LECCIÓN CONDENSADA

13.1 Las premisas de la geometría

En esta lección

- Conocerás el **sistema deductivo** de Euclides para organizar las propiedades de la geometría
- Leerás los cuatro tipos de premisas para la geometría

En aproximadamente 600 A.C. los matemáticos comenzaron a usar el razonamiento lógico para deducir ideas matemáticas. El matemático griego Euclides (ca. 330–275 A.C.) creó un **sistema deductivo** para organizar las propiedades de la geometría. Comenzó con una simple recopilación de afirmaciones llamadas **postulados.** Consideró estos postulados como verdades evidentes que no requerían ser probadas. Después, Euclides demostró de manera sistemática cómo cada descubrimiento geométrico se deducía lógicamente de sus postulados y sus conjeturas previamente probadas, o **teoremas.**

Hasta ahora, has usado pruebas informales para explicar por qué ciertas conjeturas son verdaderas. Sin embargo, en tus pruebas a menudo te basaste en conjeturas no probadas. Una conclusión en una prueba es cierta si y solamente si tus premisas son ciertas y todos tus argumentos son válidos.

En este capítulo considerarás la geometría como lo hizo Euclides. Comenzarás con premisas y sistemáticamente probarás tus conjeturas anteriores. Una vez que hayas probado una conjetura, ésta se convierte en un teorema que puedes usar para probar otras conjeturas. Lee los cuatro tipos de premisas en la página 669 de tu libro.

Ya estás familiarizado con el primer tipo de premisa. Has aprendido los términos indefinidos—punto, recta, y plano—y tienes una lista de definiciones en tu cuaderno.

El segundo tipo de premisa son las propiedades de la aritmética, la igualdad, y la congruencia. Lee estas propiedades en tu libro. Has usado estas propiedades muchas veces para resolver ecuaciones algebráicas. En el ejemplo en tu libro se muestra la solución de una ecuación algebráica, junto con el motivo de cada paso. Este tipo de solución, paso por paso, es en realidad una prueba algebráica. La prueba algebráica en el siguiente ejemplo es el Ejercicio 9 en tu libro.

EJEMPLO | Prueba esta conjetura: Si $\frac{x}{m} - c = d$, entonces $x = m(c + d)$, siempre que $m \neq 0$.

▶ ***Solución***

$\frac{x}{m} - c = d$	Dado.
$\frac{x}{m} = d + c$	Propiedad aditiva de la igualdad.
$x = m(d + c)$	Propiedad multiplicativa de la igualdad.
$x = m(c + d)$	Propiedad conmutativa de la adición.

Al igual que usas la igualdad para expresar una relación entre los números, usas la congruencia para expresar una relación entre las figuras geométricas. Lee la definición de congruencia en la página 671 de tu libro. A continuación están las propiedades de la congruencia.

(continúa)

Propiedades de la congruencia

En las afirmaciones siguientes, "figura" se refiere a un segmento, un ángulo, o una forma geométrica.

Propiedad reflexiva de la congruencia

Cualquier figura es congruente consigo misma.

Propiedad transitiva de la congruencia

Si Figura A $\cong$ Figura B y Figura B $\cong$ Figura C, entonces Figura A $\cong$ Figura C.

Propiedad simétrica de la congruencia

Si Figura A $\cong$ Figura B, entonces Figura B $\cong$ Figura A.

El tercer tipo de premisa son los postulados de la geometría. Los postulados son afirmaciones básicas que son útiles y fáciles de aceptar. Lee todos los postulados de la geometría en las páginas 672–673 de tu libro.

Algunos de los postulados te permiten añadir rectas, segmentos, y puntos auxiliares a un diagrama. Por ejemplo, puedes usar el Postulado de rectas para construir una diagonal de un polígono, y puedes usar el Postulado de perpendiculares para construir una altitud en un triángulo.

Observa que la Conjetura de los ángulos correspondientes está formulada como un postulado, pero la Conjetura de los ángulos alternos internos no lo está. Esto significa que necesitarás probar la Conjetura de los ángulos alternos internos antes de que puedas usarla para probar otras conjeturas. De manera similar, las Conjeturas de congruencia SSS, SAS, y ASA se establecieron como postulados, pero SAA no, así que necesitarás probarla.

El cuarto tipo de premisa son las conjeturas geométricas anteriormente probadas, o teoremas. Cada vez que pruebas una conjetura, puedes renombrarla como un teorema y añadirlo a tu lista de teoremas. Puedes usar los teoremas de tu lista para probar las conjeturas.

LECCIÓN CONDENSADA

13.2 Planear una prueba de geometría

En esta lección

- Aprenderás las **cinco tareas** que tienen que ver con la **formulación de una prueba**
- Probarás varias conjeturas respecto a los ángulos
- Aprenderás cómo crear un **árbol genealógico lógico** para un teorema

Una prueba en geometría es una sucesión de afirmaciones que comienza con un conjunto dado de premisas y que conduce a una conclusión válida. Cada afirmacíon debe ser la continuación de las afirmaciones previas y debe estar respaldada por un motivo. El motivo debe provenir del conjunto de premisas que conociste en la Lección 13.1.

