $u$ .

3. Wir erhalten sämtliche Polarfelder des Büschels ( $g h$ ), wenn wir den Punkt  $G_1$  die Diagonale  $u$  durchlaufen lassen und für jede Lage von  $G_1$  das durch die Zuweisung ( $G G_1$ ) bestimmte<sup>(187 Z)</sup> Polarfeld zeichnen.

Um die im folgenden benutzten Sätze im Zusammenhang aufzuführen, wiederholen wir an dieser Stelle den Inhalt von Nr. 187 Z. — In einer komponierenden der diagonalen Involution, in welcher dem Punkte  $G$  der Punkt  $G_1$  homolog ist, entspricht dem Punkte  $H$  der Punkt  $H_1$ , welcher dem Punkte  $G_1$  in der diagonalen Involution  $u^2$  homolog ist<sup>(166)</sup>; der Punkt  $H_1$  ist daher der Pol<sup>(184)</sup> von  $UH = h$  für das durch die Zuweisung ( $G G_1$ ) bestimmte Polarfeld.

4. Für das Polarfeld ( $G G_1$ ) ist  $G_1$  der Pol von  $g$  und der dem Punkte  $G_1$  in der diagonalen Punktinvolution homologe Punkt  $H_1$  der Pol von  $h$ .

5. Für das Polarfeld ( $G G_1$ ) ist  $G G_1 \cdot H H_1$  die konjugierte Punktinvolution der Diagonallinie.

1. Definition: *Der Inbegriff der Polarfelder, denen zwei gegebene Strahleninvolutionen  $G^2$  und  $H^2$  konjugiert sind, heißt eine Schar von Polarfeldern,*

2. Für sämtliche Polarfelder der Schar ist  $u$  die Polare des Diagonalpunktes  $U$ .

3. Wir erhalten sämtliche Polarfelder der Schar ( $G H$ ), wenn wir den Strahl  $g_1$  um den Diagonalpunkt  $U$  sich drehen lassen und für jede Lage von  $g_1$  das durch die Zuweisung ( $g g_1$ ) bestimmte Polarfeld zeichnen.

4. Für das Polarfeld ( $g g_1$ ) ist  $g_1$  die Polare von  $G$  und der dem Strahl  $g_1$  in der diagonalen Strahleninvolution homologe Strahl  $h_1$  die Polare von  $H$ .

5. Für das Polarfeld ( $g g_1$ ) ist  $g g_1 \cdot h h_1$  die konjugierte Strahleninvolution des Diagonalpunktes.

Unter den Polarfeldern des Büschels heben wir dasjenige hervor, welches wir durch die Zuweisung ( $G G$ ) erhalten, für welches also  $G_1$  in  $G$  fällt. Da der Punkt  $G_1$  in seine Polare  $g$  fällt, so ist er ein Ordnungspunkt<sup>(188)</sup> des Polarfeldes. Es ist aber auch jeder Punkt  $C$  von  $g$  ein

Ordnungspunkt, denn er liegt ebenfalls in seiner Polare  $C_1 G_1$ . Da  $H_1$  in  $H$  fällt, wenn  $G_1$  in  $G$  fällt<sup>(166)</sup>, so ist auch jeder Punkt von  $h$  ein Ordnungspunkt. Daher:

6. Zu den Ordnungskurven eines Büschels von Polarfeldern gehört das von den beiden Gegenseiten gebildete Geradenpaar.

6. Zu den Ordnungskurven einer Schar von Polarfeldern gehört das von den beiden Gegenseiten gebildete Punkt-paar.

<sup>z</sup> *Zusatz.* Haben die Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  die Ordnungspunkte  $K K_1$  und  $L L_1$ , so hat jedes Polarfeld eine Ordnungskurve<sup>(189)</sup>. Diese Ordnungskurven des Büschels gehen durch die vier Punkte  $K K_1 L L_1$ , so daß in diesem Falle unser Büschel von Polarfeldern identisch ist mit dem in Nr. 102<sub>1</sub> definierten Kurvenbüschel.

Betrachten wir die vier Ordnungspunkte  $K K_1 L L_1$ , die man *Grundpunkte* des Büschels nennt, als Ecken eines Vierecks und bezeichnen die Gegenseiten  $K L$  und  $K_1 L_1$  durch  $g_1$  und  $h_1$ , die Gegenseiten  $K L_1$  und  $K_1 L$  durch  $g_2$  und  $h_2$ , so sind die Diagonalepunkte  $V$  und  $W$ , in denen sich die Gegenseiten  $g_1 h_1$  und  $g_2 h_2$  schneiden, die Ordnungspunkte der diagonalen Involution  $u^2$ <sup>(133 A)</sup>. Bezeichnen wir die hyperbolischen Involutionen, welche je zwei Ecken des Vierecks  $K K_1 L L_1$  als Ordnungspunkte in ihrer Verbindungslinie bestimmen, durch  $g_1^2$  u. s. w., so ist den Gegenseiten  $g_1^2 h_1^2$  die diagonale Involution  $v^2$  mit den Ordnungspunkten  $W$  und  $U$ , und den Gegenseiten  $g_2^2 h_2^2$  die diagonale Involution  $w^2$  mit den Ordnungspunkten  $U$  und  $V$  zugeordnet, mit andern Worten:

Was von den Gegenseiten  $g^2 h^2$  und ihrer diagonalen Involution  $u^2$  gilt, gilt auch von  $g_1^2 h_1^2$  und  $v^2$ , und von  $g_2^2 h_2^2$  und  $w^2$ .

193

**193. Konstruktion eines Polarfeldes.** Da die Strahleninvolution des Poles perspektiv liegt zu der Punktinvolution der Polare<sup>(184)</sup>, so ist mit der konjugierten Punktinvolution von  $g$  auch die konjugierte Strahleninvolution des Poles  $G_1$  gegeben. Sind also  $C$  und  $C_1$  irgend zwei konjugierte Punkte des Trägers  $g$ , so sind die Strahlen  $c_1$  und  $c$ , welche  $C$  und  $C_1$  aus  $G_1$  projizieren, zwei homologe Strahlen der konjugierten Involution von  $G_1$ ;  $C$  ist folglich<sup>(184a)</sup> der Pol von  $c$  und  $C_1$  der Pol von  $c_1$ . Da der dem Punkte  $G_1$  in der

diagonalen Involution homologe Punkt  $H_1$  der Pol von  $h$  ist<sup>(192d)</sup>, so ergibt sich, wenn wir zwei konjugierte Punkte von  $h$  durch  $\Gamma$  und  $\Gamma_1$  und die Strahlen, die sie aus  $H_1$  projizieren, durch  $\gamma_1$  und  $\gamma$  bezeichnen, daß  $\Gamma$  der Pol von  $\gamma$  und  $\Gamma_1$  der Pol von  $\gamma_1$  ist. Vermittelt der konjugierten Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  und der konjugierten Strahleninvolutionen  $G_1^2$  und  $H_1^2$  läßt sich nun zu jedem Punkte der Ebene die Polare und zu jeder Gerade der Pol in folgender Weise angeben (Fig. 117):

1. Ist  $E$  ein beliebiger Punkt der Ebene, der aus  $G_1$  und  $H_1$  durch  $c$  und  $\gamma$  projiziert wird, so ist die Verbindungslinie  $e$  der Pole  $C$  und  $\Gamma$  die Polare von  $E$ ;
2. Ist  $e$  eine beliebige Gerade der Ebene, die  $g$  und  $h$  in  $C$  und  $\Gamma$  schneidet, so ist der Schnittpunkt  $E$  der Polaren  $c$  und  $\gamma$  der Pol von  $e$ .

Daß wir durch diese Zuweisung ein Polarfeld erhalten, ist zwar durch das Vorhergehende bereits bewiesen; wir geben aber noch einen direkten Beweis, weil dieser die Grundlage für die folgenden Betrachtungen bildet. Wir haben also zunächst zu zeigen<sup>(179i)</sup>: Wenn  $E$  sich in einer Gerade  $f$  bewegt, so beschreibt die zugeordnete Gerade  $e$  einen geraden Strahlenbüschel  $F$ .

Bewegt sich der Punkt  $E$  in  $f$ , so beschreiben  $c$  und  $\gamma$  die zu  $f$  perspektiven Strahlenbüschel  $G_1$  und  $H_1$ , die  $g$  und  $h$  in den projektiven Punktreihen  $C_1$  und  $\Gamma_1$  schneiden. Es bilden daher auch  $C$  und  $\Gamma$  zwei projektive<sup>(637)</sup> Punktreihen in  $g$  und  $h$ , und weil diese in perspektiver

Lage sind, gehen die Verbindungslinien  $C\Gamma$  durch  $F$ <sup>(34)</sup>. Am besten läßt sich die Bewegung der einzelnen Elemente aus dem folgenden Schema ersehen<sup>(37 A)</sup>:

$$C^{(637)} \overline{\wedge} C_1 [G_1] \overline{\overline{\wedge}} E [H_1] \overline{\overline{\wedge}} \Gamma_1^{(637)} \overline{\wedge} \Gamma.$$

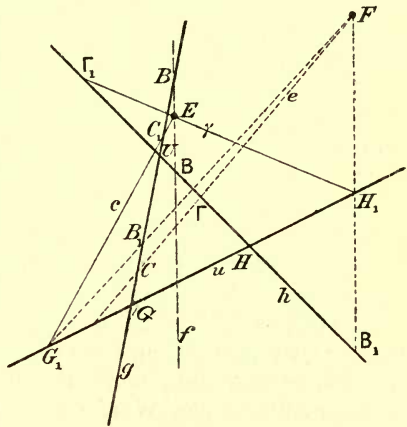


Fig. 117.

Fällt der Punkt  $E$  in den Schnittpunkt von  $f$  und  $u$ , so fällt 1.  $C_1$  in  $G$  und  $C$  daher in  $U$ , 2.  $\Gamma_1$  in  $H$  und  $\Gamma$  daher ebenfalls in  $U$ . Die beiden projektiven Punktreihen  $C$  und  $\Gamma$ , die wir in  $g$  und  $h$  erhalten, sind daher in perspektiver Lage; die Verbindungslinie  $C\Gamma = e$  beschreibt also einen zur Punktreihe  $E$  projektiven geraden Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt wir  $F$  nennen. — Schneidet die Gerade  $f$  die Träger  $g$  und  $h$  in  $B$  und  $B$ , so gehen, wie wir eben bewiesen haben, die den Punkten  $B$  und  $B$  zugeordneten Geraden  $G_1B_1$  und  $H_1B_1$  durch  $F$ ; zeichnen wir also umgekehrt wieder zu  $F$  die zugeordnete Gerade, so erhalten wir  $f$ . Je zwei zugeordnete Elemente entsprechen einander mithin zweifach, d. h. die beiden reziproken Felder sind in involutorischer Lage und bilden ein Polarfeld<sup>(183<sub>1</sub>)</sup>.

<sup>z</sup> *Zusatz.* Die eben benutzten Strahleninvolutionsen  $G_1^2$  und  $H_1^2$ , die perspektiv zu  $g^2$  und  $h^2$  liegen, erzeugen als Gegenecken<sup>(133)</sup> eine diagonale Involution, deren Mittelpunkt  $U$  ist, weil dem Strahle  $G_1(G)$  der Strahl  $G_1(U)$  und dem Strahle  $H_1(H)$  der Strahl  $H_1(U)$  homolog ist. Von der diagonalen Involution  $U^2$  sind  $U(G_1) = g_1$  und  $U(H_1) = h_1$  zwei homologe Strahlen<sup>(133)</sup>. Ferner sind auch  $g$  und  $h$  zwei homologe Strahlen. Schneiden sich nämlich irgend zwei Strahlen  $c$  und  $\gamma$  von  $G_1$  und  $H_1$  in einem Punkte  $C_1$  von  $g$ , so liegen, wenn wir den Schnittpunkt von  $\gamma$  und  $h$  durch  $\Gamma_1$  bezeichnen, die homologen Punkte  $C$  und  $\Gamma$  in einem Strahle  $c_1$  von  $G_1$ ;  $c_1$  und  $\gamma_1$  schneiden sich also in  $\Gamma$ , das ist in einem Punkte von  $h$ . Die diagonale Strahleninvolution  $U^2$  der Gegenecken  $G_1^2$  und  $H_1^2$  liegt mithin perspektiv zu der diagonalen Punktinvolution  $u^2$  der Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$ .

<sup>194</sup> 194. **Die dem Büschel adjungierten Involutionsen.** Schneidet die beliebige Gerade  $e$  die Träger  $ghu$  in  $C\Gamma A$  (Fig. 118), so liegen die homologen Punkte  $C_1\Gamma_1 B$  ebenfalls in einer Gerade<sup>(133)</sup>, und die Hauptinvolution in  $e$  ist, wenn wir den Schnittpunkt von  $C\Gamma$  und  $C_1\Gamma_1$  durch  $A$  bezeichnen, bestimmt durch den Wurf  $C\Gamma . AA^{(135_2)}$ . Die diagonale Involution ist bestimmt durch  $G H . A B^{(135_2)}$ , und weitere homologe Punkte  $G_1 H_1$  dieser diagonalen Involution ergeben sich<sup>(136)</sup>, wenn wir irgend zwei Punkte  $D$  und  $\Delta$  von  $g$  und  $h$ , die mit  $A$  in einer Gerade liegen, aus  $C_1$  und  $\Gamma_1$  auf die Diagonale  $u$  projizieren. Für das Polarfeld ( $G G_1$ ) nun ist die Verbindungslinie  $C_1 G_1$  die Polare von  $C$ ; sie

schneidet daher die Gerade  $e$  in dem dem Punkte  $C$  konjugierten Punkte  $C'$ <sup>(184)</sup>. Ferner ist die Verbindungslinie  $\Gamma_1 H_1$ <sup>(192)</sup> die Polare von  $\Gamma$ , sie schneidet daher  $e$  in dem dem Punkte  $\Gamma$  konjugierten Punkte  $\Gamma'$ . Die dem Polarfelde  $(G G_1)$  konjugierte Involution der Gerade  $e$  ist daher  $C C' . \Gamma \Gamma'$ .

Dies ist eine komponierende von

$C \Gamma . C' \Gamma'$ <sup>(167)</sup>;  $C$  und  $\Gamma'$  aber bilden, wie das Viereck  $C_1 \Gamma_1 D \Delta$  zeigt, ein Punktpaar der Hauptinvolution  $C \Gamma . A A$ , so daß die dem beliebigen

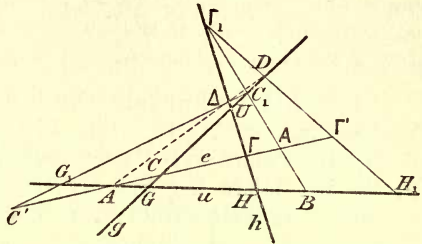


Fig. 118.

Polarfelde  $(G G_1)$  konjugierte Involution der Gerade  $e$  eine komponierende der durch die Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$  in  $p$  induzierten Hauptinvolution ist.

1. *Lehrsatz: In jeder Gerade werden durch die Polarfelder des Büschels konjugierte Involutionen erzeugt, die komponierende der Hauptpunktinvolution dieser Gerade sind.*

1. *Lehrsatz: In jedem Punkte werden durch die Polarfelder der Schar konjugierte Involutionen erzeugt, die komponierende der Hauptstrahleninvolution dieses Punktes sind.*

Oder, wenn wir das Wort adjungiert<sup>(168 Z<sub>1</sub>)</sup> auch auf Polarfelder anwenden (vgl. 214):

2. *Die Hauptpunktinvolution einer beliebigen Gerade ist jedem Polarfelde des Büschels adjungiert.*

2. *Die Hauptstrahleninvolution eines beliebigen Punktes ist jedem Polarfelde der Schar adjungiert.*

Befreien wir diesen Satz von dem Begriffe des Büschels, so erhalten wir die allgemeinste Form des Lehrsatzes von Desargues<sup>(169)</sup>:

3. *Sind zwei Gegenseiten einem Polarfelde konjugiert, so ist die Hauptpunktinvolution, die die beiden Gegenseiten in einer beliebigen Gerade induzieren<sup>(134)</sup>, dem Polarfelde adjungiert. —*

3. *Sind zwei Gegenecken einem Polarfelde konjugiert, so ist die Hauptstrahleninvolution, die die beiden Gegenecken in einem beliebigen Punkte induzieren, dem Polarfelde adjungiert. —*

Weil jedes Polarfeld des Büschels durch eine komponierende der diagonalen Involution bestimmt ist<sup>(187)</sup>, so ergibt sich (als besonderer Fall des vorstehenden Satzes):

4. Sind zwei Gegenseiten einem Polarfelde konjugiert, so ist ihre diagonale Involution dem Polarfelde adjungiert.

4. Sind zwei Gegenecken einem Polarfelde konjugiert, so ist ihre diagonale Involution dem Polarfelde adjungiert.

195

**195. Die Polkurve.** Für das Polarfeld  $(G G_1)$  ist die Verbindungslinie  $C_1 G_1$  (Fig. 119) die Polare von  $C$  und  $\Gamma_1 H_1$  die Polare von  $\Gamma$ ; der Schnittpunkt  $E$  von  $C_1 G_1$  und  $\Gamma_1 H_1$  ist daher der Pol der Gerade  $C\Gamma = e$ . Durchläuft  $G_1$  die Diagonale (dreht sich, mit andern Worten, die zur Konstruktion der Punktpaare  $G_1 H_1$  benutzte<sup>(194)</sup> Gerade

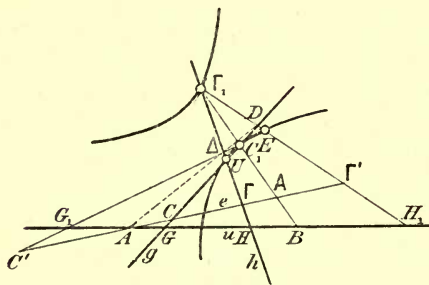


Fig. 119.

$D\Delta$  um  $A$ ), so beschreiben  $C_1(G_1)$  und  $\Gamma_1(H_1)$  zwei projektive Strahlenbüschel, ihr Schnittpunkt  $E$ , der Pol von  $e$ , daher eine zu  $G_1$  projektive Punktreihe zweiter Ordnung. Diese Punktreihe zweiter Ordnung heißt die Polkurve der Gerade  $e$ . Da sie nach unserer Konstruktion erhalten wird durch Projektion der diagonalen Involution  $(G_1 H_1)$  oder<sup>(136 z)</sup> der Hauptinvolution  $(C\Gamma')$  aus  $C_1$  und  $\Gamma_1$ , so ist die diagonale Involution von  $u$  und die Hauptinvolution von  $e$  der Polkurve konjugiert<sup>(98)</sup>. Da  $G$  und  $H$  zwei homologe Punkte der diagonalen Involution sind<sup>(135a)</sup>, so ist auch der Diagonalkpunkt  $U$  ein Punkt unserer Kurve. Wir haben daher folgenden

**Lehrsatz:** Die Pole jeder Gerade  $e$  für sämtliche Polarfelder des Büschels liegen in einer Kurve zweiter Ordnung. Diese Polkurve ist bestimmt durch die diagonale Involution  $u^2$ , die Hauptinvolution  $e^2$  und den Diagonalkpunkt  $U$ .

**Lehrsatz:** Die Polaren jedes Punktes  $E$  für sämtliche Polarfelder der Schar bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Dieser Polarenbüschel ist bestimmt durch die diagonale Involution  $U^2$ , die Hauptinvolution  $E^2$  und die Diagonallinie  $u$ .

*Zusatz.* Aus unserer Konstruktion ergibt sich noch <sup>z</sup> eine zweite Bestimmungsweise der Polkurve. Wir erhielten die Polkurve, indem wir den Strahl  $AD\Delta$  um  $A$  sich drehen ließen und die Punkte  $D$  und  $\Delta$  aus  $C_1$  und  $\Gamma_1$  projizierten. Wir haben also den einfachsten Fall der Kurvenkonstruktion vor uns<sup>(56 Z)</sup>.  $C_1$  und  $\Gamma_1$  sind als Mittelpunkte der projektiven Strahlenbüschel Punkte der Polkurve, ihre Tangenten schneiden sich in  $A$ , so daß die Polkurve bestimmt ist durch ihre drei Punkte  $C_1 \Gamma_1 U$  und den Schnittpunkt  $A$  der Tangenten in  $C_1$  und  $\Gamma_1$ :

1. Schneidet eine beliebige Gerade  $e$  die Träger  $ghu$  in  $C\Gamma A$ , so geht die zugeordnete Polkurve  $e_1^2$  durch  $C_1$  und  $\Gamma_1$ , und die Tangenten von  $C_1$  und  $\Gamma_1$  schneiden sich in  $A$ . —

Sind die Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  hyperbolisch, so wird  $C_1$  von  $C$  durch die Ordnungspunkte  $KK_1$ ,  $\Gamma_1$  von  $\Gamma$  durch die Ordnungspunkte  $LL_1$  harmonisch getrennt<sup>(63s)</sup>. Da in diesem Falle von den Trägern  $g_1 h_1$  und  $g_2 h_2$  der Gegenseiten dasselbe gilt wie von  $gh$ <sup>(192 Z)</sup>, so können wir unsern Satz, indem wir ihn vom Begriff des Büschels loslösen, so aussprechen:

2. *Satz vom Kegelschnitt der 9 Punkte.* Die 6 von einer beliebigen Gerade  $e$  durch je zwei Ecken eines Vierecks harmonisch getrennten Punkte und die 3 Diagonalepunkte des Vierecks liegen in einem Kegelschnitt. Die Verbindungslinien zweier Kurvenpunkte, die in zwei Gegenseiten des Vierecks liegen, gehen durch den Pol von  $e$  und haben den Schnittpunkt von  $e$  und der zugeordneten<sup>(16 Z)</sup> Diagonallinie zum Pol. —

1. Wird ein beliebiger Punkt  $E$  aus  $GHU$  durch  $e\gamma a$  projiziert, so enthält der zugeordnete Polarenbüschel  $E_1^2$  die Strahlen  $e_1$  und  $\gamma_1$ , und die Berührungspunkte von  $e_1$  und  $\gamma_1$  liegen in  $a$ . —

2. *Satz vom Kegelschnitt der 9 Tangenten.* Die 6 von einem beliebigen Punkte  $E$  durch je zwei Seiten eines Vierseits harmonisch getrennten Geraden und die 3 Diagonallinien des Vierseits umhüllen einen Kegelschnitt. Die Schnittpunkte zweier Kurventangenten, die durch zwei Gegenecken des Vierseits gehen, liegen in der Polare von  $E$  und haben die Verbindungslinie von  $E$  und dem zugeordneten Diagonalepunkt zur Polare. —

Fällt  $e$  mit der uneigentlichen Gerade zusammen, so sind  $C_1, \Gamma_1$  u. s. w. die Mitten<sup>(27a)</sup> der Gegenseiten unsers Vierecks. Nehmen wir weiter an, daß von dem Viereck  $KK_1LL_1$  zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, so ist die Hauptinvolution<sup>(134 A)</sup> von  $e$  zirkular; die Polkurve ist also, weil ihr die Hauptinvolution von  $e$  konjugiert ist, ein Kreis<sup>(131a)</sup>. Als besonderer Fall des vorhergehenden Satzes ergibt sich daher der aus der Planimetrie bekannte

3. *Satz des Feuerbach.* In einem Viereck, in dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, liegen die Mitten der 6 Seiten und die 3 Diagonalepunkte in einem Kreise. Die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten geht durch den Mittelpunkt<sup>(114a)</sup> des Kreises und steht auf der zugeordneten Diagonallinie senkrecht<sup>(112a)</sup> und halbiert sie<sup>(27a)</sup>.

