DU MÊME AUTEUR :

Les Œuvres complètes d'Archimède. Traduites du grec en français avec une introduction et des notes. Gr. in-8° de LX-555 pages et 253 figures.

Les Coniques d'Apollonius de Perge. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes. Gr. in-8° de L-656 pages et 419 figures. Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences de Belgique.

Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes. Gr. in-8° de XCI-299 pages

Théodose de Tripoli. Les Sphériques. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes. Gr. in-8° de LII-120 pages et 71 figures.

Serenus d'Antinoë. Le livre de la Section du Cylindre et le livre de la Section du Cône. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes. Gr. in-8° de XXXVIII-170 pages et 102 figures.

PAPPUS D'ALEXANDRIE

LA COLLECTION MATHÉMATIQUE

ŒUVRE TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES

PAR

PAUL VER EECKE
INGÉNIEUR DES MINES
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL
COMMANDEUR DE L'ORDRE DE LÉOPOLD

TOME PREMIER

Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique

DESCLÉE DE BROUWER ET Cie

PARIS (VIIe) | BRUGES
76bis, RUE DES SAINTS-PÈRES | 22, QUAI AUX BOIS

1933

A

MADAME P. VER EECKE-HOORNAERT.

Ma chère Valentine,

Quel que soit l'accueil réservé à ce livre, il me survivra... et, afin qu'un souvenir ne soit jamais accordé à mon nom sans que le tien n'y soit associé, je te le dédie...

Paul.

PRÉFACE

Hoc erat in votis.
(*Horace*, liv. II, sat. VI.)

Pappus d'Alexandrie est le dernier représentant du génie mathématique au début de la période de décadence de la science hellène.

Une traduction intégrale en langue vulgaire de la *Collection mathématique* de cet éminent géomètre était attendue depuis la Renaissance, époque à laquelle cet ouvrage fut révélé dans une version latine encore incomplète et pleine d'obscurités, mais déjà suffisante pour avoir inspiré le puissant intérêt qui ne tarda pas à faire surgir des théories géométriques nouvelles, et à provoquer de savantes reconstitutions de travaux perdus des Anciens.

Bien qu'ayant fait l'objet d'une excellente édition critique depuis plus d'un demi-siècle, le texte grec originaire de Pappus est resté jusqu'ici lettre morte pour la plupart des mathématiciens qui ne connaissent cet auteur qu'en raison de quelques propositions qui lui sont attribuées couramment dans les ouvrages de géométrie.

C'est pourquoi, en présence de l'efflorescence de travaux qui marquent actuellement une réaction en faveur de l'histoire de la science dans tous ses domaines, et afin de combler une lacune dans la littérature scientifique, nous avons pensé que l'œuvre de Pappus, laquelle, indépendamment de sa haute valeur intrinsèque, constitue le document le plus précieux que l'on possède pour l'étude de l'histoire des mathématiques dans l'Antiquité, méritait d'être remise en lumière dans une traduction française.

La *Collection mathématique* nous offrant en grande partie un savant commentaire des travaux d'Archimède, d'Apollonius de Perge et de Théodose de Tripoli, la traduction que nous présentons est pour ainsi dire la suite obligée de nos traductions antérieures des œuvres de ces grands géomètres. Nous l'avons donc élaborée dans les mêmes principes, c'est-à-dire qu'elle est absolument littérale, de manière à conserver l'expression même de la pensée mathématique chez les Anciens, et qu'elle est accompagnée de notes nombreuses donnant la transposition moderne des passages obscurs ou arides des démonstrations.

Au moment d'abandonner au fidèle éditeur de nos précédents travaux un manuscrit qui nous a coûté bien des veilles en surcroît d'une fonction absorbante, nous fermons cette préface sur un témoignage de reconnaissance envers ceux dont les encouragements et les conseils ne nous ont jamais manqué : les mathématiciens et historiens des mathématiques Ettore Bortolotti, à Bologne, et Gino Loria, à Gênes, et les hellénistes J. Bidez, à Gand, et l'abbé A. Rome, à Louvain. Nous remercions enfin notre ami l'ingénieur G. Hertsens, qui a bien voulu nous prêter son talent pour établir, d'après nos esquisses, les figures justes qui régissent en grand nombre le texte de cet ouvrage.

Anvers, décembre, 1932.

Paul Ver Eecke

INTRODUCTION

Grandiaque effossis mirabitur ossa sepulcris.
(VIRGILE, *Géorgiques*, liv. II, v. 497.)

On ignore en quel lieu des pays grecs le géomètre Pappus a vu le jour, et on en est réduit aux conjectures en ce qui concerne l'époque où il a vécu. Une première indication, faisant remonter cette époque tout au plus avant la fin du IIe siècle de notre ère, résulte de ce que Pappus s'avère lui-même postérieur à Claude Ptolémée (1), non seulement en invoquant son autorité à plusieurs reprises dans la *Collection mathématique*, mais en ayant écrit un commentaire sur l'*Almageste* que ce grand astronome composa en l'année 140 après J.-C. Une autre indication, qui vise une limite inférieure, nous est donnée par Suidas (2), lexicographe grec du Ve siècle, dont la notice sur Pappus nous renseigne que ce géomètre aurait été le contemporain de Théon d'Alexandrie. Or, si l'on considère que Théon a observé deux éclipses, l'une de soleil, l'autre de lune, en l'année 364, comme le déclarent deux passages relevés dans ses œuvres par Delambre (3) ; qu'on doit, d'après Usener (4), lui attribuer des prolégomènes que l'on possède sur le *Canon* de Ptolémée, et enfin, que Théon vivait encore sous Théodose l'Ancien, qui régna de 379 à 395, la notice de Suidas entraînerait le recul de l'époque de Pappus jusqu'à la fin du

1. CLAUDE PTOLÉMÉE, *La Composition mathématique, traduite pour la première fois du grec en français sur les manuscrits de la Bibliothèque Impériale de Paris, par Halma (avec le texte grec en regard), et suivie des notes de Delambre.* Paris, 1813-1816, 2 vol. in-4°.

2. SUIDAS, *Lexicon graece, ex recognitione J. Bekkeri.* Beroli, 1854, in-8°. Voir vocable : Πάππος ἀλεξανδρεύς.

3. J.-B. DELAMBRE, *Histoire de l'Astronomie ancienne.* Paris, 1817, 2 vol. in-4°. Voir vol. II, pp. 590-591.

4. H. USENER, *Vergessene III*, dans *Rheinisches Museum*, 1873, vol. XXVIII, pp. 403-404.

IVe siècle. Un recul aussi prononcé soulève cependant des objections assez sérieuses pour croire à une erreur chronologique de la part de Suidas, dont le *Lexique* est considéré par la critique moderne comme une compilation de matériaux pris chez différents écrivains avec négligence et défaut de jugement. En effet, Pappus et Théon étant tous deux les auteurs d'un commentaire sur l'*Almageste* de Ptolémée, et ayant l'un et l'autre enseigné à Alexandrie, il est difficile d'admettre, ainsi que Hultsch (1) et Cantor (2) l'ont successivement fait remarquer, que, s'ils ont été contemporains, ils aient écrit en même temps sur un sujet identique sans faire aucune allusion à ce qui pouvait les rapprocher ou les séparer dans la manière de le traiter. Au contraire, si on observe, en outre, que le commentaire de Théon a tout l'air d'être une compilation de celui de Pappus, on incline à croire que ces ouvrages ont été composés à des époques différentes, et que Pappus, par conséquent un peu antérieur à Théon, n'appartient pas à la seconde moitié du IVe siècle.

Une troisième indication, qui corrobore du reste les objections qui précèdent, permet finalement d'assigner à Pappus une époque déterminée entre les deux limites considérées. C'est celle que fournit un manuscrit de la fin du Xe siècle, conservé à la bibliothèque de Leyde, contenant des gloses historiques et littéraires, et dans lequel une annotation marginale, placée en regard d'un passage relatif à Dioclétien, fait remarquer que Pappus aurait écrit sous cet empereur (3). Or, Dioclétien ayant régné de 284 à 305, il en résulterait que Pappus aurait vécu et probablement enseigné à Alexandrie pendant la dernière période gréco-romaine.

Enfin, si l'on rapproche cette dernière indication de ce que nous apprend encore le passage de son commentaire sur l'*Almageste*, dans lequel Pappus calcule « le lieu et l'instant de la conjonction donnant une éclipse arrivée en Tybi 1068 de l'ère de Nabonas-

1. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* Berolini, 1876, 1878, 3 vol. in-8°. Voir vol. III, préface, p. VII.
2. M. Cantor, *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literarische Abteilung*, vol. XXI, p. 72.
3. L'annotation marginale du manuscrit est : ἐπὶ τούτου ὁ Πάππος ἔγραφεν, Pappus a écrit sous lui (Dioclétien).

sar » (1), c'est-à-dire arrivée en octobre 320, conformément au calendrier julien (2), on peut raisonnablement admettre que Pappus vécut entre la fin du III^e siècle et la première moitié du IV^e siècle.

Les œuvres de Pappus qui nous ont été conservées par le temps ne nous apprennent rien au sujet de sa personne et des circonstances de sa vie, sinon qu'il eut un fils Hermodore auquel il s'adresse dans les préambules de deux de ses livres, et qu'il fut en relation d'amitié avec deux géomètres, Pandrosius et Megethius, qu'il mentionne incidemment, mais qui sont restés complètement inconnus ; de sorte que, le silence absolu des auteurs de son temps ne permettant pas davantage de reconstruire sa biographie, le souvenir et la reconnaissance des générations ne peuvent plus s'adresser qu'à un grand nom attaché à d'illustres travaux. Pappus partage d'ailleurs en cela le sort de tous les mathématiciens de l'Antiquité, dont l'existence, entièrement vouée à l'étude et aux découvertes, s'est écoulée à l'écart de la foule qui consacre les renommées et les agrémente parfois des mensonges innocents de la légende, ou dont la carrière, à l'exception peut-être de celle d'Archimède, a été parcourue en marge des événements du temps qui confèrent d'habitude aux hommes qui les ont menés ou subis cette gloire bruyante que célèbre l'histoire ordinaire. Sans doute, il a voyagé ; mais on ignore quels sont les foyers scientifiques qu'il a visités, quelles sont les écoles savantes qu'il a fréquentées, quels sont les maîtres dont il a pu suivre les leçons orales, et quels sont enfin les dépôts de manuscrits, déjà vieux de plusieurs siècles avant lui, où il a puisé les renseignements infiniment précieux qu'il nous a transmis pour l'histoire des mathématiques. On a en somme tout dit à son sujet quand on se borne à rappeler qu'il professa pendant un certain temps au Musée d'Alexandrie, qu'il jeta sur cette école, célèbre depuis Euclide, un dernier éclat dans un dernier effort pour enrayer un irrémédiable déclin, et qu'il occupa sans doute ses dernières

---

1. *Cl. Ptolemaei opera quae extant omnia edidit J.-L. Heiberg Lipsiae*, 1898-1903, t. I, p. 472 : οἷον, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πρώτου ἔτους Ναβονασσάρου τῆς ἐν τῷ $\overline{αξη}$ ἔτει κατ'Αἰγυπτίους Τυβὶ συνοδικῆς ἐκλειπτικῆς συζυγίας τόν τε τόπον καὶ τὸν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ χρόνον ἐθέλωμεν ἐπιγνῶναι.

2. A. Rome (abbé), *Sur la date de Pappus d'Alexandrie. (Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, t. XLVII, 1927, série A, p. 46.)

années à écrire des leçons dont il ne voulut pas que le fruit périsse avec lui.

Suidas accorde à Pappus le titre de philosophe, qui se justifiait probablement par des vues et des principes émis dans d'autres ouvrages, étrangers aux mathématiques, qui lui sont attribués, notamment sur la géographie et sur l'interprétation des songes. Mais, si la perte regrettable de ces ouvrages nous prive des renseignements qu'ils pouvaient fournir sur les tendances philosophiques de leur auteur, les écrits des alchimistes grecs, publiés au siècle dernier, sont cependant venus répandre quelque lumière sur les opinions religieuses de Pappus, et compléter ce que l'on savait déjà de la religion des derniers mathématiciens de l'Antiquité [1]. Ces écrits contiennent, en effet, un serment attribué à Pappus et, la curiosité de son esprit s'étant portée sans doute aussi sur cette science hermétique des Anciens qui est à l'origine de notre chimie, c'est dans les termes suivants qu'il aura été amené à le prêter au seuil d'une initiation à la formule secrète de quelque alliage métallique ou d'une composition médicinale : « Je te jure, qui que tu sois, que je déclare le Dieu unique quant à l'espèce, mais non quant au nombre, qui a fait le ciel et la terre, ainsi que la tétrade des éléments et les choses qui en émanent, qui a allié nos âmes douées de raison à des corps, qui est porté sur les chars des chérubins et célébré par les légions des anges » [2]. Ce serment présent un singulier mélange de christianisme et de paganisme ; car, à côté d'une affirmation monothéïste, jointe à une allusion voilée au mystère de la Trinité, laquelle exclut un

1. Paul Tannery, *Sur la religion des derniers mathématiciens de l'Antiquité.* (*Annales de Philosophie chrétienne*, t. XXXIV, 1896, pp. 26-36 ; ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery, publiés par J.-L. Heiberg et H.-G. Zeuthen.* Paris, vol. II, 1912, pp. 527-539).

2. *Collection des anciens Alchimistes grecs, publiés sous les auspices du ministère de l'Instruction Publique, par M. Berthelot, avec la collaboration de C.-Em. Ruelle.* Paris 1887-1888, 3 vol in-4°. Voir vol. I, p. 27 : Ὅρκῳ οὖν ὄμνυμί σοὶ τὸν μεγαν ὅρκον. ὅστις ἄν συ ᾖ, Θεόν φημι τὸν ἕνα τῷ εἴδει καὶ οὐ τῷ ἀριθμῷ, τὸν ποιήσαντα τὸν οὐρανὸν καὶ τὴν γῆν, τῶν τε στοιχείων τὴν τετρακτὺν καὶ τὰ ἐξ αὐτῶν, ἔτι δὲ καὶ τὰς ἡμέτερας ψυχὰς λογικάς τε καὶ νοερὰς ἁρμόσαντα σώματι, τὸν ἐπὶ ἁρμάτων χερουβικῶν ἐποχούμενον καὶ ὑπὸ ταγμάτων ἀγγελικῶν ἀνυμνούμενον.

Voir aussi : *Isidis, Christiani et Pappi philosophi Iusjurandum chemicum nunc primum graece et latine editum. Accedit historia sodalitatis chemicorum arcanae ex actis eruta. Scripsit Ch. Godf. Gruner.* Jenae, 1807, in-8°.

emprunt au judaïsme, il contient une adhésion païenne à la conception pythagorienne de la tétrade des éléments que l'on trouve à la base d'un premier essai d'une philosophie de la nature dans le *Timée* de Platon. Il nous apparaît donc comme ayant été rédigé dans le but de pouvoir être prêté indifféremment par un chrétien ou par un païen selon les circonstances, et il ne nous apprend rien de plus au sujet de la religion de Pappus, sinon qu'il aurait à un moment de sa vie été l'adepte de l'une des sectes, manichéenne ou autre, qui divisaient encore le christianisme au IVe siècle, tout en ayant conservé personnellement des attaches païennes. Cette supposition répond en quelque sorte à la crise morale qui règnait à l'époque où Pappus a vécu, durant laquelle Saint Augustin déplore en propres termes « que les idoles chassées des temples soient restées dans les cœurs », et elle se justifie plus ou moins par le milieu dans lequel Pappus résida assez longtemps, c'est-à-dire la ville d'Alexandrie, où le paganisme conserva, même dans les chaires de l'École, des partisans fidèles qui purent le pratiquer ouvertement jusqu'à l'époque des lois prohibitives de Théodose, en 399, et où beaucoup de ceux qui l'avaient abjuré gardaient une propension secrète pour le culte aboli, en consultant les devins et en pratiquant l'astrologie.

***

L'œuvre capitale de Pappus est celle qui nous est parvenue sous le titre de *Collection mathématique*. (1) Elle constitue un vaste recueil de propositions extraites d'un grand nombre d'ouvrages, presque tous perdus aujourd'hui, lequel, loin de présenter le caractère d'une compilation ordinaire, dépasse le cadre d'un simple commentaire. Pappus ne s'y borne pas, en effet, à nous exposer de remarquables propositions dues à ses devanciers en les accompagnant d'une foule de lemmes destinés à éclaircir les

1. La plupart des manuscrits, et surtout les plus anciens, sont intitulés simplement *La Collection* (συναγωγή), tandis que les copies postérieures portent un titre plus complet, au pluriel : *Les Collections mathématiques* (μαθηματικαὶ συναγωγαί). Il y a lieu cependant de s'en tenir au singulier en raison de ce que Pappus l'emploie lui-même dans ses renvois aux divers livres de son ouvrage, comme par exemple dans la phrase : ἐν τῷ τρίτῳ τούτῳ τῆς συναγωγῆς βιβλίῳ.

passages difficiles de leurs démonstrations, mais il en donne fréquemment des démonstrations différentes ; il les étend à des cas particuliers ou analogues, les applique à la solution de problèmes nouveaux ou déjà résolus antérieurement d'une autre manière, et complète le tout au moyen de nombreuses propositions entièrement nouvelles tirées de son propre fonds, lesquelles indiquent des recherches déjà fort avancées dans ce que nous appelons maintenant la géométrie supérieure. L'ouvrage ne paraît pas avoir été conçu suivant un plan déterminé. Bien qu'une partie soit consacrée exclusivement à des questions astronomiques, qu'une autre affirme l'idée de traiter méthodiquement des propriétés comparatives des surfaces planes de même périmètre et des figures solides de même surface, et qu'une troisième partie vise particulièrement des questions de mécanique pure et appliquée, tout le reste se présente comme une juxtaposition de questions géométriques les plus diverses n'ayant presque aucun lien entre elles. Ce défaut d'unité dans l'ouvrage, et cette absence de coordination entre ses diverses parties, donnent l'impression qu'il a été écrit au cours de plusieurs années, en souvenir durable des leçons que le dernier maître ayant illustré l'École d'Alexandrie fut appelé à donner devant un auditoire chez lequel la tradition scientifique commençait déjà à se perdre, et auquel il fallait donc rappeler la fécondité des méthodes des anciens geomètres, exposer leurs principales découvertes, et en faciliter l'intelligence au moyen de nombreux lemmes auxiliaires, non démontrés explicitement dans l'ouvrage classique des *Éléments* d'Euclide.

La *Collection mathématique* se composait originairement de huit livres ; le premier est entièrement perdu ; le second ne nous est parvenu qu'en partie et dans un état fort altéré, et les six derniers seuls nous ont été intégralement conservés.

Le second livre est consacré, comme l'était probablement aussi le premier, à la pratique du calcul ; art que les Grecs désignaient sous le nom de logistique pour le distinguer de la science proprement dite des nombres, à laquelle ils réservaient le nom d'arithmétique.

Le fragment qui nous reste du second livre constitue tout à la fois une analyse et un commentaire d'un ouvrage actuellement perdu, dans lequel Apollonius de Perge avait établi une numération nouvelle des nombres élevés. On sait que, bien avant lui, Archimède avait déjà étendu l'ancien système numéral des Grecs en procédant par périodes de dix mille myriades, c'est-à-dire en adoptant une succession de nombres par octades ou groupes de huit chiffres, et que sa méthode, exposée dans un ouvrage malheureusement perdu adressé à Zeuxippe, nous est toutefois révélée dans son *Arénaire*, où elle est appliquée au calcul du nombre immense de grains de sable que pourrait contenir la sphère céleste (1). La méthode d'Apollonius, qui triompha dans l'Antiquité au point que l'ouvrage dans lequel il l'avait exposée acquit une autorité analogue à celle dont les *Éléments* d'Euclide jouissaient en géométrie, procède, au contraire, par périodes de myriades simples, c'est-à-dire qu'elle adopte une succession de nombres par tétrades ou groupes de quatre chiffres. Le fragment du second livre de Pappus commence au milieu d'une proposition, la quatorzième, et ne nous présente plus que onze lemmes, qui reprennent certains théorèmes parmi les vingt-six sur lesquels Apollonius avait fondé son système, et les vérifient numériquement, c'est-à-dire les dégagent de l'intuition effective qu'ils tiraient de la représentation géométrique utilisée encore partiellement dans les démonstrations d'Apollonius. Ces propositions d'Apollonius réglaient, d'une part, la multiplication des unités, des dizaines, des centaines entre elles et, d'autre part, la multiplication d'un nombre par des dizaines, des centaines et des milliers de myriades d'un ordre quelconque, après avoir établi que, dans la multiplication de deux myriades d'ordre quelconque, les ordres s'ajoutent. Pappus termine son analyse en reproduisant les longs calculs d'une espèce de récréation mathématique, qu'Apollonius présente, comme exemple d'application de sa méthode, en se proposant de trouver le produit formé en multipliant ensemble les trente-huit lettres d'un vers grec prises pour leur valeur numérique. Enfin, le livre se ferme sur une seconde application de la méthode à un autre vers grec ; simple exercice qu'il n'y a plus lieu d'attribuer à Apollonius, mais à Pappus lui-même, ou à quelque scoliaste interpolateur. La lecture du second

1. *Les Œuvres complètes d'Archimède traduites du grec en français, avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke.* Desclée De Brouwer et Cie, Paris-Bruxelles, 1921, gr. in-8°. Voir l'Arénaire, pp. 353-377.

livre est assez pénible en plusieurs endroits, et la rédaction de certaines propositions laisse assez à désirer pour avoir provoqué le doute sur leur authenticité, notamment de la part de P. Tannery [1]. Quant à la partie perdue du second livre, sa reconstitution a donné lieu à certaines conjectures de la part de Nesselman [2].

***

Le troisième livre se compose de plusieurs parties. La première s'ouvre sur un long préambule adressé à Pandrosius, géomètre resté inconnu, et dont l'enseignement devait être assez médiocre, puisque Pappus attire son attention sur l'ignorance de certains de ses élèves au sujet de la nature des problèmes considérés au point de vue des constructions géométriques permettant de les résoudre d'une manière absolument rigoureuse. Il lui expose, en effet, que les problèmes sont de trois espèces différentes : ceux de la première sont appelés problèmes plans, parce que leur solution n'exige que l'emploi de la règle et du compas, c'est-à-dire de lignes qui trouvent leur origine dans le plan ; ceux de la seconde espèce, qu'il appelle problèmes solides, parce que leur solution exige l'intervention de sections de solides, c'est-à-dire de sections coniques ; enfin, ceux de la dernière espèce, qu'il nomme problèmes linéaires ou grammiques, parce que leur solution fait intervenir des lignes autres que les courbes du second degré, c'est-à-dire des lignes qui trouvent leur origine dans des surfaces irrégulières ou dans des mouvements combinés, telles que les spirales, les quadratrices, les conchoïdes et les cissoïdes. Pappus part de ces observations pour exposer une série de solutions, les unes approchées, les autres rigoureuses, du problème, célèbre dans l'Antiquité, des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données ; problème déjà posé, mais non résolu, quatre cents ans avant J.-C., par Hippocrate de Chio, qui lui avait subordonné

1. Paul Tannery, *L'arithmétique des Grecs dans Pappus*. (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1880, t. III, pp. 351-371 ; ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. I, pp. 80-105).

2. G.-H.-F. Nesselman, *Die Algebra der Griechen*. Berlin, 1842, p. 129.

la solution du fameux problème déliaque de la duplication du cube, en énonçant que, si l'on pouvait insérer deux lignes droites moyennes proportionnelles entre le côté du cube donné et le double de ce côté, la première de ces deux lignes serait le côté du cube cherché. Pappus commence toutefois par réfuter l'exactitude d'une solution par la règle et le compas soumise à son examen par un géomètre assez inexpérimenté, dit-il, pour avoir tenté une solution plane de ce problème dont la nature est tout à la fois solide et linéaire, et pour lequel il y avait donc lieu d'invoquer des sections coniques ou certaines courbes transcendantes (1).

La longue critique que Pappus fait de cette solution, et à laquelle il nous dit avoir été amené sur les instances de ses amis, notamment du philosophe Hiérus, également resté inconnu, exige subsidiairement la démonstration de quatre petites propositions concernant des relations d'inégalité et d'identité entre des droites données (2), pour montrer que, si les constructions employées ne permettent pas de déterminer les deux moyennes proportionnelles d'une manière rigoureuse, elles en donnent cependant une mesure indéfiniment approximative. Cette critique montre, de plus, ce qui paraît avoir échappé à Pappus et probablement aussi à ses devanciers, que ces constructions, dues à un auteur qu'il ne nomme malheureusement pas, portent en germe la méthode du calcul graphique, en présentant la correspondance arithmétique remarquable de permettre, comme l'a montré Paul Tannery (3), de calculer des valeurs indéfiniment rapprochées de racines cubiques de nombres.

Pappus poursuit la première partie du livre en exposant les solutions des deux moyennes proportionnelles dues à quatre géomètres ayant reconnu nécessaire l'intervention de courbes du

1. L'impossibilité de résoudre les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle d'une manière entièrement rigoureuse par la règle et le compas a été démontrée pour la première fois par P.-L. Wantzel dans son mémoire : *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre par la règle et le compas*. (*Journal de Mathématiques*, t. II, 1837, pp. 366-372).

2. La première de ces quatre petites propositions démontre géométriquement l'identité : $\dfrac{a\,(n-1)}{a\,(n-2)+\frac{1}{n}\,a}=\dfrac{a\,n}{a\,(n-1)}$.

3. Voir l'étude de Paul Tannery mentionnée à la page précédente, intitulée: *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus*, pp. 87-90.

second degré ou de degré supérieur, mais qui, en présence de la difficulté de tracer convenablement ces courbes dans le plan, ont cependant inventé des solutions « en faisant usage d'instruments pour exécuter manuellement et commodément la construction ».

La première de ces solutions instrumentales ou mécaniques, c'est-à-dire partiellement empiriques, est celle que Pappus emprunte à Eratosthène de Cyrène dans la lettre que ce géomètre adresse au roi Ptolémée au sujet de la duplication du cube. Le matériel utilisé se compose d'un petit cadre indéformable, en forme de parallélipipède rectangulaire oblong, dans lequel sont disposés trois triangles rectangulaires égaux dont le premier est fixe et les deux autres mobiles dans les rainures des côtés longs du cadre. Le déplacement par tâtonnement des triangles mobiles donne lieu à la formation d'une série de triangles semblables et de droites en progression géométrique. Il y a lieu de remarquer que l'exposé de Pappus diffère assez bien de celui d'Eratosthène tel que nous l'a conservé Eutocius d'Ascalon dans son commentaire sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède, où l'ordre dans lequel sont disposés le triangle fixe et les deux triangles mobiles n'est pas le même (1).

La seconde solution instrumentale est celle de Nicomède. Elle fait intervenir une courbe, la conchoïde qui porte son nom, pour le tracé de laquelle il inventa un appareil composé de deux règles à stylets, et dont Eutocius nous a laissé une description (2).

La troisième solution est celle de Héron d'Alexandrie, basée sur le tracé empirique, au moyen de la règle, d'une droite qui, passant par un point déterminé, coupe les deux côtés d'un angle droit de telle sorte que les distances d'un autre point donné aux extrémités des segments découpés sur les côtés de l'angle droit soient égales.

Enfin, la quatrième solution est celle que Pappus propose lui-même pour trouver, non seulement le cube double d'un cube donné, mais plus généralement le cube multiple quelconque d'un

1. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, iterum edidit J.-L. Heiberg*, Lipsiae, 1913, 3 vol. in-8°. Vol. III : *Eutocii Commentarii in libros de Sphaera et Cylindro*, pp. 89-98.
2. EUTOCIUS, *ibidem*, p. 99.

cube donné. La solution de Pappus n'est cependant pas entièrement originale ; car Eutocius, qui la reproduit dans son commentaire mentionné plus haut [1], fait remarquer qu'elle diffère peu de celle de Sporos qu'il nous rapporte, et que toutes deux semblent d'ailleurs dériver de celle de Dioclès, également rapportée par Eutocius [2], obtenue au moyen de la courbe qui porte son nom, la cissoïde [3].

La seconde partie du troisième livre appartient à l'arithmétique spéculative, et est entièrement consacrée à la théorie pythagorienne de la médiété [4], ou ensemble de trois nombres tels que deux de leurs différences soient dans un même rapport que deux de ces nombres. Cédant à la tendance archaïsante qui caractérise ses travaux, Pappus traite des dix médiétés considérées jusqu'à lui au moyen de l'appareil géométrique qui, enveloppant l'arithmétique théorique pendant toute la première période de la science grecque, revêt particulièrement les propositions arithmétiques du septième livre des *Éléments* d'Euclide. Il déroge cependant quelque peu à cette discipline en donnant à la suite de chacune des démonstrations géométriques des médiétés quelques exemples exprimés au moyen de séries de trois nombres concrets. Il commence par définir d'une double manière les trois premières médiétés déjà connues par Pythagore, Platon et Aristote sous les noms de médiété arithmétique, médiété géométrique et médiété sous-contraire [5] à la médiété arithmétique ; cette dernière n'ayant été dénommée médiété harmonique que plus tard par Philolaos d'après l'opinion que Nicomaque de Gérase émet dans son *Introduction arithmétique* [6], ou par celles d'Archytas de Tarente et d'Hippias d'après ce que Jamblique nous rapporte dans son commentaire sur l'ouvrage de Nicomaque que nous venons de mentionner [7].

1. Eutocius, *ibidem*, p. 71.
2. Eutocius, *ibidem*, p. 67.
3. Courbe définie par l'équation : $y^2 (R + x) = (R - x)^3$.
4. μεσοτῆς.
5. ὑπεναντία.
6. *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae libri II. Recensuit Ricardus Hoche. Accedunt codicis cizencis problemata arithmetica.* Lipsiae, 1866, in-8°. Voir liv. II, chap. XXVI, p. 135.
7. *Jamblichi in Nicomachi Arithmeticam Introductionem liber edidit H. Pistelli.* Lipsiae, 1894, in-8°, p. 141.

Après les définitions vient un ensemble de propositions préliminaires relatives à la construction géométrique du terme moyen de chacune de ces trois médiétés ; propositions qui permettront de résoudre d'abord la proposition 15, dans laquelle il s'agit de déterminer une série de cinq droites de longueurs décroissantes, comportant simultanément les médiétés arithmétique, géométrique et harmonique, et de résoudre ensuite la proposition 16, dans laquelle il faut trouver six droites minima qui, tout en ayant leur origine dans un demi-cercle, établissent également les trois médiétés. Le chapitre suivant s'occupe du second groupe de trois médiétés inventées, d'après Jamblique, par Eudoxe de Cnide, et qui correspondent par conséquent, conjointement avec les trois médiétés précédentes, aux six combinaisons possibles lorsqu'on considère dans un ensemble de trois nombres les différences du nombre moyen avec chacun des nombres extrêmes. Ces trois médiétés s'appellent la quatrième ou sous-contraire par rapport à la médiété harmonique, la cinquième ou sous-contraire à la médiété géométrique, et la sixième ou également sous-contraire à la médiété géométrique. Le calcul du terme moyen de ces deux dernières médiétés exige la solution numérique de l'équation du second degré ; ce qui implique donc la connaissance de cette solution dès l'époque d'Eudoxe. D'après les renseignements vagues que Pappus nous donnera plus tard dans son septième livre, ces six premières médiétés faisaient l'objet de deux livres composés par Eratosthène sous le titre : *Des Médiétés* (1) ; livres actuellement perdus dans lesquels Paul Tannery suppose qu'il était traité des lieux des points tels que leurs distances à trois droites données forment une médiété, et que ces lieux devaient donc être constitués par des coniques (2). Le chapitre se poursuit dans un exposé des quatre dernières médiétés dénommées simplement la septième, la huitième, la neuvième et la dixième, inventées plus tard par les néo-pythagoriciens Temnonidès et Euphranor, mais en tout cas avant l'époque de Nicomaque, puisque ce dernier les expose au moyen de simples vérifications numériques dans son *Introduc-*

1. περι μεσοτήτων.
2. P. Tannery, *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus*. (*Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. I, p. 91).

tion arithmétique [1]. Reprenant enfin l'ensemble des dix médiétés, Pappus se propose de faire dériver chacune d'elles de la progression géométrique ; mais, les huit longues propositions qu'il présente dans ce but ne résolvent la question que pour huit médiétés, s'étant aperçu sans doute au cours de son travail que le problème ne se pose ni pour la médiété arithmétique, ni pour la septième médiété dans lesquelles la relation entre les termes est linéaire. D'autre part, les formules qui tendent à obtenir trois nombres entiers constituant une médiété donnée, et que Pappus établit en procédant, suivant les cas, par permutation, composition, division et conversion de la proportion qui définit la médiété, présentent pour ces huit propositions des solutions intéressantes d'analyse indéterminée du second degré.