Para probar una conjetura, primero debes identificar lo que se te da y lo que necesitas demostrar. Esto es más fácil si la conjetura es una afirmación *condicional,* o de "si-entonces". La parte "si" es lo que se te da y la parte "entonces" es lo que debes demostrar. Si una conjetura no se da en esta forma, con frecuencia se puede reformular. Por ejemplo, la conjetura "Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes" puede reformularse como "Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes".

Una vez que hayas identificado lo que se te da y lo que debes demostrar, dibuja un diagrama que ilustre la información dada. A continuación, reformula la información "dada" y la información "por demostrar" en términos de tu diagrama. Después planea tu prueba, organizando tu razonamiento, ya sea mentalmente o por escrito. Finalmente, usa tu plan para escribir la prueba. En la página 679 de tu libro se resumen las tareas involucradas en la escritura de una prueba.

En la página 680 de tu libro se da una prueba de organigrama (*flowchart*) de la Conjetura de los ángulos opuestos por el vértice. Observa que la prueba usa solamente postulados y propiedades de la igualdad. Por lo tanto, es una prueba válida. Ahora puedes llamar a esta conjetura el Teorema de los ángulos opuestos por el vértice (VA) y añadirlo a tu lista de teoremas.

En la Lección 13.1, la Conjetura de los ángulos correspondientes (CA) se reformuló como un postulado, pero no es el caso de la Conjetura de los ángulos alternos internos (AIA). En el Ejemplo A en tu libro se analiza el proceso de las cinco tareas para probar la Conjetura AIA. Lee el ejemplo atentamente y después añade el Teorema AIA a tu lista de teoremas.

El Ejemplo B prueba la Conjetura de la suma de los ángulos de un triángulo. La prueba requiere usar el Postulado de las paralelas para construir una recta paralela a un lado del triángulo. Después de que leas y comprendas la prueba, añade el Teorema de la suma de los ángulos de un triángulo a tu lista de teoremas.

En las páginas 682–683 de tu libro, se da una prueba de la Conjetura del tercer ángulo. Lee la prueba y después añade el Teorema del tercer ángulo a tu lista de teoremas.

Un *árbol genealógico lógico* de un teorema hace una relación de todos los postulados en los que se apoya el teorema. En la página 683 se pasa entonces por el proceso de crear un árbol genealógico lógico para el Teorema del tercer ángulo. Lee el ejemplo y asegúrate de que lo comprendes.

(continúa)

El siguiente ejemplo es el Ejercicio 8 en tu libro. Se te lleva a través del proceso de las cinco tareas para probar el Inverso del Teorema de los ángulos alternos internos.

EJEMPLO Prueba el Inverso del Teorema AIA: Si dos rectas son intersecadas por una transversal, formando ángulos alternos internos congruentes, entonces las rectas son paralelas. Después crea un árbol genealógico lógico para el Inverso del Teorema AIA.

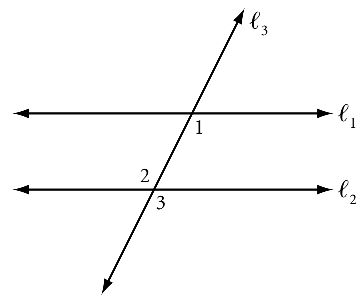
▶ ***Solución*** Tarea 1: Identifica lo que se te da y lo que debes demostrar.

Dado: Dos rectas intersecadas por una transversal para formar unos ángulos alternos internos congruentes

Demuestra: Las rectas son paralelas

Tarea 2: Dibuja y rotula un diagrama.

(Nota: Tal vez no te des cuenta de que rotular $\angle 3$ es útil, hasta que elabores tu plan.)



Tarea 3: Reformula la información dada y la por demostrar en términos de tu diagrama.

Dado: ℓ_1 y ℓ_2 intersecadas por la transversal ℓ_3; $\angle 1 \cong \angle 2$

Demuestra: $\ell_1 \parallel \ell_2$

Tarea 4: Elabora un plan.

Necesito probar que $\ell_1 \parallel \ell_2$. El único teorema o postulado que tengo para demostrar que las rectas son paralelas es el Postulado CA. Si puedo demostrar que $\angle 1 \cong \angle 3$, puedo usar el Postulado CA para concluir que $\ell_1 \parallel \ell_2$. Sé que $\angle 1 \cong \angle 2$. Según el Teorema VA, $\angle 2 \cong \angle 3$. Por lo tanto, según la propiedad transitiva de la congruencia, $\angle 1 \cong \angle 3$.

Tarea 5: Crea una prueba.