Die Form, in welcher der Feuerbachsche Satz gewöhnlich ausgesprochen wird, erhält man<sup>(112 A)</sup>, wenn man beachtet, daß ein Viereck  $KK_1LL_1$ , in welchem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, sich ansehen läßt als ein Dreieck  $KK_1L$  mit dem Höhenschnittpunkt  $L_1$ ; die Fußpunkte der Höhen dieses Dreiecks sind die Diagonalepunkte des Vierecks. —

Nebenbei mag bemerkt werden, daß man noch durch eine andere Spezialisierung zum Satz des Feuerbach gelangen kann, indem man von einem Viereck  $KK_1LL_1$  ausgeht, in welchem die vierte Ecke  $L_1$  der Schwerpunkt des von den drei andern Ecken  $KK_1L$  gebildeten Dreiecks ist. Man hat dann den Kegelschnitt der 9 Punkte für diejenige Gerade  $e$  zu zeichnen, die die von den Fußpunkten der Höhen durch die Ecken des Dreiecks  $KK_1L$  harmonisch getrennten Punkte enthält. Hier aber soll auf die Begründung dieser Bemerkung und auf die aus ihr zu ziehenden Folgerungen nicht näher eingegangen werden.

<sup>A</sup> *Anmerkung.* Geht die Gerade  $e$  durch  $U$ , so daß  $C$  und  $\Gamma$  in  $U$  liegen, so fällt  $C_1$  in  $G$  und  $\Gamma_1$  in  $H$ ; der Schnittpunkt  $E$  von  $C_1G_1$  und  $\Gamma_1H_1$ , d. i. von  $GG_1$  und  $HH_1$ , liegt also in  $u$ , ist aber im übrigen unbestimmt. Fällt  $G_1$  in  $G$ ,  $H_1$  also<sup>(166a)</sup> in  $H$ , so wird der Schnittpunkt  $E$  ganz unbestimmt. Unsere Konstruktion reicht also für



diesen Fall nicht aus. Wir sahen aber schon<sup>(195)</sup>, daß wir die Punkte  $E$  auch finden können, indem wir die homologen Punkte der Hauptinvolution von  $e$  aus  $C_1$  und  $\Gamma_1$ , in unserm Falle also aus  $G$  und  $H$  projizieren. Da diese Hauptinvolution, wenn  $e$  durch  $U$  geht, hyperbolisch ist und die Ordnungspunkte  $U$  und  $A$  hat<sup>(134 z)</sup>, so erhalten wir als Ort für die Schnittpunkte homologer Strahlen die von  $e$  durch  $g$  und  $h$  harmonisch getrennte Gerade  $e'$ <sup>(40)</sup>; dazu kommt als zweite Gerade die Diagonale  $u$ , weil die homologen Strahlen  $C_1(A)$  und  $\Gamma_1(A)$  mit  $u$  zusammenfallen. — Daß auch dann, wenn  $e$  durch  $U$  geht, der Satz richtig bleibt, daß die Pole  $E$  von  $e$  eine zu  $G_1$  projektive Punktreihe bilden, beweisen wir durch folgende Betrachtung.

Geht die Gerade  $e$  durch  $U$ , so liegt ihr Pol in der Polare von  $U$  und ist der Punkt  $E$  von  $u$ , welcher in der durch die Zuweisung ( $G G_1$ ) bestimmten konjugierten Involution von  $u$  dem Punkte  $A$  homolog ist. Dieser Punkt beschreibt aber nach Nr. 166<sub>3</sub> eine zu  $G_1$  projektive Punktreihe. — Für die Kurve des Büschels, welche aus dem Geradenpaar  $gh$  besteht<sup>(192a)</sup>, wird der Pol von  $e$  unbestimmt: jeder Punkt der von  $e$  durch  $g$  und  $h$  harmonisch getrennten Gerade  $e'$  kann als Pol angesehen werden. Daher:

Für eine Gerade  $e$ , welche durch den Diagonalpunkt  $U$  geht, zerfällt die Polkurve in zwei Geraden: die Diagonallinie und die von  $e$  durch  $g$  und  $h$  harmonisch getrennte Gerade  $e'$ .

Für einen Punkt  $E$ , welcher in der Diagonallinie  $u$  liegt, zerfällt der Polarenbüschel in zwei Punkte: den Diagonalpunkt und den von  $E$  durch  $G$  und  $H$  harmonisch getrennten Punkt  $E'$ .

**196. Absolut konjugierte Punkte.** In jedem Polar-<sup>196</sup>felde des Büschels ist dem beliebigen Punkte  $E$  eine bestimmte Gerade  $e$  als Polare zugeordnet, die wir finden<sup>(193,1)</sup>, indem wir  $E$  aus  $G_1$  und  $H_1$ , den Polen von  $g$  und  $h$ , durch  $c$  und  $\gamma$  projizieren und die Pole  $C$  und  $\Gamma$  von  $c$  und  $\gamma$  durch die Gerade  $e$  verbinden. Wir erhalten die Polaren  $e$  des festen Punktes  $E$  für sämtliche Polarfelder des Büschels, indem wir den Punkt  $G_1$  die Gerade  $u$  durchlaufen lassen<sup>(192a)</sup> und für jede Lage von  $G_1$  in der eben angegebenen Weise die Polare  $e$  zeichnen. Bei dieser Bewegung des Poles  $G_1$  ergibt sich die Bewegung der

einzelnen Elemente am übersichtlichsten (Fig. 120) aus dem folgenden Schema<sup>(37 A)</sup>:

$$C^{(63_1)} \overline{\wedge} C_1 [E] \overline{\wedge} G_1^{(63_1)} \overline{\wedge} H_1 [E] \overline{\wedge} \Gamma_1^{(63_1)} \overline{\wedge} \Gamma.$$

Fällt  $G_1$  in  $G$ , so fällt  $C_1$  ebenfalls in  $G$  und  $C$  daher in  $U$ . Da gleichzeitig  $H_1$  in  $H$  fällt<sup>(192\_5)</sup>, so fällt  $\Gamma_1$  ebenfalls in  $H$  und daher  $\Gamma$  in  $U$ . Die von  $C$  und  $\Gamma$  beschriebenen Punktreihen sind daher in perspektiver Lage<sup>(34)</sup>; die

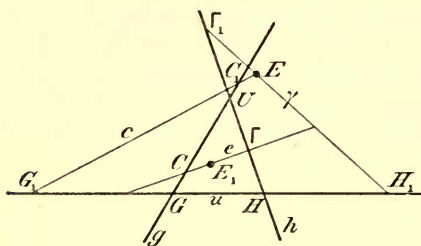


Fig. 120.

Verbindungsline  $e = C\Gamma$ , die Polare des Punktes  $E$ , beschreibt daher einen zu  $G_1$  projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen

Mittelpunkt wir mit  $E_1$  bezeichnen wollen. Das Ergebnis fassen wir zusammen in dem Satze:

1. Zeichnet man sämtliche Polarfelder des Büschels, indem man der Seite  $g$  der Reihe nach jeden Punkt  $G_1$  der Diagonale  $u$  als Pol zuweist, und bestimmt in jedem dieser Polarfelder die Polare des festen Punktes  $E$ , so erhält man einen Strahlenbüschel erster Ordnung  $E_1$ , der projektiv auf die von  $G_1$  in  $u$  beschriebene Punktreihe bezogen ist.

1. Zeichnet man sämtliche Polarfelder der Schar, indem man der Ecke  $G$  der Reihe nach jeden Strahl  $g_1$  des Diagonales  $u$  als Polare zuweist, und bestimmt in jedem dieser Polarfelder den Pol der festen Gerade  $e$ , so erhält man eine Punktreihe erster Ordnung  $e_1$ , die projektiv auf den von  $g_1$  um  $U$  beschriebenen Strahlenbüschel bezogen ist.

Weil alle Polaren von  $E$  durch  $E_1$  hindurchgehen, bilden  $E$  und  $E_1$  ein Paar konjugierter Punkte<sup>(184\_1)</sup> für jedes Polarfeld des Büschels. Nennen wir zwei solche Punkte *absolut konjugiert*, so haben wir:

2. Jedem Punkte  $E$  ist hinsichtlich aller Polarfelder des Büschels ein bestimmter Punkt  $E_1$  konjugiert.  $E$  und  $E_1$

2. Jeder Gerade  $e$  ist hinsichtlich aller Polarfelder der Schar eine bestimmte Gerade  $e_1$  konjugiert.  $e$  und  $e_1$  werden

werden zwei (hinsichtlich des Büschels oder) absolut konjugierte Punkte genannt.

zwei (hinsichtlich der Schar oder) absolut konjugierte Geraden genannt.

197. Konstruktion des absolut konjugierten Punktes. <sup>197</sup>

Wir haben gesehen<sup>(196)</sup>, daß ein dem Punkte  $E$  hinsichtlich sämtlicher Polarfelder des Büschels konjugierter Punkt  $E_1$  existiert. Jetzt wollen wir zeigen, wie man  $E_1$  findet.

1. Aufgabe: Den Punkt zu zeichnen, der einem gegebenen Punkte absolut konjugiert ist.

1. Aufgabe: Die Gerade zu zeichnen, die einer gegebenen Gerade absolut konjugiert ist.

Wir legen durch  $E$  (Fig. 121) eine beliebige Gerade, die die Träger  $ghu$  in  $C_1 \Delta_1 G_2$  schneidet; die homologen Punkte, die wir  $C \Delta H_2$  nennen, liegen in einer Gerade<sup>(133)</sup>, die die Verbindungslinie  $EU$  im Punkte  $X$  treffen möge. Schneidet die Verbindungslinie  $XG_2$  die Träger  $g$  und  $h$  in  $D$  und  $\Gamma$ , so bilden  $CD\Gamma\Delta$  ein Viereck, von dem  $X$  und  $U$  zwei Diagonalepunkte sind. Wir behaupten, daß der dritte Diagonalepunkt, der Schnittpunkt der Gegenseiten  $C\Gamma$  und  $D\Delta$ , der dem Punkte  $E$  absolut konjugierte Punkt  $E_1$  ist.

Beweis: Betrachten wir das Viereck  $EXG_2H_2$  (vergl. 133), so sehen wir, daß zwei Paar Gegenseiten die Träger  $g$  und  $h$  in homologen Punkten schneiden; es müssen daher auch die Gegenseiten  $EH_2$  und  $XG_2$  die Träger  $g$  und  $h$  in homologen Punkten schneiden<sup>(64 Z)</sup>;  $EH_2$  schneidet also  $g$  und  $h$  in den den Punkten  $D$  und  $\Gamma$  homologen Punkten  $D_1$  und  $\Gamma_1$ . — Durch die Zuweisung ( $G G_2$ ) ist ein Polarfeld des Büschels bestimmt, für welches  $C$  der Pol von  $C_1 G_2$  und  $\Gamma$  der Pol von  $\Gamma_1 H_2$ ,  $C\Gamma$  also die Polare von  $E$  ist.

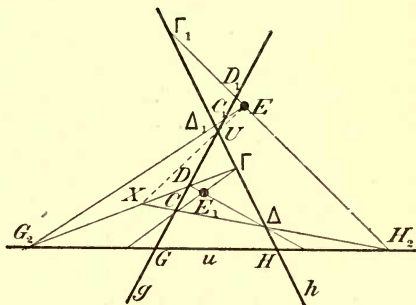


Fig. 121.

— Durch die Zuweisung ( $G H_2$ ) ist ein zweites Polarfeld bestimmt, für welches  $G_2$  der Pol von  $h$  ist<sup>(192d)</sup>. Für dieses Polarfeld ist  $D$  der Pol von  $D_1 H_2$  und  $\Delta$  der Pol von  $\Delta_1 G_2$ ,  $D\Delta$  also die Polare von  $E$ .  $E_1$  ist mithin der

Schnittpunkt zweier Polaren des Punktes  $E$  und daher dem Punkte  $E$  absolut konjugiert<sup>(196)</sup>. —

Aus dem Viereck  $CD\Gamma\Delta$  ergibt sich noch, weil die Gegenseiten des Diagonalpunktes  $U$  durch die beiden andern Diagonalpunkte  $E_1$  und  $X$  harmonisch getrennt werden<sup>(242)</sup> und  $E$  in der Diagonallinie  $XU$  liegt, der Lehrsatz (der sich auch als eine Folgerung aus Nr. 192<sub>6</sub> betrachten ließe):

2. Je zwei absolut konjugierte Punkte werden durch die Gegenseiten  $g$  und  $h$  harmonisch getrennt. —

2. Je zwei absolut konjugierte Geraden werden durch die Gegenseiten  $G$  und  $H$  harmonisch getrennt. —

Da wir die eben angegebene Konstruktion noch mehrmals anzuwenden haben, so fassen wir sie in übersichtlicher Form zusammen (Fig. 121):

3. Um den dem Punkte  $E$  für den Büschel  $(gh)$  absolut konjugierten Punkt  $E_1$  zu finden, projizieren wir aus  $E$  zwei beliebige homologe Punkte  $G_2$  und  $H_2$  von  $u^2$ . Werden die Träger  $g$  und  $h$  von dem Strahle  $E(G_2)$  in  $C_1$  und  $\Delta_1$ , von dem Strahle  $E(H_2)$  in  $D_1$  und  $\Gamma_1$  geschnitten, so ist der Schnittpunkt  $E_1$  von  $C\Gamma$  und  $D\Delta$  der dem Punkte  $E$  absolut konjugierte Punkt.

*Zusatz.* Fällt der Punkt  $E$  zusammen mit einem Punkte  $A$  (Fig. 122), in dem die Gerade  $C\Gamma$  von der Verbindungs-

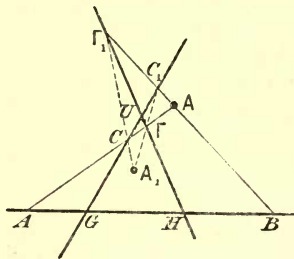


Fig. 122.

linie der homologen Punkte  $C_1$  und  $\Gamma_1$  geschnitten wird, so läßt sich der dem Punkte  $A$  absolut konjugierte Punkt  $A_1$  mittelst des Vierecks  $CC_1\Gamma\Gamma_1$  zeichnen. — Für das Polarfeld  $(GA)$  ist  $C_1$  der Pol von  $CA$  und  $\Gamma$  der Pol von  $\Gamma_1B$ ,  $C_1\Gamma$  also die Polare von  $A$ . — Für das Polarfeld  $(GB)$  ist  $C$  der Pol von  $C_1B$  und  $\Gamma_1$  der Pol von  $\Gamma A$ ,  $C\Gamma_1$  also die

Polare von  $A$ . Die Geraden  $C_1\Gamma$  und  $C\Gamma_1$  schneiden sich also in dem dem Punkte  $A$  absolut konjugierten Punkte  $A_1$ :

Sind  $CC_1$  irgend zwei homologe Punkte von  $g^2$  und  $\Gamma\Gamma_1$  irgend zwei homologe Punkte von  $h^2$ , so bilden

Sind  $cc_1$  irgend zwei homologe Strahlen von  $G^2$  und  $\gamma\gamma_1$  irgend zwei homologe Strahlen von  $H^2$ , so

$CC_1 \Gamma \Gamma_1$  ein Viereck, von dem  $U$  ein Diagonalpunkt ist. Die beiden andern Diagonalpunkte sind zwei absolut konjugierte Punkte.

bilden  $c c_1 \gamma \gamma_1$  ein Vierseit, von dem  $u$  eine Diagonallinie ist. Die beiden andern Diagonallinien sind zwei absolut konjugierte Geraden.

198. Die Kurve der absolut konjugierten Punkte. 198

Um zum Punkte  $E$  den absolut konjugierten  $E_1$  zu zeichnen, legten wir<sup>(197)</sup> durch  $E$  eine beliebige Gerade, die die Träger  $ghu$  in  $C_1 \Delta_1 G_2$  schneidet (Fig. 121). Lassen wir nun den Punkt  $E$  auf dieser Gerade sich bewegen, so bleiben außer  $C_1 \Delta_1 G_2$  auch die Punkte  $C \Delta H_2$  fest. Bewegt sich daher  $E$  in  $C_1 \Delta_1$ , so beschreibt  $X$ , weil  $EU X$  in einer Gerade liegen, in  $C \Delta$  eine zu  $E$  perspektive Punktreihe und wir haben<sup>(37 A)</sup>:

$$C(\Gamma) \overline{\wedge} \Gamma [G_2] \overline{\wedge} D \overline{\wedge} \Delta (D).$$

Die konjugierten Punkte  $E_1$  stellen sich also als die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel dar, d. h.<sup>(42)</sup> sie bilden eine krumme Punktreihe. — Aus dem Viereck  $C \Delta D \Gamma$  geht hervor, daß die Gegenseiten  $C(\Gamma)$  und  $\Delta(D)$  die Diagonale  $u$  in homologen Punkten der diagonalen Involution<sup>(136)</sup> und die Gerade  $C_1 \Delta_1$  in homologen Punkten ihrer Hauptinvolution<sup>(136 Z)</sup> schneiden. Die Kurve der absolut konjugierten Punkte ist also identisch mit der Kurve der Pole von  $C_1 \Delta_1$  für die Polarfelder des Büschels<sup>(195)</sup>:

*Die den Punkten einer Gerade  $e$  absolut konjugierten Punkte bilden eine zur Punktreihe  $e$  projektive krumme Punktreihe, die mit der Polkurve von  $e$  identisch ist.*

*Die den Strahlen eines Punktes  $E$  absolut konjugierten Geraden bilden einen zum Strahlenbüschel  $E$  projektiven krummen Strahlenbüschel, der mit dem Polarenbüschel von  $E$  identisch ist.*

199. Zweite Konstruktion des absolut konjugierten Punktes. 199

Wir fanden<sup>(197)</sup> den dem Punkte  $E$  absolut konjugierten Punkt  $E_1$ , indem wir zu  $E$  die Polaren zeichneten für die Polarfelder  $(G G_2)$  und  $(G H_2)$ . Wir geben jetzt noch die besondere Konstruktion, die sich ergibt, wenn man die Polarfelder  $(G G)$ <sup>(192a)</sup> und  $(G H)$  zur Zeichnung von  $E_1$  wählt. — Schneidet  $EH$  (Fig. 123) den Träger  $g$

in  $C_1$  und  $EG$  den Träger  $h$  in  $\Gamma_1$ , so ist, weil für das Polarfeld  $(GH)$  das Dreieck  $UGH$  ein Poldreieck<sup>(184a)</sup> ist,  $C$  der Pol von  $EH$  und  $\Gamma$  der Pol von  $EG$ ,  $C\Gamma$  also die Polare von  $E$ . Ferner sind von dem Viereck  $C_1\Gamma_1GH$  die Punkte  $U$  und  $E$  zwei Diagonalpunkte; zeichnet man noch den dritten, den Schnittpunkt  $B$  von  $GH$  und  $C_1\Gamma_1$ , so geht die Verbindungslinie  $UB$ , weil sie von  $E$  durch  $g$  und  $h$  harmonisch getrennt ist, ebenfalls durch den konjugierten Punkt  $E_1$ <sup>(197a)</sup>. Dieser ergibt sich also als der Schnittpunkt von  $C\Gamma$  und  $UB$ .

*z* **Zusatz.** Diese Konstruktion führt uns zu einem wichtigen Satze über die Hauptstrahleninvolution, welche die Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$  und die diagonale Involution  $u^2$  in einem beliebigen Punkte  $E$  induzieren<sup>(170)</sup>. Wir wenden unsere Aufmerksamkeit der Gerade zu, die den Punkt  $E$  mit seinem absolut konjugierten  $E_1$  verbindet, um nachzuweisen, daß der Strahl  $E(E_1)$  in der Hauptinvolution von  $E$  dem Strahle  $E(U)$  homolog ist. — In der ersten der beiden Strahleninvolutionen, durch welche  $g^2$  und  $h^2$  aus  $E$  projiziert werden, ist dem Strahle  $E(U)$  der Strahl  $E(G)$  homolog; diesem entspricht, weil  $E(G)$  den Träger  $h$  (Fig. 123) in  $\Gamma_1$  schneidet, in der zweiten Involution  $E(\Gamma)$ . Ferner ist dem Strahle  $E(U)$  in der zweiten Involution der Strahl  $E(H)$  homolog; diesem entspricht, weil  $E(H)$  den Träger  $g$  in  $C_1$  schneidet, in der ersten Involution der Strahl  $E(C)$ . Der dem Strahle  $E(U)$  in der resultierenden Involution homologe Strahl ist also<sup>(162)</sup> der von  $E(U)$  durch  $E(\Gamma)$  und  $E(C)$  harmonisch getrennte. Dies ist aber  $E(E_1)$ , weil, wie sich aus dem Viereck  $GH C_1\Gamma_1$  ergibt<sup>(24a)</sup>,  $U(EB.GH)$  ein harmonischer Wurf ist,  $E_1$  also<sup>(21a)</sup> von  $UE$  durch  $C$  und  $\Gamma$  harmonisch getrennt wird:

*In der Hauptstrahleninvolution, welche durch die Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$  und die diagonale Involution  $u^2$  in einem beliebigen Punkte  $E$  induziert wird, sind die beiden Strahlen, welche durch den Diagonalpunkt*

*In der Hauptpunktinvolution, welche durch die Gegenecken  $G^2$  und  $H^2$  und die diagonale Involution  $U^2$  in einer beliebigen Gerade  $e$  induziert wird, sind die beiden Punkte, welche in der Diagonallinie  $u$  und der*

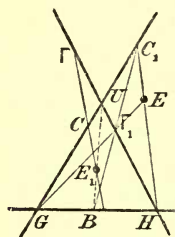


Fig. 123.