La troisième partie du troisième livre a le mérite historique de nous avoir conservé, sinon en entier, du moins dans un large extrait, l'œuvre du géomètre Erycinus dont rien, pas même le nom, ne nous est autrement parvenu. Les quinze propositions (prop. 28 à 42) que Pappus nous rapporte sous la dénomination de *paradoxes* [2] d'Erycinus, ne constituent en réalité qu'une petite contribution à la géométrie du triangle, en étendant singulièrement la portée de la proposition XXI du premier livre des *Éléments* d'Euclide, laquelle démontre que la somme des droites qui relient un point intérieur du triangle aux extrémités d'un côté est plus petite que la somme des deux autres côtés [3]. C'est ainsi que, dans leur ensemble, les propositions 29, 30 et 31 démontrent que dans tout triangle non équilatéral, ou isocèle ayant la base plus petite que les côtés égaux, on peut déterminer une zone triangulaire, à partir du sommet, dans laquelle tous les points trouvent sur la base deux points correspondants tels que la somme des deux droites menées à l'intérieur du triangle d'un

1. *Nicomaque*, édit. précitée de Hoche, liv. II, chap. XXVIII, pp. 142-144.
2. παράδοξος, ce qui est étrange, étonnant ou contraire à l'opinion commune.
3. La proposition 21 du premier livre des *Éléments* d'Euclide est exprimée comme suit : « Si des extrémités d'un côté d'un triangle on mène deux droites qui se rencontrent dans ce triangle, ces deux droites seront plus courtes que les deux autres côtés du triangle, mais elles comprendront cependant un angle plus grand ». (*Les Œuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours, par F. Peyrard.* Paris 1814-1818, 3 vol. in-4°. Voir vol. I, p. 36.

point à ses deux correspondants soit égale ou supérieure à la somme des deux autres côtés du triangle ; et la démonstration s'étend ensuite au cas du triangle isocèle dont la base est plus grande que les côtés égaux. Renchérissant maintenant sur ces propositions, et présentées comme étant encore plus paradoxales, les propositions 32 et 33 démontrent que ce n'est pas seulement la somme des deux droites intérieures qui peut être égale ou supérieure à la somme des autres côtés du triangle, mais que les deux droites intérieures peuvent aussi être déterminées de manière à être respectivement égales ou supérieures aux deux autres côtés du triangle ; tandis que la proposition 34, revenant sur les propositions précédentes, qui comparent des droites intérieures et extérieures en tant que sommes, démontre que les droites intérieures peuvent être déterminées de manière que leur somme soit dans un rapport donné avec la somme des droites extérieures. Les propositions suivantes étendent au quadrilatère, et en général au polygone quelconque, les considérations de droites intérieures qui ont été faites pour le triangle. C'est ainsi que la proposition 35 montre qu'il est possible d'établir sur un côté d'un quadrilatère deux et trois droites intérieures dont la somme est plus grande que la somme des trois autres côtés, et que l'ensemble des propositions 36 et 37 montre la possibilité d'avoir une somme de droites intérieures égale à la somme d'un nombre quelconque de droites qui les entourent. Les propositions 38 et 39 reviennent sur les trois propositions précédentes au moyen de nouvelles démonstrations plus élégantes, n'appartenant probablement plus à Erycinus, mais à Pappus lui-même, qui termine cette partie de son troisième livre au moyen de trois propositions assez intéressantes, en corrélation avec les propositions paradoxales d'Erycinus. En effet, la première proposition (prop. 40) démontre la possibilité de construire un parallélogramme constituant une partie déterminée d'un parallélogramme donné et dont les côtés soient respectivement dans un rapport donné avec les côtés de ce dernier. La seconde proposition (prop. 41) résout le problème de construire un triangle plus petit qu'un triangle donné et dont les côtés soient respectivement plus grands que les côtés de ce dernier triangle. Enfin, dans la troisième proposition (prop. 42), il s'agit de trouver un triangle constituant une partie déterminée d'un triangle donné et dont les côtés soient respectivement dans un rapport donné avec les côtés du triangle donné.

La quatrième partie du livre III est consacrée aux cinq corps réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, l'icosaèdre et le dodécaèdre pentagonal. La plupart des propriétés individuelles et certaines propriétés comparatives de ces polyèdres, conçus par l'école pythagorienne, et qui tiennent la place que l'on sait dans la philosophie de la nature du *Timée* de Platon, étaient connues depuis longtemps, et leur étude au point de vue de leur inscriptibilité dans la sphère devait déjà apparaître comme épuisée complètement dans les propositions 13 à 17 du treizième livre des *Éléments* d'Euclide ; de sorte que l'on se demande au premier abord ce que Pappus peut y avoir ajouté. En réalité, il n'ajoute rien d'essentiel aux propositions du maître de l'École d'Alexandrie ; mais, comme l'a fait remarquer pour la première fois l'orientaliste Woepcke (1), il les reprend dans une conception absolument différente, constituant ainsi une œuvre originale d'une valeur remarquable. En effet, chez Euclide, le polyèdre est une construction donnée, et son inscription dans la sphère se ramène à établir la relation métrique entre le côté du polyèdre et le diamètre de la sphère ; tandis que chez Pappus, c'est, au contraire, la sphère qui est donnée, et l'inscription du polyèdre considéré se ramène à déterminer dans la surface de la sphère le petit cercle parallèle dans lequel peut s'inscrire le polygone régulier facial du polyèdre.

La méthode inaugurée par Pappus l'amène à exposer au préalable quelques propositions subsidiaires (prop. 43 à 53) relatives aux petits cercles parallèles égaux de la sphère et aux relations que les droites menées dans ces cercles possèdent entre elles ; propositions élémentaires dont les démonstrations fort concises sont généralement basées sur les *Sphériques* de Théodose de Tripoli ; ouvrage classique pour le lecteur de l'époque. Dès lors, la proposition 54 résout le problème de l'inscription de la pyramide dans une sphère donnée en subordonnant sa solution à celle du problème qui consiste à décrire deux petits cercles parallèles égaux tels que le carré du diamètre de la sphère soit

1. Woepcke, *Journal Asiatique*, série 5, t. V, février-mars 1855, pp. 238-240.

de moitié plus grand que le carré du diamètre des petits cercles. La proposition 55 est relative à l'inscription du cube dans la sphère donnée. La proposition 56 résout le problème de l'inscription de l'octaèdre dans la sphère donnée, et démontre tout à la fois que le même petit cercle circonscrit le carré du cube et le triangle de l'octaèdre inscrits dans la même sphère. La proposition 57, relative à l'icosaèdre inscrit dans la sphère, est résolue d'une manière longue et compliquée en se basant sur plusieurs propositions d'Euclide : notamment sur la proposition 10 du douzième livre des *Éléments*, établissant que le carré du côté du pentagone inscrit équivaut à la somme des carrés des côtés de l'hexagone et du décagone inscrits dans le même cercle. Enfin, la proposition 58 expose la synthèse de l'inscription du dodécaèdre dans une sphère donnée à la suite d'une longue analyse invoquant, entre autres propositions d'Euclide, la proposition de son treizième livre qui démontre que les droites qui sous-tendent deux angles successifs d'un pentagone régulier se coupent en moyenne et extrême raison en ayant leurs grands segments égaux au côté de ce pentagone, et la proposition 9 du même livre qui démontre que, si l'on ajoute le côté de l'hexagone au côté du décagone réguliers inscrits dans le même cercle, la droite entière est découpée en moyenne et extrême raison en ayant son grand segment égal au côté de l'hexagone.

La cinquième partie du troisième livre comporte la seule proposition 59 qui reprend, dans une démonstration excessivement longue, la proposition 10 du même livre dans laquelle Pappus expose sa propre méthode instrumentale de la détermination des deux moyennes proportionnelles en vue de la solution du problème de la duplication du cube. Cette cinquième partie n'appartient certainement pas à Pappus, car on n'y reconnaît ni son style ni sa maîtrise, et elle présente plusieurs négligences et même quelques erreurs. Elle doit donc avoir été introduite à la fin du troisième livre par un commentateur resté inconnu, et on ne la rencontre d'ailleurs que dans un seul des manuscrits que l'on possède [1], d'après lequel elle fut publiée, d'abord séparément par Bredow,

1. Codex Guelferbytanus.

en 1812 (1), puis par F. Hultsch dans son édition critique de l'œuvre entière, avec une version latine abrégée au moyen de notations modernes (2).

***

Le quatrième livre a perdu son préambule dans lequel Pappus donnait probablement des renseignements sur quelques auteurs dont les ouvrages ne nous sont pas parvenus, et auxquels il emprunte certaines propositions qu'il reproduit, commente ou généralise. La première partie de ce livre débute par une proposition isolée concernant la détermination du côté du parallélogramme qui, décrit sur la base d'un triangle quelconque, équivaut à l'ensemble des parallélogrammes quelconques décrits sur les deux côtés du triangle. Cette proposition constitue une belle généralisation, non seulement du théorème de Pythagore sur le carré de l'hypothénuse, formant l'objet de la proposition 47 du premier livre des *Éléments* d'Euclide (3), mais aussi et surtout de la proposition 31 du sixième livre d'Euclide, démontrant que, si l'on construit des figures semblables et semblablement placées sur les côtés d'un triangle rectangle, la figure construite sur l'hypothénuse équivaut à l'ensemble des figures construites sur les côtés de l'angle droit (4). Pappus fait d'ailleurs remarquer expressément à la fin de sa démonstration, qu'il s'agit d'une généralisation d'une proposition d'Euclide (5) ; mais, comme il ne la revendique pas formellement pour lui-même, Tannery a émis des raisons de croire qu'elle aurait été empruntée à Héron d'Alexandrie (6). Quoi qu'il en soit, on peut supposer, en outre, que Pappus reproduit ici isolément cette proposition pour marquer l'intérêt particulier

1. *Epistolae Parisienses*. Lipsiae, 1812, pp. 187-200.
2. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, pp. 164-176.
3. EUCLIDE, *Éléments*. Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 78.
4. EUCLIDE, *ibidem*. Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 368.
5. καὶ ἔστι τοῦτο καθολικώτερον πολλῷ τοῦ ἐν τοῖς, ὀρθογωνίοις ἐπὶ τῶν τετραγώνων ἐν τοῖς στοιχείοις δεδειγμένου. (HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 178, ll. 11-13), c'est-à-dire : et cette (proposition) est beaucoup plus générale que celle qui est démontrée dans les *Éléments* pour les carrés dans les triangles rectangles.
6. PAUL TANNERY, *Sur les Fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus*. (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, 1882, pp. 99-108, ou bien : *Mémoires scientifiques* de P. Tannery, vol. I, pp. 156-167).

qu'il y attache, après l'avoir déjà publiée, avec d'autres généralisations de propositions d'Euclide, dans le commentaire perdu qu'il a écrit sur les *Éléments* de cet auteur.

Passant sans transition à des propositions sur le cercle, Pappus en démontre cinq sur les diverses relations qui existent entre des tangentes, des sécantes et des droites intérieures aux cercles. Ces propositions sont d'une lecture assez pénible pour les modernes, parce qu'elles sont exclusivement basées sur certaines propositions du dixième livre d'Euclide, devenues elles-mêmes d'une assimilation difficile, en raison de certaines notions qui ne nous sont plus familières, notamment celles de droites médiales et d'espaces médiaux, de droites irrationnelles majeures et mineures, de droites dites de deux noms ou binômes (1) d'ordre un à six, et de droites apotomes également d'ordre un à six. Toutes ces propositions, pour autant qu'elles soient énoncées en langage moderne et démontrées par nos méthodes actuelles, restent intéressantes.

Les propositions 8, 9 et 10 suivantes se rattachent à la théorie des cercles tangents qui faisait l'objet de l'ouvrage perdu d'Apollonius sur les *Contacts* dont il sera question plus loin, et leur ensemble tend à résoudre le problème du cercle tangent à trois cercles inégaux tangents entre eux. La proposition 10 détermine le centre du cercle cherché en faisant découler cette détermination de la proposition 8, qui résout au préalable la question de trouver un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné. Or, comme la solution de ce dernier problème n'est pas poussée au delà de conclure que le diamètre du cercle cherché est donné, et que cette conclusion ne se justifie elle-même qu'en assumant tacitement un ou plusieurs lemmes connus sans doute à l'époque de Pappus, on doit supposer que ce dernier problème avait déjà reçu dans l'Antiquité une solution satisfaisante qui ne nous a pas été rapportée (2).

---

1. La droite dite de deux noms (ἐκ δύο ὀνομάτων) désigne une droite irrationnelle composée de deux segments commensurables en puissance seulement. L'expression a été rendue dans les vieilles versions latines par le mot « binomium », et elle a été traduite en français par le mot « binôme », qui a pris maintenant un sens différent.

2. Une solution moderne du problème du cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné est due à G. Amthor. Cherchée à la demande de F. Hultsch, en 1875, ce dernier la publia en annexe dans son édition critique

La solution du problème du cercle tangent à trois cercles tangents entre eux était nécessaire pour pouvoir passer à la série des belles propositions (prop. 13 à 18) relatives à la figure curviligne, en forme de griffe de félin, comprise entre les arcs de trois demi-cercles tangents entre eux en ayant leurs diamètres sur la même droite et le plus grand enveloppant les deux autres. Cette figure, qu'Archimède appelle l'*Arbelon* [1], avait déjà fait l'objet de trois propositions (prop. IV, V et VI) de son *Livre des Lemmes* [2] : la première démontrant que son aire équivaut au cercle dont le diamètre est égal à la perpendiculaire élevée sur le diamètre du demi-cercle enveloppant, au point de contact des deux demi-cercles enveloppés, jusqu'à l'arc du demi-cercle enveloppant ; la seconde démontrant que les deux cercles décrits de part et d'autre de cette perpendiculaire, tangents à cette perpendiculaire et à deux des demi-cercles, sont égaux, et enfin, la troisième démontrant que les diamètres du demi-cercle enveloppant et du cercle qui, décrit à l'intérieur de la figure, est tangent aux trois demi-cercles, sont entre eux comme 19 est à 6. Ce sont ces belles propositions d'Archimède que Pappus complète en démontrant quelques autres propriétés de l'*Arbelon*, notamment que (prop. 16), si, à partir du cercle de la proposition VI d'Archimède, décrit à l'intérieur de la figure curviligne, tangent aux trois demi-cercles, on décrit indéfiniment des cercles décroissants tangents entre eux et tangents à deux des trois demi-cercles de la figure, les centres de ces cercles s'élèvent au-dessus du diamètre du grand demi-cercle à des hauteurs respectivement égales au diamètre du premier cercle, au double du diamètre du second cercle, au triple du diamètre du troisième et ainsi de suite dans l'ordre naturel des nombres; et que (prop. 18), si, par modification de la figure *Arbelon*, on considère le demi-croissant déterminé par deux demi-cercles tangents intérieurement, et si l'on inscrit indéfiniment dans cette figure mixtiligne des

du texte de Pappus. (Cfr. *loc. cit.*, vol. III, *Appendix*, p. 1226). Une autre solution est donnée par E. Catalan dans son ouvrage : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*. Paris, 1870, septième édition, p. 199.

1. Ἄρβηλος, tranchet de cordonnier, désignant ici la figure en forme de griffe, ou Arbelon. Voir sur l'Arbelon l'étude de F. Buchner, intitulée : *De Arbelo Archimedeo* (Elbinguae, 1824, in-4°).

2. Archimède, *Le livre des Lemmes*. Voir trad. de P. Ver Eecke : prop. IV, p. 526 ; prop. V, p. 528 et prop. VI, p. 530.

cercles tangents entre eux et aux deux demi-cercles, les centres de ces cercles seront élevés au dessus du diamètre du grand demi-cercle à des hauteurs respectivement égales au rayon du premier cercle, au triple du rayon du second cercle, au quintuple du rayon du troisième cercle et ainsi de suite dans l'ordre naturel des nombres impairs (1).

La seconde partie du livre IV est presque entièrement consacrée aux courbes transcendantes. Elle débute par quelques propositions sur l'hélice plane (2) ou spirale, qui constituent un petit commentaire sur le prestigieux traité *Des Spirales* d'Archimède (3), dans lequel la plupart des propriétés de la courbe sont déjà dégagées au cours de vingt-huit propositions qui apprennent à mener les tangentes à la spirale, à comparer ses spires aux cercles correspondants et, finalement, à mesurer son aire. En commençant par exposer la génération de la courbe spirale, Pappus nous déclare que la première invention doit en être attribuée à Conon de Samos, géomètre et astronome du troisième siècle avant J.-C., qui en aurait proposé l'étude à Archimède, et que ce dernier en a établi la théorie « en faisant usage d'un procédé admirable », c'est-à-dire en employant sa célèbre méthode d'exhaustion, source lointaine de notre calcul intégral. Or, Pappus est déjà si éloigné de l'époque d'Archimède qu'il peut très bien n'avoir connu certains de ses ouvrages que dans des copies partielles, ou dans des résumés précisément privés du préambule du traité *Des Spirales* (4) dans lequel Archimède, s'adressant au géomètre Dosithée, à qui il dédie ce traité, déclare, au contraire, avoir soumis lui-même ses propositions sur la spirale à Conon, aux fins d'un examen critique avant leur publication, et déplore que Conon soit mort avant d'avoir pu lui rendre le service d'ami éclairé qu'il lui avait demandé. La spirale appartient donc bien à Archimède, tant dans sa première conception, que dans l'élaboration de sa théorie. D'ailleurs, les quatre propositions (prop. 19 à 21) que Pappus consacre à la

1. Ce curieux théorème a été reproduit et démontré au moyen de l'inversion dans l'ouvrage de CASEY : *A Sequel to Euclid*, Book IV, section VI, prop. 9, cor. 1, p. 103, cinquième édition, 1888.
2. ἕλιξ ἐν ἐπιπέδῳ γραφομένη, l'hélice décrite dans le plan, ou spirale.
3. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*. Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 239-299.
4. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, *Préambule*. Voir trad. précitée, pp. 239-243.

spirale n'ajoutent que peu de chose à l'ensemble des propositions dans lesquelles Archimède semble avoir déjà épuisé la théorie de cette courbe, au point que les modernes, sans la compléter d'une manière importante, se sont pour ainsi dire bornés à la condenser dans les formules de la géométrie analytique. C'est ainsi que la proposition 21 de Pappus ne fait que reprendre la proposition XXIV d'Archimède (1) en énonçant d'une manière plus concise que « la figure comprise entre la spirale et la droite initiale de révolution est la troisième partie du cercle qui entoure la spirale », et il la démontre d'une manière plus abrégée et un peu différente, en ce sens que, là où Archimède fait intervenir des différences de droites et de surfaces, Pappus invoque au contraire la considération de cylindres et de cônes de révolution, tout en empruntant manifestement à Archimède sa méthode féconde d'exhaustion. Seule la proposition 22 de Pappus constitue une petite contribution à l'œuvre d'Archimède en énonçant en d'autres termes et en démontrant que l'aire engendrée par un rayon vecteur de la spirale est proportionnelle au cube de ce rayon (2).

Le chapitre suivant (XXVI) expose la génération de la ligne cochloïde ou conchoïde (3), dont Pappus attribue l'invention à Nicomède, géomètre grec du deuxième siècle avant J.-C., qui rechercha les propriétés de cette courbe du quatrième degré, composa un instrument pour la tracer et en préconisa l'usage pour trouver les deux moyennes proportionnelles entre deux droites données, aux fins de résoudre le problème de la duplication du cube. Pappus désigne la courbe utilisée pour ce problème comme étant la première conchoïde, visant ainsi la courbe supérieure, régnant au-dessus de sa directrice par rapport à son pôle, pour laquelle la distance interceptée sur le rayon vecteur entre

1. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, proposition XXIV. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 282.

2. Outre le petit commentaire de Pappus, le traité *Des Spirales* d'Archimède a fait l'objet des principaux ouvrages suivants: *Ism. Bullialdi de lineis spiralibus demonstrationes novas*. Parisiis, 1657, in-4°; E.-A.-LUD. A TEUBEN, *De Lineis Spiralibus*. Lipsiae, 1790, in-4° ; JUNGE, *Die Spirale des Archimedes*. Zeitz, 1926, in-4° ; LEHMAN, *Die Archimed. Spirale m. Rücksicht auf ihre Geschichte*. Freiburg, 1862 ; SHERLING, *Die Archimed. Spirallinie*. Lubeck, 1865, in-4°.

3. κοχλοειδὴς γραμμή, la ligne en forme de coquille, c'est-à-dire la cochloïde ou conchoïde ayant pour équation polaire $\rho = a + \frac{b}{\cos\varphi}$.

la courbe et la directrice est positive, et il la distingue de cette manière, parce que, dit-il, « il s'en établit encore une seconde, une troisième et une quatrième qui sont utiles pour d'autres théorèmes » (1). Les trois autres espèces de conchoïdes auxquelles Pappus fait allusion étaient sans doute les trois conchoïdes inférieures qui règnent entre le pôle et la directrice de la courbe et qui, suivant que la distance constante interceptée sur le rayon vecteur entre la courbe et sa directrice est plus petite, la même, ou plus grande que la distance du pôle à la directrice, sont respectivement la première conchoïde inférieure, la conchoïde à point de rebroussement et la conchoïde nouée (2). Il est d'ailleurs probable que ces trois dernières formes de la courbe avaient également été considérées par Nicomède ; car Eutocius, qui reproduit la démonstration de Pappus relative à la construction des deux moyennes proportionnelles au moyen de la conchoïde dite première, nous apprend que Nicomède avait écrit un ouvrage particulier sur les conchoïdes qui ne nous est pas parvenu, et qu'il avait mis son instrument propre à les tracer en concurrence avec le *Mésolabe* d'Eratosthène pour la détermination des deux moyennes proportionnelles (3). Au reste, en faisant remarquer, dans la phrase que nous reproduisons plus haut, que la conchoïde et les diverses formes qu'elle admet peuvent être utilisées pour d'autres théorèmes encore que celui des moyennes proportionnelles, Pappus nous laisse entendre, qu'en raison de la facilité de la tracer, cette courbe avait déjà été substituée aux coniques par certains géomètres, sinon par Nicomède lui-même, pour résoudre des problèmes solides.

En fait d'application de la conchoïde, Pappus se borne à nous donner trois propositions. La proposition 23 résout le problème de trouver une droite qui, partant d'un point donné en dehors d'un angle donné, soit interceptée sur une longueur donnée entre

1. ἐπειδὴ καὶ ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη καὶ ἡ τετάρτη ἐκτίθεται εἰς ἄλλα θεωρήματα χρησιμεύουσαι. (Cfr. édit. Hultsch, vol. I, p. 244, l. 19).

2. Les conchoïdes ont fait l'objet des traités particuliers suivants : *De conchoïdibus et cissoïdibus exercitationes geometricae, autore Petro Nicolas e Soc. Jesu.* Tolosae, 1697, in-4° ; *Conchoïdes Nicomedeae aequatio et indoles a Car. Witte.* Goettinguae, 1813.

3. Voir l'édition critique précitée de l'Archimède de Heiberg, vol. III, *Eutocii commentarii in libros de Sphaera et Cylindro*, p. 99.

les droites qui comprennent cet angle. La proposition 24 démontre la construction, que Nicomède n'aurait fait qu'indiquer, par laquelle on détermine les deux moyennes proportionnelles entre deux droites données au moyen de la conchoïde. Enfin, la proposition 25 démontre, comme conséquence de la proposition précédente, non seulement comment on obtient la duplication du cube, mais comment on trouve un cube qui soit dans un rapport donné avec un autre cube donné.

La seconde courbe transcendante dont Pappus s'occupe est la quadratrice (1), communément attribuée à Dinostrate, parce qu'elle aurait été préconisée par ce dernier, à l'époque de Platon, avec Nicomède et d'autres géomètres, pour obtenir la quadrature du cercle, en montrant que celle-ci dépendait de la détermination du point d'intersection de la courbe avec le rayon délimitant le premier quadrant du cercle dans lequel elle est décrite. Il est cependant probable que l'invention de cette courbe remonte à un contemporain de Socrate, le sophiste Hippias d'Elis, qui vécut dans la seconde moitié du cinquième siècle avant J.-C., le même que Platon fait intervenir dans ses dialogues, et qui aurait d'abord proposé la quadratrice pour résoudre le problème de la division d'un angle ou d'un arc donné dans un rapport donné.

Pappus commence par reproduire certaines critiques qui avaient été faites contre l'emploi de la quadratrice pour la quadrature du cercle. Elles portent d'abord sur l'impossibilité de déterminer mathématiquement le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abcisses sans se donner au préalable le rapport de la circonférence au rayon du cercle, et ensuite sur la difficulté de déterminer mécaniquement ce point en l'absence d'un procédé permettant de tracer la courbe d'un mouvement continu. Pappus attribue ces critiques à un certain Sporos, et il les aura donc puisées dans une compilation qui ne nous est pas parvenue, mais dont Paul Tannery a cependant cherché à établir l'existence sous le titre de *Rucher Aristotélique* (2), contenant des extraits sur la quadrature du cercle et sur la duplication du cube, composée par Sporos de Nicée, vers la fin du troisième siècle après J.-C.,

1. τετραγωνίζουσα γραμμή, la ligne tétragonisante ou la quadratrice.
2. Ἀριστοτελικὰ κήρια.

c'est-à-dire par un contemporain de Pappus un peu plus âgé que lui [1].

Les deux premières propositions (prop. 26 et 27) consacrées à la quadratrice envisagent sa génération par l'intersection d'un rayon du cercle qui tourne autour du centre et d'un diamètre qui se meut parallèlement à lui-même. Pappus, qui emprunte probablement ces propositions à Sporos, considère, comme lui, que cette génération est « trop mécanique » [2], et c'est à cette génération en quelque sorte vulgaire qu'il oppose, dans les propositions suivantes, deux modes de génération géométrique au moyen de combinaisons de surfaces plectoïdes [3], c'est-à-dire de surfaces réglées.

Le premier de ces modes de génération est donné par la proposition 28, dans laquelle il est démontré que, si, des points d'une hélice décrite sur un cylindre droit circulaire, on abaisse des perpendiculaires sur l'axe du cylindre, lesquelles forment une surface hélicoïde rampante, et si, par l'une de ces droites, on mène un plan convenablement incliné sur le plan de la base du cylindre, ce plan coupe la surface hélicoïde suivant une courbe dont la projection orthogonale sur la base du cylindre est une quadratrice de Dinostrate. Cette proposition remarquable a fait reconnaître à Michel Chasles que, lorsque le plan sécant, au lieu de passer par une génératrice de la surface hélicoïde, est mené arbitrairement, la projection orthogonale est une quadratrice allongée ou raccourcie, c'est-à-dire une conchoïde de la quadratrice de Dinostrate [4].

Le second mode de génération géométrique fait l'objet de la proposition 29 qui expose que, si l'on conçoit une surface cylin-

---

1. PAUL TANNERY, *Sur Sporos de Nicée.* (*Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, n° 3, 1882, t. IV, pp. 257-261 ; ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. I, pp. 178-184).

2. μηχανικωτέρα γένεσις.

3. πλεκτοειδής (επιφάνεια), surface plectoïde; expression dérivant du mot πλέκειν, tresser, et qui désignait probablement d'une manière générale toutes les surfaces réglées en raison de l'enchevêtrement des lignes droites qui sont à la surface. Le mot plectoïde a parfois été employé chez les modernes pour désigner toutes les surfaces engendrées par une droite, notamment par Flauti, dans son ouvrage: *Geometria di sito sul piano e nello spazio*. Naples, 1821.

4. MICHEL CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, etc.* Paris, 1875, in-4°, p. 30.

drique droite, ayant pour base une spirale d'Archimède, et un cône de révolution ayant comme axe l'arête de la surface cylindroïde menée par l'origine de la spirale, ce cône coupe la surface cylindroïde suivant une courbe à double courbure qui est l'hélice conique [1]. Dès lors, les perpendiculaires abaissées des différents points de cette courbe sur l'arête précitée de la surface cylindroïde formeront une surface hélicoïdale rampante, et un plan, convenablement mené par une arête de cette surface hélicoïdale, coupera celle-ci suivant une courbe dont la projection orthogonale sur le plan de la spirale sera une quadratrice de Dinostrate. Cette proposition peut être considérée sous un double aspect. En effet, elle démontre, sans l'énoncer, une autre propriété de la surface hélicoïde rampante, à savoir, que son intersection avec un cône de révolution de même axe est une ligne à double courbure dont la projection sur le plan perpendiculaire à l'axe est une spirale d'Archimède, et ensuite, elle résout le problème de construire géométriquement la spirale par les *Lieux en Surfaces* de la même manière que le problème a été résolu par la quadratrice dans la proposition 28.

La proposition 30, qui a trait à l'hélice sphérique [2], est particulièrement remarquable en ce sens qu'elle nous apporte un premier exemple de quadrature d'une surface courbe chez les Anciens. Pappus y énonce en d'autres termes et y démontre magistralement au moyen de certaines propositions du traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède [3], que, si un point mobile partant du pôle d'un hémisphère parcourt un quart de circonférence, tandis que ce quart de circonférence fait une révolution

---

1. L'hélice conique est mentionnée dans le commentaire de Proclus sur le premier livre d'Euclide (*Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, recognovit G. Friedlein.* Leipzig, 1873, in-8°) ; Pascal s'en est occupé dans son écrit intitulé : *De la dimension d'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cône* (*Œuvres de Pascal*, t. V, p. 422), et Garbinski a donné une construction graphique des tangentes à l'hélice conique (*Annales de Mathématiques*, t. XVI, pp. 167-376).

2. L'hélice décrite sur la sphère a pour équation en coordonnées polaires : $d = \frac{1}{4} l$, dans laquelle d est la distance polaire et l la longitude. La propriété caractéristique de l'hélice sphérique d'être une développante de petit cercle a été démontrée par P. Serret dans son ouvrage : *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure.*

3. Archimède, *Traité de la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 33 et 42. Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 63 et 82.

entière autour de l'axe de la sphère, l'aire courbe comprise entre l'équateur et la spirale à double courbure décrite sur la surface sphérique par le point mobile équivaut au carré du diamètre de la sphère. Cette aire sphérique carrable est donc équivalente à à cette autre aire carrable de la sphère, constituée par la voûte de Viviani, où l'intersection d'une sphère et d'un cylindre circulaire droit tangent intérieurement, dont le diamètre de la section droite est égal au rayon de la sphère, détermine une courbe délimitant dans l'hémisphère une surface qui est aussi équivalente au carré du diamètre de la sphère. Bien que l'on puisse admettre que la belle démonstration de la proposition 30 appartienne à Pappus, il n'en est pas de même de l'invention proprement dite de la quadrature qui y est donnée ; car celle-ci peut fort bien avoir été envisagée avant l'ère chrétienne en présence de la mention d'hélices sphériques et coniques que l'on trouve déjà dans les fragments du traité : *Des Mathématiques* de Géminus de Rhodes (1) qui nous ont été conservés par Proclus.

