Axioma

Luis Vega
Universidad Nacional de educación a distancia

1. Por axioma, en el uso común, suele entenderse una proposición cuya verdad es tan obvia que escapa a una demostración. Este uso responde a una venerable tradición. Si nos fiamos de ella, adornan al axioma virtudes como las siguientes: el valor y la dignidad de un principio o fundamento del conocimiento; la evidencia interna que lo erige en verdad inmediata, necesaria y universalmente reconocida; y la condición de proposición no demostrable a partir de alguna otra previa o más elemental. Esta última característica, si bien relativizada, es la que ha prevalecido con el paso del tiempo y el desarrollo de la idea de demostración.

Hoy se tiende a pensar que una proposición no ostenta el título de axioma por su rango epistemológico o su evidencia. Ninguna proposición constituye de suyo un axioma. Se trata más bien de un papel que toca desempeñar a una proposición dentro de un conjunto de proposiciones ordenado en forma de teoría deductiva. Este orden -un orden parcial de implicación- dispone las proposiciones de la teoría en secuencias demostrativas. Lo cual supone una distinción entre las tesis iniciales, primitivas, y las demás tesis derivables como consecuencias lógicas de ese punto convenido de partida. Las tesis primitivas ejercen de axiomas y las tesis derivadas resultan teoremas de la teoría. Axioma y teorema son entonces nociones complementarias y recíprocas (a la manera de las de padre e hijo, amo y esclavo); ninguna de ellas tiene mucho sentido sin la otra y ambas se explican por referencia a la noción de demostración dentro de un cuerpo teórico de proposiciones.

En suma, la idea que nos hagamos de un axioma depende de la idea que tengamos de la axiomatización de una teoría. Esta proposición o aquella oficiarán de axiomas en razón de la estructura deductiva que impongamos a la teoría. Y, en fin, esta construcción o reconstrucción metódica podrá guiarse por motivos más o menos «nobles», como la determinación del ámbito de aplicación de la teoría, la elucidación de su sistema lógico y conceptual, la presentación convincente de los resultados conocidos, la conveniencia de una visión global o la simple facilidad para obtener consecuencias de la teoría, entre otros motivos varios.

2. Por regla general, axiomatizar un cuerpo teórico equivale a poner en limpio, delimitar y organizar como sistema deductivo el conjunto de proposiciones correspondiente. La explicitación y organización de las tesis teóricas trae consigo una elucidación y una disposición parejas de los conceptos teóricos, a 6n de que la estructura general de los conocimientos cubiertos o contemplados por la teoría sea relativamente diáfana. Como ya he sugerido, esta reconstrucción supone cuando menos una demarcación entre constituyentes primitivos y derivados. Si T es una teoría axiomatizada, todo término no definible por algún otro concepto más elemental en T será un término primitivo de T; toda proposición no demostrable a partir de alguna otra tesis de T será una tesis primitiva, un axioma, de T. De aquí se desprende el desiderátum de que los axiomas de T sean solidarios pero independientes. Cuando esto sp cumple, la supresión o negación de un axioma de T representa un cambio de teoría.