<p><math>U</math> und den absolut konjugierten Punkt <math>E_1</math> gehen, einander homolog.</p>	<p>absolut konjugierten Gerade <math>e_1</math> liegen, einander homolog.</p>
--	---

*Anmerkung.* Wir haben den vorstehenden Satz unmittelbar aus der Konstruktion des absolut konjugierten Punktes abgeleitet, trotzdem wir ihn aus Nr. 188 hätten folgern können. Da nämlich zu den Polarfeldern des Büschels auch dasjenige gehört, welches durch den Punkt  $E$  als Ordnungspunkt bestimmt ist, und für dieses<sup>(188a)</sup> die Polare von  $E$  der Strahl von  $E$  ist, welcher in  $E^2$  dem Strahle  $E(U)$  homolog ist, so muß dieser Strahl als eine der Polaren von  $E$  durch  $E_1$  gehen<sup>(196i)</sup>.

**200. Konstruktion eines Polarfeldes mit gegebenem Ordnungspunkte.** An den vorstehenden Satz knüpfen wir die Konstruktion, auf die wir bereits<sup>(100 A)</sup> hingewiesen haben.

1. Aufgabe: Die Ordnungskurve des Büschels zu zeichnen, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

1. Aufgabe: Die Kurve der Schar zu zeichnen, welche eine gegebene Gerade berührt.

Wenn wir diese Aufgabe aussprechen, ohne den Begriff eines Büschels von Polarfeldern zu benutzen, so erkennen wir, daß sie identisch ist mit der in Nr. 100 gelösten: Eine Kurve zu zeichnen, für die ein Punkt und zwei konjugierte Punktinvolutionen gegeben sind.

Von dieser Fundamentalaufgabe geben wir an dieser Stelle eine zweite Lösung; eine dritte folgt in Nr. 203.

Da wir die bisher benutzten Bezeichnungen beibehalten, so genügt es, den Gang der Lösung anzugeben. — Wir zeichnen<sup>(199)</sup> den Punkt  $E_1$  (Fig. 124), welcher dem gegebenen Punkte  $E$  absolut konjugiert ist. Die Strahlen  $E(U)$  und  $E(E_1)$  sind einander homolog<sup>(199 Z)</sup> in der Hauptinvolution, welche die gegebenen Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  in  $E$  induzieren<sup>(170)</sup>, und schneiden daher<sup>(188b)</sup> die Diagonale  $u$  in zwei konjugierten Punkten  $J$  und  $J_1$ . Zum Punkte  $J$  zeichnen wir<sup>(136)</sup> den ihm in der diagonalen Involution homologen Punkt  $K$  und zu  $J_1$  den homologen Punkt  $K_1$ . Es sind dann auch  $K$  und  $K_1$  zwei einander konjugierte Punkte<sup>(166i)</sup>, so daß die konjugierte Involution der Diagonale  $J J_1 . K K_1$  ist. Da  $U$  der Pol von  $u$  ist<sup>(192a)</sup>, so ist der von  $E$  durch

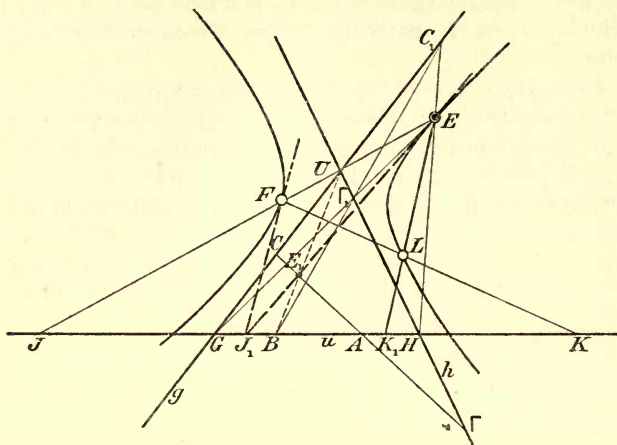


Fig. 124.

$U$  und  $u$  harmonisch getrennte Punkt  $F$  ein zweiter Kurvenpunkt<sup>(86<sub>2</sub>)</sup>. Wir erhalten also<sup>(98<sub>3</sub>)</sup> die Kurve, indem wir die konjugierte Involution  $J J_1 . K K_1$  aus  $E$  und  $F$  projizieren. — Für die Ausführung der Konstruktion ist noch zu bemerken, daß  $J_1$  der Schnittpunkt der Tangenten in  $E$  und  $F$  ist<sup>(45)</sup>; wenn wir also noch den Schnittpunkt der Strahlen  $E(K_1)$  und  $F(K)$  durch  $L$  bezeichnen, so können wir die Kurve aus den drei Punkten  $E F L$  und dem Schnittpunkt  $L$  der Tangenten in  $E$  und  $F$  zeichnen<sup>(56<sub>2</sub>)</sup>.

*z* **Zusatz.** Hat die Involution  $g^2$  die Ordnungspunkte  $M$  und  $M_1$ , so sind  $E(M)$  und  $E(M_1)$  zwei homologe Strahlen der Hauptstrahleninvolution  $E^2$ <sup>(161<sub>1</sub>)</sup> und schneiden daher<sup>(188<sub>1</sub>)</sup> die Diagonale in zwei konjugierten Punkten. Wir kommen also für den Fall, daß  $g^2$  Ordnungspunkte hat, zurück auf den Satz<sup>(98<sub>4</sub>)</sup>, daß zwei Kurvenpunkte  $M$  und  $M_1$ , die mit  $U$  in einer Gerade liegen, aus einem beliebigen Kurvenpunkte  $E$  durch zwei Strahlen projiziert werden, die die Polare von  $U$  in zwei konjugierten Punkten schneiden.

**201. Die absolut konjugierten Punkte als Ordnungspunkte.** In Nr. 188 haben wir die Bedeutung der Hauptstrahleninvolution  $E^2$  eines beliebigen Punktes  $E$  für das durch  $g^2 h^2$  und  $E$  bestimmte Polarfeld erkannt. In Nr. 199



sahen wir dann, daß diese Hauptstrahleninvolution  $E^2$  auch in Beziehung steht zu dem dem Punkte  $E$  absolut konjugierten Punkte  $E_1$ : der Strahl  $E(E_1)$  ergab sich als der dem Strahle  $E(U)$  in  $E^2$  homologe. Aus diesen beiden Beziehungen ergibt sich nun noch ein Zusammenhang zwischen zwei absolut konjugierten Punkten und der Hauptpunktinvolution ihrer Verbindungslinie  $EE_1$ .

Schneidet der dem Strahle  $E(U)$  in  $E^2$  homologe die Träger  $ghu$  (Fig. 125) in  $C\Gamma A$ , so sind  $E(G)$  und  $E(C_1)$ ,  $E(H)$  und  $E(\Gamma_1)$  ebenfalls homologe Strahlen der Hauptinvolution  $E^2$  (166.) und schneiden  $h$  und  $g$  in zwei Punkten  $\Delta_1$  und  $D_1$ , die mit  $A$  in einer Geraden liegen (170 Zi). Der dem

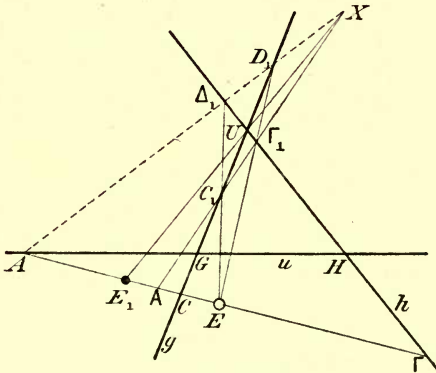


Fig. 125.

Punkte  $E$  absolut konjugierte  $E_1$  liegt (199) in  $E(C)$  und ist von  $E$  durch  $C$  und  $\Gamma$  harmonisch getrennt (197.). Wir können ihn also zeichnen mittelst des Vierecks  $C_1\Gamma_1D_1\Delta_1$ , von dem  $U$  und  $E$  zwei Diagonalpunkte sind; zeichnen wir noch den dritten Diagonalpunkt, den Schnittpunkt  $X$  von  $C_1\Gamma_1$  und  $D_1\Delta_1$ , so schneidet die Diagonallinie  $XU$  die Gerade  $EC$  in dem von  $E$  durch  $C$  und  $\Gamma$  harmonisch getrennten Punkte (242), d. i. in  $E_1$ . Bezeichnen wir den Punkt, in dem  $C\Gamma$  von  $C_1\Gamma_1$  geschnitten wird, durch  $A$ , so bilden auch  $AA.EE_1$  einen harmonischen Wurf (242).  $AA$  und  $C\Gamma$  sind also zwei Paar homologe Punkte der durch die Ordnungspunkte  $E$  und  $E_1$  bestimmten Involution (63s). Der Wurf  $AA.C\Gamma$  bestimmt aber die Hauptpunktinvolution der Gerade  $EE_1$  (135s):

1. Zwei absolut konjugierte Punkte sind die Ordnungspunkte der Hauptpunktinvolution ihrer Verbindungslinie. —

1. Zwei absolut konjugierte Geraden sind die Ordnungstrahlen der Hauptstrahleninvolution ihres Schnittpunktes. —

Die Umkehrung dieses Satzes:

2. Hat eine Hauptpunktinvolution zwei Ordnungspunkte, so sind diese einander absolut konjugiert, ist richtig, weil jede Hauptpunktinvolution den Polarfeldern des Büschels adjungiert ist<sup>(194a)</sup> und die Ordnungspunkte einer adjungierten Involution einander konjugiert sind<sup>(161a)</sup>.

2. Hat eine Hauptstrahleninvolution zwei Ordnungstrahlen, so sind diese einander absolut konjugiert,

202

202. **Drei Büschel von Polarfeldern.** Ebenso wie die Gegenseiten  $g^2$  und  $h^2$  einen Büschel von Polarfeldern bestimmen, so bestimmen auch  $g^2$  und die diagonale Involution  $u^2$  und ferner  $h^2$  und  $u^2$  je einen Büschel von Polarfeldern.

1. Die drei Büschel  $(gh)$   $(gu)$   $(hu)$  bestimmen in jedem Punkte  $E$  eine und dieselbe Hauptstrahleninvolution  $E^2$ <sup>(170)</sup>. —

1. Die drei Scharen  $(GH)$   $(GU)$   $(HU)$  bestimmen in jeder Gerade  $e$  eine und dieselbe Hauptpunktinvolution  $e^2$ . —

Ist  $a$  eine beliebige Gerade, welche die Träger  $ghu$  in  $C \Gamma A$  schneidet und von der Gerade, in der die drei homologen Punkte  $C_1 \Gamma_1 B$  liegen, in  $A$  geschnitten wird, so ist die Hauptpunktinvolution von  $a$ <sup>(135a)</sup>

für den Büschel  $(gh)$ :  $C \Gamma . A A$ ;

für den Büschel  $(gu)$ :  $C A . \Gamma A$ ;

für den Büschel  $(hu)$ :  $\Gamma A . C A$ .

2. Die drei Büschel  $(gh)$   $(gu)$   $(hu)$  erzeugen in jeder Gerade drei Hauptpunktinvolutionen, von denen je zwei komponierende der dritten sind<sup>(167a)</sup>. Immer zwei dieser

2. Die drei Scharen  $(GH)$   $(GU)$   $(HU)$  erzeugen in jedem Punkte drei Hauptstrahleninvolutionen, von denen je zwei komponierende der dritten sind. Immer zwei dieser

Hauptpunktinvolutionen haben Ordnungspunkte, die dritte nicht<sup>(167a)</sup>; das eine

Hauptstrahleninvolutionen haben Ordnungstrahlen, die dritte nicht; das eine

Paar der Ordnungspunkte | Paar der Ordnungsstrahlen  
 wird durch das andere har- | wird durch das andere har-  
 monisch getrennt<sup>(161a)</sup>. | monisch getrennt.

Wie wir den dem Punkte  $E$  für  $(gh)$  absolut konjugierten Punkt  $E_1$  gezeichnet haben<sup>(197a)</sup>, so können wir auch den dem Punkte  $E$  für  $(gu)$  konjugierten Punkt  $L$  und den ihm für  $(hu)$  konjugierten Punkt  $M$  zeichnen. Dieselben Betrachtungen wie die in Nr. 199 Z angestellten zeigen dann (Fig. 125), daß in der resultierenden Involution von  $E$  der dem Strahle  $E(G)$  homologe  $E(\Delta_1)$  durch  $L$  und der dem Strahle  $E(H)$  homologe  $E(D_1)$  durch  $M$  geht; und aus Nr. 197<sub>2</sub> folgt, daß  $L$  von  $E$  durch  $g$  und  $u$  und  $M$  von  $E$  durch  $h$  und  $u$  harmonisch getrennt ist. Diese Punkte  $L$  und  $M$  nun können wir durch eine Fortsetzung der in der vorigen Nummer begonnenen Konstruktion finden. Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem  $u$  von  $C_1\Gamma_1$  geschnitten wird, durch  $B$  (Fig. 126), so zeigt das Viereck  $ABE_1X$ ,

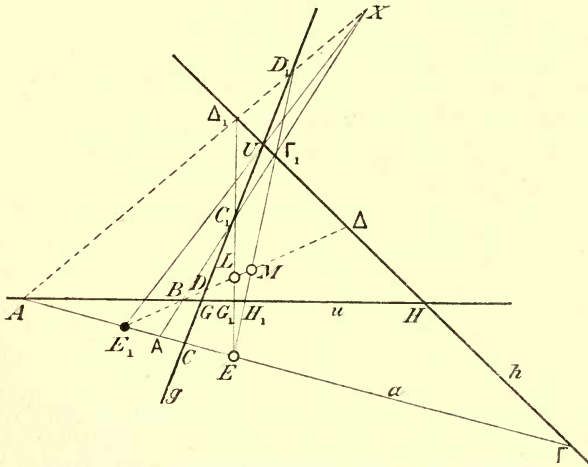


Fig. 126.

von dem zwei Paar Gegenseiten sowohl  $g$  als  $h$  in konjugierten Punktpaaren schneiden, daß die Seite  $E_1B$  die Träger  $g$  und  $h$  in den den Punkten  $D_1$  und  $\Delta_1$  homologen Punkten  $D$  und  $\Delta$  schneidet. Da  $EE_1.AA$  vier harmonische Punkte<sup>(201)</sup>, mithin  $B(E E_1.A A)$  vier harmonische Strahlen

sind, so wird  $E\Delta_1$  von  $BE_1$  in dem von  $E$  durch  $C_1$  und  $G_1$  harmonisch getrennten Punkte geschnitten<sup>(21a)</sup>; ebenso wird  $ED_1$  von  $BE_1$  in dem von  $E$  durch  $\Gamma_1$  und  $H_1$  harmonisch getrennten Punkte geschnitten. Diese Schnittpunkte sind also die dem Punkte  $E$  für den Büschel  $(gu)$  und für den Büschel  $(hu)$  absolut konjugierten Punkte  $L$  und  $M$ ; denn sie liegen in den den Strahlen  $E(G)$  und  $E(H)$  in der Hauptstrahleninvolution  $E^2$  homologen Strahlen  $E(\Delta_1)$  und  $E(D_1)$  und sind von  $E$  durch  $gu$  und  $hu$  harmonisch getrennt:

3. Die drei Punkte  $E_1LM$ , die einem beliebigen Punkte  $E$  für die Büschel  $(gh)$   $(gu)$   $(hu)$  absolut konjugiert sind, liegen in einer Gerade. Diese Gerade schneidet (Fig. 126)  $ghu$  in drei Punkten  $D\Delta B$ , denen in  $g^2h^2u^2$  homolog sind die drei Punkte  $D_1\Delta_1A$ , in denen  $ghu$  geschnitten werden von den Strahlen, welche in der Hauptstrahleninvolution  $E^2$  den Strahlen  $E(HGU)$  homolog sind.

3. Die drei Geraden  $e_1lm$ , die einer beliebigen Gerade  $e$  für die Scharen  $(GH)$   $(GU)$   $(HU)$  absolut konjugiert sind, gehen durch einen Punkt. Dieser Punkt wird aus  $GHU$  durch drei Strahlen  $d\delta b$  projiziert, denen in  $G^2H^2U^2$  homolog sind die drei Strahlen  $d_1\delta_1a$ , durch welche aus  $GHU$  die drei Punkte projiziert werden, welche in der Hauptpunktinvolution  $e^2$  den Punkten  $e(hgu)$  homolog sind.

203

203. **Allgemeine Kurvenkonstruktion.** Der Punkt  $L$  (ebenso wie der Punkt  $M$ ), den wir in der vorigen Nummer als den dem Punkte  $E$  für den Büschel  $(gu)$  absolut konjugierten Punkt gezeichnet haben, gewinnt eine neue Bedeutung, wenn wir beachten, daß er in dem Strahle liegt, welcher dem Strahle  $E(G)$  in der Hauptstrahleninvolution  $E^2$  homolog ist. Dieser Strahl schneidet<sup>(188a)</sup> die Diagonale  $u$  in dem Punkte  $G_1$ , welcher für das durch  $g^2$  und  $h^2$  und  $E$  bestimmte Polarfeld der Pol von  $g$  ist. Der Punkt  $L$  ist also, weil er von  $E$  durch den Punkt  $G_1$  und seine Polare  $g$  harmonisch getrennt ist, ein Punkt der Ordnungskurve dieses Polarfeldes, so daß wir diese Ordnungskurve erhalten<sup>(98a)</sup>, wenn wir die Involution  $g^2$  aus  $E$  und  $L$  projizieren. Die Konstruktion dieser Kurve und die Konstruktion der Hauptstrahleninvolution  $E^2$  sind also im Grunde zwei identische Aufgaben, und die in Nr. 200 gegebene Lösung, die sich auf

die Konstruktion des dem Punkte  $E$  für den Büschel  $(gh)$  absolut konjugierten Punktes  $E_1$  stützt, unterscheidet sich nicht wesentlich von der folgenden. —

Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, für die ein Punkt und zwei konjugierte Punktinvolutionen gegeben sind.

Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, für die eine Tangente und zwei konjugierte Strahleninvolutionen gegeben sind.

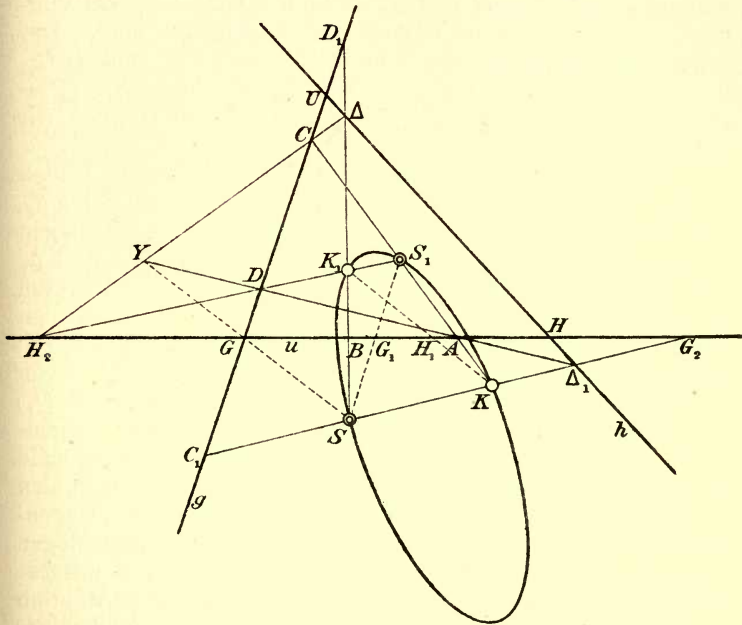


Fig. 127.

Den gegebenen Punkt wollen wir (nicht wie bisher durch  $E$ , sondern) durch  $S$  bezeichnen und den ihm für den Büschel  $(gu)$  absolut konjugierten Punkt (den wir bisher durch  $L$  bezeichneten), durch  $S_1$ . Wir haben dann die Konstruktion der Nr. 197<sub>3</sub> von dem Büschel  $(gh)$  auf den Büschel  $(gu)$  zu übertragen:

Wir projizieren aus  $S$  (Fig. 127) zwei beliebige homologe Punkte  $\Delta$  und  $\Delta_1$  von  $h^2$ . Werden die Träger  $g$  und  $u$  von dem Strahle  $S(\Delta_1)$  in  $C_1$  und  $G_2$ , und von dem Strahle  $S(\Delta)$  in  $D_1$  und  $B$  geschnitten, so ist der Schnittpunkt  $S_1$

von  $CA$  und  $DH_2$  der dem Punkte  $S$  für den Büschel ( $gu$ ) absolut konjugierte Punkt.

Ausführung der Konstruktion: Wir legen durch  $S$  eine beliebige Gerade, die die Träger  $ghu$  in  $C_1 \Delta_1 G_2$  schneidet; die homologen Punkte, die wir  $C \Delta H_2$  nennen, liegen in einer Gerade<sup>(133)</sup>, die die Verbindungslinie  $SG$  in dem Punkte  $Y$  treffen möge. Schneidet die Verbindungslinie  $Y \Delta_1$  die Träger  $g$  und  $u$  in  $D$  und  $A$ , so bilden  $CD A H_2$  ein Viereck, von dem  $G$  und  $Y$  zwei Diagonalpunkte sind. Der dritte Diagonalpunkt, der Schnittpunkt von  $CA$  und  $DH_2$ , ist der dem Punkte  $S$  absolut konjugierte Punkt  $S_1$ . Projizieren wir die Involution  $g^2$  aus  $S$  und  $S_1$ , so erhalten wir die gesuchte Kurve.