Une digression, qui précède immédiatement les propositions relatives au partage de l'angle et de l'arc en parties égales ou dans un rapport donné, reprend un sujet déjà abordé dans le livre III : celui de la distinction qu'il y a lieu de faire entre les problèmes plans, solides et grammiques, suivant que leur solution exige l'intervention de la droite et du cercle, des sections coniques, ou de courbes transcendantes. Pappus nous enseigne que, outre les spirales, les quadratrices, les conchoïdes et les cissoïdes dont il a déjà parlé antérieurement, les Anciens avaient étudié beaucoup d'autres courbes de degrés supérieurs. Il nous révèle qu'Euclide leur avait consacré un ouvrage particulier qui ne nous est pas parvenu, intitulé : *Les Lieux à la Surface*, dans lequel ces courbes

1. Geminus de Rhodes, astronome qui vécut environ soixante-quinze ans avant J.-C. Il avait écrit une espèce d'encyclopédie mathématique dont on ne connaît que des fragments mis à profit par Proclus dans son commentaire sur le premier livre d'Euclide (édit. précitée de G. Friedlein, Leipzig, 1873). Il nous est parvenu de Geminus un traité d'astronomie élémentaire intitulé : *Introduction aux phénomènes* (Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα), dont l'abbé Halma a donné la traduction française en annexe de son ouvrage : *Table chronologique des Règnes etc.* Paris, 1819, in-4°. La première édition grecque du traité de Geminus est due à Edo Hilderic (Altorf, 1590, in-8°). Une édition critique a été publiée sous le titre : *Gemini Elementa astronomiae, ed. Manitius*. Lipsiae, 1898.

paraissent avoir été déterminées par les seules intersections de cônes, de cylindres et de sphères ; que Démétrios d'Alexandrie avait consacré aux courbes un ouvrage, également perdu, intitulé : *Considérations sur les lignes*, et que Philon de Tyane avait inventé des courbes déterminées par les intersections de certaines surfaces nommées plectoïdes, probablement en raison de l'entrelacement des lignes droites que présentent des surfaces réglées à plan directeur dont une directrice est rectiligne et l'autre une courbe ; de sorte qu'il y a lieu de supposer que la surface de la vis à filet carré fut aussi considérée pour la génération de ces courbes. Il cite une courbe qui aurait joui de propriétés remarquables, attribuée à Ménélaüs sous le nom de *ligne paradoxale* (1), sans nous en indiquer malheureusement la nature, mais que le contexte fait conjecturer comme étant également engendrée par l'intersection de deux surfaces, et il nous dit que sa propriété singulière était relative à une quadrature. Tannery a d'ailleurs émis l'opinion que cette courbe, à laquelle il conserve le nom grec de *ligne paradoxos*, devait être identique ou du moins analogue à la courbe de la voûte de Viviani, menant aussi à une quadrature, ou bien à l'hippopède, variante de cette dernière lorsque le diamètre du cylindre qui coupe la sphère n'est plus égal au rayon de la sphère (2). Pappus termine ce passage en réprouvant chez certains géomètres l'emploi subsidiaire de problèmes solides pour résoudre une proposition susceptible de recevoir néanmoins une solution plane. A l'appui de sa critique, il mentionne le cas d'une proposition sur la parabole dans le cinquième livre des *Coniques* d'Apollonius ; mais, comme il ne désigne pas cette proposition explicitement parmi le grand nombre de celles que ce livre consacre à cette conique, la détermination de la proposition visée a donné lieu à diverses conjectures. Une première détermination avait déjà été proposée par Christian Huygens (3), et elle fut adoptée

1. παράδοξος ὑπὸ τοῦ Μενελάου κληθεῖσα γραμμή, la ligne proclamée paradoxale par Ménélaus.

2. Paul Tannery, *Pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'Antiquité.* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, 1883, t. VII, pp. 278-299, ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. II, pp. 1-47).

3. *Œuvres complètes de Christian Huygens, publiées par la Société hollandaise des Sciences*. La Haye, t. III, p. 61.

par Zeuthen [1] ; mais P. Tannery a cru reconnaître au moins deux propositions d'Apollonius auxquelles puisse s'appliquer la critique de Pappus [2], qu'il trouve du reste trop rigoureuse et concernant plutôt la forme que le fond des démonstrations, notamment : la proposition 8 du cinquième livre dans laquelle il s'agit de mener une normale à la parabole par un point pris sur l'axe [3], et la proposition 62 du même livre relative à la normale menée à la parabole par un point intérieur pris en dehors de l'axe [4]. Pappus mentionne d'ailleurs un second cas d'une manière plus explicite : celui de la proposition 18 du traité *Des Spirales* d'Archimède [5], et sa critique y vise l'emploi auxiliaire du problème solide de la sécante du cercle interceptée sur une longueur donnée dans une direction donnée Or, il y a lieu de remarquer qu'Archimède ne se préoccupe pas du moyen de résoudre le problème de la sécante dans les propositions 7 et 8 de ce même traité *Des Spirales* [6], mais qu'il se borne à établir la possibilité de la construire en faisant légitimement appel au principe de continuité. Sa démonstration reste donc plane en fait, et cache en quelque sorte le problème solide dont Pappus blâme l'intervention. Tannery a cependant fait voir que l'observation de Pappus se justifie jusqu'à un certain point, en raison de la possibilité de démontrer la proposition 18 d'Archimède sur la spirale sans faire appel au principe de continuité, mais au moyen des questions dites planes par les Anciens [7].

Ces considérations sur les problèmes plans, solides et grammiques, dont il recommande essentiellement de reconnaître le caractère qui doit diriger la recherche de leur solution, amènent

---

1. *Die Lehre von den Kegelschnitte im Altertum, von Dr H. G. Zeuthen. Deutsche Ausgabe bezorgt von Dr R. V. Fischer-Benzon.* Kopenhagen, 1886, p. 286.
2. PAUL TANNERY, *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède.* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2e série, 1883, t. V, pp. 49-61, ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. I, pp. 302-304).
3. *Les Coniques d'Apollonius de Perge, œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke.* Bruges, 1923, gr. in-8o, p. 345.
4. APOLLONIUS, *ibidem*, p. 396.
5. ARCHIMÈDE, *Les Spirales*, prop. 18. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 269.
6. ARCHIMÈDE, *Les Spirales*, prop. 7 et 8. Voir trad. précitée, pp. 249-251.
7. PAUL TANNERY, *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède.* (*Mémoires scientifiques*, vol. I, p. 314.)

naturellement Pappus à faire pour ainsi dire l'histoire de la trisection de l'angle. Le côté pratique de ce problème a certainement dû préoccuper très tôt les anciens géomètres, et sa nature, qui est plane dans le seul cas de l'angle droit, leur avait permis de le résoudre facilement pour cet angle au moyen de la règle et du compas en construisant, sur un côté de l'angle, un triangle équilatéral dont on divise l'angle adjacent à ce côté en deux parties égales. Mais, une construction aussi élémentaire ne permettant plus de résoudre le cas de l'angle aigu, dont la nature est solide, sa solution resta en suspens pendant assez longtemps, parce que, dit Pappus, « les sections coniques n'étaient pas encore familières ».

La première solution de la trisection de l'angle aigu que Pappus nous expose est donc celle qui a pu être établie après la découverte, très ancienne d'ailleurs, des courbes du second degré. En effet, la proposition 31 pose au préalable le problème de mener, dans un parallélogramme rectangle, une sécante issue d'un sommet et interceptée sur une longueur donnée entre les côtés de ce parallèlogramme ; et la solution qu'il nous donne, fournie par l'intersection d'une circonférence de cercle et d'une hyperbole, est probablement empruntée à l'ouvrage particulier d'Apollonius : *Les Inclinaisons*, qui ne nous est pas parvenu. Cette intervention de l'hyperbole dans la détermination d'un point singulier amène Pappus à résoudre subsidiairement le problème de construire une hyperbole passant par un point donné dans l'angle de deux asymptotes données ; mais on constate que sa solution est moins simple que celle qui avait déjà été donnée par Apollonius dans la proposition 4 du livre II des *Coniques* (1). Dès lors, la proposition 32 résout le problème de la trisection de l'angle aigu en menant, d'un point pris arbitrairement sur un côté de l'angle, deux droites, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à l'autre côté de l'angle, puis, en menant du sommet à l'intérieur de l'angle une sécante qui soit interceptée entre ces deux dernières droites sur une longueur double de la distance qui sépare le sommet et le point choisi sur l'un des côtés de l'angle.

1. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. 4. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 121.

Le problème de la trisection de l'angle obtus est traité dès lors comme corollaire, en séparant de cet angle un angle droit dont la trisection est élémentaire, et en effectuant la trisection de l'angle aigu restant (1).

Après avoir fait allusion à une autre solution du problème de la trisection de l'angle au moyen de la conchoïde de Nicomède, solution que Pappus aurait publiée antérieurement dans un commentaire actuellement perdu, composé sur un ouvrage également perdu de Diodore d'Alexandrie intitulé l'*Analemme*, il passe à deux autres solutions, données dans la proposition 34, où il considère qu'il revient au même de tripartir l'arc de cercle ou l'angle que cet arc mesure. La première solution, basée sur plusieurs propositions des *Coniques* d'Apollonius, est fournie par l'intersection d'une hyperbole et d'une droite ; tandis que la seconde solution, également intéressante, mais d'une lecture un peu difficile pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec les méthodes d'Apollonius, est donnée par l'intersection d'une hyperbole avec l'arc à partager en trois parties égales. Passant maintenant du problème solide de la trisection à sa généralisation, c'est-à-dire à la division d'un angle ou d'un arc donné dans un rapport donné, qui devient ainsi un problème grammique, exigeant l'intervention de courbes plus complexes que les coniques, la proposition 38 nous présente deux belles solutions que Pappus attribue à des auteurs plus récents, mais qu'il ne nomme pas (2) : la première au moyen de la quadratrice de Dinostrate, et la seconde par la spirale d'Archimède en invoquant la proposition 14 du traité *Des Spirales* (3), laquelle démontre la proportionnalité du rayon vecteur aux arcs correspondants du cercle générateur de la spirale (4).

---

1. On pourra consulter à ce sujet : *La trisection de l'angle*, par L.-P.-V.-M. Azemar. Paris, 1809, in-8°.
2. ὑπὸ τῶν νεωτέρων,
3. Archimède, *Les Spirales*, prop. 14. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 263.
4. L'histoire du problème de la trisection de l'angle et de sa généralisation au partage de l'angle ou de l'arc dans un rapport donné a trouvé une contribution intéressante dans la partie géométrique de l'œuvre de Raphael Bombelli, restée jusqu'ici inédite, et qui vient d'être publiée avec de savants commentaires par Ettore Bortolotti : *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna, libri IV e V comprendenti « La parte geometrica » inedita tratta dal manoscritto B 1569 della biblioteca dell' Archiginnasio di Bologna, publicata a cura di Ettore Bortolotti.*

Les deux solutions qui précèdent, et probablement d'autres qui ne nous sont pas parvenues, ayant fait intervenir des courbes transcendantes différentes, ont donc mis les anciens géomètres très tôt en mesure de diviser la circonférence du cercle en un nombre donné de parties égales dans tous les cas où cette division ne peut être réalisée avec la règle et le compas, c'est-à-dire les cas autres que ceux où, d'après le théorème moderne énoncé par Gauss, les facteurs premiers du nombre donné de divisions différents de 2 sont de la forme 2^n+1, et s'ils entrent seulement à la première puissance dans ce nombre (1).

Les propositions suivantes présentent encore quelques applications de la quadratrice. Ainsi, la proposition 36 résout le problème de retrancher des arcs égaux de deux cercles inégaux en le ramenant au problème précédemment résolu de la division d'un arc donné dans un rapport donné au moyen de la quadratrice. La proposition 37 résout le problème de construire un triangle isocèle dont chacun des angles égaux à la base ait un rapport donné avec l'angle au sommet, en le ramenant aussi au problème de la division de l'arc de cercle dans un rapport donné. La proposition 39 résout le problème de décrire un cercle dont la circonférence soit égale à une droite donnée, en utilisant la réciproque d'une proposition précédente (prop. 26) ayant déjà résolu, au moyen de la quadratrice, le problème de trouver la droite égale à la circonférence du cercle. La proposition 40 résout par la quadratrice le problème de décrire sur une corde donnée un arc

---

Bologna, 1929, in-8°. Voir pp. 265-267. On trouve développée dans cet ouvrage la relation que présente la résolution de l'équation cubique dans le cas irréductible avec la trisection de l'angle ; relation que Bombelli avait déjà simplement annoncée dans son célèbre traité d'algèbre publié en 1572. Voir aussi à ce sujet : E. Bortolotti, *La trisezione dell'angolo ed il caso irreducibile della equazione cubica nell'Algebra di Rafael Bombelli.* (Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. — Anno Accademico 1922-23. Bologna, 1923).

1. C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae.* Le théorème sur la division de la circonférence de cercle en parties égales énoncé par Gauss a été donné d'une manière fort simple par P.-L. Wantzel dans son mémoire : *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas.* (*Journal de Mathématiques*, t. II, 1837, pp. 366-372). La possibilité de partager la circonférence en dix-sept parties égales au moyen de la règle et du compas, démontrée d'abord par Gauss dans son ouvrage précité, a été démontrée ensuite géométriquement par Ampère d'une manière qui a été reproduite par Catalan dans son ouvrage : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, sixième édition. Paris 1879, pp. 267-269.

de cercle qui soit à cette corde dans un rapport donné. Enfin, la proposition 41 montre que la quadratrice permet de construire un angle incommensurable avec un angle donné.

Le livre IV se termine par un retour sur la critique que Pappus avait déjà faite de la proposition 18 du traité *Des Spirales* d'Archimède, dans laquelle la solution d'un problème subsidiaire d'inclinaison est simplement admise comme possible par intuition et en vertu du principe de continuité. Ce problème, invoqué par Archimède, consiste à considérer un cercle, une sécante de ce cercle, et à mener une droite qui, inclinée vers un point pris sur la circonférence, soit interceptée sur une longueur donnée entre la sécante et l'arc de cercle qu'elle découpe. La proposition 44 de Pappus résout ce problème d'une manière élégante par l'intersection de deux lieux : une hyperbole et une parabole dont la construction est établie au préalable dans deux propositions qui précèdent (prop. 42 et 43).

***

Le cinquième livre est entièrement consacré aux propriétés comparatives des figures isomètres (1), c'est-à-dire des figures planes isopérimètres (2) et des figures solides de même surface (3). Pappus adresse le préambule de ce livre au géomètre Mégéthius, que nous ne connaissons que par cette simple mention de son nom ; il lui fait observer que le plan ne pouvant être couvert sans intervalles que par trois figures régulières équilatérales et équiangles : le triangle, le carré et l'hexagone, c'est ce principe qui domine l'architecture des abeilles, auxquelles il attribue une espèce d'intuition naturelle qui, dépassant l'instinct sans atteindre la raison, détermine leur choix de l'hexagone régulier comme base du prisme constituant les alvéoles de leur rucher, parce que ce solide peut contenir plus de miel que ceux à base de triangle ou de carré de même contour dont la construction entraîne la même dépense de cire (4).

1. ἰσόμετρα σχήματα.
2. ἰσοπερίμετρα σχήματα.
3. τὰ ἴσην επιφάνειαν ἔχοντα στερεὰ σχήματα.
4. La forme des cellules des abeilles et leur mode de construction chez les apiaires en général ont donné lieu à une littérature très abondante de la part des

La première partie du cinquième livre nous présente dix propositions qui aboutissent à démontrer que, parmi toutes les figures planes ayant même périmètre, le cercle possède la surface la plus grande. Ces propositions n'étaient pas nouvelles à l'époque de Pappus ; car elles ne font que reprendre, tout en les remaniant et en rendant leurs démonstrations plus claires, les quatorze propositions du géomètre Zénodore [1], dont l'ouvrage intitulé : *Des Figures isomètres* [2], avait pour but de faire revenir certains philosophes sur la fausse opinion que la grandeur d'une aire dépend de la longueur de son périmètre ; ouvrage qui ne nous est parvenu que sous la forme d'un résumé que Théon d'Alexandrie nous en donne dans son commentaire sur l'*Almageste* de Ptolémée [3]. Une critique superficielle ayant fait vivre Zénodore au cinquième siècle avant J.-C., on en a conclu que son ouvrage était le plus ancien qui nous ait été transmis sur la géométrie. Or, l'époque de Zénodore peut être déterminée entre deux limites beaucoup moins reculées. En effet, les démonstrations de plusieurs propositions de cet auteur se basent sur des théorèmes d'Archimède, et il reproduit même la démonstration de l'un de ces théorèmes d'une manière plus explicite ; de sorte qu'il est certainement postérieur à Archimède

philosophes, des naturalistes et des mathématiciens. On la trouvera excellemment résumée et enrichie d'une contribution intéressante par V. Willem dans deux études intitulées : *L'Architecture des Abeilles*. (*Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*, 5e série, t. XIV, nº 12, 1928, et t. XVI, nº 7, 1930).

1. L'époque du géomètre Zénodore est incertaine. Il est postérieur à Archimède, car il le cite dans son traité et il invoque à plusieurs reprises ses démonstrations. Bien qu'il n'y ait pas de preuves qu'il soit antérieur à la seconde moitié du premier siècle de notre ère, on incline à croire qu'il a vécu aux environs de l'an 200 avant J.-C. (Voir sur Zénodore : M. Cantor, *Vorlesungen*, etc., deuxième édition, vol. I, p. 340).

2. περὶ ἰσομέτρων σχημάτων.

3. Le commentaire de Théon d'Alexandrie sur l'*Almageste* a été donné pour la première fois dans l'édition de ce dernier ouvrage soignée par Simon Grynaeus et Joachim Camerarius sous le titre : *Claudi Ptolemaei Magnae Constructionis, id est, perfectae coelestium motuum pertractationis libri XIII. Theonis Alexandrini in eosdem commentariorum libri XI*. Basileae, 1538, in-folio. Le résumé de l'opuscule de Zénodore par Théon se trouve dans cette édition au livre I, pp. 11-17. Le commentaire de Théon a été publié pour la seconde fois séparément avec une traduction française par l'abbé Halma sous le titre : *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée, traduit pour la première fois du grec en français sur les manuscrits de la Bibliothèque du Roi*. Paris, 1821. Voir pp. 33-49. Une version latine des propositions de Zénodore d'après Théon a été donnée par Hultsch en annexe de son édition critique précitée de Pappus. (Vol. III, pp. 1189-1211).

qui périt tragiquement en l'an 212 avant notre ère. D'autre part, l'erreur relative à l'aire évaluée en fonction du périmètre que l'opuscule avait pour but de détruire, non pas sans doute chez les géomètres dignes de ce nom, mais chez le vulgaire, est relevée incidemment par Quintilien dans un passage de son *Institution oratoire* (1), ouvrage que l'on sait avoir été écrit à Rome, vers l'an 94 après J.-C., de sorte que Zénodore doit avoir vécu au plus tard avant cette date et au plus tôt au cours du deuxième siècle avant notre ère.

Les deux premières propositions établissent que l'aire du cercle est plus grande que celle de tout polygone régulier de même périmètre, en invoquant le théorème d'Archimède qui démontre que le rectangle compris sous le périmètre du cercle et le rayon équivaut au double de l'aire du cercle. C'est en renvoyant à ce dernier théorème que Pappus nous apprend qu'Archimède avait écrit un ouvrage intitulé : *De la Circonférence du Cercle*, dont la perte est éminemment regrettable ; car la faible partie de cet ouvrage qui nous a été conservée sous le titre : *De la Mesure du Cercle* ne contient que trois propositions qui, en établissant le rapport de la circonférence au diamètre, constituent le principal titre de gloire d'Archimède, et dont la première est précisément celle que Pappus utilise (2). Il y a lieu de remarquer que la proposition 3 de Pappus énonce le théorème d'Archimède d'une manière plus libre, et que la démonstration apagogique qu'il en donne, afin, dit-il, « qu'on ne doive pas recourir à l'ouvrage d'Archimède pour ce seul théorème », est plus explicite, parce qu'elle s'adresse sans doute à des lecteurs moins instruits que ceux auxquels Archimède destinait des propositions plus

1. *Œuvres complètes de Quintilien, traduction de la collection Panckouke, par M. C. C. Ouizille, nouvelle édition revue par M. Charpentier*. Paris 1865, 3 vol. in-8°. Voir vol. I, chap. XIII, p. 104 : « La géométrie démontre aussi, par la méthode, la fausseté de quelques propositions vraies en apparence,... par exemple, qui ne croirait à l'exactitude de cette proposition : Soient donnés deux lieux dont les lignes extrêmes renferment la même mesure, l'espace contenu entre ces lignes sera égal. Eh bien, cela est faux ; car il reste à savoir quelle est la forme du contour, et des historiens ont été repris par les géomètres, pour avoir cru que la dimension des îles était suffisamment indiquée par le circuit de la navigation. »

2. ARCHIMÈDE, *De la Mesure du Cercle*, prop. 1. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 127.

concises. D'ailleurs, amené de nouveau à invoquer la même proposition d'Archimède au cours de sa proposition 22 du livre VIII, Pappus ajoute qu'il en a déjà donné une démonstration lui-même dans son commentaire sur le premier livre de l'*Almageste* de Ptolémée [1], et, comme ce commentaire est perdu, et que la démonstration intercalée ici en a été tirée par lui ou par un copiste interpolateur dans un but plutôt utile que nécessaire, elle constituerait donc le seul fragment qui nous ait été conservé de ce commentaire.

Une seconde série de propositions (prop. 4 à 10) démontre ensuite assez laborieusement, dans un texte fréquemment altéré et qui présente une lacune s'étendant sur tout un lemme nécessaire à la démonstration, que l'aire du polygone régulier est plus grande que celle du polygone irrégulier de même périmètre et, qu'en vertu de la première série de propositions ayant déjà démontré la propriété comparative du cercle et du polygone régulier, l'aire du cercle est donc plus grande que celle du polygone irrégulier de même périmètre. Enfin, une troisième série de propositions (prop. 13 à 17) démontre que l'aire du demi-cercle est plus grande que tout segment de cercle ayant même périmètre d'arc.

La seconde partie du livre V s'ouvre sur un petit préambule où, partageant le déterminisme des philosophes de son temps, Pappus considère que le monde revêt la forme de la sphère parce que cette figure est la plus parfaite, et il constate que, si la plupart des propriétés de la sphère ont déjà été dégagées depuis longtemps par les géomètres, il y en a cependant une qu'ils n'ont pas encore démontrée et qu'ils se bornent à affirmer, à savoir que le volume de la sphère est plus grand que celui de toute figure solide ayant même surface qu'elle. Avant de nous exposer la manière dont il va tenter lui-même de démontrer cette proposition difficile, Pappus mentionne les solides auxquels il y aura lieu de comparer la sphère et, désignant en premier lieu les cinq polyèdres réguliers

---

1. ὡς ἐν τῷ εἰς τὸ πρῶτον τῶν μαθηματικῶν σχολίῳ δέδεικται καὶ ὑφ' ἡμῶν δι' ἑνὸς θεωρήματος, ainsi que cela a été démontré aussi par nous-même au moyen d'un théorème particulier dans le commentaire sur le premier (livre) des *Mathématiques* (c'est-à-dire de l'*Almageste* de Ptolémée). Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1106, ll. 13-15.

déjà connus de Platon, lesquels font l'objet des propositions classiques 13 à 18 du livre XIII des *Éléments* d'Euclide (1), à savoir : le tétraèdre, l'hexaèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre, il établit successivement pour ces solides, tous inscriptibles dans la sphère, la croissance du volume, à égalité de surface, au fur et à mesure de l'accroissement du nombre des faces. La mention qu'il fait ensuite d'une autre série de solides, également inscriptibles dans la sphère, et dont les volumes pourront aussi être comparés, à égalité de surface, avec celui de la sphère en vue du théorème à démontrer, constitue un renseignement précieux sur le perfectionnement qu'Archimède avait apporté à la théorie des polyèdres dans l'ouvrage particulier, malheureusement perdu, qu'il avait composé sur les treize polyèdres semi-réguliers de son invention. Pappus ne nous dit pas par quelle méthode de troncature ou autre ces solides auraient été établis, ni quelles propriétés autres que leur inscriptibilité dans la sphère auraient été démontrées dans l'ouvrage d'Archimède ; mais il se borne à les décrire, c'est-à-dire à indiquer pour chacun d'eux l'espèce des faces, ainsi que le nombre des faces, des angles et des arêtes. Ce sont d'ailleurs les noms que Pappus donne à ces solides d'une manière adéquate au nombre de leurs éléments que nous avons conservés pour désigner l'octaèdre semi-régulier compris sous quatre triangles et quatre hexagones, les trois décatétraèdres, les deux icohexaèdres, les trois triacontadoèdres, le triacontaoctaèdre, les deux hexécontadoèdres et, enfin, l'ennécontadoèdre.

La première proposition qui suit ce préambule (prop. 18) apporte plutôt une déception ; car, démontrant seulement, d'une manière d'ailleurs peu rigoureuse, que la sphère est plus grande que les cinq corps réguliers de même surface, cette proposition n'est pas générale, c'est-à-dire qu'elle ne s'étend pas à la comparaison, à égalité de surface, avec tous autres corps solides quelconques. Cet échec dans la tentative de démontrer la proposition qu'il annonce n'atteint cependant pas la renommée de Pappus ; car cette même proposition a défié ses successeurs jusqu'à nos jours où elle a été démontrée d'une manière absolument rigoureuse.

1. Euclide, *Éléments*, liv. XIII, prop. 33 et 34. Voir trad. précitée de Peyrard, vol. III, pp. 257-300.

La proposition 19 compare la sphère avec le cône et le cylindre de même surface, et, bien qu'elle soit élémentaire, Pappus la démontre d'une manière intéressante en se basant sur les propositions 33 et 34 du traité: *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède [1]. Il y a lieu cependant de remarquer que cette démonstration ne remédie pas à l'insuffisance de la démonstration de la proposition précédente.

Suivent maintenant vingt-trois lemmes dont la lecture donne l'impression d'un résumé de leçons orales que Pappus aurait faites à l'École d'Alexandrie sur le traité : *De la Sphère et du Cylindre*, à une époque où la tradition de cet ouvrage d'Archimède commençait à se perdre au point de ne plus pouvoir être compris dans la concision originaire de ses propositions. Ces lemmes reprennent, en effet, tantôt d'une manière plus explicite, en renvoyant fréquemment aux *Éléments* d'Euclide, tantôt d'une manière un peu différente, les plus belles propositions de ce traité, pour aboutir à démontrer dans la proposition 37, comme Archimède, le rapport sesquialtère en surface et en volume que possède avec la sphère le cylindre qui lui est circonscrit. On sait du reste que ce sont les emblèmes géométriques de cette proposition célèbre qu'Archimède voulut avoir gravés sur son tombeau, en souvenir sans doute de la double genèse dont elle avait été l'objet : d'abord par la considération du levier, dans cette méthode mécanique féconde qui fut le secret de plusieurs autres de ses découvertes, et qui ne fut révélée que de nos jours dans le palimpseste de Jérusalem [2], ensuite par la considération purement géométrique basée sur une longue série de propositions originales préliminaires.

La troisième partie du cinquième livre revient sur les cinq polyèdres réguliers que Pappus avait déjà traités dans son troisième livre au point de vue de leur inscription dans la sphère, mais, comme nous l'avons fait remarquer, d'une manière très différente de celle d'Euclide, et il les étudie maintenant au point de vue de leurs propriétés comparatives. Les démonstrations qu'il consacre

1. Archimède, *De la Sphère et du Cylindre*, prop. 33 et 34. Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 63-69.
2. Archimède, *La Méthode relative aux Théorèmes mécaniques*, prop. II. Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 484-488.

à chacun de ces solides sont précédées de seize petits lemmes nécessaires que l'on ne rencontre pas, du moins explicitement, dans les *Éléments* d'Euclide, et, bien qu'ils soient pour la plupart peu importants, leurs démonstrations rigoureuses et claires conservent encore de l'intérêt pour le lecteur moderne. C'est ainsi que le premier lemme (prop. 38) démontre que le carré construit sur le côté du triangle équilatéral est plus grand que le double et plus petit que le quadruple de ce triangle. Le second lemme (prop. 39) démontre de deux manières différentes que le carré de la perpendiculaire menée, du centre de la sphère circonscrite à l'octaèdre, sur la face de l'octaèdre vaut le tiers du carré du rayon de la sphère. Le septième lemme (prop. 43) démontre que le dodécuple du carré de la perpendiculaire menée, du centre de la sphère circonscrite à l'icosaèdre, sur une face de l'icosaèdre est plus grand que le quintuple du carré de l'arête de l'icosaèdre. Le onzième lemme (prop. 47) démontre que, si le côté de l'hexagone régulier est découpé en moyenne et extrême raison, le grand segment est le côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle. Enfin, un douzième lemme (prop. 48) démontre de deux manières différentes que le même petit cercle de la sphère circonscrite au dodécaèdre et à l'icosaèdre circonscrit le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre. Les six dernières propositions (prop. 52 à 57) utilisent dès lors les lemmes qui précèdent pour démontrer dans quel ordre de grandeur se rangent les volumes des cinq polyèdres réguliers considérés comme ayant même surface, et pour démontrer que ces solides inscriptibles dans la sphère ne peuvent pas être au nombre de plus de cinq.

***

Pappus n'a pas attaché son nom à quelque progrès marquant de l'astronomie ancienne ; mais il a certainement été très au courant de cette science dans l'état où elle était parvenue à son époque. Nous verrons en effet plus loin, lorsque nous mentionnerons ses autres ouvrages perdus ou dont on possède des fragments, qu'il avait écrit un commentaire sur l'*Almageste* de Claude Ptolémée, et c'est dans le sixième livre de sa *Collection* qu'il rassemble de petits commentaires sur certains ouvrages appartenant à ce que l'École d'Alexandrie avait appelé *La petite Astronomie* [1], par opposition avec *La Grande Composition* ou *Almageste* de Ptolémée, et qui comprenait notamment : les *Données*, l'*Optique*, la *Catoptrique* et les *Phénomènes d'Euclide* ; les *Sphériques*, le traité *Des Habitations* et le traité *Des Jours et des Nuits* de Théodose de Tripoli ; le traité *De la Sphère en mouvement* et celui *Des Couchers et des Levers des Astres* d'Autolycos de Pitane ; le traité *Des Ascensions* d'Hypsiclès, le traité *Des Grandeurs et des Distances du Soleil et de la Lune* d'Aristarque de Samos et, enfin, *Les Sphériques* de Ménélaüs.