En esta perspectiva no hay gran diferencia entre un axioma y un postulado. Uno y otro tienen la condición de tesis primitivas. A veces se ha insistido en la presunción de la evidencia y necesidad de los axiomas por oposición al carácter convencional y pragmático de los postulados; o se ha creído ver en los axiomas principios que relacionan ideas teóricas, mientras que los postulados pasaban por ser supuestos de construcción o de existencia de objetos teóricos. Ambas consideraciones tendrían raíces en la antigua matemática griega, pero escaso fundamento. No obstante, la tradición de la geometría clásica sí contribuyó a tomar como axioma -o noción común- una proposición consistente en un principio lógico general y a considerar postulado al supuesto específico de una teoría o de una disciplina particular. Así, entre los axiomas figuran, por ejemplo, «dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí» y «el todo es mayor que una de sus partes». En realidad, si nos atenemos al criterio, la primera proposición podría ser un axioma de orden lógico, pero la segunda resulta un postulado propio de teorías sobre universos de discurso no infinitos (e. g., no se aplica al conjunto de los números naturales). Con todo, una idea similar late en modernos planteamientos de corte neopositivista (Woodger, 1939; Braithwaite, 1959), por ejemplo bajo la noción de sistema deductivo mixto. Sistema deductivo puro viene a ser, informalmente, el sistema cuyas tesis primitivas son proposiciones necesarias por su condición lógica y matemática; sistema deductivo impuro, el sistema cuyas tesis primitivas carecen de tal condición y de esa necesidad; sistema deductivo mixto, todo aquél que incluye entre sus tesis primitivas proposiciones de uno y otro tipo. Se ha dicho que los sistemas deductivos mixtos tienen una importancia máxima en las ciencias más avanzadas (matemáticas y físico-matemáticas). Es una opinión discutible: está en deuda con ciertos programas de fundamentación de la matemática y, de hecho, representa una aseveración normativa o desiderativa antes que una constatación. Por un lado, las proposiciones lógicas no aparecen como tesis constituyentes de las teorías científicas -a la manera de las proposiciones analíticas, que determinan el lenguaje de la teoría, o de los postulados que delimitan el alcance de la teoría y especifican su posible ámbito de aplicación-; los principios lógicos consisten más bien en un aparato de reglas de deducción subyacentes e implícitas. Por otro lado, el valor atribuido a la axiomatización de un cuerpo de conocimiento depende sustancialmente del valor que reconozcamos a las ideas de demostración y de sistema deductivo.