Bemerkungen zur Konstruktion: Die gezeichneten Linien liefern uns noch weitere Kurvenpunkte. Das Viereck  $S Y \Delta \Delta_1$ , von dem zwei Paar Gegenseiten sowohl  $g$  als  $u$  in homologen Punkten schneiden, zeigt, daß auch die Gegenseiten  $Y \Delta_1$  und  $S \Delta$  die Geraden  $g$  und  $u$  in homologen Punkten schneiden, daß also  $S \Delta$  den Träger  $g$  in  $D_1$  und den Träger  $u$  in  $B$  schneidet. — Die Strahlen  $S(C_1)$  und  $S_1(C)$  liefern, weil sie durch die homologen Punkte  $C_1$  und  $C$  von  $g^2$  gehen, den neuen Kurvenpunkt  $K$  und die Strahlen  $S(D_1)$  und  $S_1(D)$  den Kurvenpunkt  $K_1$ . — Zwei Paar Gegenseiten des Kurvenvierecks  $S S_1 K K_1$  schneiden die Diagonale in homologen Punktpaaren  $G_2 H_2$  und  $AB$  der diagonalen Involution; es schneidet daher auch das dritte Paar Gegenseiten  $S S_1$  und  $K K_1$  die Diagonale  $u$  in zwei homologen Punkten  $G_1$  und  $H_1$  von  $u^2$ . Weil nun  $S(S_1)$  nach unserer Konstruktion dem Strahle  $S(G)$  in der Hauptstrahleninvolution  $S^2$  homolog ist, so ist  $G_1$  der Pol von  $g$ <sup>(188a)</sup> und folglich<sup>(192a)</sup>  $H_1$  der Pol von  $h$ ; wir erhalten daher<sup>(98a)</sup> die Kurve auch durch Projektion der Involution  $h^2$  aus  $K$  und  $K_1$ . — Weil der Pol von  $S S_1$  in  $g$  und der Pol von  $K K_1$  in  $h$  liegt, so schneidet die (in der Figur nicht gezeichnete) Diagonallinie des Kurvenvierecks  $S S_1 K K_1$ , welche den Gegenseiten  $S S_1$  und  $K K_1$  zugeordnet ist<sup>(16 Z)</sup>, den Träger  $g$  in dem Schnittpunkte der Tangenten<sup>(53)</sup> von  $S$  und  $S_1$  und den Träger  $h$  in dem Schnittpunkte der Tangenten von  $K$  und  $K_1$ .

A *Anmerkung.* Ein besonderer Fall dieser Konstruktion ist die in Nr. 100 gegebene. Dadurch daß wir nicht von einem beliebigen Strahl des Punktes  $S$ , sondern von dem

Strahl  $S(H)$  ausgingen, liefs sich die Konstruktion von dem Begriff der absolut konjugierten Punkte befreien und soweit vereinfachen, dafs sie gleich nach der Einführung der konjugierten Involution begründet und zur *Grundlage unserer Darstellung* der Geometrie der Lage gemacht werden konnte.

204. **Andere Definition der Ordnungskurve.** Aus <sup>204</sup>

der vorhergehenden Konstruktion läfst sich noch ein wichtiger Satz ableiten. Schneidet  $G_2 D_1$  (Fig. 128) den Träger  $h$  in  $E$ , so bilden die Punkte  $C \Delta D_1 E$  ein Viereck, von dem zwei Paar Gegenseiten durch die homologen Punkte  $GH$  und  $G_2 H_2$  der diagonalen Involution gehen. Da die fünfte Seite  $\Delta D_1$  durch  $B$  geht, so mufs die Seite  $CE$  durch  $A$  gehen<sup>(64 Z)</sup>. Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von  $C\Delta$  und  $C_1 \Delta_1$  durch  $B$ , so ist die Hauptpunktinvolution<sup>(135a)</sup> von  $C_1 \Delta_1$  bestimmt durch  $C_1 \Delta_1 \cdot G_2 B$ . Unser Viereck  $C \Delta D_1 E$  zeigt nun,

dafs auch  $S$  und  $K$  zwei homologe Punkte dieser Involution sind. Zeichnen wir also in jedem durch den Punkt  $S$  gehenden Strahle den ihm in der Hauptpunktinvolution dieses Strahles homologen Punkt, so erkennen wir, weil  $K$  auf der durch  $S$  als Ordnungspunkt bestimmten Kurve liegt<sup>(203)</sup>, den

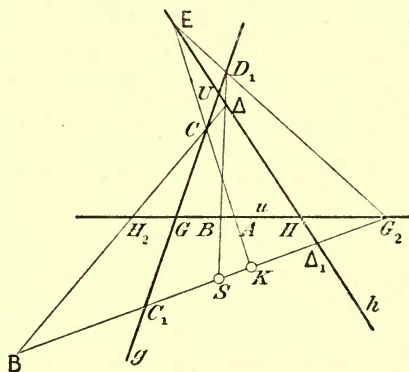


Fig. 128.

Lehrsatz: Die Punkte, welche einem festen Punkte in den Hauptpunktinvolutionen der durch ihn gehenden Strahlen homolog sind, liegen in einer Kurve zweiter Ordnung; diese Kurve ist identisch mit der Ordnungskurve des Büschels, die durch den festen Punkt geht.

Lehrsatz: Die Strahlen, welche einer festen Gerade in den Hauptstrahleninvolutionen der in ihr liegenden Punkte homolog sind, umhüllen eine Kurve zweiter Ordnung; diese Kurve ist identisch mit der Ordnungskurve der Schar, die die feste Gerade berührt.

205

### 205. Projektive Verwandtschaft zwischen einem Büschel von Polarfeldern und einem Grundgebilde.

Für manche Sätze erhält man eine bequeme Ausdrucksweise, wenn man den Begriff der projektiven Verwandtschaft auf die Polarfelder eines Büschels ausdehnt; wir werden zu dieser Erweiterung des Begriffes der projektiven Verwandtschaft durch den Satz<sup>(192a)</sup> geführt, daß wir die sämtlichen Polarfelder eines Büschels erhalten, wenn wir den Punkt  $G_1$  die Diagonale  $u$  durchlaufen lassen.

1. Definition. Ein Büschel  $(g\ h)$  von Polarfeldern und ein Grundgebilde heißen projektiv, wenn das Grundgebilde projektiv auf die Punktreihe der Pole  $G_1$  von  $g$  bezogen ist.

1. Definition. Eine Schar  $(G\ H)$  von Polarfeldern und ein Grundgebilde heißen projektiv, wenn das Grundgebilde projektiv auf den Strahlenbüschel der Polaren  $g_1$  von  $G$  bezogen ist.

Mit Hilfe dieser Definition können wir den Satz in Nr. 196<sub>1</sub> so fassen:

2. Ein gerader Strahlenbüschel  $E$  ist projektiv auf den Büschel von Polarfeldern bezogen, wenn man jedem Strahle das Polarfeld zuordnet, für welches er die Polare des seinem Mittelpunkte  $E$  absolut konjugierten Punktes  $E_1$  ist.

2. Eine gerade Punktreihe  $e$  ist projektiv auf die Schar von Polarfeldern bezogen, wenn man jedem Punkte von  $e$  das Polarfeld zuordnet, für welches er der Pol der seinem Träger absolut konjugierten Gerade  $e_1$  ist.

Ferner ergibt sich aus daß die Pole  $E$  einer Gerade sind:

der Bemerkung in Nr. 195,  $e$  projektiv auf  $G_1$  bezogen

3. Eine Polkurve  $e_1^2$  ist projektiv auf den Büschel von Polarfeldern bezogen, wenn man jedem Punkte von  $e_1^2$  das Polarfeld zuordnet, für welches er der Pol der zugeordneten Gerade  $e$  ist. —

3. Ein Polarenbüschel  $E_1^2$  ist projektiv auf die Schar von Polarfeldern bezogen, wenn man jedem Strahle von  $E_1^2$  das Polarfeld zuordnet, für welches er die Polare des zugeordneten Punktes  $E$  ist. —

Hat die Involution  $g^2$  die Ordnungspunkte  $K$  und  $K_1$ , so hat jedes Polarfeld des Büschels eine Ordnungskurve<sup>(189)</sup>. Ein solcher Punkt  $K$  ( $K_1$ ), durch den sämtliche Ordnungskurven hindurchgehen, soll ein *Grundpunkt* des Büschels



genannt werden. — Ist  $c$  eine beliebige durch den Grundpunkt  $K$  gehende Gerade, welche  $u$  in  $A$  schneidet, so erhält man die durch die Zuweisung  $(G G_1)$  bestimmte Ordnungskurve, wenn man die konjugierte Involution  $G G_1 \cdot H H_1$  <sup>(192a)</sup> von  $u$  aus  $K$  und  $K_1$  projiziert <sup>(93a)</sup>. Ist also  $A_1$  der dem Punkte  $A$  in dieser Involution homologe Punkt, so ist der Schnittpunkt  $A$  von  $K(A)$  und  $K_1(A_1)$  ein Punkt der Ordnungskurve des Polarfeldes  $(G G_1)$ . Da nun, wenn  $G_1$  die Diagonale  $u$  durchläuft, der Punkt  $A_1$  eine zu  $G_1$  projektive <sup>(166a)</sup> und  $A$  in  $c$  eine zu  $A_1$  perspektive Punktreihe beschreibt, so haben wir:

4. Eine gerade Punktreihe, deren Träger durch einen Grundpunkt des Büschels geht, ist projektiv auf den Büschel bezogen, wenn man jedem Punkte der Gerade das Polarfeld zuweist, dessen Ordnungskurve durch ihn hindurchgeht.

4. Ein gerader Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in einer Grundseite der Schar liegt, ist projektiv auf die Schar bezogen, wenn man jedem Strahl das Polarfeld zuweist, dessen Ordnungskurve ihn berührt.

## § 18. Die Involution dritter Ordnung.

### 206. Projektive Verwandtschaft einer geraden und einer krummen Punktreihe.

Aufgabe: Eine gerade und eine krumme Punktreihe projektiv so aufeinander zu beziehen, daß drei Punkten der einen drei Punkte der andern homolog sind.

Sollen die Punkte  $A_1 B_1 C_1$  der krummen Punktreihe  $p^2$  den Punkten  $A B C$  der geraden Punktreihe  $p$  homolog sein, so projizieren wir aus einem beliebigen Punkte von  $p^2$  (in der Figur 129 aus  $A_1$ ) die Punkte  $A B C$  der Geraden  $p$  auf  $p^2$  und beziehen die erhaltene Punktreihe  $A_1 B_1 \Gamma_1$  und die gegebene  $A_1 B_1 C_1$  projektiv aufeinander durch Konstruktion der Projektionsachse  $u$  <sup>(74)</sup>, indem wir den

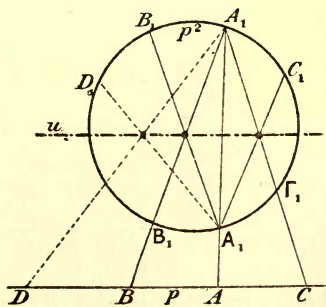


Fig. 129.

Punkt, in welchem  $A_1 B$  von  $A_1 B_1$  geschnitten wird, verbinden mit dem Punkt, in welchem  $A_1 C$  von  $A_1 C_1$  geschnitten wird. Zu einem beliebigen Punkte  $D_1$  von  $p^2$  erhalten wir dann den homologen  $D$  von  $p$ , indem wir den Punkt, in welchem  $A_1 D_1$  die Projektionsachse schneidet, aus  $A_1$  auf  $p$  projizieren.

207

**207. Involutorische Verwandtschaft einer geraden und einer krummen Punktreihe.** Wichtiger als der eben behandelte allgemeine Fall ist ein besonderer. Wir nehmen an, daß die Geraden, welche die Punkte  $B$  und  $C$  von  $p$  aus dem Kurvenpunkte  $A_1$  projizieren,  $p^2$  in den homologen Punkten  $C_1$  und  $B_1$  schneiden und daß zugleich die Verbindungslinie  $B_1 C_1$  durch den dem Punkte  $A_1$  homologen Punkt  $A$  geht (Fig. 130). Nach dieser Annahme entsprechen also den Punkten  $A_1 B_1$  (von  $p^2$ ) und  $C$  (von  $p$ ), die in einer Geraden liegen, die Ecken eines Dreiecks  $A B C_1$ , dessen Seiten durch die Punkte  $A_1 B_1 C$  gehen.

1. Von einem solchen Dreieck  $A B C_1$ , dessen Seiten durch die den Gegenecken homologen Punkte gehen, wollen wir sagen, daß es perspektiv zu den drei Punkten  $A_1 B_1 C$  liegt, und von einer geraden und krummen Punktreihe, die in der angegebenen Weise projektiv aufeinander bezogen sind, daß sie involutorisch liegen.

Lösen wir für diese Lage der drei Punkte  $A B C$  und der ihnen homologen  $A_1 B_1 C_1$  die Aufgabe, die beiden

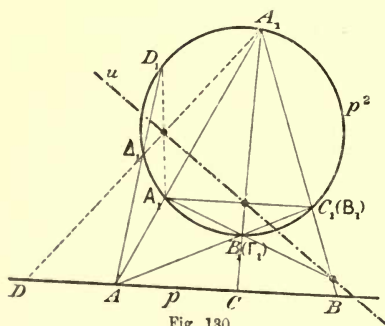


Fig. 130.

Punktreihen projektiv aufeinander zu beziehen, so haben wir<sup>(206)</sup> die drei Punkte  $A B C$  aus  $A_1$  auf die Kurve zu projizieren. Da jetzt die Punkte  $B_1$  und  $\Gamma_1$  in  $C_1$  und  $B_1$  fallen (Fig. 130), so ergibt sich als Projektionsachse die Gerade, welche den Schnittpunkt von  $A_1 B$  und  $A_1 B_1$  mit dem Schnittpunkte von  $A_1 C$  und  $A_1 C_1$  verbindet. Die Projektionsachse  $u$  ist also, wie das Kurvenviereck  $A_1 B_1 C_1 A_1$  ergibt, die Polare des Punktes  $A$ <sup>(86)</sup>. Zu einem

beliebigen Punkt  $D_1$  von  $p^2$  erhalten wir jetzt den homologen  $D$  von  $p$ , indem wir den Punkt, in dem  $A_1 D_1$  die Projektionsachse schneidet, aus  $A_1$  auf  $p$  projizieren. — Projiziert man also die gerade Punktreihe  $p$  aus  $A_1$  und die krumme  $p^2$  aus dem Punkte  $A_1$ , in dem die Verbindungslinie der beiden homologen Punkte  $A_1$  und  $A$  die Kurve zum zweiten Male schneidet, so liegen die beiden projektiven Strahlenbüschel  $A_1$  und  $A_1$  perspektiv zu der Polare von  $A$  in Bezug auf  $p^2$ . Schneidet die Gerade  $A_1 D$  die Kurve in  $\Delta_1$ , so bilden  $A_1 A_1 D_1 \Delta_1$  ein Kurvenviereck, dessen einer Diagonalpunkt, der Schnittpunkt von  $A_1 \Delta_1$  und  $D_1 A_1$ , dem Punkte  $A$  konjugiert ist. Es geht daher<sup>(97.)</sup>  $D_1 \Delta_1$  durch  $A$ . Danach erhalten wir zu einem beliebigen Punkte  $D$  von  $p$  den zugeordneten  $D_1$  von  $p^2$  durch die folgende Konstruktion:

2. Zu einem beliebigen Punkte  $D$  (Fig. 130) von  $p$  finden wir den zugeordneten  $D_1$  von  $p^2$ , indem wir den Punkt  $\Delta_1$ , in welchem  $A_1 D$  die Kurve schneidet, aus  $A$  auf  $p^2$  projizieren. —

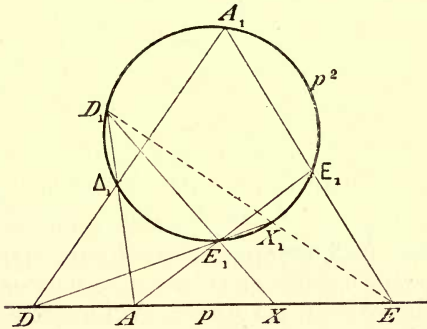


Fig. 131.

Nehmen wir an, daß auf diese Weise zu den beiden Punkten  $D$  und  $E$  (Fig. 131) mittelst der Punkte  $\Delta_1$  und  $E_1$  die Punkte  $D_1$  und  $E_1$  gefunden wären, so ergibt sich, wenn wir noch den Schnittpunkt von  $p^2$  und  $D E_1$  durch  $X_1$  bezeichnen, aus der Betrachtung des Kurvensechsecks

$\overline{A_1 E_1 E_1 X_1 D_1 \Delta_1}$ , daß  $D_1 X_1$  durch  $E$  geht<sup>(54)</sup>, d. h.  $D_1 E$  wird von  $D E_1$  in einem Kurvenpunkte geschnitten.

3. **Lehrsatz:** *Sind eine gerade und eine krumme Punktreihe in involutorischer Lage, so wird jede Gerade, welche einen beliebigen Punkt  $D$  von  $p$  mit einem beliebigen Punkte  $E_1$  von  $p^2$  verbindet, von der Verbindungslinie der homologen Punkte  $D_1$  und  $E$  in einem Kurvenpunkte geschnitten.* —

Um also zu einem Punkte  $E$  den homologen Punkt  $E_1$  zu finden, können wir statt von  $A$  und  $A_1$ , wie bisher, auch von irgend zwei andern homologen Punkten  $D$  und  $D_1$  ausgehen. — Wenden wir den eben gefundenen Satz an, um zum Punkte  $X_1$  den homologen  $X$  zu finden, so muß, da  $D X_1$  (Fig. 131) die Kurve in  $E_1$  schneidet, die Gerade  $D_1 X$  durch  $E_1$  gehen, d. h.  $D_1 E_1$  schneidet  $p$  in  $X$ . Den drei beliebigen Punkten  $E_1 X_1 D$ , die in einer Gerade liegen, entsprechen mithin die Ecken des perspektiv liegenden Dreiecks  $E X D_1$ .

4. **Lehrsatz:** *Sind eine gerade und eine krumme Punktreihe involutorisch aufeinander bezogen, so sind je drei Punkten, die in einer Gerade liegen, die Ecken eines perspektiv liegenden Dreiecks homolog.* —

5. *Die involutorische Verwandtschaft einer geraden und einer krummen Punktreihe ist durch ein Paar homologer Punkte bestimmt;*

denn wenn dem Punkte  $A_1$  von  $p^2$  der Punkt  $A$  von  $p$  zugewiesen ist, so finden wir zum Punkte  $B$  den homologen  $B_1$ , indem wir den Punkt, in welchem  $p^2$  von  $A_1 B$  geschnitten wird, aus  $A$  auf die Kurve projizieren.

208

**208. Die Involution dritter Ordnung.** Die involutorische Verwandtschaft einer geraden und einer krummen Punktreihe liefert uns ein Mittel, die Elemente eines Grundgebildes zu je dreien zu ordnen.

1. Sind  $p^2$  und  $p$  durch die Zuweisung von  $A_1$  und  $A$  involutorisch auf einander bezogen<sup>(207)</sup>, so wollen wir  $A_1$  und je zwei Punkte von  $p^2$ , die mit  $A$  in einer Gerade liegen, ein *Tripel* von  $p^2$  nennen. Ebenso nennen wir  $B_1$  und je zwei Punkte, die mit  $B$  in einer Gerade liegen, ein *Tripel* von  $p^2$ . Den Inbegriff aller so in  $p^2$  konstruierten Tripel nennen wir eine *Involution dritter Ordnung* (und zum Unterschiede die bisher betrachtete Involution eine *Involution zweiter Ordnung*).

Es bilden demnach die Punktpaare, die mit  $A_1$  ein Tripel bilden, eine krumme Involution<sup>(82)</sup> zweiter Ordnung mit dem Zentrum  $A$ ; ebenso die Punktpaare, die mit  $B_1$  ein Tripel bilden, eine krumme Involution mit dem Zentrum  $B$  u. s. w. Da die Involutionen  $AB\dots$  in einer Gerade liegen, so sind die durch sie bestimmten krummen Involutionen komponierende einer und derselben resultierenden<sup>(159,)</sup> der durch den Pol  $P$  von  $p$  bestimmten krummen Involution. Diese Eigenschaft benutzen wir, um unsere bisherige Konstruktion von der Kurve  $p^2$  loszulösen und sie auf ein beliebiges einförmiges Gebilde zu übertragen (vergl. 158). Da die Gerade  $p$  durch ihren Pol  $P$  bestimmt ist und dieser durch die von ihm induzierte krumme Involution<sup>(79)</sup>, so sehen wir in dem einförmigen Gebilde, in dem wir eine Involution dritter Ordnung konstruieren wollen, eine Involution zweiter Ordnung als gegeben an, die wir *die Hauptinvolution* der gesuchten Involution dritter Ordnung nennen wollen. Weisen wir dann dem beliebigen Elemente  $A$  eine Involution zu, die nur der Bedingung genügt, eine komponierende der Hauptinvolution zu sein, so ist die Involution dritter Ordnung bestimmt. Da eine komponierende der Hauptinvolution durch ein Punktpaar bestimmt ist<sup>(166,)</sup> und dies mit dem Elemente  $A$  ein Tripel bildet, so haben wir den

2. Lehrsatz: *Eine Involution dritter Ordnung ist durch ihre Hauptinvolution und ein Tripel bestimmt.*

### 209. Darstellung einer Involution dritter Ordnung. <sup>239</sup>

Ist die Hauptinvolution durch den Wurf  $D_1 E_1 . F_1 G_1$  und ein Tripel durch die Elemente  $A_1 B_1 C_1$  gegeben, so ist die Involution dritter Ordnung bestimmt<sup>(208a)</sup>. Sie kann also durch sieben Elemente dargestellt werden. Durch passende Wahl läßt sich die Zahl auf vier verringern. Ist  $B_1$  das dem Elemente  $A_1$  in der Hauptinvolution zugeordnete, und  $C_1$  das Element, das  $A_1$  und  $B_1$  zu einem Tripel ergänzt,  $D_1$  aber das Element, das  $C_1$  in der Hauptinvolution homolog ist, so ist die Hauptinvolution durch  $A_1 B_1 . C_1 D_1$  und das Tripel durch  $A_1 B_1 C_1$  dargestellt. Es läßt sich daher jede Involution dritter Ordnung auch durch vier Elemente darstellen.

Für eine Kurve  $p^2$  würden wir also eine Involution

dritter Ordnung vermittelt des Kurvenvierecks  $A_1 B_1 C_1 D_1$  darstellen können. Der eine Diagonalpunkt  $P$ , der Schnittpunkt von  $A_1 B_1$  und  $C_1 D_1$ , ist das Zentrum der Hauptinvolution; der zweite Diagonalpunkt, der Schnittpunkt  $A$  von  $A_1 D_1$  und  $B_1 C_1$ , ist das Zentrum der dem Punkte  $A_1$  zugewiesenen Involution und der dritte Diagonalpunkt, der Schnittpunkt  $B$  von  $A_1 C_1$  und  $B_1 D_1$ , das dem Punkte  $B_1$  zugewiesene Zentrum  $B$ ; die Verbindungslinie  $AB$  ist demnach die Gerade  $p$ .