Les quatre premières propositions du sixième livre se bornent à démontrer quelques propriétés élémentaires du triangle sphérique qui devront être utilisées dans la suite. Elles sont probablement empruntées à l'ouvrage particulier que Ménélaüs avait écrit sur ce triangle sous le titre : *Les Sphériques* [2] ; ouvrage qui ne nous est parvenu que dans une version arabe plus ou moins remaniée, et d'après le texte grec duquel Pappus désigne encore notre triangle sphérique du nom de trilatère [3] pour le distinguer du triangle rectiligne. Les six propositions suivantes (prop. 5-10) démontrent d'une manière différente, et surtout généralisée, une des propositions des *Sphériques* de Théodose. Comme cet ouvrage était alors classique et sans doute suffisamment répandu, Pappus ne donne pas l'énoncé de la proposition qu'il désigne simplement comme étant la cinquième du troisième livre de Théodose. Cette proposition s'énonce comme suit dans la traduction que nous en avons donnée ailleurs : « Si le pôle de cercles parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand ; si deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles, coupent ce grand cercle à angles droits ; si l'on découpe, sur le cercle oblique, des arcs égaux consécutifs, du même côté du plus grand des parallèles, et si, par les points ainsi déterminés, l'on décrit des cercles parallèles,

1. μικρὸς ἀστρονομούμενος.

2. Voir dans le corps de l'ouvrage, à l'endroit de ces propositions, la note relative à Ménélaüs et aux éditions de son traité.

3. τρίπλευρον.

ceux-ci découperont, dans leur intervalle, des arcs inégaux sur le cercle le plus grand primitif, et l'arc plus rapproché du plus grand des parallèles sera continuellement plus grand que celui qui en est plus éloigné » (1). La généralisation que Pappus nous donne de cette proposition consiste à démontrer les deux cas non traités par Théodose : celui des deux arcs non consécutifs et celui des deux arcs non commensurables.

Pappus commente encore la sixième proposition du livre III de Théodose, laquelle s'énonce : « Si le pôle de parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand ; si deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles, coupent ce grand cercle à angles droits ; si l'on découpe, sur le cercle oblique, d'un même côté du plus grand des parallèles, des arcs égaux consécutifs, et si, par les points ainsi déterminés et par le pôle, on décrit des cercles les plus grands, ceux-ci découperont, dans leur intervalle, des arcs inégaux sur le plus grand des parallèles, et l'arc plus rapproché du cercle le plus grand primitif sera continuellement plus grand que celui qui en est plus éloigné » (2). L'examen de cette proposition porte principalement sur le cas, non envisagé par Théodose, dans lequel le grand cercle équateur et le grand cercle oblique ne coupent pas à angles droits le grand cercle qui passe par les pôles des parallèles, et la longue démonstration de ce cas s'étend sur six propositions (prop. 21 à 27), précédées elles-mêmes de neuf petits lemmes subsidiaires (prop. 14 à 40) relatifs à certains rapports que possèdent entre eux des segments déterminés d'arcs de grands cercles de la sphère.

Un second commentaire concerne l'ouvrage d'astronomie hellène intitulé : *Sur la Sphère en mouvement* (3), composé au quatrième siècle avant J.-C. par Autolycos de Pitane (4). Cet ouvrage, qui

---

1. *Les Sphériques de Théodose de Tripoli. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke.* Bruges, 1927, gr. in-8°. Voir p. 93.

2. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. III, prop. 6. Voir édition précitée, p. 96.

3. περὶ κινουμένης σφαίρας.

4. Voir, dans le corps de l'ouvrage, la note relative à Autolycos de Pitane et à ses travaux astronomiques. Voir aussi l'étude de Paul Tannery intitulée : *Autolycos de Pitane.* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3e série, t. II, 1886, pp. 173-199, ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. II, pp. 225-255, et vol. XI, pp. 264-274).

comporte douze propositions, constitue, avec le traité *Sur les Levers et les Couchers des astres* (1) du même auteur, une théorie des levers et des couchers vrais et apparents des étoiles fixes, laquelle suppose d'abord que l'arc de retard, considéré sur l'écliptique, est indépendant de l'inclinaison de l'écliptique sur l'horizon et indépendant donc de la distance du soleil à l'horizon ; ensuite, que l'arc de retard est le même pour toutes les étoiles ; puis, que cet arc peut être estimé à la moitié d'un signe du zodiaque, donc à 15 degrés ; enfin, que l'anomalie du mouvement du soleil peut être négligée. Pappus ne discute pas cette théorie qui ne pouvait mener qu'à des approximations en raison des hypothèses adoptées, et qui avait du reste déjà été abandonnée par Ptolémée ; mais il se borne à mentionner quelle est la position de perpendicularité à l'axe, ou d'inclinaison sur cet axe, ou de passage par les pôles considérés pour le grand cercle de la sphère dans chacune des douze propositions d'Autolycos, et il termine ce petit commentaire en examinant ce qui se présente à la surface de la sphère en mouvement lorsqu'un point de cette surface reste fixe, ou bien se meut dans le même sens avec une vitesse égale, supérieure ou inférieure à celle de la sphère.

Le troisième commentaire se rapporte à l'ouvrage astronomique de Théodose de Tripoli intitulé : *Des Jours et des Nuits* (2), dans les deux livres duquel, conformément à la conception de l'époque, le soleil se meut uniformément, dans un sens contraire au mouvement diurne apparent de la sphère céleste, le long du cercle du zodiaque (3). Pappus se livre à une discussion très étendue de la quatrième proposition du premier livre de cet ouvrage. Comme il n'énonce pas cette proposition, conformément à son habitude lorsqu'il s'agit d'un ouvrage qu'il suppose connu du lecteur, nous devons donc nous en rapporter à l'ouvrage même de Théodose où cette proposition est énoncée dans les termes suivants d'après la traduction qui en a été donnée par Delambre :

---

1. περὶ Ἐπιτολῶν καὶ Δύσεων.
2. περὶ Ἡμερῶν καὶ Νυκτῶν. Voir, au cours de l'ouvrage, la note que nous consacrons à ce traité de Théodose et aux éditions qui en ont été données.
3. κύκλος τῶν ζῳδίων, ou ailleurs κύκλος ζῳδιακός, littéralement : le cercle des petits animaux, c'est-à-dire le cercle des constellations principales en forme d'animaux auquel nous avons donné le nom grec de cercle zodiaque.

« Si le soleil s'est levé ou couché sur deux parallèles inégalement éloignés du tropique, le solstice n'aura point lieu à midi du jour qui tient le milieu, le jour du solstice sera encore le plus long de l'année. Les jours qui seront dans le demi-cercle où le soleil était plus près du tropique seront plus longs que les jours de l'autre demi-cercle. Ce sera le contraire pour le solstice d'hiver » ([1]). C'est cette proposition que Pappus estime ne pas avoir été achevée par Théodose, en ce sens qu'elle néglige de s'étendre à la durée des nuits qui précèdent et qui suivent immédiatement les deux jours considérés, et il la complète en y rattachant dix autres propositions astronomiques dont les démonstrations géométriques se basent sur quelques théorèmes préliminaires relatifs aux grandeurs géométriques susceptibles de croître et de décroître à l'infini, de croître à l'infini sans décroître à l'infini, de décroître à l'infini sans croître à l'infini, et enfin, non susceptibles de croître et de décroître à l'infini.

Le quatrième commentaire se rapporte à l'ouvrage intitulé : *Sur les Grandeurs et les Distances du Soleil et de la Lune* ([2]), dans lequel Aristarque de Samos ([3]), qui vécut deux cent soixante ans avant J.-C., expose, au cours de dix-neuf théorèmes démontrés avec une rigueur toute euclidienne, une méthode, empruntée probablement à Eudoxe, qui fut la seule que les Anciens ont jamais connue pour la détermination du rapport des distances et des diamètres du soleil et de la lune ([4]). Pappus ne nous expose pas la méthode d'Aristarque pour la détermination des distances du soleil et de la lune ; il la suppose connue chez ses lecteurs comme étant basée sur la possession de deux éléments : l'un, le

1. Le traité *Des Jours et des Nuits*, de Théodose n'a pas été traduit jusqu'ici en français ; mais les seuls énoncés des propositions des deux livres de ce traité ont été traduits par Delambre dans son *Histoire de l'Astronomie ancienne*. (Paris, 1817, 2 vol. in-4°, pp. 237 et suiv.).

2. περὶ μεγετῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου κεαὶ σελήνης.

3. Voir dans le corps de l'ouvrage, à l'endroit du commentaire de Pappus, la note relative aux diverses éditions du traité d'Aristarque.

4. Aristarque aurait exposé pour la première fois le système héliocentrique de notre monde dans un ouvrage intitulé : *Les Hypothèses*, qui ne nous est pas parvenu. On incline cependant à croire que Pythagore, initié à la science des Mages pendant sa captivité à Babylone, avait émis déjà l'idée de ranger notre terre parmi les planètes en la faisant tourner autour du soleil, et que, dès lors, Aristarque n'aurait fait que reprendre cette hypothèse en l'appuyant sur certains arguments.

diamètre du cercle d'ombre de la Terre, qui pouvait être obtenu d'une façon plus ou moins précise par l'observation des éclipses lunaires, et l'autre, la distance angulaire du Soleil et de la Lune au moment de la dichotomie, laquelle ne pouvait être mesurée que très approximativement faute de moyens encore suffisamment perfectionnés. Il se borne donc à rappeler à peu près textuellement les six hypothèses d'Aristarque, à reproduire les limites dans lesquelles les calculs de ce dernier déterminent les rapports des distances et des volumes du Soleil et de la Lune, et à comparer ces rapports avec ceux que nous donne Ptolémée dans le cinquième livre de sa *Composition mathématique* (1), où ils sont déjà compris dans des limites moins exagérées malgré les erreurs qui affectent les données sur lesquelles les calculs sont basés. C'est à la suite de ces préliminaires que Pappus commente une seule des dix-neuf propositions d'Aristarque, qu'il n'énonce pas, mais se borne à désigner comme étant le quatrième théorème ; ce qui oblige de recourir à l'ouvrage d'Aristarque même, où ce théorème est énoncé comme suit dans la traduction donnée par Fortia d'Urban : « Dans la lune, le plus petit cercle possible sépare la partie obscure de la partie éclairée, lorsque le cône qui comprend le soleil et la lune a son sommet à notre vue » (2). Le commentaire de cette proposition comporte trois lemmes (prop. 39 à 41) qui, destinés à éclaircir un passage de la démonstration d'Aristarque, démontrent d'une manière rigoureuse et élégante les différences de grandeur

---

Les écrits d'Aristarque, accusés d'impiété envers les dieux protecteurs de l'univers par Cléanthe le Stoïcien, ne firent qu'ébranler le système géocentrique ; car Ptolémée devait le consolider encore pour une longue période dans son *Almageste*, jusqu'à ce qu'il fût renversé par Copernic, en 1543, dans son célèbre ouvrage : *De revolutionibus coelestibus*. Plutarque, qui mentionne plusieurs fois Aristarque, lui attribue encore, ainsi qu'à Séleucus, l'idée de la révolution de la terre autour de son axe, et il ajoute : « Il est vrai que le premier de ces philosophes l'a seulement supposé, et que l'autre l'a affirmé d'une manière positive ». (*Plutarque, Les Œuvres morales, traduction de Ricard*. Paris, 17 vol. in-12. Voir vol. XIII, Questions platoniques, p. 484).

1. *Composition mathématique de Claude Ptolémée, ou astronomie ancienne, traduite pour la première fois du grec en français sur les manuscrits de la Bibliothèque du Roi, par Halma (avec le texte grec) et suivie des notes de M. Delambre*. Paris, 1816, 2 vol. in-4°. Voir chap. XV et suiv.

2. *Traité d'Aristarque de Samos sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune, et fragments de Héron de Bizance sur les mesures. Traduits du grec pour la première fois avec des commentaires et des observations, par M. le comte de Fortia d'Urban*. Paris, 1823, in-8°. Voir p. 11.

des angles sous lesquels certains arcs de grand cercle sont vus d'un point extérieur à la sphère.

Un cinquième commentaire concerne le traité d'*Optique* communément attribué à Euclide [1], mais que la critique moderne incline à attribuer à un géomètre postérieur. Une première série de neuf lemmes préliminaires (propr. 42 à 50) prépare la démonstration de la proposition 51, énoncée : « Si une droite tombant de l'œil au centre d'un cercle n'est pas perpendiculaire au plan de ce cercle, ni égale à son rayon, les diamètres du cercle paraîtront inégaux ». Cette proposition n'est autre que la proposition 35 du traité d'*Optique* [2], que Pappus énonce un peu plus librement et démontre d'une manière différente. La démonstration considérant les deux cas du rayon visuel plus grand ou plus petit que le rayon du cercle contemplé, la proposition de Pappus peut être rapprochée de deux autres propositions de ce même traité d'*Optique*, à savoir : la proposition 36 qu'Euclide énonce : « Les roues des chars paraissent tantôt de forme circulaire, tantôt contractées »[3], et la proposition 37, énoncée : « Il y a un lieu où, l'œil restant fixe et la chose regardée se déplaçant, la chose regardée paraît toujours égale » [4]. Les propositions de Pappus, de même que celles du traité d'Euclide, appartiennent donc à la perspective ancienne, qui se borne à observer les formes sous lesquelles l'œil voit les corps placés dans des positions différentes ou affectées de mouvements divers, et ces propositions sont donc fort éloignées de la perspective moderne qui construit géométriquement sur une surface plane ou courbe les formes des corps telles qu'elles se présentent à la vue [5].

1. *Euclidis Optica, Opticorum recensio Theonis, Catoptrica cum scholiis antiquis edidit J. L. Heiberg*. Lipsiae, 1895, in-8°.

2. *Ibidem*, p. 64.

3. Énoncé que nous traduisons sur le texte suivant (édit. précitée, p. 80) : τῶν ἁρμάτων οἱ τροχοὶ ποτὲ μὲν κυκλοειδεῖς φαινονται, ποτὲ δὲ παρεσπασμένοι.

4. Voir édit. précité, p. 80 : Ἔστι τόπος οὗ τοῦ ὄμματος μένοντος τοῦ δὲ ὁρωμένου μεθισταμένου ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον.

5. Une première traduction de l'*Optique* d'Euclide a été donnée sous le titre : *Euclide. La Perspective, traduite sur le texte grec original de l'autheur, et démonstrée par Roland Fréart de Chantelou, Sieur de Chambray*. Le Mans, 1663, in-4°.

Voir au sujet de l'Optique des Anciens, l'ouvrage de Poudra : *Histoire de la perspective ancienne et moderne, contenant l'analyse d'un très grand nombre d'ouvrages sur la perspective et la description des procédés divers qui s'y rapportent*. Paris, 1864, in-8°.

Les deux dernières propositions de ce commentaire méritent de retenir l'attention. En effet, la proposition 53, en démontrant que, lorsque la circonférence du cercle apparaît sous la forme d'une ellipse, un point autre que le centre du cercle peut apparaître comme centre de cette ellipse, fait intervenir une relation qui montre que les propriétés du pôle et de la polaire dans le cercle étaient déjà connues chez les géomètres de l'Antiquité ; tandis que la proposition 54 résout d'une manière élégante le problème de trouver le lieu géométrique d'où l'œil verra constamment un cercle donné de position sous la forme d'une ellipse ayant comme centre un point donné à l'intérieur du cercle.

Le sixième et dernier commentaire concerne le traité *Des Phénomènes* d'Euclide qui constitue une exposition élémentaire, sous forme géométrique, des lois du mouvement diurne [1]. Les deux premières propositions (prop. 55 et 56) étendent la démonstration d'une proposition, mentionnée simplement comme étant la seconde de ce traité, au cas où le cercle horizon est situé sur l'un des tropiques. Si l'on s'en rapporte au texte du traité d'Euclide qui nous a heureusement été conservé, cette seconde proposition est énoncée : « Dans une révolution du monde, le cercle qui passe par les pôles de la sphère sera deux fois perpendiculaire à l'horizon, et le cercle du zodiaque sera deux fois perpendiculaire au méridien ; mais il ne le sera jamais à l'horizon si le pôle de l'horizon est situé entre le tropique d'été et le pôle apparent » [2].

Viennent ensuite cinq propositions (prop. 57 à 61) destinées à compléter une proposition que Pappus désigne comme étant la douzième du traité *Des Phénomènes*, et dans laquelle, d'après lui, Euclide aurait établi d'une manière imparfaite ce qui se rapporte aux levers et aux couchers des douze signes du zodiaque. Si nous nous en rapportons au texte grec d'Euclide, nous traduisons cette douzième proposition comme suit : « Les arcs égaux du demi-cercle qui vient après le Cancer se couchent dans des

1. *Euclidis Phaenomena et Scripta Musica edidit Henricus Menge. Fragmenta collegit et disposuit J. L. Heiberg.* Lipsiae, 1916, in-8°. — *Euklid's Phaenomene. Übersetzt und erlautert von A. Nokk.* Freiburg, 1850, in-8°.

2. Énoncé que nous traduisons d'après le texte grec de l'édition critique (p. 12) mentionnée dans la note précédente. Voir aussi le texte grec de cet énoncé en note dans le corps de l'ouvrage, liv. VI, préambule.

temps inégaux ; ceux qui sont près des points de contact des tropiques, dans des temps plus longs ; ceux qui suivent ces derniers, dans des temps plus courts ; ceux qui sont près du cercle équinoxial, dans des temps les plus courts, et ceux qui sont également éloignés du cercle équinoxial se couchent et se lèvent dans un même temps » (1). C'est au cours de ces dernières propositions que Pappus nous apprend incidemment que l'astronome Hipparque, qui vécut à Rhodes et à Alexandrie vers le milieu du deuxième siècle avant J.-C., avait composé un ouvrage particulier, malheureusement perdu, sur les signes du zodiaque intitulé : *Sur les Ascensions des douze signes* (2).

***

Le livre VII de la *Collection* est infiniment précieux pour l'histoire de la géométrie grecque ; car il constitue la source unique de ce que nous savons au sujet d'un ensemble de travaux perdus relatifs à la géométrie supérieure que les Anciens appelaient *le lieu résolu* (3), c'est-à-dire le champ de l'analyse géométrique. Un long préambule, que Pappus adresse à son fils Hermodore, nous renseigne sur ce qu'il faut entendre par analyse et synthèse chez les anciens géomètres. Ils ont pratiqué deux genres d'analyse : l'une, l'analyse zététique ayant pour objet l'invention de solutions, et qui répond assez bien à la méthode analytique moderne où l'on suppose la question résolue et où l'on établit les relations des conditions entre quantités connues et inconnues pour aboutir à une relation finale, l'autre, l'analyse poristique ayant pour but l'invention, non pas d'une solution, mais d'une démonstration pour une solution ou pour une proposition énoncée, en supposant vraie cette solution ou cette proposition, et en transformant la relation qu'elle donne jusqu'à obtenir une identité ou à arriver à une proposition déjà connue. Ces deux

1. Voir édit. précitée, p. 63. Voir aussi le texte grec de cet énoncé en note dans le corps de l'ouvrage, liv. VI, chap. LV.
2. περὶ τῆς τῶν ιβ′ ζῳδίων ἀναφορᾶς.
3. τόπος ἀναλυόμενος, le lieu résolu, analysé.

genres d'analyses constituent donc la méthode analytique proprement dite des Anciens, et les nombreuses démonstrations apagogiques, ou par réduction à l'absurde, que l'on rencontre à partir d'Euclide, ne sont en réalité que des cas particuliers de cette méthode. Quant à la synthèse ou construction des solutions, elle consistait essentiellement dans le renversement de l'analyse (1).

Pappus nous indique les titres des ouvrages appartenant au champ de l'analyse qui font partie de ce qu'on appelle la *Collection analytique* des Anciens. Ces ouvrages, dont il nous donne un sommaire pour les uns et un commentaire pour les autres dans les nombreuses propositions de son septième livre, sont : les *Médiétés* d'Eratosthène, les *Données* et les *Porismes* d'Euclide, les traités d'Apollonius sur la *Section de Rapport*, la *Section d'Aire*, la *Section déterminée*, les *Lieux plans*, les *Contacts*, les *Inclinaisons* et les *Coniques*; enfin, les *Lieux solides* d'Aristée l'Ancien et les *Lieux à la Surface* d'Euclide.

L'ouvrage d'Eratosthène sur les *Médiétés* (2) est entièrement perdu. Pappus se borne à le mentionner comme étant composé de deux livres appartenant à l'analyse géométrique ; de sorte que, dans l'ignorance où nous sommes sur son contenu, on incline à croire qu'Eratosthène y avait résolu des problèmes de lieux

1. Les procédés d'analyse et de synthèse des anciens géomètres ont été excellemment exposés par Paul Tannery dans deux études : l'une, *l'Éducation platonicienne*, chap. VII, *l'Analyse géométrique* (*Revue philosophique*, 1880, t. X, pp. 517-530 ; 1881, t. XI, pp. 283-299, et t. XII, pp. 151-168 ; pp. 615-636, ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, t. VII, pp. 1-102) ; l'autre, *Notions historiques*, chap. II, *Du sens des mots analyse et synthèse chez les Grecs et leur algèbre géométrique* (*Mémoires scientifiques*, t. III, pp. 158-187).

2. Eratosthène, fils d'Aglaos, né à Cyrène en 276 avant J.-C., mort vers 195 à Alexandrie où Ptolémée Evergète l'avait appelé vers 226 à la direction de la bibliothèque de cette ville. D'après les nombreux titres d'ouvrages qui lui sont attribués par les auteurs anciens, Eratosthène aurait énormément écrit. Il ne reste presque rien de ses œuvres littéraires, et quant à ses œuvres scientifiques, on a sous son nom un petit commentaire sur les *Phénomènes* d'Aratus et un ouvrage intitulé : *Catastérismes*, dans lequel il est question des origines fabuleuses des noms des constellations, et qui fut publié par Fell, à Oxford, en 1672. Comme mathématicien, il a attaché son nom au procédé élémentaire pour l'invention des nombres premiers, connu sous le nom de crible d'Eratosthène. Sa lettre à Ptolémée, conservée par Eutocius, nous fait connaître son procédé empirique pour résoudre le problème des deux moyennes proportionnelles au moyen d'un instrument ingénieux. Outre son ouvrage sur les *Médiétés* mentionné par Pappus, on lui attribue encore d'avoir développé les moyens d'observations astronomiques en établissant des armilles au Musée d'Alexandrie.

géométriques constitués par des points établissant des médiétés arithmétiques, géométriques ou harmoniques entre des points correspondants de deux lignes données.

Le livre de *Données* d'Euclide a probablement précédé la plupart des autres travaux d'analyse géométrique dont il sera question plus loin ; car il a pour objet de faciliter cette analyse en traitant un grand nombre de cas auxquels peut être ramené un problème déterminé. Pappus nous apprend que cet ouvrage contient quatre-vingt-dix théorèmes, dont les vingt-trois premiers concernent les grandeurs en général, tandis que les autres traitent successivement de droites proportionnelles données de grandeur et non de position, de triangles et autres aires rectilignes donnés d'espèce et non de position, de parallélogrammes, d'applications de certaines aires données d'espèce sur des lignes droites, et, enfin, de cercles donnés de grandeur seulement ou aussi de position. Ces renseignements correspondent au contenu de l'ouvrage tel qu'il nous est parvenu en entier, sauf que les manuscrits, d'après lesquels nous devons à F. Peyrard la traduction française des *Données* annexée à sa traduction des *Éléments* d'Euclide, présentent quatre-vingt-quinze propositions, et que d'autres manuscrits sur lesquels H. Menge a basé son édition critique du texte grec présentent quatre-vingt-quatorze propositions. Ces différences peuvent être attribuées au fait que Pappus aurait tiré ses renseignements d'une copie incomplète de quatre ou cinq propositions, ou que les copies que nous possédons auraient été interpolées au moyen de quelques propositions complémentaires (1).

Les deux notices suivantes se rapportent à deux ouvrages d'analyse d'Apollonius : celui de la *Section de Rapport* et celui

1. Les *Données* d'Euclide ont été publiées pour la première fois en grec, avec une version latine par Cl. HARDY sous le titre : *Euclidis Data, Cl. Hardy e biblioth. Paris. graece nunc primum edidit, latine vertit, scholiisque illustravit ; adjectus est Marini commentarius gr. et lat.* Lutetiae Parisiorum, 1625, in-4°. Une autre édition est intitulée : *Euclidis Datorum liber cum additamento, necnon tractatus alii ad geometriam pertinentes curavit et edidit Sam. Asaphensis.* Oxonii, 1803, in-8°. La première traduction française a été donnée par François PEYRARD dans le volume III de l'édition précitée de sa traduction des *Éléments* d'Euclide. Une édition critique du texte grec des *Données* a été publiée sous le titre : *Euclidis Data cum commentario Marini et scholiis antiquis edidit H. Menge.* Lipsiae, 1896, in-8°. Cet ouvrage forme le volume VI de l'édition : *Euclidis opera omnia ediderunt et latine interpretati sunt J. L. Heiberg et H. Menge.* Lipsiae, 1883-1898, in-8°.

de la *Section d'Aire*. Pappus nous renseigne que le premier de ces ouvrages est divisé en deux livres et qu'il contient cent quatre-vingt et une propositions traitant des nombreux cas qui peuvent être considérés dans la solution d'un problème unique qu'il énonce comme suit : « Mener par un point donné une ligne droite qui découpe sur deux droites données de position, et jusqu'à des points donnés sur ces droites, des segments ayant même rapport que celui qui est donné ». Pappus fait cependant remarquer que, d'après le géomètre Périclès, le nombre de propositions de l'ouvrage serait même encore plus grand que celui qu'il vient d'indiquer, faisant ainsi sans doute allusion à quelque copie dont il n'a pu disposer, et dans laquelle un commentateur aurait ajouté quelques propositions en étendant la discussion du problème à d'autres cas possibles. Si l'on rapproche la solution générale de ce problème de la proposition XLI du troisième livre des *Coniques* d'Apollonius (1), laquelle démontre que, lorsque trois tangentes à une parabole se rencontrent mutuellement, elles sont coupées dans le même rapport, il est clair qu'Apollonius était dès lors en mesure de mener un nombre quelconque de tangentes à la parabole, et que, par suite, il pouvait avoir résolu déjà le problème de la construction de la parabole au moyen des tangentes.

Le texte originaire du traité de la *Section de Rapport* est perdu ; mais une version arabe de cet ouvrage plus ou moins résumée fut découverte à la fin du XVIIe siècle dans la bibliothèque bodléienne, à Oxford, par Ed. Bernard qui en entreprit une traduction latine qu'il ne put achever en raison de l'extrême incorrection du manuscrit. L'astronome Edmond Halley reprit ce texte difficile après s'être adonné exprès à l'étude de la langue arabe pendant sa campagne astronomique dans l'île de Sainte- Hélène, et en donna une version latine, en 1706 (2), sur laquelle A. Richter basa sa traduction allemande, éditée à Elbing

---

1. *Les Coniques d'Apollonius de Perge. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke.* Bruges, 1923, gr. in-8°. Voir liv. III, prop. XLI, p. 256.

2. *Apollonii Pergaei de Sectione Rationis libri duo ex arabico manuscripto latine versi. Accedunt ejusdem de Sectione Spatii libri duo restituti. Praemittitur Pappi Alexandrini praefatio ad septimum Collectionis mathematicae, nunc primum graece edita: cum lemmatibus ejusdem Pappi ad hos Apollonii libros. Opera et studio Edmundi Halleii.* Oxonii, 1706, in-8°.

en 1836 (1). La version arabe ne paraissant pas avoir tout le développement que la notice de Pappus fait présumer, la version latine de Halley fut reprise librement par W. A. Diesterweg qui publia, en 1824, un essai de reconstitution du traité de la *Section de Rapport* dans lequel tous les cas possibles du problème sont rencontrés (2).

Le commentaire dont Pappus fait suivre sa notice sur le traité de la *Section de Rapport* se compose de vingt et une propositions. Les vingt premières ne sont que de petits lemmes qui démontrent géométriquement des transformations d'égalités et d'inégalités de rapports entre des quantités déterminées, et qui sont destinés à éclaircir d'une manière générale les démonstrations des diverses propositions du traité ; tandis que la proposition 21 résout un problème de segmentation d'une droite dans un rapport un peu plus compliqué, et sur lequel se base une proposition désignée du second livre du traité. Dans ces conditions, le fait que la notice déclare que les deux livres de la *Section de Rapport* comportent encore vingt lemmes en plus des 181 propositions renseignées, laisse supposer que les vingt premiers petits lemmes n'appartiennent pas en propre à Pappus, et que, si leur caractère élémentaire ne les désigne pas comme ayant fait partie intégrante du traité d'Apollonius, ils ont probablement été puisés dans un petit ouvrage particulier qu'on avait l'habitude d'annexer à ce traité dans un but d'éclaircissement.

Quant au traité de la *Section d'Aire*, qui est entièrement perdu, la notice de Pappus nous renseigne qu'il se composait de deux livres dont le premier comprenait quarante-huit propositions et le second livre soixante-seize, lesquelles se rapportaient toutes aux divers cas possibles d'un problème unique énoncé : « Mener par un point donné une ligne droite qui découpe sur deux droites données de position, jusqu'à des points donnés sur ces droites, des segments comprenant une aire équivalente à une aire donnée. »

1. *Apollonius von Perga. Zwei Bücher vom Verhaltnisschnitt (de sectione rationis). Aus dem Lat. des Halley übersetzt und mit Anmerkungen begleitet und mit einem Anhang versehen von Aug. Richter.* Elbing, 1836, in-8°.

2. *Die Bücher des Apollonius von Perga de Sectione Rationis nach dem lateinischer des Ed. Halley frei bearbeitet, von Dr W. A. Diesterweg.* Berlin, 1824, in-8°.

Si l'on rapproche la solution de ce problème des propositions XLII et XLIII du troisième livre des *Coniques* d'Apollonius (1), on voit aussitôt qu'elle permettait déjà de construire un nombre quelconque de tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole, et, par suite, de construire ces deux coniques au moyen de tangentes.

Pappus ne présente aucune proposition particulière à titre de commentaire sur le traité de la *Section d'Aire*. Les seules indications qu'il nous donne sur le nombre de propositions, de lieux et de déterminations maxima et minima qui découlent du problème fondamental de ce traité ont cependant été suffisantes pour provoquer quelques essais de restauration qui présentent un réel intérêt pour le fond, mais dont la forme ne revêt plus la pensée mathématique des Anciens. Une première reconstitution fut donnée par W. Snellius à Leyde, en 1609, dans un ouvrage intitulé : *Apollonius Batavus*, fort apprécié en son temps (2). La seconde reconstitution, qui ne s'étend qu'à un petit nombre de cas du problème, fut publiée par Halley, en 1706, en annexe de sa version latine du traité de la *Section de Rapport* mentionnée plus haut (3). La troisième fut donnée d'une manière très étendue par W.-A. Diesterweg, en 1827 (4) ; la quatrième est due à A. Richter, en 1828 (5), et la dernière a été donnée par M.-G. Grabow, en 1834 (6).