Prueba de organigrama

$\angle 1 \cong \angle 2$	→	$\angle 2 \cong \angle 3$	→	$\angle 1 \cong \angle 3$	→	$\ell_1 \parallel \ell_2$
Dado		Teorema VA		Propiedad transitiva		Postulado CA

He aquí un árbol genealógico lógico para el Inverso del Teorema AIA.

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{Postulado del par lineal}} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Teorema VA}} & & \boxed{\text{Postulado CA}} \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& \boxed{\text{Inverso del Teorema AIA}} &
\end{array}
$$

LECCIÓN CONDENSADA 13.3

Pruebas de los triángulos

En esta lección

- Probarás unas conjeturas que tienen que ver con las **propiedades de los triángulos**
- Aprenderás a escribir una **prueba de dos columnas**

En esta lección te concentrarás en las pruebas de triángulos. Lee la lección en tu libro. En ella se presenta el proceso de las cinco tareas para probar el Teorema de la bisectriz de ángulo y se te explica cómo escribir una **prueba de dos columnas.** Los ejemplos siguientes son los Ejercicios 1 y 2 en tu libro. Intenta escribir cada prueba por tu cuenta, antes de leer la solución.

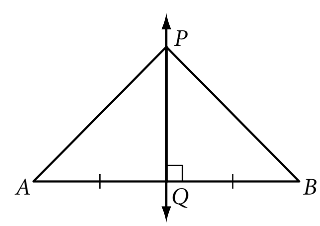
EJEMPLO A Escribe una prueba de organigrama del Teorema de la mediatriz: Si un punto está en la mediatriz de un segmento, entonces es equidistante a los extremos del segmento.

▶ ***Solución*** Tarea 1: Identifica lo que se te da y lo que debes demostrar.

Dado: Un punto en la mediatriz de un segmento

Demuestra: El punto es equidistante de los extremos del segmento

Tarea 2: Dibuja y rotula un diagrama para ilustrar la información dada.



Tarea 3: Reformula la información dada y la por demostrar, en términos del diagrama.

Dado: $\overleftrightarrow{PQ}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$

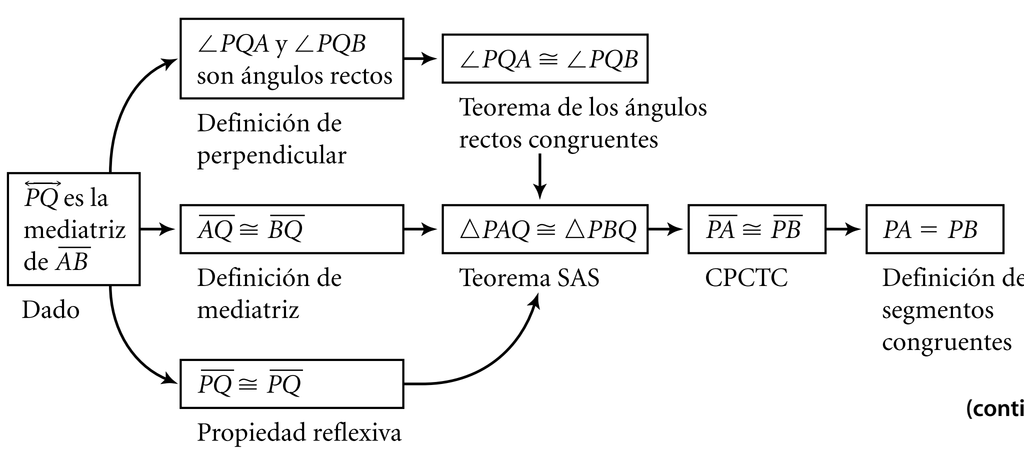
Demuestra: $PA = PB$

Tarea 4: Planea una prueba.

Puedo demostrar que $PA = PB$ si $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son partes correspondientes de triángulos congruentes. Sé que $\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$ y que $\angle PQB \cong \angle PQA$. También sé que $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$. Así pues, $\triangle PBQ \cong \triangle PAQ$ según el Teorema SAS. Por lo tanto, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ según CPCTC, así que $PA = PB$.

Tarea 5: Escribe una prueba basándote en tu plan.

Prueba de organigrama



(continúa)

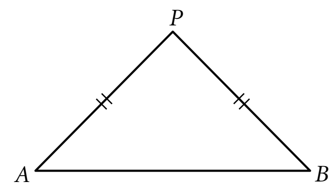
EJEMPLO B Escribe una prueba de dos columnas del Inverso del Teorema de la mediatriz: Si un punto es equidistante de los extremos de un segmento, entonces se encuentra sobre la mediatriz del segmento.

▶ ***Solución*** Tarea 1: Identifica lo que se te da y lo que debes demostrar.

Dado: Un punto que es equidistante de los extremos de un segmento

Demuestra: El punto se encuentra sobre la mediatriz del segmento

Tarea 2: Dibuja y rotula un diagrama para ilustrar la información dada.