### 210. Ordnungselement und Ordnungsinvolution.

Weil sich alle Sätze über projektive Verwandtschaft durch Projektion von einem einförmigen Gebilde auf jedes andere übertragen lassen (vergl. 160 A), so werden wir unsern folgenden Betrachtungen als Träger immer eine Kurve  $p^2$  zu Grunde legen. Für diesen Fall ist<sup>(207b)</sup> die Involution dritter Ordnung konstruiert, wenn wir  $p$  und zu einem Punkte  $A_1$  von  $p^2$  den homologen  $A$  von  $p$  gezeichnet haben. — Hat ein Punkt  $K_1$  von  $p^2$  die besondere Lage, daß seine Tangente durch den homologen Punkt  $K$  von  $p$  geht, so giebt es unter den Punktpaaren  $B_1 C_1$ , die mit  $K$  in einer Geraden liegen, also mit  $K_1$  ein Tripel<sup>(208a)</sup> bilden, eins von besonderer Wichtigkeit. Fällt nämlich  $B_1$  in  $K_1$ , so fällt auch  $C_1$  in  $K_1$ . Es giebt daher in diesem Falle ein Tripel, dessen Elemente in  $A_1$  zusammenfallen.

1. Definition: *Ein Tripel, dessen Elemente zusammenfallen, heißt ein Ordnungselement der Involution dritter Ordnung.* —

Die involutorische Beziehung der Kurve  $p^2$  und der Geraden  $p$  sei durch die homologen Punkte  $A$  und  $A_1$  bestimmt. Ist nun  $x$  eine beliebige Tangente von  $p^2$ , so wird  $x$  von dem krummen Büschel der Tangenten in den Kurvenpunkten  $A_1 B_1 \dots$  in einer projektiven Punktreihe<sup>(71b)</sup>  $AB \dots$  geschnitten, die auch projektiv ist<sup>(71a)</sup> zu der geraden Punktreihe  $AB \dots$ . Giebt es nun drei Punkte  $K_1 K K$ , die in einer Geraden liegen, so ist, weil  $K_1 K$  die Tangente in  $K_1$  ist,  $K_1$  ein Ordnungspunkt. Da die Verbindungslinien  $AA$ ,  $BB \dots$  eine Kurve  $x^2$  umhüllen<sup>(42)</sup>, diese aber mit  $p^2$  die Tangente  $x$  gemeinsam hat, so haben  $p^2$  und  $x^2$  noch eine Tangente  $k$  und eine konjugierte Strahleninvolution  $J^2$  gemeinsam<sup>(191a)</sup>. Der Punkt  $K_1$ , in dem  $k$  die Kurve  $p^2$  be-

rührt, ist ein Ordnungspunkt, und wenn die gemeinsame Strahleninvolution  $J^2$  die Ordnungsstrahlen  $l$  und  $m$  hat, so sind die Punkte  $L_1$  und  $M_1$ , in denen  $l$  und  $m$  die Kurve  $p^2$  berühren, ebenfalls Ordnungspunkte. Wir nennen daher die Strahleninvolution  $J^2$  die *Ordnungsinvolution* unserer Involution dritter Ordnung.

2. *Eine Involution dritter Ordnung hat stets ein Ordnungselement und eine Ordnungsinvolution zweiter Ordnung.*

Zusatz. Als besonderer Fall von 208<sub>2</sub> ergibt sich: z

Eine Involution dritter Ordnung ist durch ihre Hauptinvolution und ein Ordnungselement bestimmt.

### 211. Bestimmungsstücke einer Involution dritter Ordnung.

1. *Eine Involution dritter Ordnung ist bestimmt durch ein Tripel und durch die einem beliebigen Elemente zugewiesene Involution zweiter Ordnung.*

Ist dem Punkte  $A_1$  (Fig. 132) von  $p^2$  die krumme Involution  $[A]$ <sup>(159)</sup> zugewiesen, und ist außerdem das Tripel  $B_1 B_2 B_3$  gegeben, so kann man die dem Punkte  $B_1$  zuzuweisende Involution  $B^2$  finden. Entspricht nämlich in der Involution  $[A]$  dem Punkte  $B_1$  der Punkt  $X_1$ , so ist der Schnittpunkt  $B$  von  $A_1 X_1$  und  $B_2 B_3$  das Zentrum der dem Punkte  $B_1$  zuzuweisenden Involution. Da der Pol der Verbindungslinie  $AB$  die Hauptinvolution liefert, so ist die Involution dritter Ordnung bestimmt<sup>(208<sub>2</sub>)</sup>. —

2. *Eine Involution dritter Ordnung ist durch drei Tripel bestimmt.*

Die drei gegebenen Tripel seien  $A_1 A_2 A_3$ ,  $B_1 B_2 B_3$ ,  $C_1 C_2 C_3$ . Wir stellen uns zunächst nur die Aufgabe, eine Involution dritter Ordnung herzustellen, von der  $A_1 A_2 A_3$  und  $B_1 B_2 B_3$  (Fig. 132) zwei Tripel sind. Wir können dann noch als Zentrum der dem Punkte  $A_1$  zuzuweisenden Involution zweiter Ordnung einen beliebigen Punkt  $A$  von  $A_2 A_3$  wählen. Dadurch ist, wie wir eben sahen, die dem Punkte  $B_1$  zuzuweisende Involution  $B$  bestimmt: Wir haben den Punkt  $X_1$ , in welchem  $AB_1$  die Kurve schneidet, aus  $A_1$  auf  $B_2 B_3$  zu projizieren; die so gewonnene Gerade  $AB = x$  bestimmt mit  $p^2$  eine Involution dritter Ordnung,

von der  $A_1 A_2 A_3$  und  $B_1 B_2 B_3$  zwei Tripel sind. Bewegt sich nun  $A$  in  $A_2 A_3$ , so ist<sup>(37 A)</sup>

$$A[B_1] \bar{\wedge} X_1[A_1] \bar{\wedge} B;$$

$B$  beschreibt also die projektive Punktreihe  $B_2 B_3$ , die Gerade  $AB = x$  also einen krummen Strahlenbüschel  $x^2$ .

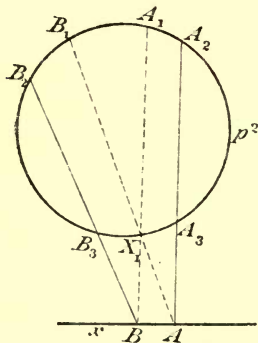


Fig. 132.

Fällt  $A$ , und mithin auch  $X_1$ , in  $A_2$ , so fällt  $x$  in  $A_1 A_2$ ; fällt  $A$  in  $A_3$ , so fällt  $x$  in  $A_1 A_3$ . Da außerdem der Träger  $A_2 A_3$  der von  $A$  beschriebenen Punktreihe ein Strahl des Büschels ist, so sind die Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  Strahlen des Büschels  $x^2$ .

Wiederholen wir unsere Betrachtungen, indem wir von den beiden Tripeln  $A_1 A_2 A_3$  und  $C_1 C_2 C_3$  ausgehen, so ergibt sich, daß der von  $AC = y$  beschriebene Strahlenbüschel zweiter Ordnung  $y^2$  ebenfalls die Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$

enthält. Die beiden Strahlenbüschel  $x^2$  und  $y^2$  haben also noch einen vierten Strahl  $p$  gemeinsam<sup>(101)</sup>; da in diesem  $x$  und  $y$  zusammenfallen, so erhalten wir durch  $p$  eine Involution dritter Ordnung, von welcher  $A_1 A_2 A_3$ ,  $B_1 B_2 B_3$ ,  $C_1 C_2 C_3$  drei Tripel sind. —

### 3. Eine Involution dritter Ordnung ist durch drei Ordnungselemente bestimmt.

Fallen die Punkte jedes der gegebenen Tripel zusammen, mit andern Worten, sind uns die Ordnungspunkte<sup>(210)</sup>  $A_1 B_1 C_1$  gegeben, so läßt sich die gesuchte Gerade  $p$  und mit ihr die Involution dritter Ordnung bequem konstruieren. In diesem Falle sind die Verbindungslinien  $A_2 A_3$ ,  $B_2 B_3$ ,  $C_2 C_3$  die Tangenten in  $A_1 B_1 C_1$ . Bezeichnen wir die Punkte, in denen diese Tangenten von den Gegenseiten des Dreiecks  $A_1 B_1 C_1$  geschnitten werden, durch  $AB\Gamma$ , so liegen  $AB\Gamma$  in der Pascalschen Gerade  $p$ <sup>(57)</sup>. Fällt  $A$  bei seiner Bewegung auf  $A_1 A$  in  $A$ , so fällt  $X_1$  in  $C_1$  und  $B$  in  $B$ , die Pascalsche Gerade  $AB = p$  gehört also dem von  $AB = x$  beschriebenen krummen Büschel an. Ebenso zeigt sich, daß sie dem von  $AC = y$  beschriebenen Büschel  $y^2$  angehört,



also die gesuchte gemeinsame Tangente von  $x^2$  und  $y^2$  ist.  
 — Aus der Konstruktion ergibt sich noch:

4. Die drei Ordnungselemente bilden ein Tripel der Involution dritter Ordnung.

**212. Konstruktion der Ordnungsinvolution.**

212

Aufgabe: In einer Kurve zweiter Ordnung ist eine Involution dritter Ordnung durch ihre Hauptinvolution und ein Ordnungselement gegeben<sup>(210 Z)</sup>; man soll die Ordnungsinvolution konstruieren.

Ist das Zentrum der in der Kurve gegebenen Hauptinvolution  $P$ , so müssen die Zentren der den Punkten von  $p^2$  zugewiesenen Involutionen zweiter Ordnung in der Polare  $p$  von  $P$  liegen<sup>(208)</sup>. Ist der gegebene Ordnungspunkt  $K_1$ , so muß die Tangente in  $K_1$  die Gerade  $p$  in dem zugeordneten Involutionszentrum  $K$  schneiden. Die gesuchte Ordnungsinvolution finden wir nun durch eine Wiederholung der Betrachtungen von Nr. 210<sub>2</sub>. Während wir aber dort uns mit dem Beweise begnügen mußten, daß ein Ordnungspunkt und eine Ordnungsinvolution existiert, können wir jetzt, wo uns ein Ordnungspunkt  $K_1$  gegeben ist, die gesuchte Ordnungsinvolution wirklich zeichnen.

Die involutorische Verwandtschaft zwischen  $p^2$  und  $p$  ist durch die Zuweisung von  $K_1$  und  $K$  bestimmt<sup>(207s)</sup>. Wir wählen also eine beliebige Tangente  $x$  von  $p^2$  und konstruieren in dieser wieder wie in Nr. 210 eine zu den Punkten  $A_1 B_1 C_1 \dots$  von  $p^2$  und daher auch zu den Punkten  $A B C \dots$  von  $p$  projektive Punktreihe  $A B \Gamma \dots$ . Durch passende Wahl der Tangente  $x$  nun läßt sich diese Konstruktion sehr vereinfachen. — Wir wählen als Tangente  $x$  die zweite von  $K$  an  $p^2$  gehende Tangente, deren Berührungspunkt  $L_1$  sein möge. Dadurch wird die projektive Beziehung von  $p$  und  $x$  zur perspektiven; denn in dem Schnittpunkte  $K$  von  $p$  und  $x$  sind zwei homologe Punkte der Punktreihen  $x$  und  $p$  vereinigt. Zeichnen wir<sup>(207s)</sup> den dem Punkte  $L_1$  (Fig. 133) in  $p$  homologen Punkt, so erhalten wir den Punkt  $L$ , in dem  $p$  von  $K_1 L_1$ , der Polare von  $K$ <sup>(86 Z<sub>1</sub>)</sup>, geschnitten wird. Weil die Verwandtschaft eine perspektive ist, der krumme Strahlenbüschel  $x^2$  also in zwei gerade Strahlenbüschel zerfällt, so muß das Zentrum der gesuchten Ordnungsinvolution auf  $L L_1$  liegen; zu seiner Auffindung braucht



Da diese Aufgabe (vgl. auch *von Staudt*: Beiträge zur Geometrie der Lage, Nr. 297) bei der Aufstellung eines Polarfeldes dritter Ordnung von Nutzen sein wird, so mag hier noch eine Bemerkung angeknüpft werden, die sich aus unserer Konstruktion ergibt.

Halten wir die Punkte  $K_1$  und  $L_1$  fest, während  $L$  sich auf  $K_1 L_1$  bewegt, so können wir für jede Lage von  $L$  zur Konstruktion von  $J$  denselben Punkt  $A_1$ , den wir beliebig angenommen hatten, benutzen; es sind dann auch noch die Punkte  $A$  und  $B_1$  fest. Während  $L$  sich in  $K_1 L_1$  bewegt, bewegt sich  $A$  in  $K_1 B_1$ , und  $X$  in  $K_1 A_1$ , so dafs wir haben<sup>(87 A)</sup>:

$$L [K] \overline{\wedge} A [A] \overline{\wedge} X [K] \overline{\wedge} J_1 \text{ und } J [A] \overline{\wedge} X,$$

folglich  $J \overline{\wedge} J_1$ ;

in Worten:

2. Die Punktreihen  $J$  und  $J_1$  sind projektiv auf die Punktreihe  $L$  bezogen. —

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dafs der Satz eine Verallgemeinerung des Pascalschen für das Kurvendreieck<sup>(57)</sup> ist. Wenn nämlich  $J$  ein hyperbolischer Punkt<sup>(105c)</sup> ist, dessen Tangenten die Kurve in  $M_1$  und  $N_1$  berühren, so ist die Gerade  $p$  die Pascalsche Gerade des Kurvendreiecks  $K_1 M_1 N_1$ .

213. **Konstruktion von Involutionen dritter Ordnung durch einen Büschel von Polarfeldern zweiter Ordnung.** Die Pole einer beliebigen Gerade  $e$  für die Polarfelder eines Büschels liegen in einer Kurve  $e_1^2$ , die wir<sup>(195)</sup> die Polkurve der Gerade  $e$  genannt haben. In dieser Polkurve  $e_1^2$  liegen auch die Punkte  $E_1$ , die den Punkten  $E$  von  $e$  absolut konjugiert sind, und zwar sind die Punkte  $E_1$  projektiv auf die Punkte  $E$  bezogen<sup>(198)</sup>. — Sind den Punkten  $C_1 \Delta_1 G_2$  (Fig. 134), in denen  $e$  die Träger  $g h u$  schneidet, die Punkte  $C \Delta H_2$  homolog, so finden wir den dem Punkte  $E$  von  $e$  absolut konjugierten Punkt  $E_1$ <sup>(197c)</sup>, indem wir den Punkt  $X$ , in dem  $C \Delta$  von  $E U$  geschnitten wird, aus  $G_2$  auf  $g$  und  $h$  und die erhaltenen Punkte  $D$  und  $\Gamma$  aus  $\Delta$  und  $C$  projizieren. Bewegt sich nun der Punkt  $E$  auf  $e$ ,  $X$  also auf  $C \Delta$ ,  $D$  auf  $g$  und  $\Gamma$  auf  $h$ , so sehen wir: Wenn  $E$  der Reihe nach in  $C_1$ ,  $\Delta_1$  und den Punkt  $A_1$  fällt, in dem  $C_1 \Delta_1$  von  $C \Delta$  ge-



die absolut konjugierten Punkte  $AA_1$  und  $BB_1$  als zwei Paar Gegenecken eines Vierseits, so ergibt sich, daß die Ecke, in der sich die Seiten  $AB$  und  $A_1B_1$  des Vierseits schneiden, absolut konjugiert ist ihrer Gegenecke, in der sich  $AB_1$  und  $A_1B$  schneiden:

3. Sind  $AA_1$  und  $BB_1$  zwei Paar absolut konjugierte Punkte, so ist auch der Schnittpunkt von  $AB$  und  $A_1B_1$  dem Schnittpunkte von  $AB_1$  und  $A_1B$  absolut konjugiert. —

Ferner ergibt sich<sup>(208a)</sup>:

4. Ordnet man jedem Punkte  $E_1$  von  $e_1^2$  die krumme Punktinvolution zu, die den absolut konjugierten Punkt  $E$  von  $e$  als Involutionzentrum hat, so ist in  $e_1^2$  eine Involution dritter Ordnung konstruiert. —

3. Sind  $aa_1$  und  $bb_1$  zwei Paar absolut konjugierte Geraden, so ist auch die Verbindungslinie von  $ab$  und  $a_1b_1$  der Verbindungslinie von  $ab_1$  und  $a_1b$  absolut konjugiert. —

4. Ordnet man jedem Strahle  $e_1$  von  $E_1^2$  die krumme Strahleninvolution zu, die die absolut konjugierte Gerade  $e$  als Involutionssachse hat, so ist in  $E_1^2$  eine Involution dritter Ordnung konstruiert. —

Durch die krumme Involution dritter Ordnung in  $e_1^2$  ist auch eine gerade Involution dritter Ordnung in  $e$  bestimmt; denn die beiden Punktreihen  $e$  und  $e_1^2$  sind projektiv aufeinander bezogen. Diese gerade Punktinvolution dritter Ordnung von  $e$  wollen wir zeichnen. — Weil zwei Paar Gegenseiten des Vierecks  $C\Delta D\Gamma$  (Fig. 134) die Diagonale  $u$  in homologen Punktpaaren  $GH$  und  $G_2H_2$  der diagonalen Involution schneiden, so schneiden auch die Gegenseiten  $C\Gamma$  und  $\Delta D$  die Diagonale  $u$  in zwei homologen Punkten  $G_1$  und  $H_1$ <sup>(64 z)</sup>. Für das Polarfeld  $(GG_1)$  ist daher  $H_1$  der Pol von  $h$ <sup>(192a)</sup>, ferner  $CG_1$  die Polare von  $C_1$  und  $\Delta H_1$  die Polare von  $\Delta_1$ , der Schnittpunkt  $E_1$  also der Pol von  $e$ . Für das Polarfeld  $(GG_1)$  ist daher dem Punkte  $C_1$  der Punkt  $C'$  konjugiert, in dem  $e$  von  $CG_1$  geschnitten wird, und dem Punkte  $\Delta_1$  der Punkt  $\Delta'$ , in dem  $e$  von  $\Delta H_1$  geschnitten wird. — Verbinden wir nun den Punkt  $E$  von  $e$  mit dem Punkte  $C$  der Polkurve  $e_1^2$ , so wird diese Verbindungslinie, wie wir eben gesehen haben, von der Verbindungslinie der homologen Punkte  $E_1$  und  $C_1$  in dem Punkte  $C_1'$  der Polkurve  $e_1^2$  geschnitten, der dem Punkte  $C'$  absolut konjugiert ist. Den Punkten  $C$  und  $C_1'$  also, die mit  $E$  in einer Gerade liegen,

sind in  $e$  zwei Punkte  $C_1$  und  $C'$  absolut konjugiert, die einander homolog sind für das Polarfeld  $(G G_1)$ , d. h. für das Polarfeld, für welches  $E_1$  der Pol von  $e$  ist. Ebenso würde sich ergeben, wenn wir den zweiten Schnittpunkt von  $E \Delta$  mit der Polkurve durch  $\Delta_1'$  bezeichneten, daß den Punkten  $\Delta$  und  $\Delta_1'$  in  $e$  die beiden Punkte  $\Delta_1$  und  $\Delta'$  absolut konjugiert sind, also zwei Punkte, die ebenfalls für das Polarfeld  $(G G_1)$  einander konjugiert sind:

5. Ordnet man jedem Punkte  $E$  von  $e$  die Involution zu, welche dem Polarfelde des Büschels konjugiert ist, für welches der dem Punkte  $E$  absolut konjugierte Punkt  $E_1$  der Pol von  $e$  ist, so erhält man in  $e$  eine gerade Punktinvolution dritter Ordnung.

5. Ordnet man jedem Strahle  $e$  von  $E$  die Involution zu, welche dem Polarfelde der Schar konjugiert ist, für welches der dem Strahle  $e$  absolut konjugierte Strahl  $e_1$  die Polare von  $E$  ist, so erhält man in  $E$  eine gerade Strahleninvolution dritter Ordnung.

### § 19. Die adjungierten Involutionen.

<sup>214</sup> 214. Erweiterung des Begriffs der konjugierten Punkte. Es seien  $e^2$  und  $f^2$  irgend zwei einem Polarfelde  $k^2$  konjugierte Involutionen; fassen wir diese Involutionen als zwei Gegenseiten<sup>(134)</sup> auf, so erzeugen sie in jeder Gerade  $a$  eine Hauptinvolution. Hat diese Hauptinvolution, die dem Polarfelde  $k^2$  adjungiert ist<sup>(194a)</sup>, zwei Ordnungspunkte, so sind diese zwei einander für  $k^2$  konjugierte Punkte<sup>(161)</sup>.

Diese Bemerkung führt uns dazu, in der Hauptinvolution eine ähnliche Erweiterung des Begriffs der konjugierten Punkte zu sehen, wie wir sie in Nr. 93 durch die konjugierte Involution für den Begriff der Schnittpunkte einer Gerade mit der Kurve eingeführt haben. Diese Erweiterung hatte den großen Vorteil, daß unsere Beweise dieselben waren für die Geraden, die die Kurve schnitten, und für solche, die sie nicht schnitten. Derselbe Vorteil, also die allgemeine Gültigkeit der Sätze, ergibt sich auch jetzt, wenn wir zwei konjugierte Punkte durch eine Involution ersetzen. Tatsächlich haben wir von dieser Erweiterung des Begriffs der konjugierten Punkte bereits mehrfach Gebrauch gemacht,

nämlich überall da, wo wir von der adjungierten Involution gesprochen haben. An dieser Stelle sollen nun die bereits gemachten Bemerkungen im Zusammenhange wiederholt und durch einige bisher nicht ausgesprochene Sätze ergänzt werden.

1. Definition: *Jede resultierende (oder, was dasselbe ist: jede komponierende) einer konjugierten Involution heisst dem Polarfelde adjungiert*<sup>(168 Z<sub>1</sub>)</sup>.

2. *Die Ordnungselemente einer adjungierten Involution sind dem Polarfelde konjugiert*<sup>(161.)</sup>.

3. Die resultierende aus zwei einem Polarfelde adjungierten Involutionen, die denselben Träger haben, ist dem Polarfelde konjugiert<sup>(162)</sup>.

4. Sind zwei Involutionen einem Polarfelde konjugiert, so ist jede ihnen zugeordnete<sup>(134)</sup> Hauptinvolution dem Polarfelde adjungiert<sup>(194<sub>a</sub>)</sup>.