Le troisième ouvrage entièrement perdu d'Apollonius était intitulé : *De la Section déterminée*. Pappus nous indique que cet ouvrage se composait de deux livres ; qu'il contenait neuf problèmes dont les nombreux cas particuliers faisaient l'objet de quatre-vingt-trois théorèmes démontrés à l'aide de vingt-sept lemmes dans le premier livre et de vingt-quatre lemmes dans le

1. APOLLONIUS, *Les Coniques*. Voir trad. précitée : prop. XLII, p. 259, et prop. XLIII, p. 260.
2. W. SNELLIUS, *Apollonius Batavus, seu exsuscitata Apollonii Pergaei geometria*. Lugduni Batavorum, 1608, in-8°.
3. Voir l'ouvrage de Halley mentionné dans une note précédente.
4. *Die Bücher des Apollonius von Perga de Sectione Spatii wiederhergestellt von Dr W. A. Diesterweg, mit funf Steintafeln*. Elberfeld, 1827, in-8°.
5. *Apollonius von Perga. Zwei Bücher vom Raumschnitt. Ein Versuch in der alten Geometrie von Aug. Richter*. Halberstadt, 1828, in-8°.
6. *Die Bücher des Apollonius von Perga « de Sectione Spatii » analyt. bearbeitet, und mit einem Anhang von mehrern Aufgaben ähnl. Art versehen von M. G. Grabow*. Frankfurt, 1834, gr. in-8°.

second livre, et que l'ensemble de toutes les propositions constituait la résolution complète du problème unique qu'il énonce : « Couper une droite indéfinie en un point, de manière que le carré construit sur une des droites ainsi découpées, jusqu'à des points donnés sur cette droite, ou le rectangle compris sous les droites découpées, ait un rapport donné soit avec le carré d'une des droites découpées, soit avec le rectangle compris sous l'une des droites découpées et une droite donnée ailleurs, soit avec le rectangle compris sous deux droites découpées de l'un ou de l'autre côté qu'on voudra des points donnés ». Il résulte donc de cet énoncé que le titre : *De la Section déterminée* donné à l'ouvrage d'Apollonius répond en quelque sorte aux différentes positions des points donnés et du point cherché qui peuvent être envisagés dans le problème.

Pappus démontre quarante-trois lemmes destinés à éclaircir les démonstrations des différents cas du problème ; mais il ne nous donne malheureusement pas les énoncés de ces cas, et se borne à les désigner simplement par le numéro d'ordre qu'ils occupaient dans le traité d'Apollonius. Ces lemmes montrent clairement que les propositions du traité appartenaient à une théorie dont le rôle chez les anciens géomètres pourrait être comparé à celui de l'involution chez les modernes. Ainsi, parmi les dix-neuf lemmes consacrés au premier livre de la *Section déterminée*, Pappus en démontre deux (prop. 37 et 38) qui concernent une involution de quatre points, à savoir : le point central, un point double et deux points conjugués ; puis, il en démontre deux autres (prop. 39 et 40) qui établissent une même propriété d'une involution de cinq points en considérant deux systèmes de deux points conjugués et un point double. D'autre part, parmi les vingt-quatre lemmes consacrés à certaines propositions du second livre du traité, Pappus en démontre trois (prop. 41, 42 et 43) qui établissent une relation entre deux systèmes de deux points conjugués et leur point central ; puis douze autres (prop. 45 à 56) qui établissent une relation entre deux systèmes de deux points conjugués, leur point central et un autre point quelconque. Enfin, les quatre derniers lemmes (prop. 61 à 64) établissent la propriété de maximum et de minimum relative à deux systèmes de points conjugués et un point double, et ils construisent géométriquement l'expression du rapport des produits des distances du point double aux points conjugués ; en sorte que les relations démontrées dans la plupart de ces lemmes peuvent être considérées comme des cas particuliers de la relation générale dans la théorie de l'involution de six points telle qu'elle a été créée par Desargues.

Le traité de la *Section déterminée* a fait l'objet de travaux de reconstitution de la part de plusieurs habiles géomètres. Une première reconstitution fut donnée par W. Snellius, en 1609, dans son ouvrage intitulé : *Apollonius Batavus*, mentionné plus haut comme contenant déjà les reconstitutions des deux premiers ouvrages perdus d'Apollonius [1]. Une seconde reconstitution fut donnée à Londres, en 1772, par J. Lawson [2] qui, dès l'année suivante, réédita la reconstitution de Snellius avec de notables améliorations [3]. Une troisième reconstitution, due à W.-A. Diesterweg, en 1822 [4], est basée sur la reconstitution d'un certain nombre de propositions publiées dans un ouvrage posthume de Robert Simson [5]. Une quatrième reconstitution, augmentée d'un grand nombre de propositions traitées analytiquement, a été donnée, en 1828, par M.-G. Grabow [6] ; une dernière reconstitution, visant tout à la fois les trois ouvrages perdus qui précèdent, fut publiée par G. Paucker, en 1837 [7], et, enfin, une simple étude sur les propositions relatives à la *Section déterminée* est due à J.-F. Ley, en 1845 [8].

Le quatrième ouvrage perdu d'Apollonius sur lequel Pappus

1. Édition mentionnée dans une note précédente.
2. *The two books of Apollonius Pergaeus concerning determinate sections, etc., by J. Lawson*. London, 1772.
3. *The two books of Apollonius Pergaeus concerning determinate sections as they have been restored by Willebroidus Snellius, by J. Lawson*. London, 1773.
4. *Die Bücher des Apollonius von Perga de Sectione determinata, wiederhergestellt von Rob. Simson und die angehängten Bücher des Letzteren, nach dem Lat. frei bearbeitet von A. W. Diesterweg*. Mainz, 1822, gr. in-8°.
5. *Roberti Simsoni opera quaedam reliqua post auctoris mortem in lucem edita cura Jacobi Clow*. Glasguae, 1776, in-8°.
6. *Die Bücher des Apollonius von Perga de Sectione determinata analyt. bearbeitet und durch einen Anhang von vielen Aufgaben ähnl. Art verm. von M. G. Grabow*. Frankfurt, 1828, gr. in-8°.
7. *Geometrische Analysis, enthaltend : des Apollonius von Perga sectio rationis, spatii et determinata, nebst Aufgaben zu Letzteren. Neu bearbeitet von G. Paucker*. Leipzig, 1837, gr. in-8°.
8. J. F. Ley, *Ueber die Auflösung der Aufgaben des Apollonius von dem bestimmten Schnitte*. Programm des Kathol. Gymn. Cöln, 1845.

nous donne des renseignements était intitulé : *Des Inclinaisons*, et avait trait au problème général de la sécante qu'il énonce : « Deux lignes (droites ou cercles) étant données de position, poser dans leur intervalle une droite de longueur donnée et inclinée vers un point donné ». Les deux livres qui composaient cet ouvrage contenaient trente-huit lemmes, cent-vingt-cinq théorèmes et cinquante-quatre problèmes dont la plupart présentaient un certain nombre de cas différents. Il est probable que toutes les propositions de cet ouvrage n'appartiennent pas en propre à Apollonius ; car le problème de la sécante était connu depuis longtemps avant lui, du moins dans certains cas particuliers. Il apparaît déjà dans le plus ancien fragment de la géométrie grecque, notamment dans la troisième lunule d'Hippocrate de Chio, et il est mentionné par Aristote, bien que ce dernier n'ait visé sans doute que des solutions mécaniques ou empiriques, attendu qu'il n'a pas connu les sections coniques. D'autre part, Archimède, qui vécut environ un demi-siècle avant Apollonius, invoque plusieurs fois à titre subsidiaire des cas particuliers du problème de la sécante, et prouve ainsi que des solutions planes, à l'aide de la règle et du compas, ou bien solides à l'intervention de sections coniques, ou même grammiques, au moyen de courbes transcendantes telles que la conchoïde de Nicomède, étaient déjà acquises à la science de son temps. Ce ne sont d'ailleurs pas des constructions mécaniques de la sécante, mais bien celles qui présument une solution connue plane, solide ou grammique qu'Archimède fait intervenir, notamment dans les propositions préliminaires de son prestigieux traité : *Des Spirales* (1), au cours d'une proposition du second livre de son traité : *De la Sphère et du Cylindre* (2), et dans la huitième proposition de son livre *Des Lemmes* (3).

Les travaux antérieurs d'Apollonius sur les coniques devaient naturellement avoir attiré l'attention de ce géomètre de génie sur le problème général de la sécante dont la solution analytique, menant à des équations du second degré, aboutit à la détermina-

1. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, prop. 5, 6, 7, 8 et 9. Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 246-253.
2. ARCHIMÈDE, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. II, *ibidem*, p. 101.
3. ARCHIMÈDE, *Le livre des Lemmes*, prop. 8, *ibidem*, p. 532.

tion de points d'intersection de coniques. On devait donc s'attendre à ce que le traité particulier *Des Inclinaisons* constituât, sinon un ouvrage entièrement original, du moins un recueil de solutions obtenues par Apollonius et par ses prédécesseurs au moyen de sections coniques ou de courbes transcendantes. Or, il semble au contraire résulter des renseignements sommaires de Pappus, qu'Apollonius avait consacré son ouvrage spécialement à l'étude des cas où le problème de la sécante est plan, lesquels sont en réalité moins nombreux et parfois plus difficiles à résoudre que les cas où le problème est solide. En effet, les quatre problèmes que la notice de Pappus nous indique comme exemples de ceux qui, dans le traité *Des Inclinaisons*, étaient « les plus utiles pour beaucoup de questions », sont exclusivement plans. Ainsi, le premier problème, faisant partie du premier livre et comportant cinq cas, consistait à mener une droite issue de l'extrémité d'un diamètre et interceptée sur une longueur donnée entre l'arc du demi-cercle et une perpendiculaire élevée sur le diamètre ; le second problème, faisant aussi partie du premier livre et comportant deux cas, consistait à mener par un point donné une sécante interceptée sur une longueur donnée dans un cercle ; le troisième problème, faisant encore partie du premier livre et comportant aussi deux cas, consistait à mener, par le sommet d'un rhombe, une sécante interceptée sur une longueur donnée dans l'angle extérieur opposé ; enfin le quatrième problème, faisant partie du second livre et comportant dix cas, consistait à mener, de l'extrémité du diamètre d'un demi-cercle, une sécante interceptée sur une longueur donnée entre ce demi-cercle et un autre demi-cercle dont le diamètre est dans le prolongement du diamètre du premier demi-cercle. Ce qui semble d'ailleurs confirmer que les problèmes du traité : *Des Inclinaisons* étaient pour la plupart, si pas tous, de nature plane, c'est le fait que la série des trente et un lemmes (prop. 65 à 95), que Pappus nous expose dans le but d'éclairer les passages difficiles des démonstrations d'Apollonius, ne font intervenir ni les sections coniques ni les courbes transcendantes.

Quel que puisse avoir été le contenu d'un ouvrage irrémédiablement perdu, auquel le commentaire de Pappus ne renvoie, suivant son habitude, qu'en indiquant le nombre ordinal attribué aux propositions dans les manuscrits, on peut encore admettre qu'Apollonius n'avait pas exclu de son traité les solutions mécaniques préconisées par certains de ses prédécesseurs pour quelques problèmes sur la sécante ; d'autant plus que lui-même n'avait pas dédaigné d'imaginer une solution toute empirique du problème des deux moyennes proportionnelles ; solution pratiquement satisfaisante, du reste, qui nous a été conservée dans les commentaires d'Eutocius sur les œuvres d'Archimède (1).

Parmi les dix propositions (prop. 65 à 74) du commentaire de Pappus sur le premier livre *Des Inclinaisons*, il y a lieu de remarquer la proposition 70 qui démontre que, si l'on choisit un point sur le prolongement de la diagonale d'un rhombe, si l'on découpe à partir de ce point, sur la diagonale, la droite moyenne proportionnelle entre la diagonale prolongée et la droite qui la prolonge, la circonférence de cercle décrite du point choisi comme centre et avec la droite moyenne proportionnelle comme rayon coupera un des côtés du rhombe et un autre de ses côtés prolongé en deux points qui seront en ligne droite avec l'extrémité de la diagonale. Pappus nous dit que sa proposition est en corrélation avec la huitième proposition du premier livre du traité ; ce qui fournit donc une indication sur la manière dont Apollonius avait résolu le problème plan de la sécante issue du sommet d'un rhombe et interceptée sur une longueur donnée entre un côté et un autre côté prolongé de ce rhombe. La solution de ce beau problème fut reconstituée avec quelques variantes au cours du XVIIe siècle, d'abord par Marino Gethaldi (2), puis par Christian Huygens (3), et enfin par Hugo de Omerique (4).

Bien que la solution d'Apollonius pour le rhombe s'applique au cas particulier du carré, Pappus s'arrête cependant à ce dernier cas pour nous exposer, moyennant la démonstration préliminaire

1. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, iterum edidit J. L. Heiberg*. Lipsiae, 1910-1913, 3 vol. in-8°. Voir vol. III, p. 64.

2. *Marini Gethaldi de resolutione et compositione mathematica libri V*. Romae, 1630, in-folio.

3. *Christ. Hugenii de circuli magnitudine inventa*. Lugduni Batavorum, 1654, petit in-folio.

4. *Analysis geometrica, sive nova et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica quam arithmeticas questiones, authore Ant. Hugone de Omerique*. Gadibus, 1698, petit in-4°.

d'un lemme (prop. 70), la solution élégante (prop. 71), donnée par Héraclite, de la sécante issue du sommet d'un carré et interceptée sur une longueur donnée entre un côté et l'autre côté prolongé de ce carré.

Parmi les vingt et un lemmes se rapportant au second livre des *Inclinaisons* (prop. 75 à 95), la proposition 75 démontre que les perpendiculaires, abaissées des extrémités du diamètre sur une sécante du cercle ne coupant pas le diamètre à l'intérieur du cercle, déterminent sur cette sécante des segments égaux en dehors de la circonférence. Il y a lieu de remarquer que cette proposition ne constitue qu'un cas particulier de la proposition 13 du livre des *Lemmes* d'Archimède, laquelle considère la sécante du cercle coupant le diamètre à l'intérieur du cercle [1]. Les vingt lemmes suivants concernent tous diverses propriétés des sécantes du cercle.

Le grand intérêt que les géomètres des siècles derniers attachèrent aux questions résolues par Apollonius dans son traité des *Inclinaisons* eut comme conséquence des essais de reconstitutions plus ou moins étendus, notamment de la part de Marino Gethaldi dans son ouvrage intitulé : *Apollonius Redivivus* [2] qui contient, en outre, le premier résumé qui ait été donné du traité de Serenus d'Antinoé : *La Section du Cône et du Cylindre* [3] ; puis de la part d'Alexandre Anderson [4], dont l'essai reprend et développe considérablement celui de Gethaldi ; ensuite de la part de Samuel Horsley [5] et de Reuben Burrow dont l'essai de reconstitution fut publié conjointement avec son ouvrage de balistique [6], et enfin, de la part de W.-A. Diesterweg dont

1. ARCHIMÈDE, *Le livre des Lemmes*, prop. 13. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 538.

2. *Marini Gethaldi Apollonius redivivus, seu restituta Apollonii Pergaei inclinationum geometria, ejusdem variorum problematum collectio.* Venetiis, 1607, petit in-4°.

3. *Serenus d'Antinoë. Le livre de la section du Cylindre et le livre de la section du Cône, œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke.* Paris-Bruges, 1929, gr. in-8°.

4. *Alexandri Andersoni Aberdonensis supplementum Apollonii redivivi, sive analysis problematis hactenus desiderati ad Apollonii Pergaei doctrinam* περὶ Νεύσεων, *a Marino Gethaldi Patricio Ragusino hucusque non ita pridem restitutam* Parisiis, apud Hadrianum Beys, 1612, petit in-12°. (Volume rare, sorti des presses d'Adrien Beys, gendre de Christophe Plantin. Exemplaire consulté au Musée Plantin, à Anvers).

5. *Apollonii Pergaei inclinationum libri duo. Restituebat Sam. Horsley.* Oxonii 1700, in-4°.

6. *A restitution of the geometrical treatise of Apollonius Pergaeus on inclinations,*

l'essai ne constitue qu'un remaniement de celui de Horsley (1).

Le cinquième ouvrage perdu d'Apollonius sur lequel Pappus nous donne des renseignements et une série de lemmes auxiliaires est le traité des *Contacts*. Cet ouvrage était divisé en deux livres ; il contenait vingt et un lemmes, soixante théorèmes et onze problèmes, et Pappus en résume toute la matière dans une seule proposition en énonçant que trois éléments quelconques étant donnés de position parmi des points, des droites et des cercles, il s'agit de mener un cercle qui passe par les points, dans le cas de points donnés, et tangent aux droites et aux cercles. Enumérant ensuite les dix cas dans lesquels Apollonius avait résolu le problème, Pappus nous fournit ainsi le premier et seul indice d'une analyse combinatoire chez les Anciens, soit qu'elle n'ait pas dépassé les limites d'une simple vérification, soit qu'elle eût déjà atteint un certain stade théorique chez Apollonius même à l'occasion de la discussion d'un problème dont les cas correspondent, en effet, aux dix combinaisons possibles des trois éléments considérés pris trois à trois avec répétition.

Parmi les huit cas renseignés comme faisant partie du premier livre, les deux premiers, relatifs aux trois points donnés et aux trois droites non parallèles données, n'étaient en réalité pas nouveaux ; car ils avaient déjà été résolus par Euclide, dans les propositions 4 et 5 du livre IV de ses *Éléments*, au moyen des cercles circonscrit et inscrit au triangle (2). Quant aux deux derniers cas, celui du cercle tangent à deux droites et à un cercle donnés et celui du cercle tangent à trois cercles donnés, qui est le plus remarquable et le plus difficile, ils faisaient partie du second livre. Bien que ce dernier problème soit regardé maintenant comme élémentaire, la reconstitution de la solution perdue d'Apollonius a excité la curiosité des plus grands géomètres des derniers siècles, tels que Viète, Descartes et Newton. Viète s'en occupa le premier en proposant la solution, à titre de défi, au géomètre belge Adrien Romain (3) qui venait de lui communiquer sa célèbre résolution

also the theory of gunnery or the doctrine of projectiles in non resisting medium, by Reuben Burrow. London, 1779, petit. in-4°.

1. *Apollonius von Perga « De Inclinationibus » wiederhergestellt von Sam. Horsley nach dem lateinischen frei bearbeitet von Dr W. A. Diesterweg*. Berlin, 1823, in-8°.

2. Euclide, *Éléments*, trad. précitée de Peyrard, vol. I, pp. 202-204.

3. Adrien Romain (Van Roomen), médecin et mathématicien belge, né à Louvain, en 1561, mort à Mayence, en 1615. Il enseigna successivement les

de l'équation du quarante-cinquième degré (1). La solution transmise par Andrien Romain situait le centre du cercle cherché au point d'intersection de deux hyperboles (2), mais elle ne satisfit pas Viète qui en donna une autre, plus simple et plus conforme, d'après lui, à la manière des anciens géomètres qui n'admettaient que l'intervention de la droite et du cercle dans ce qu'ils appelaient les problèmes plans. Viète fit paraître sa solution dans son *Apollonius Gaulois*, ouvrage remarquable, publié en 1600 (3), dans lequel il reconstitue quelques autres propositions du traité d'Apollonius.

Descartes traita le problème par l'analyse algébrique, et il résulte de sa *Correspondance* que ses laborieux calculs aboutirent à une première expression si compliquée, qu'il évaluait à trois mois le temps qu'il lui aurait fallu pour en réaliser la construction géométrique, et à une seconde solution qui ne fut pas achevée (4). Cette étude amena Descartes à considérer le problème d'Apollonius dans l'espace, et à le proposer sous l'énoncé général suivant à Fermat qui nous en a laissé de belles solutions dans ses œuvres (5) :

---

mathématiques à Louvain et la médecine à Wurzbourg. Une analyse de ses nombreux ouvrages a été donnée par H. Bosmans, dans la *Biographie nationale*, publiée par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, t. XIX, col. 848-889.

1. L'équation du quarante-cinquième degré, connue sous le nom de « Équation d'Adrien Romain », laquelle se confond avec la formule générale déterminant la corde de la quarante-cinquième partie de l'arc sous-tendu par une corde donnée, est exposée dans l'ouvrage: *Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum, qua laterum perimetrorum et arearum cujuscumque polygoni investigandorum ratio exactissima et certissima; una cum circuli quadratura continentur. Authore Adriano Romano Lovaniensi medico et mathematico.* Lovanii, 1593, in-4°. C'est dans ce même ouvrage que le rapport de la circonférence au diamètre est donné avec seize décimales.

2. La solution d'Adrien Romain est exposée dans l'ouvrage : *Problema Apolloniacum quo datis tribus circulis, quaeritur quartus eos contingens, antea ab illustri viro D. Francisco Vieta consiliaro Regis Galliarum, ac libellorum supplicum in Regia Magistro, omnibus mathematicis sed potissimum Belgii ad construendum propositum, jam vero per belgam Adrianum Romanum constructum.* Wirceburgi, 1596, in-4°. Cet ouvrage a été analysé par H. Bosmans S. J. dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXIX, 1er fasicule, janvier 1905.

3. *Francisci Vieta Apollonius Gallus, seu exsuscitata Apollonii Pergaei* περὶ ἐπαφῶν *geometria. Ad. V. C. Adrianum Romanum belgam.* Parisiis, 1600, in-4°.

4. DESCARTES, *Lettres*, édit. de Paris, 1725, t. III, lettres 72-73. Voir aussi : *Œuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery.* Paris, 1897-1908, 11 vol. in-4°.

5. *Varia Opera mathematica D. Petri de Fermat.* Tolosae, 1679, in-folio. On trouvera la traduction française des œuvres de Fermat dans l'ouvrage : *Œuvres de Fermat, par P. Tannery et C. Henry (texte latin et traduction française).* Paris, 1891-1896, 3 vol.

« Quatre éléments étant donnés parmi des points, des plans et des sphères, décrire une sphère passant par les points, dans le cas de points donnés, et tangents aux plans et aux sphères ».

Après Descartes, le problème du cercle tangent à trois cercles donnés fit encore l'objet de nombreuses solutions algébriques, notamment de la part d'Élisabeth, fille de Frédéric, roi de Bohème, laquelle transmit à Descartes une solution analytique non moins compliquée que celle qu'il avait trouvée lui-même. Newton donna, dans son *Arithmétique universelle* (1), des solutions analytiques de quelques cas du problème d'Apollonius, lesquelles aboutissent aux constructions géométriques qui avaient déjà été indiquées par Viète. D'autre part, les solutions analytiques du marquis de l'Hospital (2) considèrent le problème successivement dans les cas de trois cercles donnés égaux, de deux cercles égaux sur trois cercles donnés et de trois cercles donnés inégaux. Enfin, on trouve encore des solutions analytiques intéressantes de cas particuliers du problème d'Apollonius chez Thomas Simpson (3), Robert Simson (4), J. Lawson (5), Woldike (6), Lambert de Mulhouse (7), Hollandius (8), Oberreit (9), Tempelhof (10), Schwab (11),

1. *Newtoni Arithmetica universalis, cum commentariis Joh. Castillionei.* Amstelodami, 1760, 2 vol. in-4°. Voir aussi la traduction française de cet ouvrage donnée par N. Beaudeux. Paris, 2 vol. in-4° (problèmes XLII et XLVII).

2. *Traité analytique des sections coniques par L'Hospital.* Paris, 1776, in-4°, p. 374.

3. Voir les ouvrages suivants de Thomas Simpson : *Treatise of algebra.* London, 1745 ; *Éléments de géométrie, traduits de l'anglais de Th. Simpson.* Paris, 1771, 2 vol. in-8° ; *Select exercises for young proficients in the mathematics.* Londini, 1752 (voir problème XIII).

4. *Rob. Simson. Opera quaedam reliqua mathematica, etc.* Glasguae, 1776, in-4°.

5. *The two books of Apollonius Pergaeus concerning tangencies as they have been restored by Fr. Vieta and Marinus Gethaldus, with a supplement by J. Lawson.* Cambridge, 1764, in-4°. Cet ouvrage fut réimprimé une première fois à Londres, en 1771, in-4°, sous le même titre, et une seconde fois, à Londres, en 1781, in-4°, sous un titre un peu abrégé.

6. Woldike, *Problema de describendo circulo, qui tres datos extrinsecus occurrendo tangat.* Hauniae, 1793.

7. J. H. Lambert, *Deutscher Gelehrter Briefwechsel.* Berlin, 1781-1787, 5 vol. in-8°. Voir vol. I, pp. 310 et 325, et vol. IV, p. 425.

8. *Ibidem*, vol. I, p. 308.

9. *Ibidem*, vol. IV, p. 256.

10. Les cas particuliers traités par G. F. Tempelhof se trouvent dans la seconde édition de sa traduction allemande des *Éléments d'algèbre* de Clairault. Berlin, 1778. Voir : pp. 209 et suivantes.

11. *Euclidis Data, verbessert und vermehrt von Robert Simson, aus dem Englisch übersetzt, und mit einer Sammlung geometrischer, nach den analytischen Methoden der Alten aufgelöster Probleme begleitet von J. C. Schwab.* Stuttgart, 1780. Voir problèmes 16, 18, 19, 22 et 29.

Frisi (1), Torelli (2), Fuss (3), Euler (4), C. Hellwig (5), W. Berkham (6) et Ahrens (7). Quant à la solution par la géométrie pure du cas du cercle tangent à trois cercles inégaux, elle fut donnée par Newton dans son ouvrage : *Les Principes de la Philosophie naturelle* (8), où il ramène à l'intersection de deux droites la solution qu'Adrien Romain avait donnée au moyen de deux hyperboles (9).

La fin de la notice de Pappus fait présumer qu'il avait donné une recension du traité d'Apollonius sur les *Contacts* ; car il dit avoir ajouté en tête des deux livres des problèmes du même genre recueillis chez des géomètres postérieurs, et il nous résume ces problèmes complémentaires dans l'énoncé général suivant : « Deux éléments quelconques étant donnés parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle donné de grandeur qui passe par un point donné ou par les points donnés, dans le cas de points donnés, et qui soit tangent respectivement aux droites et aux cercles donnés ». Pappus ajoute que ce problème présentait six cas différents qui répondent, en effet, au nombre des combinaisons possibles des trois éléments considérés pris deux à deux avec répétition.

Le traité des *Contacts* d'Apollonius a fait l'objet de plusieurs essais de reconstitution qui visent tout à la fois les dix cas du problème général d'Apollonius et les six cas du problème général que Pappus avait annexé au traité. Le premier essai, celui de Viète, est entièrement constitué par son *Apollonius Gaulois* dont il a déjà été question plus haut. Il ne répond guère à l'étendue que semble avoir eue l'ouvrage d'Apollonius ; car les problèmes

---

1. *Pauli Frisi Operum tomus primus Algebram et geometriam analyticam complectens*. Mediolani, 1782. Voir : p. 64.
2. *Josephi Torelli geometrica*. Veronae, 1769, in-8°. Voir : pp. 1 à 74 et p. 115.
3. *Novi commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*. Petropoli, 1747-1775. Voir : vol. VI, pp. 95 et suiv.
4. *Ibidem*.
5. C. Hellwig, *Das Problem des Apollonius*. Halle, 1856.
6. W. Berkham, *Das Problem des Pappus von den Berührungen*. Halle, 1857.
7. Ahrens, *Ueber das Problem des Apollonius von Perga von den Berührungen*. Augsburg, 1836.
8. *Newtoni Philosophiae naturalis principia mathematica*. Londini, 1725, in-4°. Voir liv. I, lemme XVI. Voir aussi : *Les Principes mathématiques de la philosophie naturelle de Newton, traduits par Mme du Chastelet*. Paris, 1759, 2 vol. in-4°.
9. Une solution moderne du problème du cercle tangent à trois cercles donnés se trouve dans l'ouvrage de Catalan : *Théorèmes et Problèmes de géométrie élémentaire*. Sixième édition. Paris, 1879, in-8°, p. 206. probl. 28.

de Viète, bien que choisis parmi les plus difficiles, sont en beaucoup plus petit nombre que ne le renseigne Pappus pour l'ouvrage d'Apollonius, et leurs solutions élégantes, entièrement obtenues par la géométrie pure, ne correspondent sans doute pas à celles d'Apollonius, parce qu'elles sont basées sur une série de lemmes très différents de ceux que Pappus nous expose comme ayant été utilisés par le géomètre grec. Le second essai, ne comportant que quelques cas particuliers du problème général d'Apollonius, est celui que Marino Gethaldi publia, en 1607, en annexe de son essai de reconstitution du traité des *Inclinaisons* que nous avons mentionné plus haut. Un troisième essai, publié par J. Lawson, en 1764, reprit et compléta notablement les essais précédents de Viète et de Gethaldi (1). En 1795, Guillaume Camerer fit paraître, à Gotha, un petit ouvrage qui donne successivement : le texte grec de la notice et des lemmes que Pappus consacre au traité des *Contacts* d'Apollonius, publié pour la première fois d'après deux manuscrits de Paris et de Strasbourg, ensuite la reconstitution du traité telle que Viète l'avait essayée dans son *Apollonius Gaulois* et, enfin, une reconstitution par l'analyse algébrique du problème du cercle tangent à trois cercles donnés (2). Les deux dernières reconstitutions furent données par C.-G. Haumann, en 1817 (3), et par W.-L. Christmann, en 1826 ; celle-ci comportant, en outre, une étude critique sur la reconstitution de Viète (4).

Pappus fait suivre sa notice sur le traité des *Contacts* d'un commentaire comportant vingt-trois lemmes (prop. 96 à 118) destinés à éclaircir les solutions des divers cas du problème général d'Apollonius. Si rien ne permet d'établir que ces propositions appartenaient déjà à Apollonius, qui les aurait ainsi placées à titre subsidiaire en tête de son traité, il est probable qu'elles n'appartiennent cependant pas toutes en propre à Pappus qui

1. Voir le titre de cet ouvrage à la note 5, page LXVIII,.
2. *Apollonii de Tactionibus quae supersunt, ac maxime lemmata Pappi in hos libros graece nunc primum edita e codicibus manuscriptis, cum Vietae librorum Apollonii restitutione, adjectis observationibus, computationibus ac problematis Apolloniani historia, a Joanne Guilielmo Camerer.* Gothae, 1795, petit in-8°, fig.
3. *Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen, von C. G. Haumann.* Breslau, 1817, in-8°.
4. *Apollonius suevus, sive tactionum problema nunc demum restitutum, accedente censura in Vietam, auctore G. Lud. Christmann.* Tubingae, 1821.

peut en avoir recueilli une partie chez des commentateurs antérieurs. Ce sont toutefois ces propositions qui ont mis sur la trace des solutions d'Apollonius et ont permis les travaux de restauration mentionnés plus haut.

Bien que la plupart des propositions du commentaire de Pappus soient élémentaires, l'une d'elles (prop. 117) mérite cependant de retenir l'attention, parce qu'elle résout le problème de mener, par deux points pris sur une droite donnée de position, à un cercle donné de position, deux sécantes qui se rencontrent sur la circonférence du cercle en un même point, tel que la droite reliant les deux autres points d'intersection des sécantes du cercle passe par un troisième point pris sur la même droite. Ce problème, que les propositions précédentes 105, 107 et 108 résolvent d'ailleurs déjà dans les cas où le troisième point est reporté à l'infini, revient donc, si on l'énonce d'une manière plus intuitive, à inscrire dans un cercle donné de position un triangle dont les côtés passent par trois points donnés sur une même droite donnée de position, et il se range, dès lors, parmi les problèmes historiques en raison des généralisations auxquelles il a donné lieu de la part de plusieurs éminents géomètres du XVIIIe siècle. Une première généralisation fut envisagée, en 1742, par l'analyste genévois G. Cramer qui énonça le problème d'inscrire dans un cercle donné un triangle dont les côtés prolongés passent par trois points donnés arbitrairement, et qui le proposa au géomètre Castillon en l'engageant à le résoudre par l'analyse des anciens plutôt que par l'analyse des modernes. Les essais de Castillon n'aboutirent d'abord qu'à établir quelques théorèmes qui, d'après lui, devaient mener à une solution, et il reprit ses recherches, en 1755, sur les instances du mathématicien Bouquet, à la suite d'un défi lancé par un anonyme, en Hollande, au sujet de ce même problème. Ce ne fut cependant que longtemps après, trop tard pour relever un défi oublié, que Castillon arriva à une solution au moyen de certains lemmes, et celle-ci fut publiée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, en 1776 (1), en même temps

1. CASTILLON, *Sur un problème de géométrie qu'on regarde comme fort difficile.* (*Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année* 1776). Berlin, 1779.

qu'une solution analytique très prolixe de Lagrange (1). D'autres solutions analytiques, mais appuyées sur les principes des Anciens, au point de pouvoir être considérées comme des solutions synthétiques, avaient été publiées successivement dans les *Actes de l'Académie de Saint-Petersbourg*, par Euler (2), Fuss (3) et Lexell (4); ce dernier ayant examiné spécialement si la solution de Lagrange était susceptible d'une construction géométrique, lorsqu'une solution par la géométrie pure, uniquement basée sur les lemmes dont Pappus fait précéder la solution de son problème particulier, fut donnée par Annibale Giordano di Ottajano, napolitain âgé alors de seize ans. Cette solution fut publiée d'abord, en 1787, dans les *Mémoires de la Société italienne des Quarante* par A. Lorgna, président de cette société, en même temps que la solution donnée par ce dernier d'une autre généralisation consistant à inscrire dans un cercle donné une figure rectiligne d'un nombre donné de côtés assujettis à passer par autant de points arbitrairement donnés (5). Ce dernier problème attira l'attention de Francesco Malfatti, professeur de mathématiques à Ferrare, qui en donna une nouvelle solution, conjointement avec une variante de la solution d'Ottajano, dans le même volume des *Mémoires de la Société italienne des Quarante*. Quant à la dernière généralisation de ce même problème de Pappus, qui consiste à inscrire dans une conique donnée un polygone dont les côtés passent respectivement par des points donnés, sa solution plus récente appartient à la géométrie projective (6).