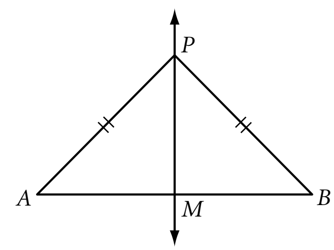
Tarea 3: Reformula la información dada y la por demostrar en términos del diagrama.

Dado: $PA = PB$

Demuestra: P se encuentra sobre la mediatriz de $\overline{AB}$

Tarea 4: Planea una prueba.

Puedo comenzar construyendo el punto medio M de $\overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{PM}$. Sé que $\overleftrightarrow{PM}$ es una bisectriz de $\overline{AB}$, de manera que sólo necesito demostrar que es perpendicular a $\overline{AB}$. Puedo demostrar que $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ según SSS. Por lo tanto, $\angle PMA \cong \angle PMB$. Como los ángulos forman un par lineal, son suplementarios, de manera que cada uno mide 90°. Así pues, $\overleftrightarrow{PM} \perp \overline{AB}$.



Tarea 5: Escribe una prueba basándote en tu plan.

Prueba: Afirmación	**Motivo**
1. Construye el punto medio M de $\overline{AB}$	**1.** Postulado del punto medio
2. Construye $\overleftrightarrow{PM}$	**2.** Postulado de las rectas
3. $PA = PB$	**3.** Dado
4. $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	**4.** Definición de la congruencia
5. $\overline{AM} \cong \overline{BM}$	**5.** Definición del punto medio
6. $\overline{PM} \cong \overline{PM}$	**6.** Propiedad reflexiva de la congruencia
7. $\triangle PAM \cong \triangle PBM$	**7.** Teorema SSS
8. $\angle PMA \cong \angle PMB$	**8.** CPCTC
9. $\angle PMA$ y $\angle PMB$ son suplementarios	**9.** Postulado del par lineal
10. $\angle PMA$ y $\angle PMB$ son ángulos rectos	**10.** Teorema de la congruencia y la suplementariedad
11. $\overleftrightarrow{PM} \perp \overline{AB}$	**11.** Definición de perpendicular
12. $\overleftrightarrow{PM}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$	**12.** Definición de la mediatriz

LECCIÓN CONDENSADA 13.4

Pruebas de los cuadriláteros

En esta lección

- Probarás unas conjeturas que tienen que ver con las **propiedades de los cuadriláteros**

Puedes probar muchos teoremas de cuadriláteros usando los teoremas de los triángulos. Por ejemplo, puedes probar algunas propiedades de los paralelogramos usando el hecho de que una diagonal divide un paralelogramo en dos triángulos congruentes. Este hecho es un ejemplo de un **lema** (*lemma*). Un lema es un teorema auxiliar que se usa específicamente para probar otros teoremas. En tu libro se da la prueba de este lema como un ejemplo. Intenta probarlo por tu cuenta, antes de ver la solución. Llámalo el Lema de una diagonal de un paralelogramo, y añádelo a tu lista de teoremas.

Investigación: Prueba de conjeturas sobre paralelogramos

En esta investigación probarás tres de tus conjeturas anteriores respecto a los paralelogramos. Antes de intentar probar cada conjetura, recuerda dibujar un diagrama, reformular lo que se te da y lo que debes demostrar en términos de tu diagrama, y después elaborar un plan.

Completa el Paso 1 en tu libro. (Sugerencia: La prueba será muy fácil si usas el Lema de una diagonal de un paralelogramo.)

Ahora intenta el Paso 2. (¡No olvides el lema!)

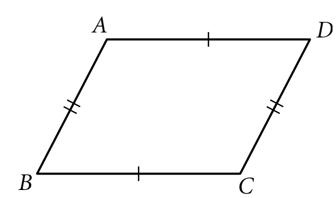
En el Paso 3 se te pide expresar y probar el Inverso de la Conjetura de los lados opuestos. El proceso de las cinco tareas se inicia a continuación.

Tarea 1: Identifica lo que se te da y lo que debes demostrar.

Dado: Un cuadrilátero con lados opuestos que son congruentes

Demuestra: El cuadrilátero es un paralelogramo

Tarea 2: Dibuja y rotula un diagrama para ilustrar la información dada.



Tarea 3: Reformula la información dada y la por demostrar en términos del diagrama.

Dado: El cuadrilátero $ABCD$ con $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

Demuestra: $ABCD$ es un paralelogramo

Tarea 4: Elabora un plan.