5. *Sind zwei Involutionen einem Polarfelde konjugiert, so ist ihre diagonale Involution dem Polarfelde adjungiert*<sup>(194<sub>a</sub>)</sup>.

215. **Zusatz zum Lehrsatz des Desargues.** Die <sup>215</sup> beiden konjugierten Involutionen  $e^2$  und  $f^2$ , die ein Polarfeld  $k^2$  in zwei beliebigen Trägern  $e$  und  $f$  induziert, wollen wir im folgenden der Kürze wegen ein *Sehnenpaar* des Polarfeldes nennen. (Für die konjugierten Strahleninvolutionen  $E^2$  und  $F^2$ , die den Punktinvolutionen  $e^2$  und  $f^2$  dual<sup>(7)</sup> gegenüberstehen, steht kein dem Worte Sehne entsprechendes zur Verfügung; wir müssen uns deswegen mit dem Worte „Punktpaar“ behelfen.) Fassen wir wieder<sup>(214)</sup> dieses Sehnenpaar ( $ef$ ) als ein Paar Gegenseiten im Sinne von Nr. 134 auf, so induzieren die Gegenseiten ( $ef$ ) in jeder Gerade  $a$  eine Hauptinvolution. Der Satz, der den Zusammenhang zwischen dieser Hauptinvolution und der dem Polarfelde konjugierten Involution von  $a$  ausspricht, ist der Lehrsatz des Desargues<sup>(194<sub>a</sub>)</sup>, den wir an dieser Stelle mit etwas veränderten Worten wiederholen:

1. Jedes Sehnenpaar eines Polarfeldes erzeugt in einer beliebigen Gerade eine Hauptpunktinvolution, die dem Polarfelde adjungiert ist.

1. Jedes „Punktpaar“ eines Polarfeldes erzeugt in einem beliebigen Punkte eine Hauptstrahleninvolution, die dem Polarfelde adjungiert ist.

Wird die Gerade  $a$  von den Sehnen  $e$  und  $f$  in den Punkten  $E$  und  $F$  geschnitten, so sind die Punkte  $E$  und  $F$  einander homolog in der Hauptinvolution<sup>(134)</sup>, welche  $e^2$  und  $f^2$  in  $a$  bestimmen. Da nun diese Hauptinvolution nach dem eben wiederholten Satze von Desargues eine komponierende der konjugierten Involution von  $a$  ist, so ist sie durch das Punktpaar  $EF$  bestimmt<sup>(166)</sup>. Je zwei Sehnen des Polarfeldes also, die  $a$  in denselben Punkten  $E$  und  $F$  schneiden wie die beiden Sehnen  $e$  und  $f$ , von denen wir ausgingen, erzeugen in  $a$  dieselbe Hauptinvolution wie  $e^2$  und  $f^2$ . Daraus ergibt sich der Zusatz zum Desarguischen Satze:

2. Zwei Sehnenpaare eines Polarfeldes erzeugen in einer beliebigen Gerade  $a$  dieselbe Hauptpunktinvolution, wenn die Träger des einen Paares die Gerade  $a$  in denselben Punkten schneiden, wie die Träger des andern.

2. Zwei „Punktpaare“ eines Polarfeldes erzeugen in einem beliebigen Punkte  $A$  dieselbe Hauptstrahleninvolution, wenn die Mittelpunkte des einen Paares aus  $A$  durch dieselben Strahlen projiziert werden wie die Mittelpunkte des andern.

<sup>z</sup> Zusatz. Sind die beiden Sehnen hyperbolisch (haben die Involutionen  $e^2$  und  $f^2$  die Ordnungspunkte  $KK_1$  und  $LL_1$ ), so bestimmen sie ein Kurvenviereck  $KK_1LL_1$ , dessen Gegenseiten die Gerade  $a$  in homologen Punkten der Hauptinvolution schneiden<sup>(134 A)</sup>. Für diesen besondern Fall heißt also unser Satz:

Die Gegenseiten zweier Kurvenvierecke schneiden eine Gerade  $a$  in Punktpaaren einer und derselben Involution, wenn zwei Gegenseiten des einen Vierecks die Gerade  $a$  in denselben beiden Punkten schneiden wie zwei Gegenseiten des andern Vierecks. —

Die Gegenecken zweier Kurvenvierecke werden aus einem Punkte  $A$  durch Strahlenpaare einer und derselben Involution projiziert, wenn zwei Gegenecken des einen Vierecks aus dem Punkte  $A$  durch dieselben beiden Strahlen projiziert werden wie zwei Gegenecken des andern Vierecks. —

Schneidet die Vierecksseite  $KL$  die Gerade  $a$  in dem Punkte  $E_1$ , der dem Punkte  $E$ , in dem  $a$  von  $KK_1 = e$  geschnitten wird, in der konjugierten Involution von  $a$



homolog ist, so muß<sup>(215<sub>1</sub>)</sup> die Gegenseite  $K_1 L_1$  die Gerade  $a$  in dem Punkte  $F_1$  schneiden<sup>(166<sub>4</sub>)</sup>, der dem Schnittpunkte  $F$  von  $L L_1 = f$  und  $a$  in der konjugierten Involution von  $a$  homolog ist. Wir kommen also durch diese Spezialisierung auf den in Nr. 99<sub>4</sub> bewiesenen Lehrsatz zurück. Da wir auf diesen Lehrsatz die Analysis unserer Fundamentalkonstruktion<sup>(100)</sup> stützten, so zeigt sich, welcher Zusammenhang zwischen unserer Fundamentalkonstruktion und dem Lehrsatz des Desargues besteht.

### 216. Bestimmung des Polarfeldes durch zwei konjugierte und eine adjungierte Involution. 216.

*Lehrsatz: Durch zwei konjugierte und eine adjungierte Involution ist ein Polarfeld bestimmt.*

*Beweis:* Die beiden konjugierten Punktinvolutionen seien  $g^2$  und  $h^2$ , die adjungierte Involution  $a^2$ . Der durch  $(g h)$  bestimmte Büschel<sup>(192<sub>1</sub>)</sup> induziert in  $a$  eine Hauptinvolution. Diese Hauptinvolution können wir mit der in  $a$  gegebenen adjungierten Involution zu einer resultierenden zusammensetzen<sup>(162)</sup>. Ist in dieser resultierenden Involution dem Punkte  $A$ , in dem die Diagonale  $u$  von der Gerade  $a$  geschnitten wird, der Punkt  $A'$  von  $a$  homolog, so ist die Gerade  $A' U$ , welche den Punkt  $A'$  mit dem Diagonalepunkte  $U$  verbindet, die Polare<sup>(192<sub>2</sub>)</sup> von  $A$  und schneidet die Diagonale in dem dem Punkte  $A$  konjugierten Punkte  $A_1$ . Durch das Punktpaar  $A A_1$  wird eine komponierende der diagonalen Involution bestimmt<sup>(166<sub>1</sub>)</sup>. Entspricht in dieser dem Punkte  $G$  der Punkt  $G_1$ , so ist das durch die Zuweisung  $(G G_1)$  bestimmte<sup>(192<sub>3</sub>)</sup> Polarfeld das gesuchte.

### 217. Verallgemeinerung des Hesseschen Satzes. 217

Wir betrachten die Polarfelder, denen zwei gegebene Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  adjungiert (nicht, wie bisher, konjugiert) sind. Jedes dieser Polarfelder  $k^2$  erzeugt in den Trägern  $g$  und  $h$  konjugierte Involutionen, die nach der Definition<sup>(214<sub>1</sub>)</sup> komponierende der in  $g$  und  $h$  gegebenen adjungierten Involutionen sind. Entspricht in den gegebenen adjungierten Involutionen dem Schnittpunkte  $U$  (Fig. 135) der Träger in  $g$  der Punkt  $G$  und in  $h$  der Punkt  $H$ , so daß  $G H$  die Diagonale  $u$  der gegebenen Involutionen ist, so sind für das beliebige Polarfeld  $k^2$ , für welches dem Punkte  $U$  in  $g^2$  der Punkt  $C$  und in  $h^2$  der Punkt  $\Gamma$

konjugiert sei, auch  $GC_1$  und  $H\Gamma_1$  konjugierte Punkt-paare<sup>(166a)</sup>; das Polarfeld  $k^2$  gehört also einem Büschel an, der bestimmt ist durch die konjugierte Involution  $UC \cdot GC_1$  in  $g$  und durch die konjugierte Involution  $U\Gamma \cdot H\Gamma_1$  in  $h$ . Für alle Polarfelder dieses Büschels ist  $C\Gamma$  die Polare des Punktes  $U$ <sup>(192a)</sup> und die in  $GH$  durch diesen Büschel bestimmte Hauptinvolution ist gegeben<sup>(134)</sup> durch das Punkt-

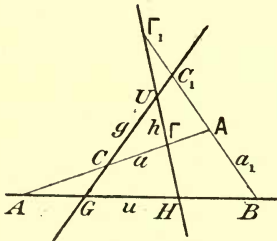


Fig. 135.

paar  $GH$  und die Punkte  $A$  und  $B$ , in denen  $GH$  von der gemeinsamen Polare  $C\Gamma$  und der  $GH$  zugeordneten Gerade  $C_1\Gamma_1$  geschnitten wird. Diese Hauptinvolution ist, wie wir sehen, identisch mit der diagonalen Involution<sup>(135a)</sup>, die den in  $g$  und  $h$  gegebenen adjungierten Involutionen zugeordnet ist. Da nun diese Hauptinvolution dem Polar-

felde  $k^2$  adjungiert ist<sup>(214)</sup>, so ist, mit andern Worten, die den gegebenen Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  zugeordnete diagonale Involution  $GH \cdot AB$  unserm Polarfelde adjungiert. Jedem Polarfelde also, dem die gegebenen Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  adjungiert sind, ist auch die diagonale Involution  $u^2$  adjungiert:

*Sind zwei Involutionen einem Polarfelde adjungiert, so ist auch ihre diagonale Involution dem Polarfelde adjungiert.*

7. **Zusatz.** Haben die beiden Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  Ordnungspunkte, so sind diese konjugierte Punkte des Polarfeldes<sup>(214a)</sup>. Da in diesem Falle auch die diagonale Involution Ordnungspunkte hat<sup>(137a)</sup>, so sind auch diese zwei konjugierte Punkte von  $k^2$ . Unser Satz ist also<sup>(133 A)</sup> eine Verallgemeinerung des Hesseschen<sup>(96)</sup>.

218. **Büschel adjungierter Involutionen.** Es sei  $k^2$  ein Polarfeld, dem die Involution  $g^2$  konjugiert und die Involution  $a^2$  adjungiert sei. Ist  $g^2 = C C_1 \cdot UG$ , so erhalten wir durch die Zuweisung  $(CU)$  die komponierende Involution  $CU \cdot C_1 G$ <sup>(166a)</sup> von  $g^2$ . Diese ist unserm Polarfelde adjungiert<sup>(214a)</sup>, weil ihm  $g^2$  konjugiert ist. Außerdem ist dem Polarfelde  $k^2$  die Involution  $a^2$  adjungiert. Mithin gibt es noch eine Involution, die  $k^2$  adjungiert ist: die diagonale Involution von  $CU \cdot C_1 G$  und  $a^2$ <sup>(217)</sup>. Ist  $C$  der Schnitt-

punkt der Träger  $g$  und  $a$  und die adjungierte Involution  $a^2 = C\Gamma \cdot C'\Gamma'$ , so ist  $\Gamma U$  die Diagonale der Gegenseiten  $CU \cdot C_1 G$  und  $a^2$ , und mithin der Träger der unserm Polarfelde adjungierten Involution, die bestimmt ist<sup>(134)</sup> durch das Punktpaar  $U\Gamma$  und die beiden Punkte  $\Gamma_1$  und  $H$ , in denen  $\Gamma U$  von  $C'C_1$  und  $\Gamma'G$  geschnitten wird. Durchläuft  $U$  den Träger  $g$ , so daß uns durch  $CU \cdot C_1 G$  die sämtlichen komponierenden Involutionen von  $g^2$  dargestellt werden<sup>(166a)</sup>, so beschreibt  $\Gamma(U)$  einen Strahlenbüschel erster Ordnung; in jedem Strahle  $\Gamma(U)$  dieses Büschels liefert die diagonale Involution eine dem Polarfelde  $k^2$  adjungierte Involution. Da  $k^2$  ein beliebiges der Polarfelder ist, denen  $g^2$  konjugiert und  $a^2$  adjungiert ist, so haben wir den

**Lehrsatz:** Alle Polarfelder, denen eine gegebene Punktinvolution  $g^2$  konjugiert und eine zweite gegebene Punktinvolution  $a^2$  adjungiert ist, haben noch unendlich viele adjungierte Punktinvolutionen gemeinsam. Die Träger dieser adjungierten Punktinvolutionen bilden einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt  $\Gamma$  derjenige Punkt von  $a$  ist, der dem Schnittpunkte  $C$  der Träger  $g$  und  $a$  in der adjungierten Punktinvolution  $a^2$  homolog ist.

**Lehrsatz:** Alle Polarfelder, denen eine gegebene Strahleninvolution  $G^2$  konjugiert und eine zweite gegebene Strahleninvolution  $A^2$  adjungiert ist, haben noch unendlich viele adjungierte Strahleninvolutionen gemeinsam. Die Mittelpunkte dieser adjungierten Strahleninvolutionen bilden eine Punktreihe erster Ordnung, deren Träger  $\gamma$  derjenige Strahl von  $A$  ist, der der Verbindungslinie  $c$  der Mittelpunkte  $G$  und  $A$  in der adjungierten Strahleninvolution  $A^2$  homolog ist.

**219. Der Träger der zweiten konjugierten Involution.** Ein Polarfeld  $k^2$  induziert in jeder Gerade  $a$  eine konjugierte Involution<sup>(93)</sup>; ein zweites Polarfeld  $k_1^2$  erzeugt in der Gerade  $a$  ebenfalls eine konjugierte Involution; die aus diesen beiden konjugierten Involutionen resultierende ist den beiden Polarfeldern  $k^2$  und  $k_1^2$  adjungiert<sup>(214)</sup>. Wenn die beiden konjugierten Involutionen von  $a$  nicht identisch sind, so ist die resultierende immer bestimmt<sup>(162)</sup>.

1. **Lehrsatz:** Durch zwei Polarfelder ist in jeder Ge-

1. **Lehrsatz:** Durch zwei Polarfelder ist in jedem

rade, die nicht der Träger einer beiden Feldern gemeinsam konjugierten Punktinvolution ist, eine den beiden Feldern gemeinsam adjungierte Punktinvolution bestimmt.

Punkte, der nicht der Mittelpunkt einer beiden Feldern gemeinsam konjugierten Strahleninvolution ist, eine den beiden Feldern gemeinsam adjungierte Strahleninvolution bestimmt.

Wir betrachten jetzt wieder, wie in Nr. 218, solche Polarfelder, die eine konjugierte Involution  $g^2$  und eine adjungierte Involution  $a^2$  gemeinsam haben. Sind  $k^2$  und  $k_1^2$  irgend zwei dieser Felder, so müssen sie, weil sie die konjugierte Involution  $g^2$  gemeinsam haben, noch eine zweite Involution  $h^2$  gemeinsam haben<sup>(191)</sup>. Sie gehören also dem durch die Gegenseiten ( $gh$ ) bestimmten Büschel von Polarfeldern an. Da jede Hauptinvolution des Büschels<sup>(194a)</sup> den beiden Polarfeldern  $k^2$  und  $k_1^2$  adjungiert ist, so muß die Hauptinvolution von  $a$  mit der gegebenen adjungierten Involution  $a^2$  zusammenfallen; weil aber jede Gerade von  $g$  und  $h$  in zwei homologen Punkten ihrer Hauptinvolution geschnitten wird<sup>(134)</sup>, so wird der Träger  $a$  von  $g$  und  $h$  in zwei homologen Punkten  $C$  und  $\Gamma$  der in  $a$  gegebenen adjungierten Involution geschnitten. Sind  $g^2$  und  $a^2$  gegeben, so ist damit der Schnittpunkt  $C$  von  $g$  und  $a$  und dadurch auch der dem Punkte  $C$  homologe Punkt  $\Gamma$  von  $a^2$  gegeben. Die Gerade  $h$  geht also, welches Polarfeld wir auch wählen, immer durch den Punkt  $\Gamma$ :

2. Haben zwei Polarfelder eine konjugierte Punktinvolution  $g^2$  und eine adjungierte Punktinvolution  $a^2$  gemeinsam, so geht der Träger  $h$  der zweiten gemeinsam konjugierten Involution durch den Punkt  $\Gamma$  von  $a$ , der dem Schnittpunkte  $C$  von  $g$  und  $a$  in der gegebenen adjungierten Involution  $a^2$  homolog ist.

2. Haben zwei Polarfelder eine konjugierte Strahleninvolution  $G^2$  und eine adjungierte Strahleninvolution  $A^2$  gemeinsam, so liegt der Mittelpunkt  $H$  der zweiten gemeinsam konjugierten Involution auf dem Strahle  $\gamma$  von  $A$ , der der Verbindungslinie  $c$  von  $G$  und  $A$  in der gegebenen adjungierten Involution  $A^2$  homolog ist.

220. Bestimmung eines Büschels von Polarfeldern durch eine konjugierte und zwei adjungierte Involuntionen. Alle Polarfelder, die eine gemeinsam konjugierte

Involution  $g^2$  und eine gemeinsam adjungierte Involution  $a^2$  haben, haben nach Nr. 218 in jedem Strahle des Punktes  $\Gamma$ , der dem Schnittpunkt  $C$  von  $g$  und  $a$  in  $a^2$  homolog ist, eine gemeinsam adjungierte Involution. Wählen wir unter diesen Polarfeldern diejenigen aus, die überdies noch eine zweite adjungierte Involution  $b^2$  gemeinsam haben, so gehören diese, wie wir zeigen wollen, einem Büschel von Polarfeldern an.

Entspricht dem Schnittpunkte  $D$  (Fig. 136) der Träger  $g$  und  $b$  in der adjungierten Involution  $b^2$  der Punkt  $\Delta$ , so ist die Verbindungslinie  $h$  der Punkte  $\Gamma$  und  $\Delta$  der Träger einer allen Polarfeldern gemeinsam konjugierten Involution. Schneidet nämlich  $h$  den Träger  $g$  in  $U$ , so ist, wie wir<sup>(218)</sup> sahen, allen Polarfeldern, die die kon-

jugierte Involution  $g^2$  und die adjungierte Involution  $a^2$  gemeinsam haben, in dem Träger  $h$  eine Involution adjungiert, die bestimmt ist als diagonale Involution von  $CU$ .  $C_1G$  und  $a^2$ . Von ihr sind also  $U$  und  $\Gamma$  zwei homologe Punkte<sup>(135<sub>2</sub>)</sup>; in einem weitem Punktpaare wird  $\Gamma U$  geschnitten von den zwei Geraden, die  $C_1$  und  $G$  mit irgend zwei homologen Punkten von  $a^2$  verbinden<sup>(133)</sup>. — Die in  $h$  liegende adjungierte Involution für die Polarfelder, denen  $g^2$  konjugiert und  $b^2$  adjungiert ist, ergibt sich in ähnlicher Weise durch das Punktpaar  $U\Delta$

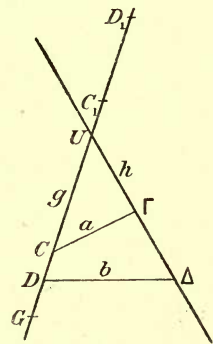


Fig. 136.

und die beiden Punkte, in denen  $h$  von zwei Geraden geschnitten wird, die  $D_1$  und  $G$  mit irgend zwei einander homologen Punkten von  $b^2$  verbinden. Die Polarfelder also, denen  $g^2$  konjugiert, und  $a^2$  und gleichzeitig  $b^2$  adjungiert sind, haben in  $h$  zwei adjungierte Involutionen gemeinsam; die aus diesen adjungierten Involutionen resultierende ist daher allen Polarfeldern konjugiert<sup>(214<sub>a</sub>)</sup>. Weil der Inbegriff der Polarfelder, denen zwei gegebene Involutionen konjugiert sind, ein Büschel von Polarfeldern heißt<sup>(192<sub>1</sub>)</sup>, so können wir das Ergebnis so aussprechen:

1. Durch eine konjugierte und zwei adjungierte Punktinvolutionen ist ein Büschel von Polarfeldern bestimmt.

1. Durch eine konjugierte und zwei adjungierte Strahleninvolutionen ist eine Schar von Polarfeldern bestimmt.

Hieraus folgt<sup>(216)</sup>:

2. Durch eine konjugierte und drei adjungierte Punktinvolutionen ist ein Polarfeld bestimmt.

2. Durch eine konjugierte und drei adjungierte Strahleninvolutionen ist ein Polarfeld bestimmt.

A *Anmerkung.* Für den Fall, daß alle vier Involutionen Ordnungspunkte haben, heißt z. B. der zweite Satz:

Durch zwei Punkte und drei Paar konjugierte Punkte ist eine krumme Punktreihe bestimmt.

Durch zwei Strahlen und drei Paar konjugierte Strahlen ist ein krummer Strahlenbüschel bestimmt.

221 221. **Schnittpunkt dreier Chordalen.** Aus Nr. 219 läßt sich ein weiterer wichtiger Satz folgern. — Haben zwei Polarfelder  $k^2$  und  $k_1^2$  eine gemeinsam konjugierte Punktinvolution  $g^2$ , so haben sie noch eine zweite gemeinsam konjugierte Punktinvolution  $h^{2(191)}$ ;  $k^2$  und  $k_1^2$  gehören also dem durch die Gegenseiten  $(gh)$  bestimmten Büschel von Polarfeldern an. Ist  $k_2^2$  irgend ein drittes Polarfeld, das dem Büschel  $(gh)$  nicht angehört, dem aber  $g^2$  konjugiert ist, so haben  $k^2$  und  $k_2^2$  ebenfalls noch eine zweite konjugierte Punktinvolution  $a^2$  gemeinsam. Schneidet  $a$  die Träger  $g$  und  $h$  in  $C$  und  $\Gamma$ , so muß die Involution  $a^2$ , weil sie dem Polarfelde  $k^2$  konjugiert ist, eine komponierende der in  $C\Gamma = a$  durch den Büschel  $(gh)$  bestimmten Hauptinvolution sein<sup>(194)</sup>. Diese Hauptinvolution ist also dem Polarfelde  $k^2$  und mithin auch  $k_2^2$  adjungiert. Sie ist aber auch dem Polarfelde  $k_1^2$ , weil dieses dem Büschel  $(gh)$  angehört, adjungiert<sup>(194)</sup>. Den drei Polarfeldern ist also die Hauptinvolution von  $C\Gamma = a$  adjungiert und die Involution  $g^2$  konjugiert; es geht daher<sup>(219)</sup> der Träger der konjugierten Involution  $b^2$ , die  $k_1^2$  und  $k_2^2$  außer  $g^2$  gemeinsam haben, durch  $\Gamma$ :

Haben drei Polarfelder die konjugierte Punktinvolution  $g^2$  gemeinsam, so gehen die Träger der drei konjugierten Punktinvolutionen, welche je zwei von ihnen außer  $g^2$  gemeinsam haben, durch einen Punkt.