Le sixième ouvrage perdu d'Apollonius au sujet duquel

1. Lagrange, *Sur une nouvelle propriété des sections coniques. (Ibidem.)*
2. Euler, *Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio.* (*Actes de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg pour l'année* 1780, 1re partie, Saint-Pétersbourg, 1783).
3. Fuss, *Solutio problematis geometrici Pappi Alexandrini. (Ibidem.)*
4. Lexell, *Solutio problematis geometrici in Actis Accademiae Scientiarum Berolinensis pro anno 1776 a Celeb. Castillon propositi.* (*Actes de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg pour l'année* 1780, 2e partie, Saint-Pétersbourg, 1784).
5. Anton-Maria Lorgna, *Considerazioni sintetiche sopra di un celebre problema piano e risoluzione di alquanti altri problemi affini (presentata dal Signor Cavalier Lorgna).* (*Memorie della Società italiana dei XL.* 1787).
6. Une solution du problème, indifféremment dit de Cramer, de Castillon ou d'Ottajano, a été donnée dans l'ouvrage de E. Catalan : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentarire*, sixième édition. Paris, 1879, p. 222.

nous devons quelques renseignements à Pappus est le traité des *Lieux Plans*. La notice relative à cet ouvrage commence par nous définir ce que les Anciens entendaient par lieux plans, lieux solides et lieux grammiques. Les premiers étaient constitués par des lignes engendrées dans le plan, c'est-à-dire les lignes droites et les cercles; les lieux solides par des sections de cône, c'est-à-dire par les trois sections coniques, et les lieux grammiques par des lignes engendrées par des surfaces plus irrégulières et par des mouvements plus compliqués, c'est-à-dire constitués par des courbes transcendantes. La notice expose ensuite que l'ouvrage d'Apollonius classait les lieux géométriques en lieux éphectiques ou restreints, quand un point est lieu d'un point, une ligne lieu d'une ligne, une surface lieu d'une surface et un solide lieu d'un solide, et en lieux diexodiques ou progressants, quand une ligne est lieu d'un point, une surface lieu d'une ligne, un solide lieu d'une surface, enfin en lieux anastrophiques ou enveloppants, quand une surface est lieu d'un point et un solide lieu d'une ligne. Quant à l'importance de l'ouvrage d'Apollonius, il était divisé en deux livres et contenait cent-quarante-sept théorèmes et huit lemmes. Ces théorèmes appartenaient à divers genres, parmi lesquels Pappus choisit, à titre d'exemples, certains énoncés très explicites, et il résume même en grande partie les propositions d'un même genre du premier livre dans l'énoncé général suivant : « Si, d'un point donné ou de deux points donnés, on mène deux droites ; si, issues du point donné, ces droites sont coïncidentes, ou si, issues des deux points donnés, elles sont parallèles, ou comprennent un angle donné ; si ces droites sont dans un rapport donné, ou bien comprennent une aire donnée, et si l'extrémité de l'une d'elles appartient à un lieu plan donné de position, l'autre extrémité appartiendra aussi à un lieu donné de position, du même genre que le premier, ou d'un genre différent, et qui sera placé semblablement au premier par rapport à la droite reliant les deux points donnés, ou disposé d'une manière opposée ».

Après avoir donné les énoncés de trois autres propositions sur les lieux plans, analogues à celles qui constituaient le développement de l'énoncé général qui précède, et qu'il nous dit avoir été ajoutées au traité d'Apollonius par un géomètre Charmandros, connu seulement par cette citation, Pappus démontre huit lemmes (prop. 119 à 126) qui semblent présentés comme ayant fait partie intégrante du traité. Ces lemmes se rapportent en réalité à certaines relations assez simples qu'Apollonius assume sans démonstrations au cours de ses propositions ; et il est donc possible que ces lemmes aient été ajoutés par des commentateurs à certaines copies du traité et pas à d'autres ; de sorte que Pappus les aura recueillis dans son ouvrage dans le but de faciliter l'étude des *Lieux Plans* à un plus grand nombre de lecteurs.

Ces huit lemmes présentent un double intérêt au point de vue de l'histoire de la géométrie. Un premier intérêt est celui qu'ils conservent de pouvoir être rapprochés d'une proposition générale appartenant aux modernes ; car les quatre premiers lemmes, qui concernent le triangle, peuvent être considérés comme une conséquence facile à tirer de la proposition connue sous le nom de théorème de Stewart [1], et les quatre lemmes suivants, qui démontrent les relations entre les segments déterminés par quatre points pris arbitrairement sur une droite, constituent également des transformations très simples de cette proposition générale. Le second intérêt est celui que ces lemmes présentèrent momentanément lorsque, examinés en corrélation avec les énoncés généraux des propositions d'Apollonius fournis par la notice de Pappus, leur caractère de commentaire mit certains géomètres des siècles derniers sur la voie des restaurations du traité des *Lieux Plans* d'Apollonius.

Un premier essai de restauration fut composé par François Van Schooten, qui le publia à Leyde, en 1656, conjointement avec un traité sur le jeu de hasard de son élève Christian Huygens [2] ; essai bientôt suivi de celui que le Père Gaspar Schott donna à Wurzbourg, en 1658 [3]. Bien que ces deux ouvrages contiennent

1. S. Matthew Stewart, *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics*. Edinburgh, 1746, in-8°. Voir le second théorème général de Stewart relatif à quatre points pris arbitrairement sur une droite.

2. *Franc. a Schooten. Exercitationum mathematicarum libri V, quibus accedunt Christ. Hugenii tractatus de rationiciis in aleae ludo*. Lugduni Batavorum, ex officina Joh. Elzevir, 1656-1657, in-4°. (Voir : *Liber III, Apollonii Pergaei Loca plana restituta*, pp. 191-292). Cet ouvrage fut traduit par Van Schooten lui-même en néerlandais sous le titre : *Mathematische Oeffeningen. Waerby gevougt is een tractaet, handelende van reeckening in speelen van geluck door Christianus Hugenius*. Amsterdam, 1659-1660, in-4°.

3. *Magiae Universalis Naturae et Artis, pars III, Mathematica sive Thaumaturgus mathematicus, a P. Gaspare Schotto*. Herbipoli, 1658, in-4°.

de nombreuses propositions analogues à celles que Pappus nous renseigne pour le traité d'Apollonius, ils ne sauraient être acceptés comme restaurations véritables, attendu que toutes les démonstrations font usage du calcul algébrique de Descartes,et s'éloignent ainsi essentiellement de l'analyse géométrique des Anciens. La reconstitution de Van Schooten n'est à vrai dire la première que par la date de sa publication ; car l'illustre Fermat s'était déjà occupé des *Lieux Plans* d'Apollonius, et la copie de son essai de reconstitution, qui fut d'ailleurs l'un de ses premiers travaux, avait été envoyée par le Père Mersenne à Huygens, qui en donna connaissance dans un milieu scientifique dont Van Schooten faisait partie en Hollande. La reconstitution de Fermat, entièrement élaborée par la géométrie pure, et qui se rapprochait donc fort de la manière d'Apollonius, ne fut publiée qu'en 1679 (1), et Van Schooten doit probablement s'en être inspiré avant cette date, sinon pour la forme qui, chez lui, est exclusivement analytique, du moins pour le fond, puisqu'un passage des œuvres de Fermat témoigne de son déplaisir de ne pas voir sa priorité reconnue dans l'ouvrage du géomètre batave (2). Un troisième essai de reconstitution fut publié par le géomètre anglais Robert Simson, en 1749. Écrit en latin et accompagné d'une excellente étude sur les méthodes des géomètres anciens, l'ouvrage de Simson s'efforce de rétablir les deux livres d'Apollonius par la géométrie pure, et il développe, notamment au cours de seize propositions dans le premier livre, les principales circonstances résumées dans l'énoncé général de Pappus que nous avons reproduit plus haut (3). La reconstitution de Simson fut traduite plus tard en allemand par Guillaume Camerer, et publiée à Leipzig en 1796 (4). Mentionnons enfin les reconstitutions partielles du traité des *Lieux Plans* qu'on trouve dans les travaux publiés par F. Woepcke, en 1856 (5),

---

1. *Varia opera mathematica D. Petri de Fermat (Apollonii libri duo de locis planis restituti.)* Tolosae, 1679, in-fol. Ou bien : *Œuvres complètes de Fermat par Paul Tannery*, 3 vol. in-8°. Paris, 1891-1896. Voir vol. I, pp. 3-51.
2. *Œuvres complètes de Fermat*, édit. de 1891, vol. I, p. 356.
3. *Apollonii Pergaei locorum planorum libri II restituti a Roberto Simson.* Glasguae, 1749.
4. *Apollonius von Pergen ebene Oerter. Wiederhergestellt von Robert Simson. Aus dem Lateinischen übersetzt von Johann Wilhelm Camerer.* Leipzig, 1796, in-8°.
5. F. WOEPCKE, *Essai de restitution de travaux perdus d'Apollonius.* Paris, 1856.

et par M. Gardiner, en 1860 (1), lesquels constituent d'ailleurs des essais de restitution de l'ensemble des cinq traités perdus d'Apollonius.

La notice de Pappus relative au *Traité des Porismes* d'Euclide constitue, avec une courte notice de Proclus, les seuls renseignements que l'on possède sur un ouvrage dont la perte nous a dérobé une partie importante du champ de l'analyse exploré par les Anciens.

Cette notice nous rappelle d'abord que la tradition la plus ancienne distinguait les propositions en théorèmes, problèmes et porismes suivant qu'il s'agit de démontrer, de faire ou de construire et de se procurer ou de trouver une chose proposée. Cette distinction entre les trois genres de propositions semble cependant avoir été toujours plutôt formelle ; car Pappus ajoute que, parmi les anciens géomètres, les uns considéraient le porisme comme un théorème, d'autres comme un problème, et il incline lui-même à considérer le porisme comme une proposition intermédiaire entre le théorème et le problème, ou comme pouvant être confondue, suivant les cas, avec l'un ou l'autre de ces deux derniers genres de propositions. La définition antique du porisme donnée par Pappus concorde d'ailleurs avec celle que l'on trouve un peu plus tard dans le commentaire de Proclus sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide. Un premier passage de ce commentaire nous dit, en effet, que les porismes sont un genre de propositions dans lesquelles il n'y a rien ni à démontrer ni à construire, mais où il y a quelque chose à trouver, et un second passage ajoute que les porismes tiennent le milieu entre les problèmes et les théorèmes, parce qu'ils ne se rapportent pas à des choses que l'on doit construire ou considérer théoriquement, mais à celles qu'il faut se procurer et faire voir, c'est-à-dire à des choses dont on doit déterminer certains états, tels que ceux de position et de grandeur (2).

A la suite de la définition ancienne du porisme, Pappus nous en rapporte une seconde, d'après laquelle « le porisme est ce

1. The *Three Sections, the Tangencies and a loci problem of Apollonius and porismatic developments, by M. Gardiner*. Melbourne, 1860, in-8°.
2. *Procli Diadochi in primum Euclidis librum commentarii, recognovit G. Friedlein*. Leipzig, 1873, in-8°.

qui est en défaut d'une hypothèse par rapport à un théorème de lieu »; ce qui signifie que, lorsque l'énoncé d'une proposition relative aux lieux géométriques omet quelque détermination de grandeur ou de position nécessaire pour que cette proposition soit un théorème de lieu, elle devient un porisme. Cette définition nouvelle n'est accompagnée d'aucun développement; elle est cependant blâmée par Pappus comme étant en contradiction avec la définition ancienne, et il la considère comme ayant été introduite par des « auteurs récents » d'une manière accidentelle; ce qui veut sans doute indiquer qu'elle ne s'appliquait qu'à une classe de porismes. Le fait que le porisme aurait été considéré par certains géomètres comme un théorème sur les lieux incomplètement formulé, permet de supposer que l'emploi de la forme spéciale de proposition appelée porisme aurait varié dans l'Antiquité même pour se restreindre aux seuls lieux géométriques. Toutefois, si l'on observe que le terme porisme n'apparaît pas avant Euclide, et que la seconde définition ne correspond pas à ce que Pappus nous apprend sur les énoncés des porismes d'Euclide, lesquels, loin de se rapporter tous aux lieux géométriques, se rapprochent en majeure partie des propositions du traité des *Données* du même auteur, on doit admettre que c'est la définition antique seule qui s'applique aux propositions du *Traité des Porismes*, et que, dès lors, parmi les différents essais de rétablissement de ce traité perdu que nous mentionnerons plus loin, ceux qui s'inspirent de la seconde définition ne sauraient en aucune manière répondre au caractère originaire de l'œuvre d'Euclide. Tous ces essais sont d'ailleurs antérieurs à l'époque où la critique moderne s'est exercée sur les remaniements et les altérations apportés au texte de Pappus par les scoliastes et les commentateurs, et, depuis que cette critique a rejeté tout le passage de la notice relatif à la seconde définition comme ayant été interpolé à une époque indéterminée dans les manuscrits de la *Collection mathématique*, la controverse qui règne continuellement dans ces essais, visant tantôt l'accord, tantôt les divergences des deux définitions des porismes, a perdu son principal intérêt.

La notice nous rapporte que le *Traité des Porismes* d'Euclide était divisé en trois livres contenant ensemble cent soixante et onze porismes, et comportant, en outre, trente-huit lemmes destinés à éclaircir les démonstrations. Pappus groupe tous ces porismes sous vingt-neuf énoncés, dont quinze sont attribués au premier livre, six au second livre, dans lesquels ils avaient trait aux figures rectilignes, et dont les huit derniers sont attribués au troisième livre dans lequel ils se rapportaient au cercle, au demi-cercle et aux segments de cercle. Ces énoncés sont laconiques et obscurs au point de constituer autant d'énigmes ; car ils ne décrivent que les choses cherchées qui constituaient les divers genres de porismes, et omettent les hypothèses qui donnaient lieu aux propositions mêmes d'Euclide, exception faite pour le premier énoncé, qui forme la seule proposition complète qui soit restée du traité perdu, en disant en d'autres termes que : « si de deux points donnés on mène deux droites se coupant sur une droite donnée de position, dont l'une découpe sur une droite donnée de position un segment déterminé à partir d'un point donné, l'autre découpera aussi sur une autre droite un segment ayant avec le premier un rapport donné ». Cette proposition n'est toutefois pas l'unique élément qui, à défaut des autres énoncés énigmatiques, permette de pénétrer le sens qu'Euclide a voulu attribuer au terme porisme ; car, après avoir reconnu qu'un certain nombre de propositions du commencement du premier livre peuvent être renfermées en une seule, visant ce que nous appelons le quadrilatère complet, Pappus l'énonce d'une manière que l'on peut rendre librement en disant que : « si l'on donne quatre droites se coupant deux à deux ; si trois des points d'intersection situés sur l'une d'elles, ou deux seulement en cas de parallélisme, sont donnés, c'est-à-dire restent fixes, et si, des trois autres points, il y en a deux qui soient liés chacun à une droite donnée de position, le dernier sera aussi lié à une droite donnée de position ». Considérant ensuite que cette proposition à quatre droites constitue elle-même un cas particulier d'une proposition plus générale, et ajoutant dans un sentiment de justice qu'elle ne doit sans doute pas avoir échappé à Euclide qui aura voulu ne déposer dans ses porismes que les germes de propositions plus importantes, Pappus énonce cette proposition générale comme lui appartenant en propre, en disant que : « Si tant de droites qu'on voudra se coupent entre elles sans être plus de deux à passer par le même point ; si tous les points situés sur l'une d'elles sont donnés, et si, parmi les points d'intersection des autres, lesquels forment un nombre triangulaire, il y en a autant qu'il y a d'unités dans le côté de ce nombre triangulaire qui soient liés chacun à une droite donnée de position, sans qu'il y ait trois de ces points qui soient les sommets d'un triangle formé par les droites mêmes dont ces points sont les intersections, chacun des autres points sera lié aussi à une droite donnée de position » (1).

On a vu plus haut, qu'après avoir indiqué le nombre de propositions contenues dans les trois livres des *Porismes* d'Euclide, la notice de Pappus mentionne que ces livres comportent en outre trente-huit lemmes. Il ne résulte cependant pas d'un renseignement formulé de cette manière que ces lemmes faisaient partie intégrante de l'ouvrage d'Euclide ; mais le fait que Pappus démontre précisément ce même nombre de lemmes à la suite de sa notice indique, au contraire, qu'ils constituaient un commentaire postérieur se rattachant particulièrement à ces trois livres en vue de leur enseignement, et que, s'ils n'appartiennent pas tous en propre à Pappus, il en aura recueilli une partie chez divers auteurs qui se sont occupés du même sujet avant lui.

Les lemmes I, II, IV, V, VI et VII (prop. 127, 128, 130, 131, 132 et 133) sont relatifs au quadrilatère coupé par une tranversale considérée dans des positions différentes, et ils établissent la relation qui existe entre les segments formés sur cette transversale par les quatre côtés du quadrilatère et ses deux diagonales. Dans les lemmes I et II (prop. 127 et 128) la transversale est parallèle à un côté du quadrilatère ; dans le lemme IV (prop. 130), la transversale a une position quelconque, et la relation démontrée exprime l'involution de six points ; dans le lemme V (prop. 131) la transversale passe par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère, et la relation démontrée exprime qu'une diagonale du quadrilatère est coupée harmoniquement par la seconde diagonale et par la droite qui relie les points de concours des côtés opposés ; dans le lemme VI (prop. 132) la transversale passe par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère comme dans le lemme précédent, mais elle est, en outre, parallèle à une

1. Une démonstration analytique de ce théorème général de Pappus a été donnée par Chasles (*Les trois livres de porismes, etc.*, pp. 130-133).

diagonale ; enfin, dans le lemme VII (prop. 133) la transversale passe par un seul point de concours des côtés opposés du quadrilatère et est parallèle à une diagonale ; de sorte que la relation démontrée constitue un cas particulier des relations d'involution à huit segments.

Le lemme VIII (prop. 134) considère la figure plane constituant la projection du *bomisque*, c'est-à-dire de la figure solide comprise sous deux faces quadrilatères parallèles et huit faces triangulaires passant par le sommet de l'un des quadrilatères et par un côté de l'autre. L'énoncé de ce lemme peut se traduire librement en disant que, si, considérant deux angles ayant leurs côtés parallèles deux à deux, on mène par le sommet de chacun de ces angles une droite coupant les deux côtés de l'autre, les quatre points d'intersection ainsi déterminés sont situés deux à deux sur deux droites parallèles.

Le lemme IX (prop. 135) démontre que, si, par le point de rencontre des deux côtés non parallèles d'un trapèze, on mène une transversale parallèlement aux deux autres côtés, coupant en quatre points les droites qui, issues d'un même point, passent par les quatre sommets du trapèze, le produit des distances du point de rencontre des deux côtés non parallèles du trapèze à deux des quatre points d'intersection est égal au produit des distances du même point aux deux autres points d'intersection.

Les lemmes III, X, XI, XIV, XVI et XIX (prop. 129, 136, 137, 140, 142 et 145) sont tous relatifs aux systèmes de trois droites coupées par deux transversales menées d'un point quelconque, et ils démontrent chacun dans un cas particulier la relation qui existe entre les segments formés sur les deux transversales.

Les lemmes XII, XIII, XV et XVII (prop. 138, 139, 141 et 143) énoncent en d'autres termes et démontrent chacun dans un cas particulier que, lorsque les six sommets d'un hexagone sont situés trois à trois sur deux droites, les trois points de concours des côtés opposés de l'hexagone sont situés en ligne droite. Ces propositions démontrent donc déjà pour l'hexagone inscrit à deux droites la propriété que Pascal démontre pour l'hexagone inscrit à une conique quelconque.

Les lemmes XX et XXI (prop. 146 et 147) énoncent en d'autres termes que, lorsque deux triangles ont deux angles égaux ou supplémentaires, leurs aires sont entre elles comme les rectangles des côtés qui comprennent ces angles.

Les lemmes XXII à XXVII (prop. 148 à 153) et le lemme XXXIV (prop. 160) sont relatifs au rapport harmonique de quatre points situés sur une même droite.

Les lemmes XXXII et XXXVIII (prop. 158 et 164) terminent la série de ceux qui sont relatifs aux figures rectilignes. Le premier démontre une propriété de deux triangles équivalents ayant un angle commun, et le second résout le problème qui consiste à mener dans un parallélogramme, par un point donné sur un de ses côtés, une droite formant avec deux autres côtés un triangle équivalent à ce parallélogramme.

Les lemmes XXVIII et XXXV (prop. 154 et 161) établissent la propriété du pôle et de la polaire dans le cercle.

Le lemme XXIX (prop. 155) résout le problème d'inscrire dans un segment de cercle deux cordes qui soient dans un rapport donné.

Le lemme XXX (prop. 156) démontre que les droites qui relient les extrémités d'une corde à un point quelconque de la circonférence du cercle divisent harmoniquement le diamètre prolongé perpendiculaire à cette corde.

Le lemme XXXI (prop. 157) énonce en d'autres termes et démontre que la corde perpendiculaire à une droite reliant un point fixe du diamètre à un point quelconque de la circonférence du cercle intercepte, sur les tangentes aux extrémités de ce diamètre, deux segments dont le rectangle équivaut au rectangle des segments déterminés par le point fixe sur le diamètre.

Le lemme XXXIII (prop. 159) énonce en d'autres termes qu'un point étant donné sur le diamètre d'un cercle, si l'on prend sur le prolongement du diamètre un point tel que le produit de ses distances aux deux extrémités du diamètre soit équivalent au carré de sa distance au point donné sur le diamètre, et si, par le point ainsi déterminé, on élève une perpendiculaire sur le diamètre, toute droite menée par le point donné sur le diamètre rencontre le cercle en deux points et la perpendiculaire en un troisième point tel que le carré de sa distance au point donné équivaut au rectangle compris sous ses distances aux deux points du cercle.

Le lemme XXXVI (prop. 162) démontre simplement que les perpendiculaires abaissées des extrémités d'une corde parallèle au diamètre d'un cercle sur ce diamètre y découpent des droites égales à partir des extrémités de ce diamètre.

Lorsque la notice de Pappus sur le *Traité des Porismes* d'Euclide eut été révélée dans la version latine de Commandin, publiée presque en même temps à Pise, en 1588, et à Venise, en 1589, elle excita aussitôt la curiosité des géomètres, et ouvrit la longue période de controverses durant laquelle on essaya de rétablir un ouvrage que Montucla estime avoir été « le plus profond de tous les ouvrages d'Euclide, et celui qui lui ferait le plus d'honneur s'il nous était parvenu » (1). Celui qui s'occupa le premier de pénétrer le sens des propositions d'Euclide, sur lesquelles Pappus ne nous renseigne qu'en termes concis et obscurs, fut le savant géomètre Albert Girard, au début du XVIIe siècle. Bien que n'ayant rien publié sur les porismes, on sait qu'il avait entrepris un travail dans le but de les rétablir, et il en annonce à deux reprises différentes une mise au jour que les circonstances l'empêchèrent sans doute de réaliser. On trouve une première allusion à ses travaux de restauration dans un passage de son *Traité de Trigonométrie* où, après avoir fait remarquer le caractère poristique d'une certaine proposition, il ajoute : « Comme jadis estoyent les Porismes d'Euclides, qui sont perduz, lesquels j'espère de mettre bien tost en lumière, les ayant restituez il y a quelques années en çà » (2). Une seconde allusion est faite assez longtemps après dans un passage de son édition complétée des œuvres de Simon Stevin où, après avoir fait remarquer que le rapport composé n'intervient que rarement dans les *Éléments* d'Euclide, il ajoute : « Mais, il est à estimer qu'il en a plus escrit en ses trois livres de Porismes qui sont perduz, lesquels, Dieu aidant, j'espère de mettre en lumière, les ayant inventez de nouveau » (3).

1. MONTUCLA. *Histoire des Mathématiques. Nouvelle édition achevée par J. De La Lande*. Paris, 1779-1802, 4 vol. in-4°. Voir vol. I, p. 215.

2. *Tables des sinus, tangentes et sécantes, selon le Raid de* 100,000 *parties. Avec un traicté succinct de la Trigonométrie tant des triangles plans que sphéricques. etc., par Albert Girard, samielois*. La Haye, 1626, in-24°.

3. *Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges, où sont insérées les Mémoires mathématiques. Esquelles s'est exercé le Prince Maurice de Nassau. Le tout reveu, corrigé et augmenté par Albert Girard, Samielois Mathématicien*. A Leyde, chez Bonaventure et Abraham Elzevier, 1634, in-folio.

Le premier ouvrage dans lequel on trouve des considérations sur la nature et l'objet du *Traité des Porismes* d'Euclide est celui que Fermat composa presque dans le même temps où Girard projetait d'écrire sur le même sujet. Cet ouvrage fut recueilli dans les œuvres de Fermat sous le titre : *Porismatum Euclidoeorum Renovata Doctrina et sub forma isagoges recentioribus Geometricis exhibita.* (1). L'illustre géomètre n'y rétablit cependant pas les propositions d'Euclide telles que les énoncés de Pappus les font prévoir ; mais, assimilant les porismes à des propositions de lieu, il se borne, à titre d'exemple, à exposer cinq porismes dont le caractère se rapproche effectivement des propositions ordinaires de lieu, et semble n'abandonner que provisoirement le sujet en annonçant son projet de rétablir un jour les trois livres perdus d'Euclide, et en marquant son intention de faire connaître, en outre, « d'autres porismes admirables ou encore ignorés dans les sections coniques et dans certaines autres courbes » ; propositions qui se seraient donc fort écartées des porismes d'Euclide, attendu que ceux-ci ne s'étendaient qu'à la droite et au cercle.

Après l'ouvrage de Fermat, l'ordre des temps nous apporte deux ouvrages dans lesquels on ne trouve encore que des considérations plus ou moins judicieuses inspirées par la lecture de la notice de Pappus, et de louables efforts pour pénétrer la doctrine euclidienne des porismes. L'un de ces ouvrages est le traité de géométrie publié par Ismaël Bouillau à Paris, en 1657, (2) dans lequel l'auteur consacre deux premières parties à des démonstrations au moyen de figures inscrites et circonscrites et à certaines propositions sur les sections coniques ; une troisième partie aux porismes, et une dernière partie aux théories astronomiques du pythagoricien Philolaus de Crotone qui passe pour avoir le premier enseigné le mouvement de rotation de la terre. L'autre ouvrage est le traité de mathématiques que Renaldini fit paraître à Padoue, en 1668 (3).

---

1. FERMAT. *Varia opera mathematica*, édit. précitée, p. 119.
2. *Ism. Bullialdi exercitationes geometricae tres. Astronomiae philolaicae fundamenta clarius explicata et asserta, adversus Sethi Wardi impugnationem.* Parisiis, 1657, in-4°. Voir : Exercitatio III, de Porismatibus.
3. RENALDINI. *De resolutione et compositione mathematica libri duo.* Patavii, 1668, in-folio.

Un siècle s'était écoulé depuis les premières investigations de Girard et de Fermat, lorsque Halley publia pour la première fois, en 1706, le texte grec de la notice de Pappus, conjointement avec une nouvelle version latine, peu différente cependant de celle de Commandin, en annexe de sa traduction latine, faite d'après une version arabe, du traité perdu d'Apollonius sur la *Section de Rapport* (1). Halley n'accompagne ce texte d'aucune considération sur les porismes, s'étant, comme il le déclare, laissé rebuter par la grande concision des énoncés de Pappus, et surtout par les altérations qu'il suppose avoir été introduites dans l'énoncé de la proposition générale au moyen de laquelle la notice résume toute une série de porismes du premier livre d'Euclide ; de sorte que l'on s'étonne que, malgré sa science profonde de la géométrie des Grecs, Halley n'ait ainsi apporté aucune contribution à la question controversée des porismes (2).

Le texte abandonné par Halley comme étant trop difficile, fut repris, dès 1720, par Robert Simson, professeur de mathématiques à l'Académie de Glasgow, à qui l'on doit un premier essai de rétablissement de l'ouvrage d'Euclide. Ses travaux menèrent à la divination de dix porismes dont six concernent des figures rectilignes et quatre autres le cercle, mais qui ne répondent qu'à sept d'entre les vingt-neuf énoncés concis sous lesquels la notice de Pappus nous résume tout l'ouvrage d'Euclide. Simson exposa les premiers résultats de ses recherches dans un mémoire qui fut inséré dans les publications de la Société Royale de Londres en 1723 (3) ; mais l'ensemble de ses travaux sur la

---

1. Halley, *Pappi Alexandrini praefatio ad VIImum Collectionis Mathematicae* (in *Apollonii Pergaei de Sectione Rationis libri duo, ex arabico manuscripto latine versi*. Oxoniae, 1706).

2. Halley critique le texte de la notice de Pappus dans les propres termes suivants : « Hactenus Porismatum descriptio nec mihi nec lectori profutura, neque aliter fieri potuit : tam ob defectum schematis cujus fit mentio ; unde rectae satis multae, de quibus hic agitur, absque notis alphabeticis, ullove alio distinctionis charactere inter se confunduntur : quam ob omissa quaedam et transposita, vel aliter vitiata, in propositionis generalis expositone ; unde quid sibi velit Pappus haud mihi datum est conjicere. Hisce adde dictionis modum nimis contractum, ac in re difficili, qualis haec est, minime usurpandum. » (Voir ouvrage mentionné dans la note précédente, p. XXXVII.)

3. *Pappi Alexandrini Propositiones duae generales, quibus plura ex Euclidis Porismatis complexus est, restitutae a Viro Doctissimo Roberto Simson. Math. Prof. Glasg.* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the year* 1723).

matière, constituant son *Traité des Porismes* [1], ne fut publié, avec quelques autres travaux restés inédits, que huit ans après sa mort, en 1776 [2].