Trata de hacer este paso por tu cuenta. He aquí algunas sugerencias:

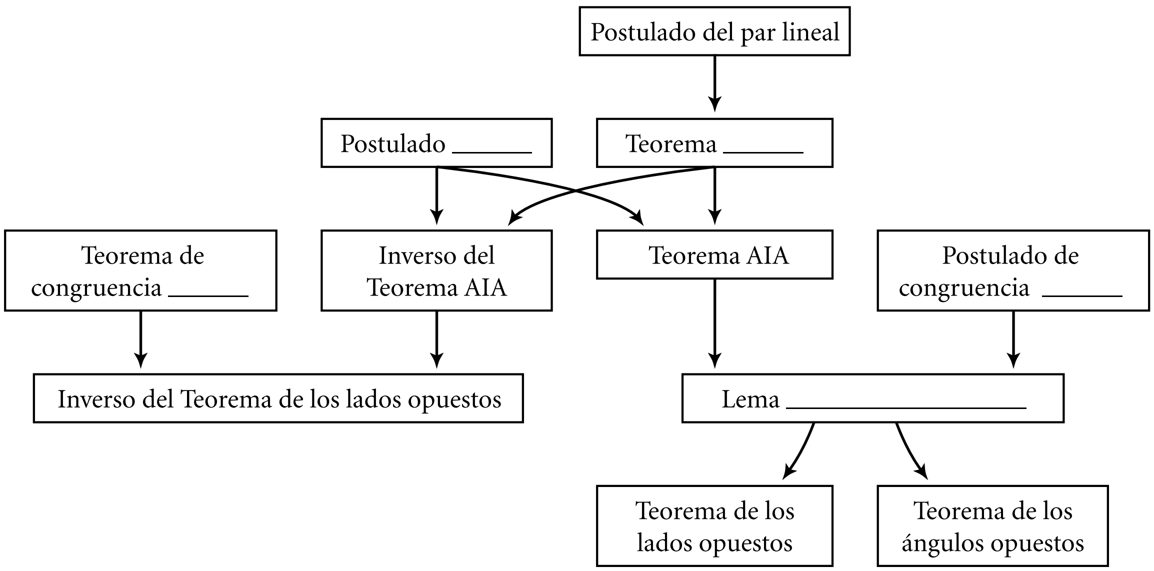
- Hasta ahora, todas las pruebas de los cuadriláteros han implicado dibujar una diagonal para formar triángulos. Considera usar ese método aquí.
- Necesitas demostrar que los lados opuestos de $ABCD$ son paralelos. Haz un repaso y encuentra los teoremas y postulados que puedan usarse para probar que dos rectas son paralelas. ¿Cuál crees que sería más útil en esta situación?
- ¿Cómo pueden ayudarte los teoremas de congruencia de los triángulos en tu prueba?

(continúa)

Tarea 5: Escribe una prueba.

Ahora, ¡haz la prueba por tu cuenta!

El Paso 4 te pide crear un árbol genealógico para los teoremas que probaste en esta investigación. El árbol se muestra a continuación. Trata de llenar los espacios en blanco.



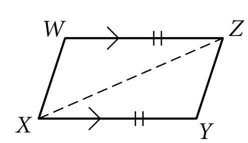
El siguiente ejemplo es el Ejercicio 2 en tu libro.

EJEMPLO Prueba la Conjetura de los lados opuestos paralelos y congruentes: Si un par de lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

▶ ***Solución***

Dado: $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$; $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$

Demuestra: *WXYZ* es un paralelogramo



Prueba:

Afirmación	**Motivo**
1. Construye $\overline{XZ}$	**1.** Postulado de rectas
2. $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$	**2.** Dado
3. $\angle WZX \cong \angle YXZ$	**3.** Teorema AIA
4. $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$	**4.** Dado
5. $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$	**5.** Propiedad reflexiva de la congruencia
6. $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	**6.** Postulado de congruencia SAS
7. $\angle WXZ \cong \angle YZX$	**7.** CPCTC
8. $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	**8.** Inverso del Teorema AIA
9. *WXYZ* es un paralelogramo	**9.** Definición de paralelogramo

LECCIÓN CONDENSADA

13.5 Prueba indirecta

En esta lección

- Aprenderás a demostrar afirmaciones matemáticas de **manera indirecta**

Considera esta pregunta:

¿Qué persona ganó un premio Nobel dos veces?

A. Sherlock Holmes

B. Leonardo da Vinci

C. Marie Curie

D. Tiger Woods

Tal vez no puedas responder de manera inmediata, pero puedes intentar eliminar algunas opciones, hasta que sólo quede una posibilidad. Sherlock Holmes no puede ser la respuesta correcta porque es un personaje ficticio. Leonardo da Vinci murió mucho antes de que se otorgaran los premios Nobel. Como no hay ningún premio Nobel de golf, también puedes eliminar a Tiger Woods. Esto deja una sola posibilidad, Marie Curie. La opción C debe ser la respuesta.

El tipo de razonamiento que usaste para responder esta pregunta con múltiples opciones se conoce como *razonamiento indirecto*. Puedes usar este mismo tipo de razonamiento para escribir una **prueba indirecta** de una afirmación matemática.