Haben drei Polarfelder die konjugierte Strahleninvolution  $G^2$  gemeinsam, so liegen die Mittelpunkte der drei konjugierten Strahleninvolutionen, welche je zwei von ihnen außer  $G^2$  gemeinsam haben, in einer Gerade.

*Anmerkung.* Haben die sämtlichen vier konjugierten A Involutionen Ordnungspunkte, so heisst der Satz:

Von drei Kurven, die durch zwei Punkte  $K$  und  $K_1$  gehen, schneiden sich je zwei aufser in  $K$  und  $K_1$  noch in zwei Punkten; die Verbindungslinien dieser drei Punktpaare gehen durch *einen* Punkt. —

Von drei Kurven, die zwei Tangenten  $k$  und  $k_1$  gemeinsam haben, haben je zwei aufser  $k$  und  $k_1$  noch zwei Tangenten gemeinsam; die Schnittpunkte dieser drei Tangentenpaare liegen in *einer* Gerade. —

Je zwei Kreise haben eine konjugierte Involution gemeinsam, nämlich die zirkulare Involution der unendlich fernen Gerade<sup>(131a)</sup>; wir können also unsern Satz auf drei beliebige Kreise anwenden. Dadurch erhalten wir den aus der Planimetrie bekannten Satz, dass die Chordalen dreier Kreise durch *einen* Punkt gehen.

## § 20. Zwei Polarfelder.

### 222. Die durch zwei konjugierte Punktinvolutionen <sup>222</sup> und einen Ordnungsstrahl bestimmten Polarfelder.

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, von der zwei konjugierte Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  und eine Tangente  $a$  gegeben sind.*

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, von der zwei konjugierte Strahleninvolutionen  $G^2$  und  $H^2$  und ein Punkt  $A$  gegeben sind.*

*Analysis:* Weil für die Kurve die beiden konjugierten Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  gegeben sind, so gehört sie dem durch  $(gh)$  bestimmten Büschel von Polarfeldern an. Dieser bestimmt in der Gerade  $a$  eine Hauptinvolution und alle Kurven, die die Gerade  $a$  schneiden, schneiden sie in homologen Punkten der Hauptinvolution<sup>(194, oder 204)</sup>. Da die gesuchte Kurve die Gerade  $a$  berühren soll, so muss die Hauptinvolution von  $a$ , wenn die Aufgabe lösbar sein soll, Ordnungspunkte haben. Sind diese  $E$  und  $E_1$ , so genügt jede der beiden Kurven des Büschels, welche durch  $E$  oder  $E_1$  geht, den Bedingungen der Aufgabe. — Die Aufgabe hat keine oder zwei Lösungen.

*Konstruktion:* Wird die gegebene Tangente  $a$  von den Trägern der gegebenen Involutionen  $g^2$  und  $h^2$  und von der







Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte  $K$  und  $K_1$  geht und eine gegebene Gerade  $a$  berührt.

223. Die durch eine konjugierte Punktinvolution, eine konjugierte Strahleninvolution und einen Ordnungspunkt bestimmten Polarfelder.

Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, von der ein Punkt  $L$ , eine konjugierte Punktinvolution  $g^2$  und eine konjugierte Strahleninvolution  $\mathcal{G}^2$  gegeben ist.

Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, von der eine Tangente  $l$ , eine konjugierte Strahleninvolution  $\mathcal{G}^2$  und eine konjugierte Punktinvolution  $g^2$  gegeben ist.

Ist für die gesuchte Kurve  $G_1$  (Fig. 139) der Pol des Trägers  $g$  und  $g$  die Polare des Mittelpunktes  $\mathcal{G}$  der gegebenen Strahleninvolution, so ist der Schnittpunkt  $U$  von  $g$  und  $g$  der Pol von  $G_1\mathcal{G}$ . Die Polare von  $U$ , also  $\mathcal{G}G_1$ , muß aber durch den dem Punkte  $U$  in  $g^2$  homologen Punkt  $G$  gehen, und weil der Pol von  $\mathcal{G}(U) = u_1$  in der Polare von  $U$  liegt, so muß dem Strahle  $u_1$  der Strahl  $\mathcal{G}(G) = u$  in  $\mathcal{G}^2$  homolog sein. Daraus ergibt sich, daß wir in  $g^2$  ein Paar homologe Punkte  $UG$  so zu bestimmen haben, daß  $\mathcal{G}(U)$  und  $\mathcal{G}(G)$  gleichzeitig ein Paar homologe Strahlen  $uu_1$  von  $\mathcal{G}^2$  bilden. Wir haben daher die Punktinvolution, welche die Strahleninvolution  $\mathcal{G}^2$  in dem Träger  $g$  ausschneidet, mit der in  $g$  gegebenen konjugierten Punktinvolution  $g^2$  zu einer resultierenden zusammensetzen; die Ordnungspunkte  $U$  und  $G$  dieser resultierenden erfüllen die verlangte Bedingung<sup>(161)</sup>. Hat die resultierende keine Ordnungspunkte, so hat die Aufgabe keine Lösung.

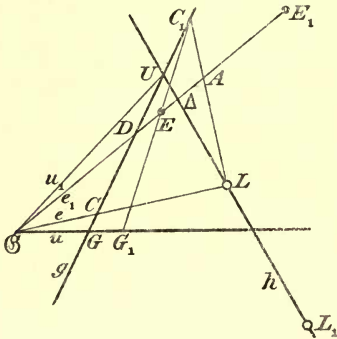


Fig. 139.

Nehmen wir an,  $U$  und  $G$  seien zwei Punkte der verlangten Art, so daß gleichzeitig  $U$  und  $G$  zwei homologe Punkte von  $g^2$  und  $\mathcal{G}(G) = u$  und  $\mathcal{G}(U) = u_1$  zwei homologe Strahlen von  $\mathcal{G}^2$  sind; dann muß für die verlangte Kurve  $u$  die Polare von  $U$  oder  $u_1$  die Polare von  $G$  sein.

Wir verfolgen den ersten Fall. Für die Kurve, für welche  $\mathcal{G}(G) = u$  (Fig. 139) die Polare von  $U$  ist, muß der von dem gegebenen Punkte  $L$  durch  $U$  und  $u$  harmonisch getrennte Punkt  $L_1$  ein zweiter Punkt sein. Unsere Kurve gehört daher dem Büschel an, welches bestimmt ist durch die Involution  $g^2$  und die durch die Ordnungspunkte  $L$  und  $L_1$  in  $LU = h$  bestimmte Involution  $h^2$ .

Für sämtliche Polarfelder dieses Büschels liegen die Pole irgend eines Strahles  $e$  von  $\mathcal{G}$  in einer Polkurve  $e_1^{2(196)}$ . Schneidet diese den homologen Strahl  $e_1$  von  $\mathcal{G}^2$  in  $E$  und  $E_1$ , so sind für die beiden Kurven des Büschels, für welche  $E$  oder  $E_1$  der Pol von  $e$  ist, die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Als Strahl  $e$  von  $\mathcal{G}$  wählen wir die Verbindungslinie  $\mathcal{G}L$ , welche  $g$  in  $C$  schneiden möge. Ist dann  $C_1$  der dem Punkte  $C$  in  $g^2$  homologe Punkt, so liegen die Pole der Gerade  $e = CL$  in einer Polkurve, die bestimmt ist<sup>(195 Z<sub>1</sub>)</sup> durch die drei Punkte  $C_1LU$  und den Schnittpunkt  $\mathcal{G}$  der Tangenten in  $C_1$  und  $L$ . Schneidet der dem Strahle  $e$  in  $\mathcal{G}^2$  homologe Strahl  $e_1$  die Träger  $g$  und  $h$  und die Polare  $C_1L$ <sup>(86 Z<sub>1</sub>)</sup> von  $\mathcal{G}$  in  $D\Delta A$ , so ist die durch die Polkurve  $e_1^2$  in  $e_1$  bestimmte Involution  $\mathcal{G}A.D\Delta$ <sup>(99<sub>1</sub>)</sup>. In unserer Figur hat die Involution die Ordnungspunkte  $E$  und  $E_1$ . Wir haben also noch die Kurve zu zeichnen, für welche  $E$  (oder  $E_1$ ) der Pol von  $e$  ist; für diese ist die Polare von  $C$  die Verbindungslinie  $C_1E$ . Schneidet diese die Gerade  $u$  in  $G_1$ , so ist die durch die Zuweisung  $(GG_1)$  bestimmte Kurve des Büschels  $(gh)$  die verlangte. — Die Aufgabe hat entweder keine, zwei oder vier Lösungen.

*Anmerkung.* Für den Fall, daß  $g^2$  Ordnungspunkte und  $\mathcal{G}^2$  Ordnungsstrahlen hat, läßt sich die Aufgabe auch so fassen:

- |  |  |
|--|--|
| 1. Durch drei Punkte eine Kurve zu legen, die zwei gegebene Geraden berührt. — | 1. Durch zwei Punkte eine Kurve zu legen, die drei gegebene Geraden berührt. — |
|--|--|

Für den besondern Fall, daß die gegebene Strahleninvolution zirkular<sup>(112)</sup> ist, kann man die Aufgabe auch so fassen<sup>(142<sub>a</sub>)</sup>:

- |  |  |
|--|--|
| 2. Eine Kurve zu zeichnen, für die ein Punkt, eine | 2. Eine Kurve zu zeichnen, für die eine Tangente, eine |
|--|--|



getrennten Punkt  $L_2$  zu zeichnen, d. i., nach planimetrischem Sprachgebrauch, die Gegenpunkte von  $L$  in Bezug auf  $u$  und  $u_1$ . Wir verfolgen zunächst den ersten Fall. Schneidet die Gerade  $\mathcal{G} L = e$  die uneigentliche Gerade in  $C$ , so geht das in  $L$  auf  $e$  errichtete Lot durch  $C_1$ , und die der Gerade  $e$  zugeordnete Polkurve  $e_1^2$  ist bestimmt durch die uneigentlichen Punkte  $C_1$  und  $U$ , den eigentlichen Punkt  $L$  und den Schnittpunkt  $\mathcal{G}$  der Tangenten in  $L$  und  $C_1$ . Schneidet nun der dem Strahle  $e$  in  $\mathcal{G}^2$  homologe Strahl  $e_1$  die Seiten des Kurvendreiecks  $LC_1U$  in  $AD\Delta$ , so ist  $\mathcal{G}A.D\Delta$  die von  $e_1^2$  in  $e_1$  bestimmte konjugierte Involution. Es ergibt sich für den zweiten Fall, wenn wir noch den Schnittpunkt von  $LL_2$  und  $e_1$  durch  $\Delta'$  bezeichnen, daß die Polkurve  $e_1'^2$  in  $e_1$  die konjugierte Involution  $\mathcal{G}A.D\Delta'$  bestimmt. Da nun  $\mathcal{G}A.\Delta\Delta'$  ein elliptischer Wurf<sup>(112a)</sup> und  $D$  der uneigentliche Punkt ist, so ist einer von den beiden Würfen  $\mathcal{G}A.D\Delta$  und  $\mathcal{G}A.D\Delta'$  elliptisch, der andere hyperbolisch; unsere Aufgabe hat also stets zwei Lösungen. Ist, wie in unserer Figur,  $\mathcal{G}A.D\Delta$  der hyperbolische Wurf, so lassen sich die Ordnungspunkte  $E$  und  $E_1$  finden, indem wir die mittlere Proportionale zu  $\Delta A$  und  $\Delta\mathcal{G}$  zeichnen. Das von  $E$  (oder  $E_1$ ) auf  $e$  gefällte Lot trifft dann, weil es die Polare des (uneigentlichen) Punktes  $C$  ist,  $u$  in dem Mittelpunkte  $G_1$  (oder  $G_1'$ ) des gesuchten Kreises. —

2. Hat die Strahleninvolution  $\mathcal{G}^2$  die Ordnungsstrahlen  $k$  und  $k_1$  (Fig. 140), so sind die homologen Strahlen  $u$  und  $u_1$ , welche aufeinander senkrecht stehen, die Halbierungslinien der von  $k$  und  $k_1$  gebildeten Winkel<sup>(113 z<sub>1</sub>)</sup>. Wählt man in diesem Falle zur Bestimmung des Punktes  $E$  nicht den Strahl  $\mathcal{G}(L) = e$  und seinen homologen  $e_1$ , sondern einen Ordnungsstrahl z. B.  $k$ , welcher  $LL_1$  und die uneigentliche Gerade in  $B$  und  $B$  schneiden möge, so hat man von dem Punkte  $B_1$ , der von  $B$  durch  $L$  und  $L_1$  harmonisch getrennt ist, auf  $k$  das Lot  $B_1A'$  zu fällen, um die der Polkurve konjugierte<sup>(195)</sup> Hauptinvolution<sup>(134)</sup>  $\mathcal{G}A'.BB$  zu erhalten. Um die Ordnungspunkte dieser Involution zu finden, hat man, weil  $B$  der Fluchtpunkt ist, die mittlere Proportionale von  $B\mathcal{G}$  und  $B A'$  zu zeichnen. Auf dieselbe Weise wie in Nr. 222  $Z_2$  läßt sich zeigen, daß diese identisch ist mit der mittleren Proportionale von  $BL$  und  $BL_1$ , so daß wir auch hier zu der aus der Planimetrie bekannten Lösung der

Aufgabe gelangen: Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Geraden berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

224

**224. Die zwei Polarfeldern gemeinsam adjungierten Involutionen.** Sind uns zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gegeben, so können wir zu jedem Punkte  $A$  die Polare  $a_1$  für  $k_1^2$  und die Polare  $a_2$  für  $k_2^2$  zeichnen. Der Schnittpunkt  $A_1$  von  $a_1$  und  $a_2$  ist dem Punkte  $A$  für beide Polarfelder konjugiert<sup>(184)</sup>. Bewegt sich der Punkt  $A$  in einer Gerade  $e$ , so beschreibt  $a_1$  einen geraden Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt  $E_1$  der Pol von  $e$  für  $k_1^2$  ist, und  $a_2$  einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt  $E_2$  der Pol von  $e$  für  $k_2^2$  ist. Da diese beiden Strahlenbüschel projektiv auf  $A$ <sup>(183a)</sup> und daher auch projektiv aufeinander bezogen sind, so liegen die Schnittpunkte  $A_1$  der homologen Strahlen  $a_1$  und  $a_2$  in einer der Gerade  $e$  zugeordneten Curve  $e_1^2$ . Schneiden die Polaren  $a_1$  und  $a_2$  (Fig. 141) die Gerade  $e$  in  $B$  und  $C$ , so daß  $A$  und  $B$  zwei für  $k_1^2$  konjugierte Punkte von  $e$  sind, so geht die Polare  $c_2$  von  $C$  für  $k_2^2$ , weil  $C$  der Schnittpunkt von  $e$  und  $a_2$  ist, durch  $E_2$  und  $A$ . Die Polare  $c_1$  von  $C$  geht durch  $E_1$  und schneidet  $e_1^2$  in dem dem Punkte  $C$  für beide Kurven konjugierten Punkte  $C_1$  und die Gerade  $e$  in dem dem Punkte  $C$  für  $k_1^2$  konjugierten Punkte  $D$ . Die dem Polarfelde  $k_1^2$  konjugierte Involution von  $e$  ist daher  $AB.CD$ ; da  $AB$  und  $CD$  die Punktpaare sind, in denen zwei

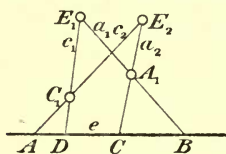


Fig. 141.

Paar Gegenseiten des Vierecks  $E_1E_2A_1C_1$  der Curve  $e_1^2$  die Gerade  $e$  schneiden, so ist die Involution  $AB.CD$  der Curve  $e_1^2$  adjungiert<sup>(169a)</sup>. In derselben Weise läßt sich zeigen, daß die Involution von  $e$ , welche dem Polarfelde  $k_2^2$  konjugiert ist, der Curve  $e_1^2$  adjungiert ist. Die der Curve  $e_1^2$  konjugierte Involution von  $e$  ist daher die resultierende<sup>(214a)</sup> aus den beiden in  $e$  liegenden Involutionen, welche den Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  konjugiert sind. Wir fassen das Vorstehende zusammen in dem

**Lehrsatz:** Zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  bestimmen in jeder Gerade  $e$  eine gemeinsam ad-

**Lehrsatz:** Zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  bestimmen in jedem Punkte  $E$  eine gemeinsam

*jungierte Involution. Diese ist konjugiert der Geraden  $e$  zugeordneten Kurve  $e_1^2$ , welche die den Punkten  $A$  von  $e$  für beide Polarfelder gemeinsam konjugierten Punkte  $A_1$  enthält.*

*adjungierte Involution. Diese ist konjugiert dem Punkte  $E$  zugeordneten krummen Strahlenbüschel  $E_1^2$ , welcher die den Strahlen  $a$  von  $E$  für beide Polarfelder gemeinsam konjugierten Geraden  $a_1$  enthält.*

**225. Hauptpunkte.** Ist  $f$  eine zweite beliebige Gerade <sup>225</sup> und  $f_1^2$  die ihr zugeordnete Kurve, welche die den Punkten von  $f$  für beide Polarfelder gleichzeitig konjugierten Punkte enthält, so müssen die beiden Kurven  $e_1^2$  und  $f_1^2$  durch den Punkt  $M_1$  gehen, der dem Schnittpunkte  $M$  von  $e$  und  $f$  für beide Polarfelder konjugiert ist. Daher schneiden sich  $e_1^2$  und  $f_1^2$  noch in einem zweiten Punkte  $U^{(111)}$ . Da  $U$  sowohl in  $e_1^2$  als in  $f_1^2$  liegt, so muß es sowohl in  $e$  als in  $f$  einen von  $M$  verschiedenen Punkt geben, der dem Punkte  $U$  für beide Polarfelder konjugiert ist. Die Verbindungslinie  $u$  dieser beiden Punkte  $S$  und  $S_1$  ist daher die Polare des Punktes  $U$  sowohl für  $k_1^2$  wie für  $k_2^{2(184s)}$ ; mit andern Worten: die Polaren des Punktes  $U$  für  $k_1^2$  und  $k_2^2$  fallen in  $u$  zusammen. Einen solchen Punkt  $U$ , dessen Polaren für beide Polarfelder zusammenfallen, nennen wir einen *Hauptpunkt* der beiden Felder. — Weil die durch die Ordnungspunkte  $M_1$  und  $U$  in der Verbindungslinie  $M_1U$  bestimmte Involution beiden Kurven  $e_1^2$  und  $f_1^2$  konjugiert ist, so haben diese noch eine konjugierte Involution gemeinsam<sup>(191)</sup>. Hat diese die Ordnungspunkte  $V$  und  $W$ , so gilt für sie, da sie ebenfalls Schnittpunkte von  $e_1^2$  und  $f_1^2$  sind, dasselbe wie für  $U$ .

**Lehrsatz:** Zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  bestimmen mindestens einen und höchstens drei (Haupt-)Punkte, deren Polaren zusammenfallen.

**Lehrsatz:** Zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  bestimmen mindestens einen und höchstens drei (Haupt-)Strahlen, deren Pole zusammenfallen.

**226. Hauptgeraden.** Die den Geraden  $e$  und  $f$  zugeordneten Kurven  $e_1^2$  und  $f_1^2$  haben, wie wir eben schon sahen, außer den Schnittpunkten  $M_1$  und  $U$  noch eine gemeinsam konjugierte Punktinvolution. Es läßt sich zeigen, daß der Träger dieser gemeinsam konjugierten Involution die Gerade  $u$  ist, in welcher die Polaren des Punktes  $U$  zu-





jugierten Punkte  $A_1$  enthält. —

beide Polarfelder gemeinsam konjugierten Strahlen  $a_1$  enthält. —

Da jede Gerade  $e$  die Hauptgerade  $u$  schneidet und die Polaren dieses Schnittpunktes für  $k_1^2$  und  $k_2^2$  beide durch den Pol  $U$  von  $u$  gehen, so schneiden sich sämtliche Kurven  $e_1^2$  in  $U$ . Hieraus ergibt sich in Verbindung mit Nr. 224:

2. Die Punkte  $A_1$ , welche den Punkten  $A$  einer beliebigen Gerade  $e$  für zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam konjugiert sind, liegen in einer Kurve  $e_1^2$ , die bestimmt ist durch den Hauptpunkt  $U$  und diejenigen Involutionen der Gerade  $e$  und der Hauptgerade  $u$ , welche den beiden Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam adjungiert sind.

2. Die Geraden  $a_1$ , welche den Strahlen  $a$  eines beliebigen Punktes  $E$  für zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam konjugiert sind, bilden einen krummen Strahlenbüschel  $E_1^2$ , der bestimmt ist durch die Gerade  $u$  und diejenigen Involutionen des Punktes  $E$  und des Hauptpunktes  $U$ , welche den beiden Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam adjungiert sind.

*Zusatz.* Hat die den beiden Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam adjungierte Involution der Hauptgerade  $u$  die Ordnungspunkte  $V$  und  $W$ , so gehen nach dem eben bewiesenen Satze sämtliche Kurven  $e_1^2$  durch  $V$  und  $W$ ; gleichzeitig sind  $V$  und  $W$  einander sowohl für  $k_1^2$  wie für  $k_2^2$  konjugiert<sup>(161)</sup>. Die Polaren von  $V$  und  $W$  für beide Polarfelder fallen daher ebenfalls zusammen und zwar in  $v = UW$  und  $w = UV$ .

Bestimmen zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  drei Hauptpunkte, so sind diese die Ecken eines beiden Polarfeldern gemeinsamen Poldreiecks<sup>(184a)</sup>.

Bestimmen zwei Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  drei Hauptgeraden, so sind diese die Seiten eines beiden Polarfeldern gemeinsamen Poldreiecks.