L'ouvrage de Simson ne tarda pas à provoquer des travaux nombreux et importants, dont les uns adoptent ses vues sur la forme des porismes, et dont les autres s'en écartent de diverses manières, mais sans rétablir pour la plupart un plus grand nombre de porismes répondant à ceux des énoncés de Pappus qui avaient été délaissés par Simson à cause de leur obscurité. Ces travaux se succédèrent dans l'ordre suivant : En 1777, J. Lawson publia un ouvrage qui ne constitue qu'une traduction en anglais de l'ouvrage de Simson écrit en latin [3]. En 1792, Playfair lut à la Société Royale d'Edimbourg un mémoire, inséré en 1794 dans les publications de cette société, qui fait suite à l'ouvrage de Simson, et dans lequel l'auteur émet des considérations nouvelles sur l'origine probable et la nature des porismes [4]. En 1798 parurent le mémoire de Wallace relatif à quelques porismes géométriques [5] et celui de Lord Brougham dans lequel certains porismes sont considérés au point de vue de la géométrie supérieure [6]. En 1809 parurent l'ouvrage de John Leslie, qui traite des porismes au point de vue de la géométrie analytique [7], et celui de Lhuillier qui traite du même objet au point de vue de l'analyse géométrique et algébrique [8]. En 1820 parut le mémoire de Babbage sur l'application de l'analyse dans l'invention des théorèmes de lieux et des porismes [9]. En 1832, Jakob Steiner

1. Le titre complet de ce traité est : *De Porismatibus tractatus; quo doctrinam Porismatum satis explicatam, et in posterum ob oblivione tutam fore sperat Auctor.*

2. *Roberti Simsonii opera quaedam reliqua post auctoris mortem in lucem edita cura Jacobi Clow.* Glasguae, 1776, in-4°. Voir p. 347 et suiv.

3. *A treatise concerning porisms by Robert Simson, translated by J. Lawson.* Canterbury, 1777, in-8°.

4. PLAYFAIR, *On the Origin and Investigation of Porisms.* (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. III, part II, 1794, pp. 154-204).

5. WALLACE, *Some geometric Porisms, etc.* (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 1798).

6. Lord BROUGHAM, *General Theorems, chiefly Porisms, in the higher geometry.* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year* 1798.)

7. JOHN LESLIE, *Geometrical Analysis.* Edinburgh, 1809, in-8°.

8. *Éléments d'Analyse géométrique et d'analyse algébrique par S. Lhuillier* Paris, 1809, in-4°.

9. BABBAGE, *On the application of Analysis to the Discovery of Local theorem and Porisms* (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. IX, 1820, p. 337).

publia son ouvrage sur le développement systématique de la dépendance réciproque des figures géométriques, avec citation des travaux des géomètres anciens et modernes sur les porismes [1], et enfin, en 1837, A. Richter publia une traduction allemande libre et commentée de l'ouvrage de Simson [2].

Cette première série de travaux fut complétée par deux études importantes : d'abord celle que Michel Chasles consacra aux porismes euclidiens dans un chapitre de son *Aperçu Historique*, publié en 1837 [3], où il donne deux propositions générales qui tendent à comprendre dans leurs corollaires les quinze énoncés que Pappus nous renseigne comme appartenant au premier livre des Porismes d'Euclide, et ensuite, le mémoire dans lequel Stephen Davies donna, en 1845, les démonstrations de dix-huit porismes pris dans les ouvrages de Simson et des divers auteurs que nous venons de mentionner [4].

Des progrès plus importants furent apportés dans la divination des porismes par une seconde série de travaux qui s'ouvre sur deux mémoires publiés par Breton de Champ, l'un en 1849 [5], l'autre en 1853 [6], donnant des aperçus succincts sur la question des porismes, et complétés en 1855 par son travail plus important intitulé : *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide*, dans lequel, après avoir donné une traduction libre de la notice et des lemmes de Pappus, ainsi que du texte de Proclus sur les

---

1. JAKOB STEINER. *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrische Gestalten von einander, etc.* Berlin, 1832, in-8°.

2. A. RICHTER, *Porismen nach Simson bearbeitet*. Elbing, 1837, in-8°.

3. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la Dualité et l'Homographie, par Michel Chasles*. Bruxelles, 1837, in-4°. Une seconde édition a été donnée à Paris, en 1875.

Cet ouvrage forme le tome XI des *Mémoires couronnés par l'Académie Royale des Sciences de Belgique*. Une traduction allemande de cet ouvrage (moins la troisième partie) a paru sous le titre : *Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden von Chasles. Aus dem Französischen übertragen durch Dr L. A. Sohncke*. Halle, 1839, in-8°.

4. Th. STEPHEN DAVIES, *On the algebraical analysis of Porisms*. (*The Mathmatician*, vol. I. London, 1845, pp. 42-64).

5. *Mémoire sur les Porismes d'Euclide*. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXIX, 1849, pp. 479-482).

6. *Note sur un point important de la question des Porismes*. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVI, 1853, pp. 1008-1012).

porismes d'Euclide, il expose les opinions de divers géomètres et ses propres conjectures sur le même sujet (1).

Les interprétations données par Breton aux notices de Pappus et de Proclus provoquèrent aussitôt de nouveaux travaux, quelques-uns contradictoires, notamment de la part de Ch. Housel, en 1856 (2), de Cantor, en 1857 (3) et de Vincent, en 1859 (4). Enfin, la question des porismes d'Euclide fut reprise en vue d'un rétablissement conjectural complet dans le magistral ouvrage que Michel Chasles publia, en 1860, sous le titre : *Les trois livres de Porismes d'Euclide* (5). Si cet ouvrage marque incontestablement une date dans l'avancement de certaines théories géométriques, il ne constitue cependant pas une reconstitution réelle du traité perdu d'Euclide ; il délimite sans doute la matière de ce traité dans son ensemble, mais il s'en écarte au point de vue de la forme et de l'ordonnance. Il comporte du reste deux cent vingt propositions, alors que Pappus n'en assigne que cent soixante et onze à l'ouvrage d'Euclide, et il s'inspire d'un concept du porisme, conforme au fond à celui de Simson, mais qui tend à concilier les deux définitions assez différentes de Pappus, dont la seconde, d'après laquelle le porisme serait un théorème sur les lieux incomplètement formulé, est considérée par la critique moderne comme ayant été interpolée dans la notice de Pappus. Enfin, les propositions de Chasles dépassent certainement la pensée mathématique de l'Antiquité, parce que, basées sur les trente-huit lemmes que Pappus démontre à titre de commentaire des porismes d'Euclide, elles utilisent ces lemmes au point de vue de certaines propriétés dont Chasles y a découvert les germes,

1. *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide par M. P. Breton de Champ.* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville*, t. XX, année 1855, pp. 209-304).

2. Ch. Housel, *Les Porismes d'Euclide.* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville*, t. I, série II, 1856, pp. 193-209).

(3) Moritz Cantor, *Über die Porismen des Euklid* (in *Schömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1857, pp. 17 sqq.).

4. *Considérations sur les Porismes en général et sur ceux d'Euclide en particulier. Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Breton de Champ aux textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes par A.-J.-H. Vincent* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville*, série II. t. IV, année 1859, pp. 9-46).

5. *Les trois livres de Porismes d'Euclide rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions par M. Chasles.* Paris, 1860, in-8°.

mais qui n'ont cependant jamais été dégagées d'une manière explicite par les anciens géomètres, notamment celle du rapport harmonique de quatre points, celle d'une relation d'involution dans le quadrilatère complet coupé par une droite et, enfin, celle du rapport anharmonique de quatre points se conservant en perspective qui résulte des démonstrations de l'ensemble de six d'entre les trente-huit lemmes de Pappus ; de sorte que, sans avoir le caractère d'un rétablissement véritable de l'œuvre d'Euclide, les propositions de Chasles font plutôt ressortir les analogies profondes de l'ouvrage antique avec les théories qui forment les bases de la géométrie moderne, et c'est en ce sens seulement qu'elles étendent les limites qui semblaient devoir être assignées à la géométrie des Grecs.

L'ouvrage de Chasles n'a d'ailleurs pas épuisé la controverse soulevée depuis le XVII^e siècle par la question de la restitution des trois livres de porismes d'Euclide ; car un mémoire de P.-D. Marianini, publié en 1863, expose encore soixante-quinze porismes nouveaux, démontrés par une méthode que l'auteur, à la suite de certaines considérations, estime avoir été probablement celle d'Euclide même (1) ; puis, parurent, en 1863, une étude de Th. Leidenfrost sur les porismes d'Euclide (2), èt, en 1866, un mémoire de Th. Buchbinder traitant tout à la fois des *Porismes* et des *Données* d'Euclide (3). Enfin, les porismes d'Euclide font encore l'objet de considérations diverses dans les travaux plus récents de Cantor (4), de Heiberg (5), de Zeuthen (6) et de Tannery (7).

---

1. P. D. MARIANINI, *Settantacinque porismi tratti quasi tutti dall'opera del Chasles intitolata « Les trois livres des porismes d'Euclide, etc. » e demonstrata la maggiore parte con metodo che, dietro certe considerazioni, sembra probabile essere stato usato da Euclide*. Modena, 1863, in-4° (*Memorie della Societa Italiana delle Scienze*, t. II, série II).
2. Th. LEIDENFROST, *Die Porismen des Euklid*. (*Programm der Realschule zu Weimar*, 1863).
3. Th. BUCHBINDER, *Euklids Porismen und Data*. (Programm der Kgl. Landesschule. Pforta, 1866).
4. M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig, 1907-1908, vol. I, pp. 278-282.
5. HEIBERG J. L., *Literargeschichtliche Studien über Euklid*. Leipzig, 1882, pp. 56-79.
6. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen, 1886, pp. 160-184.
7. *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1882, t. VI, pp. 145-152, ou bien : *Mémoires scientifiques de Paul Tannery*, vol. XI, 1931, pp. 140-147.

La notice que Pappus consacre au célèbre ouvrage d'Apollonius intitulé : *Les Coniques* présente un intérêt historique tout particulier. Elle nous révèle qu'Aristée l'Ancien avait publié cinq livres sur les *Lieux solides* « en corrélation avec les coniques », c'est-à-dire en considérant sans doute la parabole, l'ellipse et l'hyperbole à une branche, la seule encore considérée jusque-là, en tant que constituant des lieux de points dont les distances, soit à des points fixes, soit à des droites fixes, sont en certaines relations, et que, plus tard, Euclide avait composé quatre livres sur les *Coniques*, basés sur l'ouvrage d'Aristée ; ce qui fait présumer que les propositions d'Euclide ne s'étendaient pas au delà des propriétés strictement nécessaires ou utiles à l'analyse des *Lieux solides* d'Aristée. L'ouvrage d'Aristée ne nous est pas parvenu, et sa perte doit avoir été assez précoce en présence de celui d'Euclide qui l'avait pour ainsi dire absorbé. Ce sont toutefois les faibles renseignements de Pappus qui donnèrent lieu à la divination de Vincent Viviani sur les *Lieux solides* d'Aristée, publiée à Florence, en 1701 (1). Il y a cependant lieu d'admettre, avec G. Loria (2), qu'il n'y a guère que les problèmes du second livre de l'essai de restauration de Viviani qui aient pu figurer dans l'ouvrage d'Aristée, notamment ceux qui rentrent dans le problème général de trouver le lieu d'un point tel que le carré de la perpendiculaire abaissée de ce point sur une droite fixe déterminée soit une fonction du second degré des segments de cette droite déterminés par le pied de la perpendiculaire.

Quant à l'ouvrage d'Euclide sur les *Coniques*, il ne nous est pas parvenu non plus, négligé lui aussi à l'apparition du génial traité d'Apollonius : *Les Coniques*, dans lequel les quatre livres d'Euclide sont complétés et augmentés de quatre livres entièrement originaux. Des huit livres dont se composait le traité d'Apollonius, les sept premiers nous sont seuls parvenus et, encore, ne possédons-nous que les quatre premiers en grec, tandis que les trois autres nous ont été transmis dans plusieurs documents

1. *De locis solidis secunda divinatio geometricae in quinque libros injuria temporum amisso Aristaei senioris geometrae autore Vincentio Viviani, etc.* Florentiae, 1701, in-4°.

2. Gino Loria, *Le Scienze ezatte nell'antica Grecia. Libro I : Geometrici greci precursori di Euclide.* Modena, 1893, in-4°.

arabes, dont les uns résument plus ou moins ces trois livres, et dont un seul, qui date du IXe siècle, constitue une version complète. Cette version arabe fut traduite en latin par Halley, et il publia les sept livres avec une reconstitution conjecturale du huitième livre, à Oxford, en 1710 (1).

La notice de Pappus fait remonter à Aristée la considération des trois coniques comme étant obtenues exclusivement par une section plane, perpendiculaire à une génératrice des cônes droits rectangles, acutangles et obtusangles, et c'est cette conception particulière qui règne encore dans les œuvres d'Archimède où la parabole est désignée par la circonlocution de section de cône droit rectangle, l'hyperbole par celle de section de cône droit obtusangle, et l'ellipse par celle de section de cône droit acutangle (2). D'autre part, ce serait Apollonius qui, d'après Pappus, aurait été le premier à présenter les trois sections coniques comme étant obtenues par des sections planes différentes d'un même cône quelconque. Cette manière générale d'obtenir les courbes du second degré avait été attribuée à Apollonius antérieurement à la notice de Pappus par le géomètre Geminus de Rhodes, dont le témoignage nous est conservé par Eutocius d'Ascalon dans le passage suivant de son commentaire sur le premier livre des *Coniques* : « Mais plus tard, Apollonius de Perge considéra d'une manière générale que toutes les sections s'obtiennent dans tout cône droit ou scalène, d'après les différentes manières dont le plan recontre le cône ; chose que Géminus rapporte au sixième livre de la *Science mathématique* » (3). Et Eutocius ajoute plus loin : « Apollonius, qui considéra le cône droit ou scalène, obtint les différentes sections au moyen d'une inclinaison différente du plan » (4). Les témoignages concordants de Géminus, de Pappus et d'Eutocius ne permettent cependant pas d'affirmer qu'Apollonius ait été le premier inventeur de la génération des

1. *Apollonii Conicorum libri octo et Sereni Antissensis de Sectione Cylindri et Coni libri duo. Edidit Edmundus Halleius.* Oxoniae, 1710, in-folio.

2. ARCHIMÈDE, *Des Conoïdes et Sphéroïdes.* Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 137-236.

3. Apollonius, édition précitée de J. L. Heiberg, vol. II, *Eutocii commentarii in conica*, p. 171, l. 25.

4. *Ibidem*, p. 175, l. 15.

sections coniques dans le cône quelconque à base circulaire ; mais ils indiquent plutôt qu'il fut le premier à mettre ce mode de génération à la base d'un traité méthodique sur les courbes du second degré. On sait, en effet, qu'Euclide avait déjà mentionné dans ses *Phénomènes* (1) que, si un cône ou un cylindre est coupé par un plan non parallèle à la base, la courbe engendrée peut être une section de cône acutangle, c'est-à-dire une ellipse; tandis que, de son côté, Archimède dit dans les définitions de son traité : *Des Conoïdes et Sphéroïdes* (2), que les sections planes rencontrant toutes les génératrices d'un cône sont des cercles ou des sections de cône acutangle. Bien que ces deux allusions à la section d'un cône quelconque par un plan n'envisagent encore que l'ellipse, elles révèlent toutefois des observations antérieures à celles d'Apollonius, lesquelles peuvent dès lors avoir été déjà étendues à la parabole et à l'hyperbole à une branche dans un ouvrage qui ne nous serait pas parvenu.

On peut néanmoins admettre avec Pappus que c'est bien à Apollonius que l'on doit les dénominations imagées de parabole, d'hyperbole et d'ellipse, judicieusement déduites des propriétés caractéristiques mises plus tard en évidence par les équations cartésiennes de ces trois courbes ; et c'est en substituant ces dénominations aux circonlocutions rappelées plus haut qu'Apollonius rend le discours de ses démonstrations plus concis et plus clair que chez ses prédécesseurs.

Quant au contenu du traité des *Coniques*, la notice se borne à reproduire presque textuellement l'exposé qu'Apollonius en fait lui-même dans la lettre d'envoi de son ouvrage à son ami Eudème de Rhodes, laquelle constitue le préambule du premier livre. Pappus émet cependant des considérations d'un grand intérêt sur le passage de ce préambule dans lequel Apollonius, après avoir déclaré que son troisième livre renferme ses théorèmes les plus beaux et les plus nouveaux à utiliser pour la synthèse des *Lieux solides*, ajoute : « C'est d'ailleurs en concevant ces théorèmes que j'ai remarqué que, chez Euclide, le lieu n'est guère construit par rapport à trois et à quatre lignes, si ce n'est

1. *Euclidis Phaenomena et Scripta Musica edidit Henricus Menge. Fragmenta collegit et disposuit J. L. Heiberg*. Lipsiae, 1916.
2. ARCHIMÈDE, *Des Conoïdes et Sphéroïdes*. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 142.

dans une mesure accidentelle et d'une façon qui n'est pas heureuse; car il n'était pas possible d'en épuiser la construction sans mes découvertes complémentaires » (1). Ce passage serait probablement resté irrémédiablement obscur si Pappus ne nous avait pas clairement expliqué, en d'autres termes, que le lieu à trois droites est celui des points d'un plan tels que le produit de leurs distances à deux droites données dans ce plan soit dans un rapport donné avec le carré de leur distance à une troisième droite donnée du plan, et que le lieu à quatre droites est celui des points tels que le produit de leurs distances à deux droites données soit dans un rapport donné avec le produit de leurs distances à deux autres droites données (2).

Bien que Pappus reconnaisse que ces deux lieux sont constitués par des sections coniques (3), il ne nous dit pas quelles étaient les propriétés particulières de ces courbes qui, d'après Apollonius, faisaient encore défaut à Euclide pour pouvoir réaliser la synthèse complète du lieu à trois et à quatre droites ; et, parmi les conjectures émises à ce sujet, la plus judicieuse paraît être celle de Zeuthen (4) qui suppose, que si les Anciens ne sont arrivés qu'à des solutions générales incomplètes, ou n'ont pu réussir que dans des cas particuliers des lieux en question, c'est qu'ils sont restés étrangers à la conception de l'hyperbole à deux branches ne formant qu'une seule courbe, dont l'invention appartient à Apollonius, comme le prouvent les propositions très nombreuses de son ouvrage, lesquelles dégagent les propriétés de la courbe complète rapportée à ses asymptotes, et que ce sont dès lors ces propriétés nouvellement découvertes que le passage précité considérait comme indispensables pour achever la synthèse des lieux à trois et à quatre droites.

---

1. APOLLONIUS, *Les Coniques*, trad. de P. Ver Eecke, p. 2, ll. 12-16.

2. On trouvera une excellente exposition du problème antique du lieu à trois et à quatre droites dans l'introduction de l'ouvrage : *Apollonius of Perga. Treatise on conic sections edited in modern notations by T. L. Heath*. Cambridge, 1896, in-8°, chap. V, pp. CXXXVIII-CL.

3. Le lieu à quatre droites des Anciens, constitué par une conique, fait retomber sur le théorème démontré géométriquement par Newton, énonçant une propriété générale des coniques: Un quadrilatère quelconque étant inscrit dans une conique, le produit des distances de chaque point de la courbe à deux côtés opposés du quadrilatère, est au produit des distances du même point aux deux autres côtés dans un rapport donné.

4. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen, 1886.

Poursuivant ses considérations sur les mêmes propositions de lieu, Pappus nous rapporte que les anciens géomètres se sont appliqués en vain à la solution des lieux à cinq, à six, à sept et à huit droites, lesquels ne sont plus constitués par des coniques, mais par des lignes qu'ils ne sont pas parvenus à construire, faisant du reste remarquer, qu'à partir du lieu à six droites, on arrive déjà à des expressions qui appartiennent à une géométrie pluri-dimentionnelle, dont l'application à l'espace physique dépasse notre faculté représentative. Enfin, il termine sur ce sujet en énonçant le problème général du lieu à quantité quelconque paire ou impaire de droites, consistant donc à trouver le lieu géométrique d'un point tel, qu'étant données plusieurs droites, les perpendiculaires abaissées de ce point sur ces droites, ou plus généralement les obliques abaissées sous un angle donné sur ces droites, satisfassent à la condition que le produit de certaines d'entre elles soit dans un rapport donné avec le produit de toutes les autres (1), et il affirme simplement que ce lieu est également constitué par une ligne transcendante donnée de position.

Ce problème général, que Descartes a dénommé proprement le problème de Pappus, se range à partir du commencement du XVIIe siècle parmi les propositions célèbres de la géométrie. Proposé par Golius, d'abord à Mydorge qui ne put le résoudre, puis, en 1631, à Descartes (2), celui-ci soumit le problème à sa nouvelle méthode analytique qui lui fournit premièrement la solution du lieu à quatre droites en la ramenant à l'équation complète du second degré dont la discussion lui fit reconnaître les différentes coniques ; ensuite les solutions de deux cas particuliers du lieu à cinq droites, et finalement la solution du cas général du lieu à cinq droites pour lequel il détermina la nature algébrique de la courbe et le degré de son équation (3). Après lui, vers 1637, Fermat donna une solution remarquable du lieu à

1. Plus simplement : trouver le lieu des points tels, qu'étant données $2n$ droites, dont deux peuvent se confondre, le produit des distances de chacun d'eux à n de ces droites soit dans un rapport donné avec le produit des distances aux autres n droites.

2. *Œuvres de Descartes, publiées par Charles Adam et Paul Tannery sous les auspices du ministère de l'Instruction Publique.* Paris, 1891, t. I, p. 232.

3. *Ibidem*, 1902, t. IV, p. 410.

trois droites à la manière des anciens géomètres [1]. Enfin, vers 1640, Roberval paraît avoir fait la synthèse complète des lieux à trois et à quatre droites, mais d'une manière fort laborieuse, comme il résulte d'une de ses lettres à Fermat où il dit : « Je me suis appliqué aux lieux solides, *ad tres et quatuor lineas*, lesquels j'ai entièrement restitués, quoique pour n'y rien oublier, il ne faille guère moins de discours qu'aux six premiers livres des *Éléments* » [2]. Depuis lors, on a publié quelques études sur le lieu à trois et à quatre droites, parmi lesquelles la plus intéressante est celle qui fut donnée par Giuseppe Scorza dans sa *Divination de la Géométrie analytique des Anciens*, publiée en 1815 [3].

La notice se poursuit dans un passage qui mérite de retenir l'attention, non seulement parce qu'il nous met en présence du simple énoncé d'une proposition de nature imprévue chez les Anciens, contenant en substance une des plus belles propositions de la géométrie élémentaire, mais aussi parce qu'il a donné lieu à une erreur historique d'attribution. Il ne s'agit, en effet, de rien moins que du célèbre théorème dit de Guldin que l'on attribue, erronément selon nous, à Pappus. Pour permettre d'établir la relation de cause à effet, et se rendre compte de la part que ce passage caractéristique peut avoir eue dans l'invention du théorème moderne de Guldin, rappelons d'abord que ce théorème énonce que « le volume engendré par une surface plane quelconque tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité », et que ce théorème de cubature se base lui-même sur le théorème de quadrature énonçant que « l'aire engendrée par une ligne polygonale ou courbe plane, tournant autour d'un axe extérieur quelconque situé dans son plan, a pour mesure le produit de sa longueur par la circonférence que décrit son centre de gravité ». Reproduisons ensuite le passage en question qui dit en propres termes dont une certaine obscurité

1. *Œuvres de Fermat, publiées par P. Tannery et Ch. Henry.* Paris ,1891-1912, 4 vol. in-4°. Vol. I, p. 105.

2. *Ibidem*, vol. II, p. 202.

3. Voir sur les travaux de Giuseppe Scorza, né à Gimigliano en 1781, mort à Naples en 1843, l'ouvrage de Gino Loria : *Nicola Fergola e la Scuola di matematici che lo ebbe a duce.* Genova, 1892, in-4°.

affecte moins le fond que la forme : « Le rapport des révolutionnés parfaits se compose du rapport des révolutionnants et de celui des droites semblablement abaissées, des points barycentriques situés dans ces révolutionnants, sur les axes ; et le rapport des révolutionnés imparfaits se compose du rapport des révolutionnants et de celui des arcs que décrivent les points barycentriques situés dans ces révolutionnants, alors que le rapport de ces arcs se compose manifestement du rapport des droites abaissées et de celui des angles que comprennent les extrémités de celles-ci, en tant qu'il s'agisse des extrémités auprès des axes des révolutionnés. » La comparaison de la proposition de la notice de Pappus avec la proposition de Guldin montre simplement qu'elles sont basées toutes deux sur le principe nouveau de la mesure des figures à l'intervention de leur centre de gravité, sans que l'on puisse déduire plus ou moins directement la seconde proposition de la première ; elle exclut l'emprunt pur et simple de Guldin à Pappus, et indique tout au plus une conception dirigée ou une intuition féconde puisée par le premier chez le second en ce qui concerne une proposition dont la gloire d'une démonstration restait encore à cueillir.

D'ailleurs, une liaison d'inspiration ou d'ordre intuitif entre le théorème de Guldin et la proposition antique rencontre une grave objection. En effet, né en 1577, il est fort probable que Guldin ait connu l'ouvrage de Pappus dans la version latine de Commandin publiée à Pise, en 1588. Or, soit que Commandin eût déjà considéré le passage de la notice de Pappus comme une interpolation à rejeter, soit qu'il eût établi sa version d'après l'un des manuscrits qui ne contiennent pas ce passage, il manque en tout cas dans cette première édition de 1588. D'autre part, Guldin, qui mourut en 1643, n'a pu connaître la seconde édition posthume de la version de Commandin, soignée et augmentée du passage en question par Manolessius, à Bologne, en 1660. Dès lors, pour admettre malgré cela que Guldin se soit inspiré de Pappus, il faudrait supposer, en l'absence de tout témoignage, que, profitant de son séjour professoral au collège de la Compagnie de Jésus, à Rome, Guldin ait consulté au Vatican l'un des manuscrits de Pappus contenant précisément le passage encore inédit.

Au reste, si même la filiation du théorème de Guldin était admise, ce serait encore une erreur que de la faire remonter à Pappus ; car le passage de sa notice présente tous les caractères d'une interpolation. Déjà fortement suspect par l'emploi d'une langue moins pure et d'expressions que l'on ne rencontre pas chez Pappus, le passage traite d'un sujet n'ayant aucun rapport avec les considérations que la notice émet en cet endroit sur les *Coniques* d'Apollonius, et il interrompt même la suite de ces considérations d'une manière intempestive. Contrairement à l'opinion reçue pendant longtemps, l'énoncé du beau théorème couramment attribué à Pappus ne lui appartient donc pas (1), et il doit dès lors être restitué légitimement à un géomètre assurément éminent, qui est malheureusement resté inconnu. Et comme le passage interpolé ajoute que le théorème ainsi énoncé a été dûment démontré, sans indiquer ni où ni quand, et qu'un grand nombre de propositions du même genre sur les surfaces et les solides ont été démontrées en même temps, ce qui laisse supposer toute une série de propositions dans lesquelles des quadratures et des cubatures sont établies à l'intervention du centre de gravité, le passage aura sans doute été emprunté à ce géomètre inconnu, dont l'ouvrage, écrit après Pappus, en pleine période de décadence, sera resté sans écho, et n'aura laissé d'autres traces que le simple énoncé d'une proposition remarquable.

Quant à la proposition même à laquelle le Père Guldin (2)

---

1. Il y a d'autres exemples de propositions faussement attribuées à Pappus. Un ouvrage remarquable d'analyse géométrique a paru récemment sous le titre : *Le Problème de Pappus et ses cent premières solutions par A. Maroger*. (Paris, 1925, in-8°). Il est consacré aux multiples solutions du problème général : « Par un point pris sur la bissectrice d'un angle droit, mener un segment de longueur connue et dont les extrémités soient sur les côtés de l'angle ». Or, la *Collection mathématique* ne présente aucune trace de ce problème. Catalan avait d'ailleurs déjà fait la même erreur d'attribution, d'abord à propos de la discussion de ce même problème dans son *Application d'Algèbre à la Géométrie* (Paris, 1848) ; puis, à propos d'une solution du problème par la règle et le compas dans son ouvrage : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire* (Paris, 1879, sixième édit., p. 188).

2. Paul Guldin, mathématicien, né à Saint-Gall en 1577, mort à Gratz en 1643. Après avoir été compagnon-orfèvre dans sa jeunesse, il abjura le protestantisme et entra dans la Compagnie de Jésus, dans les collèges de laquelle il enseigna les mathématiques successivement à Rome, à Vienne et à Gratz. Il a écrit plusieurs dissertations scientifiques et un grand ouvrage en quatre volumes sur le centre de gravité, publié entre les années 1635 et 1647. C'est dans cet ouvrage qu'il fait une vive critique de la *Doliométrie* de Kepler et de la *Géométrie des Indivisibles* de Cavalieri.

a attaché son nom, il ne l'a pas réellement démontrée, et c'est dans le second volume de son traité *De Centro Gravitatis*, publié à Vienne, en 1640, qu'il l'énonce et conclut à la vérité de son cas général à la suite d'une simple vérification de quelques cas particuliers (1). C'est, au contraire, Bonaventure Cavalieri qui en donna la première démonstration complète et rigoureuse, quelques années plus tard, dans ses *Exercitationes geometricae sex*, ouvrage publié à Bologne, en 1647 (2), dans le but de compléter sa célèbre *Géométrie des Indivisibles*, éditée en 1635 (3), et de la défendre contre la vive critique dont elle avait été l'objet précisément de la part de Guldin (4).

La notice se termine en nous disant que l'ensemble des huit livres de *Coniques* d'Apollonius s'étend sur 487 théorèmes et 70 lemmes ; ce qui, en tenant compte des 382 propositions que renferment les sept livres qui nous sont parvenus, indique que le huitième livre perdu contenait 105 propositions. La perte de ces dernières propositions est d'autant plus regrettable qu'elles doivent avoir été parmi les plus belles de l'ouvrage ; car on peut en juger jusqu'à un certain point d'après l'importance et la nouveauté des propositions du septième livre, dont le huitième livre semble avoir été la suite méthodique, puisque Pappus destine indifféremment les mêmes lemmes à l'éclaircissement de ces deux derniers livres. C'est d'ailleurs dans cette hypothèse de la continuité quant au genre des propositions, et en s'inspirant de la communauté de ces lemmes que Halley a établi une savante restauration conjecturale du huitième livre, laquelle ne contient toutefois que trente-trois propositions se rapportant toutes aux mêmes éléments des coniques considérés dans les propositions du livre précédent, notamment les axes, les diamètres conjugués et les paramètres. Cette restauration du huitième livre fut publiée dans l'édition

1. *Pauli Guldini Sancto-Gallensis e Societate Jesu De Centro Gravitatis trium specierum quantitatis continuae*. Viennae Austriae, 1635-1640-1647, 4 vol. in-8°. Voir vol. II, 1640.

2. *Exercitationes geometricae sex, auctore Bonavent. Cavaliero*. Bononiae, 1647, in-4°, fig. Voir : Exercitatio III, chap. XIV.

3. *Geometria Indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Auctore P. Bonaventura Cavalieri Mediolanensi*... Bononiae, 1635. Réédité à Bologne en 1653.

4. On trouvera une démonstration moderne du théorème de Guldin dans l'ouvrage : *Traité de Géométrie par E. Rouché et Ch. De Comberousse*. Paris, cinquième édit., 1883, 2 vol. in-8°. Vol. II, pp. 228-233.

monumentale des sept premiers livres des *Coniques* d'Apollonius que Halley fit paraître à Oxford, en 1710 [1].