Para cualquier afirmación matemática, existen dos posibilidades: ya sea que la proposición sea cierta o que sea falsa. Para probar de manera indirecta que una proposición es cierta, se comienza suponiendo que no lo es. Entonces se usa el razonamiento lógico para demostrar que esta suposición conduce a una contradicción. Si una suposición conduce a una contradicción, debe ser falsa. Por lo tanto, puedes eliminar la posibilidad de que la afirmación no sea cierta. Esto deja una sola posibilidad, a saber, ¡que la afirmación es cierta!

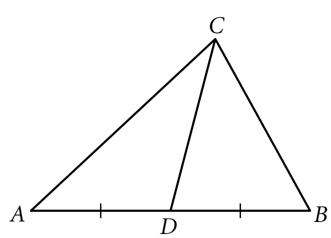
Los Ejemplos A y B en tu libro ilustran cómo funciona una prueba indirecta. Lee estos ejemplos atentamente. El ejemplo siguiente es el Ejercicio 7 en tu libro.

EJEMPLO Prueba que en un triángulo escaleno, la mediana no puede ser la altitud.

▶ ***Solución***

Dado: El triángulo escaleno ABC con la mediana $\overline{CD}$

Demuestra: $\overline{CD}$ no es la altitud a $\overline{AB}$



(continúa)

Prueba: Afirmación	**Motivo**
1. Supongamos que $\overline{CD}$ *es* la altitud a $\overline{AB}$	**1.** Supongamos que la proposición *no* es cierta
2. $\angle CDA$ y $\angle CDB$ son ángulos rectos	**2.** Definición de altitud
3. $\angle CDA \cong \angle CDB$	**3.** Teorema de los ángulos rectos congruentes
4. $\overline{CD}$ es una mediana	**4.** Dado
5. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$	**5.** Definición de una mediana
6. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$	**6.** Propiedad reflexiva de la congruencia
7. $\triangle CDA \cong \triangle CDB$	**7.** Postulado de congruencia SAS
8. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$	**8.** CPCTC

Pero la afirmación $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ contradice el hecho de que $\triangle ABC$ es escaleno. Así pues, la suposición de que $\overline{CD}$ es la altitud a $\overline{AB}$ es falsa. Por lo tanto, $\overline{CD}$ *no* es la altitud a $\overline{AB}$.

En el Capítulo 6 descubriste la Conjetura de la tangente, que establece que una tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado hasta el punto de tangencia. En esta investigación probarás esta conjetura de manera indirecta.

Investigación: Prueba de la Conjetura de la tangente

En la investigación de tu libro se muestran los pasos de una prueba indirecta de la Conjetura de la tangente. Completa la investigación por tu cuenta, y después compara tus respuestas con las que se muestran a continuación.

Paso 1 Postulado de las perpendiculares

Paso 2 Postulado del punto medio

Paso 3 Postulado de rectas

Paso 4 Dos motivos: $\angle ABO$ y $\angle CBO$ son ángulos rectos debido a la definición de perpendicular. $\angle ABO \cong \angle CBO$ debido al Teorema de los ángulos rectos congruentes.

Paso 5 Dos definiciones: definición de punto medio y definición de congruencia

Paso 6 Propiedad reflexiva de la congruencia

Paso 7 Postulado de congruencia SAS

Paso 8 CPCTC

Paso 9 Está dado que $\overleftrightarrow{AT}$ *es* una tangente.

Después de completar la investigación, añade el Teorema de la tangente a tu lista de teoremas.

LECCIÓN CONDENSADA

13.6 Pruebas de los círculos

En esta lección

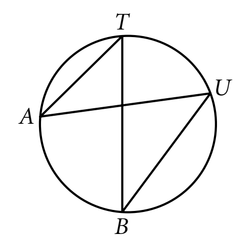
- Aprenderás el **Postulado de la suma de los arcos**
- Probarás unas conjeturas que tienen que ver con las propiedades de los círculos

Lee la Lección 13.6 en tu libro. En ella se introduce el Postulado de la suma de los arcos y se verifica que la Conjetura del ángulo inscrito puede considerarse un teorema. Los ejemplos siguientes son los Ejercicios 1 y 2 en tu libro. Intenta escribir las pruebas por tu cuenta, antes de leer las soluciones.

EJEMPLO A Prueba el Teorema de los ángulos inscritos que intersecan a los arcos: Los ángulos inscritos que intersecan a los mismos arcos o los arcos congruentes son congruentes.

▶ ***Solución*** Divide la afirmacíon en dos casos.

Caso 1: Los ángulos intersecan al mismo arco.