Desde el viejo Aristóteles se sabe que la aiiomatización es un recurso obligado a la luz de la noción misma de demostración: toda demostración efectiva de una proposición ha de partir de alguna otra tesis o premisa teórica no demostrada. De lo contrario, el discurso envolverá un círculo vicioso de prueba o un proceso interminable de retroimplicación que impedirán pronunciarse sobre la verdad concluyente de la proposición que hay que demostrar. Luegó también se ha considerado seriamente la posibilidad de que las teorías consistan en conjuntos infinitos de proposiciones. En esta perspectiva la axiomatización no sólo es un método preciso sino un recurso inevitable en orden a la determinación precisa y cabal de un cuerpo teórico no trivial. Si T es una teoría científica a la que puede corresponder un conjunto infinito de proposiciones, la axiomatización de T se hace necesaria para hacernos cargo de las tesis que puedan pertenecer a T, para saber lógicamente a qué atenernos en razón de tal teoría bien por lo que concierne a sus consecuencias tácitas o expresas, bien por lo que se refiere a las clases de objetos a las que se aplica.
A esta virtud principal cabe añadir algunas otras ventajas metodológicas y pragmáticas de la axiomatización. Contribuye, por ejemplo, a la lucidez de nuestros compromisos teóricos, a una mejor comprensión de los niveles de explicación y de la capacidad predictiva de la teoría considerada, a la simplificación de su uso y de su desarrollo deductivo. Sin embargo, la axiomatización no es una operación metódica neutra o inocente. También existen inconvenientes asociados a la axiomatización trivial o a la axiomatización prematura de un cuerpo de conocimientos. Las ventajas y los inconvenientes y, en general, los diversos servicios de la axiomatización dependen no sólo del estado cognoscitivo e institucional de la teoría en cuestión, sino también del método axiomático adoptado.
3. Muy sucintamente cabe reseñar cuatro tipos de método axiomático, con los que se relacionan cuatro clases familiares de teorías axiomáticas.
1. T es una teoría axiomática clásica si es un conjunto de proposiciones y hay un conjunto A tal que (1) A es un subconjunto finito y expreso de T (2) todos los miembros de A son proposiciones necesariamente verdaderas e indemostrables; (3) cualquier otra proposición de T está fundada deductivamente en A. Si a pertenece a A, es un axioma-l de T. El objetivo principal de este método es epistemológico. Se cifra en la organización sistemática del conocimiento de forma concluyente e incontestable. En la tradición de la «teoría clásica de la ciencia» (desde Aristóteles hasta, digamos, Bolzano) abundan las apelaciones a él.
II. T es una teoría axiomática abstracta si es un cónjunto de proposiciones y hay un conjunto A tal que (1) A es un subconjunto finito y expreso de T (2) los miembros de A son proposiciones más o menos intuitivas acerca de ciertas relaciones entre los elementos de algún sistema de objetos de referencia; (3) cualquier otra proposición de T es una consecuencia lógica de A. Si a pertenece a A, es un axioma 2 de T. Objetivos principales son ahora la organización hipotético-deductiva de una teoría, y la circunscripción de su ámbito de aplicación mediante la determinación (parcial y pertinente) de los conceptos considerados en el conjunto de axiomas. Este método fue sugerido por D. Hilbert a finales del pasado siglo en un primer intento de fundamentación de la geometría. A él se han acogido diversos ensayos de reconstrucción de fragmentos teóricos en las ciencias humanas y sociales, desde la lingüística (e.g.: L. Bloomfield, 1926) hasta la psicología (e.g.: C.L. Hull y colaboradores, 1940), pasando por la misma sociología (cfr. la minimuestra didáctica que ofrece H. Zetterberg, 1965).
III. T es una teoría axiomática formal si descansa en un sistema formalizado S tal que (1) S tiene definidas sus condiciones de formación lingüística, transformación deductiva e interpretación semántica, es decir: están definidos en conjunto de las fórmulas pertenecientes a S, así como los conceptos de derivación en S y modelo de S; (2) hay un subconjunto designado A que consta únicamente de las fórmulas primitivas o iniciales de S. Si a pertenece a A, es un axioma 3 de T. Si A es finito, T es una teoría axiomatizable -en sentido propio-. Si de A no cabe derivar contradicción alguna, T es una teoría deductivamente consistente. Si de A cabe derivar toda posible tesis de T, T es una teoría deductivamente completa o suficiente. Los objetivos principales son aquí el análisis y el control
metateóricos del conjunto de las proposiciones de T posiblemente infinito y cerrado bajo la relación de consecuencia. Este control, en el caso de las teorías científicas -Le. más allá de los cálculos y lenguajes lógicos elementales-, dista de ser efectivo: sólo cabría establecer la consistencia de T desde otra teoría aún más fuerte, y el ideal de compleción o suficiencia resulta inaccesible. Sin embargo, es el método más idóneo para analizar la idea de deducción y para considerar las posibilidades de aplicación teórica y de representación interteórica con que cuenta un sistema deductivo. Responde originariamente a un programa de formalización metamatemática alentado por Hilbert desde principios del presente siglo.
IV. T es una teoría axiomática estructural si consiste primordialmente en un núcleo o una estructura de nociones teóricas y matemáticas, desarrollada en el lenguaje de la teoría de conjuntos, y en un conjunto de posibles aplicaciones de esta estructura, y si T está formulada de modo que (1) no descansa en un conjunto de proposiciones formalizadas; (2) hay un conjunto finito y expreso A de condiciones que definen un predicado conjuntista característico de su estructura -pongamos por caso «ser un grupo (matemático)», «ser una mecánica clásica de partículas» o, incluso, «ser una economía productora de mercancías»-. Si a pertenece a A, es un axioma 4 de T. Son objetivos principales de este método la reconstrucción informal e interna de teorías que cuenten con una base operacional matemática .y con alguna exposición estándar o relativamente normalizada. El método fue adelantado por el tratamiento de teorías físico-matemáticas propuesto por J.D. Sneed (1971), aunque no falten sugerencias anteriores. Hoy sus aplicaciones quieren

salir de este ámbito y han empezado a ensayarse, por ejemplo, en teorías económicas clásicas (cfr. W. Stegmüller y otros: Philosophy of Economics, Nueva York/Heidelberg/Berlín, 1982).

Bibliografía

Una visión general de la axiomatización es la ofrecida por R. Blanché, L Axiomatique, París, 1967, 4.a edic. Para una consideración desde el punto de vista matemático, véase J. de Lorenzo, El método axiomático y sus creencias, Madrid, 1980. Una defensa ya tradicional del método en sus variantes abstracta y formal es la reiterada por M. Bunge en sus (1967), La investigación científica, Barcelona, 1969, c. 7, y (1973), Filosofía de la física, Barcelona, 1981, cc. 7 y 8. En cambio, C.U. Moulines, Exploraciones meta científicas, Madrid, 1982, presenta tanto el marco metodológico general como algunas aplicaciones de la nueva variante informal estructural. Algunas indicaciones sobre la axiomatización y sobre la organización teórica en general, en el caso de las ciencias sociales, pueden encontrarse en H. Zetterberg (1965), Teoría y verificación en sociología, Buenos Aires, 1968.