**227. Die komponierenden Strahleninvolutionen der Hauptpunkte.** Projiziert man aus dem Hauptpunkte  $U$  die den beiden Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam adjungierten Involutionen von  $e$  und  $u$ , so erhält man in  $U$  zwei Strahleninvolutionen, die sich zu einer resultierenden zusammensetzen. Diese resultierende Strahleninvolution von  $U$  schneidet, weil die adjungierten Involutionen von  $e$  und  $u$  der Kurve  $e_1^2$  konjugiert sind<sup>(226a)</sup>, die Kurve  $e_1^2$  in Punktpaaren einer

krummen Involution, deren Zentrum der Schnittpunkt  $S$  (Fig. 142) von  $e$  und  $u$  ist<sup>(168)</sup>. Von dieser krummen Involution haben wir in Nr. 226 das Punktpaar  $M_1 X_1$  gezeichnet; die resultierende Involution von  $U$  kann also als bestimmt<sup>(166,1)</sup> angesehen werden durch die homologen Strahlen  $U(X_1)M$  und  $UM_1$  und durch die Bedingung, daß sie eine komponierende ist der Involution, durch welche die adjungierte Involution der Hauptgerade  $u$  aus  $U$  projiziert wird. Ist nun  $f$  eine zweite Gerade, die  $e$  in  $M$  schneidet, so ergibt sich durch eine Wiederholung der eben angestellten Betrachtungen, daß die Strahleninvolutionen, durch welche die adjungierten Involutionen von  $u$  und  $f$  aus  $U$  projiziert werden, sich zu einer resultierenden zusammensetzen, von der  $UM$  und  $UM_1$  ebenfalls zwei homologe Strahlen sind und die die Hauptgerade  $u$  in einer komponierenden der in ihr liegenden adjungierten Involution schneidet.

Die adjungierten Involutionen von  $f$  und  $u$  erzeugen also in  $U$  dieselbe<sup>(166,1)</sup> resultierende Involution wie die adjungierten Involutionen von  $e$  und  $u$ ; mit andern Worten: Die drei adjungierten Involutionen von  $uef$  werden aus dem Hauptpunkte  $U$  durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert. Da  $f$  als beliebige Gerade eingeführt wurde<sup>(225)</sup>, so ist damit bewiesen, daß die den Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam adjungierten Involutionen sämtlicher Geraden aus dem Hauptpunkte  $U$  durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert werden. Für den Fall, daß die adjungierte Involution der Hauptgerade  $u$  die Ordnungspunkte  $V$  und  $W$  hat, läßt sich an die Stelle von  $U$  jeder der Hauptpunkte  $V$  und  $W$  setzen. Wir haben daher den

Lehrsatz: Die sämtlichen Punktinvolutionen, welche zwei Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam adjungiert sind, werden aus jedem Hauptpunkte durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert.

Lehrsatz: Die sämtlichen Strahleninvolutionen, welche zwei Polarfeldern  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam adjungiert sind, werden durch jede Hauptgerade in komponierenden Punktinvolutionen geschnitten.

### 228. Die Ordnungsstrahlen eines Hauptpunktes.

Die komponierenden Strahleninvolutionen, durch welche die beiden Feldern gemeinsam adjungierten Involutionen aus

dem Hauptpunkte  $U$  projiziert werden<sup>(227)</sup>, setzen sich zu einer resultierenden zusammen, die wir die *Hauptinvolution* von  $U$  nennen wollen. Nun sind die Ordnungspunkte der adjungierten Involutionen einander für  $k_1^2$  sowohl wie für  $k_2^2$  konjugiert<sup>(214a)</sup>, und da sie aus  $U$  durch zwei homologe Strahlen der Hauptinvolution projiziert werden, so liegen die Punkte  $A_1$ , die den Punkten  $A$  eines Strahles  $a$  von  $U$  gleichzeitig für  $k_1^2$  und  $k_2^2$  konjugiert sind, in einem homologen Strahle  $a_1$  der Hauptinvolution von  $U$ . Hat also die Hauptinvolution von  $U$  zwei Ordnungsstrahlen  $g$  und  $h$ , so sind den Punkten  $A$  von  $g$  (oder  $h$ ) die Punkte  $A_1$  von  $g$  (oder  $h$ ) für beide Felder konjugiert, d. h. jede der Geraden  $g$  und  $h$  ist Träger einer den beiden Feldern gemeinsam konjugierten Involution. Die resultierende Hauptinvolution liefs sich<sup>(227)</sup> als bestimmt ansehen durch das Strahlenpaar  $U(MM_1)$  und durch die Bedingung, dafs die durch die adjungierte Involution von  $u$  in  $U$  induzierte Strahleninvolution eine komponierende von ihr war. Ist nun diese komponierende elliptisch, so hat die Hauptinvolution von  $U$  zwei Ordnungsstrahlen  $g$  und  $h$ <sup>(161a)</sup>. Hat aber die komponierende Involution Ordnungsstrahlen, die adjungierte Involution von  $u$  also die Ordnungspunkte  $V$  und  $W$ , so hat die Hauptinvolution von  $U$  nicht immer Ordnungsstrahlen. In diesem Falle sind  $U(V)$  und  $U(W)$  zwei homologe Strahlen der Hauptinvolution von  $U$ <sup>(161a)</sup>, so dafs sie bestimmt ist durch  $U(VW.MM_1)$ . Da von den Punkten  $V$  und  $W$  dasselbe gilt wie von  $U$ <sup>(226 z)</sup>, so ist die Hauptinvolution von  $V$  bestimmt durch  $V(WU.MM_1)$ , die von  $W$  durch  $W(UV.MM_1)$ . Von den drei Involutionen  $U(VW.MM_1)$ ,  $V(WU.MM_1)$ ,  $W(UV.MM_1)$ , welche die Punkte  $M$  und  $M_1$  in den Ecken des Dreiseits  $uvw$  bestimmen, hat aber mindestens eine Ordnungsstrahlen<sup>(137a)</sup>.

1. Lehrsatz: Zwei Polarfelder haben stets zwei konjugierte Punktinvolutionen gemeinsam.

1. Lehrsatz: Zwei Polarfelder haben stets zwei konjugierte Strahleninvolutionen gemeinsam.

Sehen wir die beiden konjugierten Punktinvolutionen, die die Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  gemeinsam haben, als Gegenseiten an, so können wir, weil zwei Gegenseiten einen Büschel von Polarfeldern bestimmen<sup>(192a)</sup>, unsern Satz auch so aussprechen:

2. Durch zwei Polarfelder ist ein Büschel von Polarfeldern bestimmt.

2. Durch zwei Polarfelder ist eine Schar von Polarfeldern bestimmt.

*z* **Zusatz.** Sind drei Hauptpunkte  $UVW$  vorhanden und hat jede Hauptinvolution dieser drei Punkte Ordnungsstrahlen, so bilden diese sechs Ordnungsstrahlen die Gegenseiten eines Vierecks<sup>(187<sub>2</sub>)</sup>. Da, wie wir eben sahen, jeder Ordnungsstrahl eines Hauptpunktes der Träger einer beiden Feldern gemeinsam konjugierten Involution ist, so muß der Schnittpunkt z. B. eines Ordnungsstrahles von  $U$  und eines Ordnungsstrahles von  $V$  ein sich selbst konjugierter Punkt sein; die Ecken des Vierecks sind also Ordnungspunkte der in den Seiten liegenden Involutionen. Die Ordnungskurven der Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  haben daher in diesem Falle vier Punkte gemeinsam.

229 **229. Die zwei Polarfeldern gemeinsamen Strahleninvolutionen.** Daß zwei Polarfelder stets zwei konjugierte Strahleninvolutionen gemeinsam haben, soll, obgleich es<sup>(228<sub>1</sub>)</sup> bereits ausgesprochen ist, noch einmal durch eine Fortsetzung der bisherigen Betrachtungen gezeigt werden, damit der Zusammenhang zwischen den konjugierten Punkt- und Strahleninvolutionen hervortritt. — Die Polare eines beliebigen Punktes  $P$  für  $k_1^2$  sei  $p_1$ , für  $k_2^2$   $p_2$ , der Schnittpunkt von  $p_1$  und  $p_2$  sei  $P_1$ . Zu jedem Strahle  $a$  von  $P$  gehört ein Punkt  $A_1$  von  $p_1$  als Pol für  $k_1^2$  und ein Punkt  $A_2$  von  $p_2$  als Pol für  $k_2^2$ . Dreht sich  $a$  um  $P$ , so beschreiben  $A_1$  und  $A_2$  zwei zu  $a$  und daher zu einander projektive Punktreihen; die Verbindungslinie  $A_1A_2 = a_1$ , die dem Strahle  $a$  für beide Polarfelder konjugierte Gerade, beschreibt daher einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung  $P^2$ . Zu diesem Strahlenbüschel gehört auch die Hauptgerade  $u$ ; denn wenn  $a$  durch  $U$  geht, so fällt  $a_1$  in  $u$ . Die Geraden  $a$  und  $a_1$  erzeugen daher in  $u$  zwei projektive Punktreihen<sup>(50)</sup>.

Die beiden Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$ , welche<sup>(228<sub>2</sub>)</sup> einen Büschel  $(gh)$  bestimmen, seien in diesem Büschel durch die Zuweisungen  $(G G_1)$  und  $(G G_2)$  bestimmt<sup>(192<sub>2</sub>)</sup>. Geht dann  $a$  durch  $G_1$  und schneidet  $g$  und  $h$  in  $C$  und  $\Gamma$ , so ist der dem Punkte  $C$  in  $g^2$  homologe Punkt  $C_1$  der Pol von  $a = P G_1$  für  $k_1^2$ . Der Pol für  $k_2^2$  ist, wenn wir den dem Punkte  $\Gamma$  in  $h^2$  homologen Punkt durch  $\Gamma_1$  und den dem

Punkte  $G_2$  in der diagonalen Involution homologen Punkt durch  $H_2$  bezeichnen, der Schnittpunkt von  $C_1 G_2$  und  $\Gamma_1 H_2$  <sup>(193a)</sup>. Der dem Strahle  $a = P G_1$  für beide Polarfelder gemeinsam konjugierte Strahl  $a_1$  ist daher  $C_1 G_2$ . In derselben Weise ergibt sich, daß der dem Strahle  $P G_2$  für beide Polarfelder gemeinsam konjugierte Strahl durch  $G_1$  geht. Die von den Strahlen  $a$  und  $a_1$  in  $u$  beschriebenen Punktreihen haben daher involutorische Lage <sup>(63)</sup>. Da von dieser in  $u$  erzeugten Involution auch die Punkte  $H_1$  und  $H_2$ , die Pole von  $h$  für  $k_1^2$  und  $k_2^2$ , zwei zugeordnete Punkte sind, wie sich in derselben Weise ergeben würde, so ist die Involution bestimmt durch  $G_1 G_2 \cdot H_1 H_2$ . Diese ist eine komponierende der diagonalen Involution  $u^2 = G_1 H_1 \cdot G_2 H_2$  <sup>(167)</sup>.

Liegt der Punkt  $P$  in der Hauptgerade  $u$ , so schneiden sich seine Polaren  $p_1$  und  $p_2$  in dem Hauptpunkte  $U$  und die beiden von  $A_1$  und  $A_2$  beschriebenen Punktreihen sind in perspektiver Lage, weil  $A_1$  und  $A_2$  gleichzeitig in  $U$  fallen, nämlich dann, wenn  $a$  in  $u$  fällt. Die konjugierte Gerade  $a_1$  beschreibt daher einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt der dem Punkte  $P$  in der eben konstruierten Involution  $G_1 G_2 \cdot H_1 H_2$  homologe sein muß. Hat daher die Involution  $G_1 G_2 \cdot H_1 H_2$  Ordnungspunkte, so ist jeder derselben Mittelpunkt einer den beiden Polarfeldern gemeinsam konjugierten Strahleninvolution. Weil die Involution  $G_1 G_2 \cdot H_1 H_2$  aber, wie wir eben sahen, eine komponierende der diagonalen Involution  $u^2$  ist, so hat sie zwei Ordnungspunkte  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  <sup>(161a)</sup>, wenn  $u^2$  keine hat. — Hat  $u^2$  dagegen die Ordnungspunkte  $V$  und  $W$ , so braucht die Involution  $G_1 G_2 \cdot H_1 H_2$  keine zu haben <sup>(163)</sup>. Dann aber sind auch  $v = W U$  und  $w = U V$  ebenso wie  $u$  Strahlen jedes krummen Büschels  $P^2$ . Auf ihnen schneiden daher auch die konjugierten Geraden  $a$  und  $a_1$  projektive Punktreihen aus, die in involutorischer Lage sind, weil die Punkte  $W$  und  $U$ ,  $U$  und  $V$  einander zweifach entsprechen. Die Geraden  $a$  und  $a_1$  bestimmen daher in den Seiten des Dreiecks  $UVW$  Involutionen, deren Ordnungspunkte  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  die Mittelpunkte der gesuchten gemeinsam konjugierten Strahleninvolutionen sind. Von diesen drei in den Seiten liegenden Involutionen hat aber immer mindestens eine Ordnungspunkte <sup>(137a)</sup>. Da die Ordnungspunkte der Involution  $G_1 G_2 \cdot H_1 H_2$  einander homolog sind <sup>(161)</sup> in der den beiden

Polarfeldern gemeinsam adjungierten Involution der Hauptgerade  $u$ , so haben wir den

**Lehrsatz:** Zwei beliebige Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  haben stets zwei konjugierte Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  und zwei konjugierte Strahleninvolutionen  $\mathfrak{G}^2$  und  $\mathfrak{H}^2$  gemeinsam. Die Träger  $g$  und  $h$  der Punktinvolutionen sind die Ordnungsstrahlen der resultierenden Involution eines Hauptpunktes; die Mittelpunkte  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  der Strahleninvolutionen sind zwei homologe Punkte der den beiden Polarfeldern gemeinsam adjungierten Involution einer Hauptgerade.

**Lehrsatz:** Zwei beliebige Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  haben stets zwei konjugierte Strahleninvolutionen  $G^2$  und  $H^2$  und zwei konjugierte Punktinvolutionen  $g^2$  und  $h^2$  gemeinsam. Die Mittelpunkte  $G$  und  $H$  der Strahleninvolutionen sind die Ordnungspunkte der resultierenden Involution einer Hauptgerade; die Träger  $g$  und  $h$  der Punktinvolutionen sind zwei homologe Strahlen der den beiden Polarfeldern gemeinsam adjungierten Involution eines Hauptpunktes.

**Zusatz.** Hat jede der drei in den Seiten liegenden Involutionen Ordnungspunkte, so bilden diese die Gegenecken eines Vierseits<sup>(137a)</sup>. Da jeder Ordnungspunkt der Mittelpunkt einer beiden Feldern gemeinsam konjugierten Strahleninvolution ist, so muß die Verbindungslinie zweier Ordnungspunkte eine sich selbst konjugierte Gerade sein. Die Ordnungskurven der Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  haben daher in diesem Falle vier gemeinsame Tangenten.

**230. Vier adjungierte Involutionen.** Die Polarfelder, welchen vier gegebene Involutionen  $a^2 b^2 c^2 d^2$  adjungiert sind, gehören, wie wir beweisen wollen, einem Büschel von Polarfeldern an. — Wählen wir in dem Träger  $a$  irgend eine komponierende der gegebenen Involution  $a^2$ , so bestimmt diese als konjugierte Involution zusammen mit den adjungierten Involutionen  $b^2 c^2 d^2$  ein Polarfeld  $k_1^2$ <sup>(220a)</sup>, dem die Involutionen  $a^2 b^2 c^2 d^2$  adjungiert sind. Wählen wir eine komponierende der Involution  $b^2$ , so bestimmt diese als konjugierte Involution zusammen mit den adjungierten Involutionen  $a^2 c^2 d^2$  ein Polarfeld  $k_2^2$ , dem ebenfalls die vier Involutionen  $a^2 b^2 c^2 d^2$  adjungiert sind. Diese beiden Polarfelder  $k_1^2$  und  $k_2^2$  bestimmen einen Büschel<sup>(228a)</sup>, dessen

sämtlichen Polarfeldern die Involutionen  $a^2 b^2 c^2 d^2$  adjungiert sind, weil sie zwei Polarfeldern ( $k_1^2$  und  $k_2^2$ ) des Büschels adjungiert sind.

1. Durch vier adjungierte Punktinvolutionen ist ein Büschel von Polarfeldern bestimmt.

2. Durch fünf adjungierte Punktinvolutionen ist ein Polarfeld bestimmt<sup>(216)</sup>.

Anmerkung. Haben alle Involutionen Ordnungspunkte, A so heisst z. B. der letzte Satz:

Durch fünf Paar konjugierte Punkte ist ein Polarfeld bestimmt.

1. Durch vier adjungierte Strahleninvolutionen ist eine Schar von Polarfeldern bestimmt.

2. Durch fünf adjungierte Strahleninvolutionen ist ein Polarfeld bestimmt.

Durch fünf Paar konjugierte Strahlen ist ein Polarfeld bestimmt.

231. Inhalt des Buches. Die Bestimmung eines Polarfeldes durch fünf adjungierte Involutionen, die wir in der vorigen Nummer kennen lernten, ist die allgemeinste und bildet den Schluss unserer Betrachtungen. Es bleibt nur noch übrig, die in diesem Buche gegebene Darstellung kurz zu kennzeichnen und ihre Abweichung von der üblichen zu begründen.

Wir begannen damit, mittelst zweier Punkte  $P$  und  $Q$  die Punkte ihrer Verbindungslinie  $PQ$  einander zuzuordnen, indem wir zu jedem Punkte  $A$  den von ihm durch  $P$  und  $Q$  harmonisch getrennten Punkt  $A_1$  konstruierten. Den Inbegriff der auf solche Weise erhaltenen Punktpaare  $AA_1$  nannten wir eine Involution und die beiden Punkte  $P$  und  $Q$ , mittelst deren wir die Punkte der Gerade  $PQ$  einander zugeordnet hatten, die Ordnungspunkte. Wir stellten uns dann die umgekehrte Aufgabe: Aus den Punktpaaren  $AA_1$  die Ordnungspunkte  $P$  und  $Q$  zu finden. Wir sahen zunächst, dass die Gesamtheit der Punktpaare  $AA_1$  durch zwei unter ihnen, die wir durch  $BB_1$  und  $CC_1$  bezeichnen wollen, bestimmt ist, und ferner, dass nicht immer zwei Punkte  $P$  und  $Q$  existieren, dass ihre Existenz vielmehr an die Bedingung geknüpft ist, dass der Wurf  $BB_1.CC_1$  ein hyperbolischer ist<sup>(164)</sup>. Eine solche Bedingung nun ist für den Fortgang der Untersuchungen äusserst lästig. Ein Beispiel aus der Arithmetik wird dies deutlicher machen.

Durch die Umkehrung des Addierens, durch das Subtrahieren, kommt man zum Begriff der Differenz; diese existiert aber nur so lange, als der Minuend größer als der Subtrahend ist. Um sich von dieser lästigen Bedingung zu befreien, führt man den Begriff der relativen Größen ein. Durch das Dividieren, die Umkehrung des Multiplizierens, kommt man zum Begriff der gebrochenen Zahlen und durch das Radizieren, eine Umkehrung des Potenzierens, gelangt man, um sich von der Bedingung, daß der Radikand positiv sein muß, zu befreien, zur Einführung der imaginären Größen.

Man hat es nun für vorteilhaft gehalten, sich in der Geometrie der Lage von der Bedingung, daß der Wurf  $BB_1.CC_1$  hyperbolisch sein muß, dadurch zu befreien, daß man imaginäre Ordnungspunkte einführt. Thatsächlich bringt aber die Einführung der imaginären Punkte keinen Gewinn, sie wirkt vielmehr nur störend. Während man nämlich in der Arithmetik den Vorteil hat, mit den neu eingeführten Größen mechanisch weiter rechnen zu können, ist man in der Geometrie der Lage gezwungen, in der Vorstellung stets den Wurf, die beiden Punktpaare, durch die man die imaginären Punkte definiert, festzuhalten. Da also von einer mechanischen Handhabung des Begriffs der imaginären Punkte keine Rede sein kann, so wirkt es nur verwirrend, wenn man Sätze, die man durch Betrachtung des *Wurfes* gefunden hat, künstlich mit Hilfe des Wortes imaginär so in Worte kleidet, als ob es sich um *ein* Punktpaar handelte. Solche Sätze lassen sich nicht mechanisch verwenden; man muß sie vielmehr durch Rückübersetzung erst wieder in Einklang mit der Vorstellung bringen. Deshalb haben wir in diesem Buche auf den Gebrauch des Wortes imaginär verzichtet. —

Es genügt aber noch nicht, wie uns der Fortgang der Untersuchungen zeigte, das Punktpaar  $PQ$ , von dem wir ausgingen, durch den Wurf  $BB_1.CC_1$  zu ersetzen. In diesem Wurf mußten wir noch wieder jedes Punktpaar,  $BB_1$  sowohl wie  $CC_1$ , durch einen Wurf ersetzen. Dadurch kamen wir zum Begriff der komponierenden Involutionen, mittelst deren wir die resultierende Involution darstellten. Diese letzte Verallgemeinerung, bei der wir, wie früher, *ein* Punktpaar durch *zwei* Punktpaare, *einen* Wurf durch *zwei*



Würfe darstellten, führte uns zu den adjungierten Involutionen. Wir erkannten, daß eine adjungierte Involution, wenn sie hyperbolisch ist, ein Paar konjugierte Punkte darstellte. In der adjungierten Involution haben wir also nach gewöhnlichem Sprachgebrauch das Mittel gefunden, ein Paar imaginäre konjugierte Punkte darzustellen.

Der Hauptsatz über die adjungierten Involutionen war der verallgemeinerte Lehrsatz des Desargues<sup>(194a)</sup>, der die Grundlage für die Lehre vom Polarfeldbüschel bildet. Beim Polarfeldbüschel tritt bereits die Involution dritter Ordnung auf, die wir mit Hilfe der komponierenden Involutionen konstruierten (§ 18). Die Sätze, die von der Involution dritter Ordnung handeln, bereiten die Aufgabe vor: Ein Polarfeld dritter Ordnung zu konstruieren. Diese Aufgabe aber, deren Lösung sich auf die von uns in Nr. 217 gegebene Verallgemeinerung des Hesseschen Satzes stützt, geht über die Grenzen dieses Buches hinaus.



Herrosé & Ziemsen, Gräfenhainichen.

174530















QA471

B64

U.C. BERKELEY LIBRARIES



C037545404

MATH/STAT

- 805