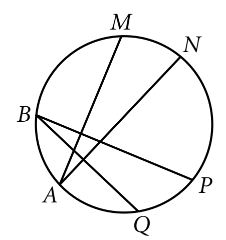
Dado: $\angle A$ y $\angle B$ intersecan a $\overset{\frown}{TU}$

Demuestra: $\angle A \cong \angle B$

Prueba de párrafo

Según el Teorema de los ángulos inscritos, $m\angle A = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{TU}$ y $m\angle B = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{TU}$. Según la propiedad transitiva de la igualdad, $m\angle A = m\angle B$. Según la definición de los ángulos congruentes, $\angle A \cong \angle B$.

Caso 2: Los ángulos intersecan a los arcos congruentes.



Dado: $\angle A$ interseca a $\overset{\frown}{MN}$; $\angle B$ interseca a $\overset{\frown}{PQ}$; $\overset{\frown}{MN} \cong \overset{\frown}{PQ}$

Demuestra: $\angle A \cong \angle B$

Prueba de párrafo

Como $\overset{\frown}{MN} \cong \overset{\frown}{PQ}$, $m\overset{\frown}{MN} = m\overset{\frown}{PQ}$ según la definición de los arcos congruentes. Según la propiedad de multiplicación, $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{MN} = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{PQ}$. Según el Teorema de los ángulos inscritos, $m\angle A = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{MN}$ y $m\angle B = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{PQ}$. Así pues, según la propiedad transitiva, $m\angle A = m\angle B$. Según la definición de los ángulos congruentes, $\angle A \cong \angle B$.

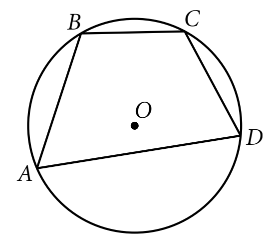
(continúa)

EJEMPLO B Prueba el Teorema del cuadrilátero cíclico: Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios.

► Solución

Dado: *ABCD* está inscrito en el círculo *O*

Demuestra: $\angle A$ y $\angle C$ son suplementarios; $\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios



Prueba: Afirmación	**Motivo**
1. $m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BD}$; $m\angle C = \frac{1}{2}m\widehat{BAD}$	**1.** Conjetura de los ángulos inscritos
2. $m\angle A + m\angle C = \frac{1}{2}m\widehat{BD} + \frac{1}{2}m\widehat{BAD}$	**2.** Propiedad aditiva
3. $m\angle A + m\angle C = \frac{1}{2}(m\widehat{BD} + m\widehat{BAD})$	**3.** Propiedad distributiva
4. $m\angle A + m\angle C = \frac{1}{2}$(medida del arco del círculo *O*)	**4.** Postulado de la suma de los arcos
5. $m\angle A + m\angle C = \frac{1}{2}(360°) = 180°$	**5.** Definición de la medida de un arco de un círculo
6. $m\angle A$ y $m\angle C$ son suplementarios	**6.** Definición de suplementario

Los pasos anteriores pueden repetirse para $\angle B$ y $\angle D$. Por lo tanto, los ángulos opuestos de *ABCD* son suplementarios.

LECCIÓN CONDENSADA

13.7 Pruebas de la semejanza

En esta lección

- Probarás unas conjeturas que tienen que ver con la semejanza

Las propiedades de la igualdad y la congruencia pueden extenderse a la semejanza. Lee las propiedades de la semejanza en la página 706 de tu libro. Para probar las conjeturas sobre la semejanza, necesitas añadir el Postulado de la semejanza AA (anteriormente, la Conjetura de la semejanza AA) a tu lista de postulados. Este postulado se presenta en tu libro.

En el ejemplo en tu libro, se muestra cómo usar el Postulado de la semejanza AA para probar la Conjetura de la semejanza SAS. La prueba es bastante complicada, así que léela atentamente, siguiéndola con lápiz y papel. Observa que, para avanzar del Paso 6 al Paso 7, se sustituye PB por DE en el denominador de la razón izquierda. Esto se puede hacer porque P se puso de manera que $PB = DE$.

Aquí se muestran las operaciones algebraicas necesarias para ir del Paso 9 al Paso 10.

$\frac{BC}{BQ} = \frac{BC}{EF}$ Paso 9.

$EF \cdot BC = BQ \cdot BC$ Multiplica ambos lados por $BQ \cdot EF$.

$EF = BQ$ Divide ambos lados entre BC.

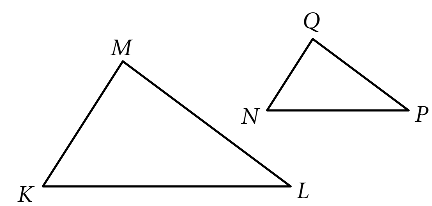
Una vez que hayas terminado con el ejemplo, puedes añadir el Teorema de la semejanza SAS a tu lista de teoremas.

Investigación: ¿Puedes probar la Conjetura de la semejanza SSS?

En esta investigación probarás la Conjetura de la semejanza SSS: Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Dado: Dos triángulos con lados correspondientes proporcionales

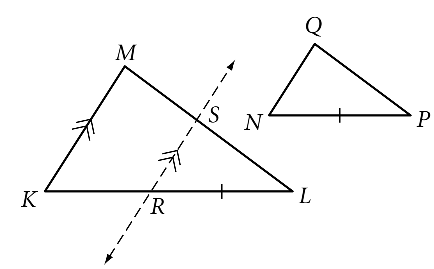
Demuestra: Los dos triángulos son semejantes



A continuación, lo que se te da y lo que debes demostrar se expresa en términos del diagrama mostrado.

Dado: $\triangle KLM$ y $\triangle NPQ$ con $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{PQ} = \frac{MK}{QN}$

Demuestra: $\triangle KLM \sim \triangle NPQ$



Trata de escribir un plan para la prueba. (Sugerencia: Usa una recta auxiliar como la del ejemplo de tu libro.) Después de escribir tu plan, compáralo con el siguiente.

Plan: Para demostrar que $\triangle KLM \sim \triangle NPQ$, necesitas demostrar que un par de ángulos correspondientes es congruente. (Demostraremos que $\angle L \cong \angle P$.) Después puedes usar el Teorema de la semejanza SAS para probar que los triángulos son semejantes. Usa el mismo método utilizado en el ejemplo. Localiza un punto R en $\overline{KL}$ de manera que $RL = NP$. Después, a través de R, construye una recta $\overleftrightarrow{RS}$ paralela a $\overline{KM}$.

(continúa)

Según el Postulado CA, $\angle SRL \cong \angle K$ y $\angle RSL \cong \angle M$. Esto significa que $\triangle KLM \sim \triangle RLS$ según el Postulado de la semejanza AA. Ahora, si puedes demostrar que $\triangle RLS \cong \triangle NPQ$, entonces $\angle L \cong \angle P$ según CPCTC. Como $\triangle KLM \sim \triangle RLS$, entonces $\frac{KL}{RL} = \frac{LM}{LS} = \frac{MK}{SR}$ según la definición de los triángulos semejantes (CSSTP). Sustituyendo RL por NP, tenemos $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{LS} = \frac{MK}{SR}$.

Combinando esto con el hecho dado de que $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{PQ} = \frac{MK}{QN}$, puedes obtener las proporciones $\frac{LM}{PQ} = \frac{LM}{LS}$ y $\frac{MK}{QN} = \frac{MK}{SR}$. Usando algo de álgebra, obtenemos $LS = PQ$ y $SR = QN$. Así pues, $\triangle RLS \cong \triangle NPQ$, según el Postulado de la congruencia SSS. Por lo tanto, $\angle L \cong \angle P$ según CPCTC, y entonces $\triangle KLM \sim \triangle NPQ$ según el Teorema de la semejanza SAS.

En el Paso 4 se da parte de una prueba de dos columnas. Completa los pasos necesarios, y luego escribe los pasos y los motivos necesarios para completar las pruebas. Mira las respuestas a continuación solamente si lo requieres.

Prueba:

Afirmación	**Motivo**
1. Ubica R de manera que $RL = NP$	**1.** Postulado de la duplicación de segmentos
2. Construye $\overleftrightarrow{RS} \parallel \overline{KM}$	**2.** Postulado de las paralelas
3. $\angle SRL \cong \angle K$	**3.** Postulado CA
4. $\angle RSL \cong \angle M$	**4.** Postulado CA
5. $\triangle KLM \sim \triangle RLS$	**5.** Postulado de la semejanza AA
6. $\frac{KL}{RL} = \frac{LM}{LS} = \frac{MK}{SR}$	**6.** CSSTP
7. $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{LS}$	**7.** Propiedad sustitutiva de la igualdad
8. $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{PQ}$	**8.** Dado
9. $\frac{KL}{NP} = \frac{MK}{SR}$	**9.** Propiedad sustitutiva de la igualdad
10. $\frac{KL}{NP} = \frac{MK}{QN}$	**10.** Dado
11. $\frac{LM}{LS} = \frac{LM}{PQ}$	**11.** Propiedad transitiva de la igualdad
12. $LS = PQ$	**12.** Propiedades multiplicativa y de la división de la igualdad
13. $\frac{MK}{SR} = \frac{MK}{QN}$	**13.** Propiedad transitiva de la igualdad
14. $SR = QN$	**14.** Propiedades multiplicativa y de la división de la igualdad
15. $\overline{LS} \cong \overline{PQ}$, $\overline{SR} \cong \overline{QN}$, $\overline{RL} \cong \overline{NP}$	**15.** Definición de la congruencia
16. $\triangle RLS \cong \triangle NPQ$	**16.** Postulado de la congruencia SSS
17. $\angle L \cong \angle P$	**17.** CPCTC
18. $\triangle KLM \sim \triangle NPQ$	**18.** Teorema de la semejanza SAS