Quant aux soixante-dix lemmes renseignés par la notice, les termes un peu ambigus dans lesquels Pappus les rattache aux huit livres des *Coniques* ne doivent pas s'interpréter dans un sens impliquant que ces lemmes auraient fait partie intégrante du traité d'Apollonius, et que, par suite, ce dernier en serait l'auteur ; car la conservation même du traité permet de vérifier le contraire. D'autre part, à l'encontre d'une opinion répandue, ces lemmes ne semblent pas appartenir à Pappus ; car un passage du préambule du septième livre les désigne simplement, et sans attribution personnelle, comme étant « les lemmes cherchés » [2] ; voulant sans doute indiquer qu'ils ont été recueillis dans des écrits épars, annexés parfois à certaines copies des *Coniques*, et publiés successivement par des géomètres qui, voués à l'enseignement, les avaient cherchés ou mis en évidence dans le but de faciliter l'étude des propositions les plus compliquées dans lesquelles Apollonius fait intervenir des relations géométriques résultant de théorèmes supposés connus, ou dont il abandonne la démonstration à la sagacité du lecteur. La nécessité de ces lemmes et l'utilité qu'il y avait pour Pappus de les recueillir se comprend quand on réfléchit que les quelques siècles qui nous éloignent de Leibniz, de Newton et de Descartes rendent déjà la lecture de leurs œuvres difficile autrement que dans des éditions chargées de notes et de commentaires, et qu'il devait en être de même à l'époque de Pappus, où une période beaucoup plus longue séparait alors d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius.

Ces lemmes se répartissent inégalement sur les huit livres des *Coniques*. Onze lemmes se rapportent au premier livre, treize au second et quatorze au troisième. Aucun lemme ne vise le quatrième livre ; dix lemmes concernent les propositions du cinquième ; huit autres visent les propositions du sixième, et

1. Voir la seconde partie de l'édition précitée de Halley ayant comme sous-titre : *Apollonii Pergaei Conicorum libri tres posteriores (Sc. V$^{\text{tus}}$, VI$^{\text{tus}}$ et VII$^{\text{mus}}$) ex arabico sermone in latinum conversi, cum Pappi Alexandrini lemmatis. Subjicitur liber conicorum octavus restitutus. Opera et Studio Edmundi Halleii.* Oxoniae, 1710, in-folio, pp. 137-171.
2. τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 636, l. 28).

enfin, les quatorze derniers lemmes commentent tout à la fois les propositions des septième et huitième livres. La plupart de ces lemmes sont élémentaires ; ils se rapportent à des relations de grandeurs linéaires ou rectangulaires planes et à des transformations d'expressions utilisées sans démonstration par Apollonius, mais que Pappus démontre à la manière d'Euclide au moyen de l'appareil géométrique ; de sorte qu'ils ne constituent plus que de beaux exemples de ce qu'on appelle l'algèbre géométrique des Anciens. Quelques lemmes comblent des lacunes qu'on rencontre parfois dans les démonstrations d'Apollonius, notamment celui (prop. 189) qui démontre le parallélisme d'une certaine droite avec la droite de jonction des points de contact de deux tangentes à l'hyperbole, et qu'Apollonius néglige de démontrer dans la septième proposition de son troisième livre (1). Un autre lemme résout le problème (prop. 203) de construire l'hyperbole passant par un point donné dans l'angle quelconque compris sous deux droites données de position et ayant ces droites comme asymptotes ; problème dont Pappus avait déjà donné une analyse et une synthèse différentes dans la proposition 33 de son quatrième livre. Un autre lemme encore (prop. 208) démontre que les diverses hyperboles ayant les mêmes asymptotes ne se recontrent pas ; mais la démonstration est altérée et même faussée au point qu'il y a lieu de l'attribuer à un scoliaste interpolateur. Quelques lemmes (prop. 213 à 220), destinés au sixième livre des *Coniques*, concernent certaines propriétés des triangles semblables établis dans des conditions qui se présentent dans des propositions d'Apollonius. Enfin, les derniers lemmes (prop. 221 à 234), qui mettent quelque peu sur les traces de ce que contenait le huitième livre perdu d'Apollonius, se rapportent principalement aux proportions, et ce sont les trois plus importants d'entre eux que Marc Meiboom incorpora en grec avec une version latine dans son ouvrage : *Dialogues sur les Proportions*, publié en 1655, à Copenhague (2).

---

1. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. III, prop. 7. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 195.
2. *M. Meibomii de Proportionibus*. Hafniae, 1655, petit in-folio, pp. 154-156. Marc Meiboom est surtout connu par son excellente édition des œuvres des sept écrivains grecs sur la musique : *Antiquae musicae authores septem : Aristoxenus*,

Le dernier ouvrage que Pappus fait rentrer dans la *Collection analytique* des Anciens est celui qu'Euclide avait écrit sur les *Lieux à la Surface* [1], composé de deux livres que le temps ne nous a pas transmis. Il ne nous donne aucun renseignement sur la matière qui était traitée dans cet ouvrage, et se borne à démontrer quatre lemmes à titre de commentaire sur certaines propositions dont il ne reproduit pas les énoncés ; de sorte qu'on en est réduit aux conjectures sur le genre des propositions de lieux démontrées par Euclide. Cependant, d'après Chasles [2] et Zeuthen [3], ces propositions devaient concerner des surfaces de révolution du second degré et, d'après Heiberg [4], elles auraient plutôt dégagé des propriétés de certaines courbes engendrées à la surface du cône et du cylindre. Il est en tout cas probable qu'elles abordaient un sujet qui n'avait pas encore été traité avant Euclide, tel que la généralisation de la théorie déjà fort développée des *Lieux Plans* ; et l'on peut admettre, de préférence avec Heath [5], que l'ouvrage concernait les lieux géométriques constitués par des surfaces de cônes, de sphères, de cylindres, ou même par des surfaces de degré supérieur. Quoi qu'il en soit de ces conjectures, les quatre lemmes (prop. 235 à 238) que Pappus consacre à cet ouvrage d'Euclide présentent le grand intérêt de mettre explicitement en évidence, dans le seul document ancien que nous possédions, la propriété de la directrice dans les sections coniques. Ils établissent, en effet, que les distances de chaque point d'une section conique à un foyer et à la directrice correspondante sont entre elles dans un rapport constant, et le dernier de ces lemmes (prop. 238) démontre notamment que le lieu d'un point dont la distance à un point donné est dans un rapport donné avec sa distance à une droite donnée de position est une section conique qui sera une parabole si le rapport donné est égal à l'unité, une

---

Euclides, etc. graece et latine M. Meibomius restituit et notis explicavit. Amstelodami, 1652, 2 vol. petit in-8°.

1. τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ.
2. MICHEL CHASLES, *Aperçu historique*, deuxième édit. de Paris, p. 44.
3. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitte im Altertum*, pp. 422-430.
4. J. L. HEIBERG, *Literargeschichtliche Studien über Euklid.* Leipzig, 1882, pp. 79-83.
5. T. L. HEATH, *Apollonius of Perga. Treatise on conic sections, edited in modern notation.* Cambridge, 1896, in-8°, p. XXXVIII.

ellipse si ce rapport est plus petit que l'unité et une hyperbole s'il est plus grand que l'unité. Les démonstrations de ces lemmes, données par Pappus à titre préliminaire ou subsidiaire de certaines propositions du traité des *Lieux à la Surface*, montrent donc que la propriété de la directrice dans les coniques était acquise à la science géométrique assez longtemps avant Euclide, et que sa démonstration remontait probablement à l'ouvrage d'Aristée sur les *Lieux Solides*. Pappus a pu trouver utile de rappeler, et peut-être de rajeunir quant à la manière, une démonstration ancienne dont la tradition commençait sans doute à se perdre, d'autant plus qu'on ne trouvait pas trace de la propriété de la directrice dans les coniques, ni même du foyer de la parabole, dans l'ouvrage plus récent d'Apollonius sur les *Coniques*. Le silence de ce traité d'Apollonius au sujet de ces deux éléments importants des courbes du second degré n'est cependant pas fait pour surprendre, ni surtout pour être interprété dans le sens d'une ignorance de la part de ce grand géomètre ; car il semble, au contraire, avoir écarté systématiquement de son ouvrage une théorie qui, en tant que considérant les coniques comme des lieux géométriques, avait déjà été abordée par Aristée et Euclide, et méritait donc d'être traitée à part dans une œuvre qu'il n'avait peut-être pas renoncé à écrire un jour.

***

Le livre VIII est entièrement consacré à la mécanique. Pappus le dédie à son fils Hermodore dans un long et intéressant préambule où il définit d'abord la mécanique comme étant la science qui considère le repos des corps matériels, leur sollicitation naturelle par la pesanteur et leur translation forcée d'un lieu dans un autre « au moyen de théorèmes dominés par la matière même de ces corps », et sans faire encore de distinction réelle entre la Statique dans laquelle les Anciens n'ont pas dégagé le principe fondamental de la composition des forces, et la Dynamique qui fut longtemps retardée chez eux par les conceptions erronées d'Aristote sur le mouvement des corps. Il divise ensuite la mécanique, d'après les mécaniciens de l'école de Héron, en mécanique rationnelle comprenant la géométrie, l'arithmétique, l'astronomie et la physique, et en mécanique appliquée représentée par divers arts, tels que celui du travail des métaux, de la construction des édifices, de la construction en bois, de la peinture, et englobant tous les moyens pratiques que comporte l'exercice de ces arts. Son huitième livre ne devant s'occuper principalement que de la mécanique appliquée, Pappus range les mécaniciens qui s'y adonnent dans deux catégories. La première comprend ceux qu'il désigne sous le nom d'artificiers [1], et qui inventent et construisent des instruments propres à faciliter et à renforcer le travail manuel, tels que les fabricants d'appareils de levage, de machines de guerre et d'appareils destinés à l'épuisement des eaux ; tous mécanismes qui excluent l'intervention des forces naturelles du vent, de l'eau et du feu à une époque où l'organisation sociale du travail, basée sur l'esclavage et la puissance des animaux domestiques, n'envisageait pas encore l'utilisation systématique de ces forces élémentaires. Les mécaniciens de la seconde catégorie sont ceux que Pappus appelle les illusionnistes [2], et qui fabriquent des machines étonnantes ou admirables [3], destinées plutôt à satisfaire la curiosité sans répondre à un réel besoin. Certaines de ces machines ne constituaient que de simples jouets plus ou moins extraordinaires, et Pappus mentionne trois ouvrages publiés à leur sujet par leurs inventeurs. Le premier est celui de Héron d'Alexandrie intitulé *Les Automates* [4], qui nous a été conservé [5], et dans lequel on trouve la description de diverses machines imitant les mouvements des êtres animés. Le second ouvrage, également dû à Héron, était intitulé : *Les Équilibres* [6] ; il est entièrement perdu, et l'on suppose qu'il se rapportait à de petites machines constituées par des objets placés dans certaines conditions d'équilibre et de mouvement autour d'un point d'appui ou de suspension. Le troisième ouvrage mentionné par Pappus est le célèbre traité

1. Μαγγανάριοι.
2. Θαυμασιουργοί.
3. Θαύματα.
4. Αὐτόματα.
5. Les éditions du texte et les diverses traductions de cet ouvrage de Héron sont indiquées en notes de notre traduction du préambule du livre VIII.
6. Ζύγια.

Des Corps flottants [1], dans lequel Archimède expose le premier principe hydrostatique qui porte son nom, et l'on s'étonne au premier abord de le voir rangé ici indûment parmi les ouvrages de mécanique appliquée. Mais l'erreur de Pappus provient peut-être de ce qu'il n'a connu de ce traité que le titre, d'autant plus qu'à son époque, comme l'a fait remarquer Ch. Tissot [2], certains livres d'Archimède n'étaient plus connus que de réputation à Alexandrie. Si, au contraire, il a connu le traité dans toute sa teneur, il n'aura certainement voulu viser qu'une application vulgaire des belles propositions de son second livre dans lesquelles Archimède développe la théorie du métacentre, en démontrant les conditions d'équilibre de certains segments de paraboloïdes de révolution, moins denses que le fluide dans lequel on les abandonne, et qui, d'après la position de leur centre de gravité et la position initiale qu'on leur donne, modifient cette position d'une manière qui semble paradoxale, et présentent ainsi l'aspect d'un jouet analogue au ludion de la physique amusante.

Pappus mentionne encore trois autres ouvrages qui se rapportent à des machines étonnantes d'un genre plus relevé que les précédentes. Le premier est celui de Héron intitulé : *Les Pneumatiques* [3], qui nous a été conservé, et qui décrit des machines dans lesquelles l'action manuelle s'exerce par l'intermédiaire de l'air comprimé au moyen de soufflets ou d'un jeu de soupapes logées dans des corps de pompe. Le second ouvrage, également dû à Héron, mais qui ne nous est pas parvenu, était intitulé : *Des Vaisseaux renfermant de l'eau* [4], et l'on suppose qu'il donnait la description et exposait le fonctionnement de machines se composant essentiellement de vaisseaux dans lesquels ou d'où s'écoulait de l'eau, telles que la fontaine dite de Héron, les

1. περὶ ὀχουμένων. Voir : ARCHIMÈDE, *Les Corps flottants*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 405-463.
2. CH. TISSOT, *Recherches historiques sur le principe d'Archimède* (*Revue Archéologique*, nouvelle série, t. XIX, 1869, p. 47).
3. Πνευματικά. Voir en notes de notre traduction du préambule du livre VIII les éditions du texte et les traductions qui ont été données des *Pneumatiques* de Héron.
4. περὶ ὑδρείων, expression que nous traduisons par : *Des vaisseaux contenant de l'eau*, et non pas par : *Des horloges hydrauliques*, comme on l'a proposé, d'une manière que nous estimons trop restrictive.

horloges hydrauliques, ou clepsydres, avec figurines mobiles indiquant les heures, et les orgues hydrauliques où le vent est fourni par la pression de l'eau (1). Enfin, le troisième ouvrage, que Pappus ne mentionne que d'après un passage du traité d'*Astrologie* de Carpos d'Antioche, et qu'il ne semble donc pas avoir consulté lui-même, est le seul qu'Archimède aurait, dit-on, consenti à écrire sur la mécanique appliquée sous le titre : *La Sphéropée* (2). C'est dans cet ouvrage entièrement perdu qu'Archimède avait décrit un appareil pour représenter les mouvements du soleil, de la lune et des planètes au moyen d'une série de sphères concentriques et d'axes diversement inclinés ; le tout étant actionné par de l'eau imprimant des mouvements de rotation uniformes de sens contraires et de vitesses différentes, d'après le principe du tourniquet hydraulique déjà inauguré par Ctésibius.

Émettant comme principe que les arts mécaniques tirent leur plus grand avantage de la géométrie, Pappus subordonne la mécanique appliquée à une mécanique théorique soumise exclusivement à l'appareil et au raisonnement géométriques (3), telle qu'elle a été conçue par ses devanciers, et il annonce que son huitième livre se bornera à démontrer d'une manière plus claire et plus concise quelques propositions de ces mêmes devanciers, en y ajoutant toutefois trois propositions qui lui appartiennent. La première de ces trois propositions établit une théorie du plan incliné ; la seconde présente une solution empirique du problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données, laquelle ne diffère que fort peu des diverses solutions du même problème déjà exposées dans les livres précédents, et la troisième proposition concerne la détermination du diamètre d'un pignon ayant un nombre donné de dents et qui engrène une roue dentée dont le nombre de dents est donné aussi. Les restrictions que

1. Voir au sujet de l'orgue hydraulique les mémoires de Paul Tannery : 1° *Athénée sur Ctésibios et l'Hydraulis* (*Revue des Études grecques*, 1896, pp. 23-27, ou bien : *Mémoires scientifiques* de P. Tannery, t. IX, pp. 193-198) ; 2° *L'invention de l'Hydraulis* (*Revue des Études grecques*, t. XXI, 1908, pp. 326-340, ou bien : *Mémoires scientifiques*, t. III, pp. 282-298).

2. Σφαιροποιία, la fabrication de la sphère (céleste), ou la *Sphéropée*.

3. λόγῳ γεωμετρικῷ.

Pappus s'impose ainsi concernant la matière qu'il traitera dans son huitième livre ne l'empêchent cependant pas d'ajouter à ses propositions de statique quelques belles propositions de géométrie avant que de passer à la seconde partie de son livre, spécialement consacrée à ce qu'il appelle les cinq puissances mécaniques reconnues par les Anciens : le levier, le coin, la moufle, le treuil et la vis, ainsi qu'à certaines combinaisons et applications de ces puissances, tirées pour la plupart des ouvrages de Héron d'Alexandrie.

Sans vouloir s'attarder, dit-il, à définir « en quoi consiste le lourd et le léger », ni à exposer « la cause de la sollicitation des corps », parce que ces sujets ont déjà été traités dans les *Mécaniques* de Ptolémée, Pappus insiste toutefois sur l'importance de la doctrine barycentrique qu'il met à la base des diverses branches de la mécanique, et il nous donne la définition suivante : « Le centre de gravité de chaque corps est un certain point situé à l'intérieur de celui-ci, tel que, si on imagine le grave suspendu à ce point, il reste en repos tout en étant sollicité, et conserve sa position initiale ». Cette définition est la seule qui nous ait été transmise par l'Antiquité sur le centre de gravité des corps ; car Archimède s'abstient d'en donner une parmi les sept définitions qui précèdent les propositions des deux livres de son traité : *De l'Équilibre des Plans* (1), parce qu'il a sans doute jugé plus convenable, en faisant voir à priori qu'il y a toujours pour chaque corps un centre de gravité, de montrer que ce centre existe au lieu d'en donner une définition.

Pappus appuie d'ailleurs sa définition sur un assez long raisonnement, constituant la première proposition du huitième livre, laquelle peut se résumer de la manière suivante : Il imagine qu'un corps grave, suspendu à un axe horizontal, a pris sa position d'équilibre, et il mène le plan vertical passant par cet axe, lequel, dit-il, « coupera le grave en deux parties équilibrées qui seront comme suspendues autour du plan en se faisant équilibre ». La trace de ce plan étant conservée comme témoin à l'intérieur du grave, celui-ci est suspendu de nouveau dans une autre de ses

---

1. ARCHIMÈDE, *De l'Équilibre des Plans ou du Centre de gravité des Plans.* Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 303-350.

régions à ce même axe, et le plan vertical, mené de nouveau par l'axe et coupant aussi le grave en deux parties équilibrées, doit certainement couper le plan précédent ; car, si ces plans étaient parallèles « les mêmes parties seraient équilibrées et non équilibrées entre elles ; ce qui est absurde ». Imaginant ensuite que le grave, suspendu en un point, a pris sa position d'équilibre, et la trace de la verticale de ce point étant conservée à l'intérieur du grave comme témoin, le grave est suspendu de nouveau au même point, mais à une autre de ses régions, et la verticale du point menée maintenant coupera certainement la trace de la verticale précédente ; car, si ces deux verticales étaient parallèles, les deux plans parallèles passant par ces droites feraient retomber sur le cas absurde précédent. En conséquence, toutes les verticales tracées comme témoins à l'intérieur du grave se coupent en un point qui est le centre de gravité.

Le raisonnement de Pappus présente tout d'abord une certaine contradiction ; car, après avoir déclaré au début de la proposition que les verticales sont toutes dirigées vers le centre de l'Univers, « pour lequel, dit-il, toutes les choses qui ont du poids paraissent avoir de la propension » (1), la démonstration, qui est apagogique, traite aussitôt ces mêmes verticales comme des parallèles. La même anomalie, peu importante en réalité, se présente d'ailleurs aussi dans le traité *Des Corps flottants* d'Archimède (2), où les propositions du premier livre, qui dégagent son célèbre principe hydrostatique, considèrent les verticales dirigées vers le centre de la Terre, tandis que les propositions du second livre, qui établissent la théorie du métacentre, considèrent ces mêmes verticales comme des parallèles.

Le même raisonnement donne encore lieu à une remarque qui avait déjà été faite par Guido Ubaldo (3), à la fin du XVIe siècle, dès l'apparition de l'ouvrage de Pappus dans la version latine de Commandin, à savoir que, malgré son silence sur ce qu'il faut entendre par « parties du grave équilibrées de

---

1. ἐφ' ὃ καὶ τὰ βάρος ἔχοντα πάντα τὴν ῥοπὴν ἔχειν δοκεῖ (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1030, l. 19).
2. Voir page CIII, note 1.
3. *Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis in duos Archimedis aequiponderantium libros paraphrasis, scholiis illustrata*. Pisauri, 1588, p. 9.

part et d'autre du plan passant par le centre de gravité », il semble bien que Pappus ne considère pas ces parties comme ayant séparément le même poids mesuré à la balance ; mais qu'il admet implicitement que l'une des parties ne doit pas l'emporter sur l'autre dans la situation particulière occupée par rapport au plan ; ce qui revient à supposer que Pappus invoque tacitement la loi du levier, et considère donc que les deux parties équilibrées possèdent ce que nous appelons « même moment » par rapport au plan passant par le centre de gravité.

Parmi les propositions intéressantes du huitième livre, il y a lieu de remarquer les suivantes.

La proposition 2 énonce en d'autres termes que « le triangle intérieur ayant comme sommets les points qui divisent les côtés d'un triangle dans un même rapport a même centre de gravité que ce triangle ». La première partie de la démonstration de cette proposition établit que le centre de gravité d'un triangle est situé au point de rencontre des médianes, en concluant que ce centre est sur une médiane simplement du fait que celle-ci découpe le triangle en deux triangles partiels d'aires équivalentes comme s'ils étaient de poids égal, mais en invoquant sans doute tacitement la notion du moment égal par rapport au plan vertical passant par la médiane. Cette démonstration est donc fort différente de la démonstration plus rigoureuse qui fait l'objet des deux propositions 13 et 14 du traité d'Archimède : *De l'Équilibre des Plans* (1). Quant à la seconde partie de la démonstration, elle se base sur le théorème de Ptolémée concernant les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par une transversale ; théorème que Pappus suppose connu, mais qu'il reprend néanmoins à la proposition 3 pour le démontrer d'une autre manière que Ptolémée. La proposition de Pappus a été interprétée cinématiquement par Michel Chasles en l'énonçant : « Si trois mobiles placés aux sommets d'un triangle, partant en même temps, et parcourant respectivement les trois côtés, en allant dans le même sens et avec des vitesses proportionnelles aux longueurs de ces côtés, leur centre de gravité

---

1. ARCHIMÈDE, *De l'Équilibre des Plans*, liv. I, prop. 13 et 14. Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 316-320.

restera immobile » [1]. Cette même proposition a été étendue chez les modernes à un polygone quelconque plan ou gauche ; il en a été donné des démonstrations par la géométrie pure, et Montucla l'a démontrée par des considérations mécaniques [2].

La proposition 6 résout le petit problème auxiliaire qui consiste à découper une droite donnée de grandeur en deux segments tels que le carré de l'un soit le triple du carré de l'autre, et que, d'une manière générale, les carrés de ces segments soient entre eux dans un rapport donné.

La proposition 9 nous apporte la seule théorie de l'équilibre d'un corps grave sur le plan incliné qui nous soit parvenue de la part des Anciens. Cette théorie appartient incontestablement à Pappus qui la revendique expressément dans son préambule avec deux autres propositions de son huitième livre, et elle rentre dans l'histoire des nombreuses erreurs qui marquent les étapes du progrès dans la plupart des sciences où l'intervention des mathématiques se base sur des définitions, des axiomes et un certain nombre de postulats devant être choisis tels que l'expérience vienne confirmer les conclusions logiques qui en seront tirées. Bien que le préambule de Pappus fasse observer avec justesse que « les théorèmes de la mécanique sont dominés par la matière même des corps considérés », c'est-à-dire qu'ils sont régis par des postulats conformes aux données de la physique, sa proposition relative au plan incliné est faussée dès le début, non seulement par la méconnaissance complète de la résistance au frottement qu'un corps éprouve à se mouvoir sur le plan horizontal, mais encore par la notion de vulgaire apparence d'une puissance déterminée nécessaire pour mouvoir un poids donné sur ce plan horizontal ; notion qui revient à attribuer à un corps immobile une certaine gravité de position sur le plan, indépendante de celle de la direction verticale, et dont la propre direction serait en quelque sorte instantanément opposée à celle de la puissance appliquée. Toute éloignée qu'elle soit de la vérité, la théorie du plan incliné de Pappus était encore admise sans conteste

1. Michel Chasles, *Aperçu historique, etc.*, édit. précitée, p. 44.
2. *Récréations mathématiques et physiques par J. Ozanam, nouvelle édition totalement refondue par M (de Montucla)*. Paris, 1778 et 1790, vol. in-8°.

dans les ouvrages de la fin du XVIe siècle, notamment dans le *Traité de Mécanique* de Guido Ubaldo [1], et elle ne fut abandonnée qu'à l'époque de Galilée, quand il fut reconnu qu'une force minime est suffisante pour déplacer un corps quelconque sur un plan horizontal parfaitement poli [2]. Malgré l'erreur dont elle est entachée, et bien qu'elle ne reconnaisse pas encore le principe de la composition des forces, cette théorie du plan incliné conserve cependant un certain intérêt au point de vue de l'analyse géométrique, en raison de la méthode de la balance que Pappus y fait intervenir d'une manière qui semble même lui avoir fait entrevoir la loi de l'équilibre du levier coudé.

La proposition 10 a trait au problème qui consiste à mouvoir un poids donné au moyen d'une puissance donnée. Pappus attribue formellement la solution mécanique de ce problème à Archimède, et il nous rapporte que c'est à propos de son invention de cette solution que le grand géomètre aurait prononcé les paroles légendaires : « Donne-moi où je puisse me tenir ferme, et j'ébranlerai la terre » [3]. Pappus ne dit pas s'il tient cette sentence de la tradition orale, ou s'il l'a relevée dans un ouvrage déterminé. Or, comme on ne la rencontre dans aucun des préambules des divers ouvrages connus d'Archimède, on peut supposer que ce

1. *Guidi Ubaldi Mechanicorum liber*. Pisauri, 1577, in-folio. Cet ouvrage fut traduit en Italie sous le titre : *Le Mechaniche dell'illustrissimo Sig. Guido Ubaldo de'Marchesi Del Monte, tradotte in volgare dal Sig. Filippo Pigafetta*. Venetia, 1581, in-4°.

2. Voir l'ouvrage de Galilée : *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nove scienze, attenenti alla Mecanica ed i movimenti locali*. Leyde, 1638. Certaines thèses de Statique parues au cours du XVIIe siècle discutent le problème de Pappus relatif à l'équilibre d'un grave sur le plan incliné sans y relever encore l'erreur de ne pas tenir compte du frottement. Il en est ainsi notamment pour la thèse intitulée : *De Ponderum gravitate*(Wratislaviae, 1663, in-4°), mentionnée dans l'ouvrage de Stanislas Wydra sur l'histoire des mathématiques en Bohème et en Moravie, parmi celles qui furent publiées à Breslau par le Jésuite belge Théodore Moretus, qui enseigna longtemps les mathématiques à Prague et à Olmutz (*Historia Matheseos in Bohemia et Moravia cultae a Stanislao Wydra*. Pragae, 1778, p. 48). Cette thèse donna lieu à une curieuse correspondance du Père Moretus avec deux autres mathématiciens de la Compagnie de Jésus, les Pères De Gottignies et Zucchi, dans laquelle la solution de Pappus est critiquée à divers points de vue sans qu'il soit cependant tenu compte de la résistance du frottement. Voir : *Le mathématicien Théodore Moretus, d'après sa correspondance et ses manuscrits, par H. Bosmans, S. J.* dans : *Le Compas d'Or, bulletin de la Société des Bibliophiles Anversois*, nouvelle série, sixième année, n° 2. Anvers, 1928.

3. Δός μοί ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.

dernier l'avait émise dans son traité perdu : *Des Balances* [1], soit à l'endroit de cet ouvrage qui se rapportait spécialement aux propriétés du levier, soit dans le passage où Pappus nous dit qu'Archimède avait démontré que « les grands cercles forcent les petits cercles quand leur rotation s'effectue autour d'un même centre », c'est-à-dire avait établi la relation des efforts appliqués tangentiellement à des cercles concentriques.

Pappus illustre la solution du problème en empruntant à l'ouvrage : *Introduction mécanique* [2] de Héron la description du *Baroulcon* [3], appareil mécanique constitué par un équipage de roues dentées de diamètres différents, montées sur des axes logés dans une sorte de bâti appelé le glossocome [4], et où la résistance à vaincre est appliquée tangentiellement à la circonférence de l'axe de la dernière roue dentée, tandis que la puissance à multiplier par le train de roues est appliquée tangentiellement à la première roue, dont les dents obliques sont entraînées par une vis sans fin actionnée par l'intermédiaire d'une manivelle. Comme Pappus n'attribue pas à Archimède la construction du baroulcon tel qu'il est décrit dans l'ouvrage de Héron, il est probable qu'il constituait cependant une application, ou plutôt une extension, de l'invention d'Archimède représentée dans cet appareil uniquement par la vis sans fin faisant mouvoir la roue à dents obliques.

Pappus revient ensuite sur des considérations déjà émises antérieurement à propos de certains instruments permettant de résoudre plus facilement des problèmes géométriques solides qui réclament l'intervention de courbes du second degré dont la description par points dans le plan présente quelque difficulté, et il corrobore ces considérations dans la proposition II, qui reproduit presque textuellement [5] la cinquième proposition du

1. περὶ ζυγῶν, *Des Balances*, ou plutôt : *Des Fléaux de balance.*
2. Εἰσαγωγαὶ μηχανικαί.
3. Βαρουλκός, le *Baroulcon*, ou l'*Élévateur*, expression dérivant de βαρός, poids, et de ἕλκειν, tirer. Voir en note de notre traduction du livre VIII pour ce qui concerne l'ouvrage de Héron dans lequel cet appareil mécanique est décrit.
4. Γλωσσόκομον, le glossocome, ou coffret dans lequel le train de roues dentées est logé.
5. κατὰ λέξιν.

livre III, dans laquelle il a déjà exposé sa propre manière [1] de déterminer les deux moyennes proportionnelles au moyen de la règle mobile en vue de résoudre le problème déliaque généralisé du cube ayant un rapport déterminé avec un cube donné.

La proposition 12, dont Pappus préconise la solution à l'usage des architectes, tend à mesurer la grosseur, c'est-à-dire à déterminer le diamètre de la section droite d'un tronçon de colonne cylindrique dont les deux extrémités, irrégulièrement brisées, ne permettent plus de relever directement ce diamètre. La solution assez remarquable de Pappus consiste à déterminer d'abord instrumentalement, dans la surface du cylindre, cinq points situés successivement dans un même plan et à égale distance de deux points pris arbitrairement dans cette surface ; puis à ramener le problème, dans la proposition 13, à la construction d'une ellipse passant par les cinq points, dans laquelle un diamètre quelconque permet de déterminer le diamètre conjugué ; enfin, à ramener de nouveau le problème, dans la proposition 14, à trouver les deux axes principaux de cette ellipse, dont le plus petit axe sera le diamètre cherché de la section droite circulaire du tronçon de colonne. Il y a lieu de remarquer que cette solution admet à priori la possibilité de construire l'ellipse passant par cinq points donnés, et l'on peut donc supposer que, connaissant déjà la solution actuellement perdue du problème du lieu à quatre droites donnée par Apollonius en se basant sur les propositions du troisième livre de ses *Coniques*, Pappus avait sans doute reconnu que cette possibilité découlait de la solution de ce même lieu qui, rapporté au cas d'un quadrilatère quelconque, est constitué par une ellipse sur laquelle sont situés les quatre sommets du quadrilatère et un cinquième point pris parmi tous les autres points de la courbe dont le produit des distances à deux côtés opposés du quadrilatère, ou bien le produit des droites inclinées sous un angle donné sur ces côtés, a un rapport constant avec le produit des distances aux deux autres côtés, ou bien avec le produit des droites inclinées de la même manière sur ces côtés. La solution adoptée par Pappus ne s'inspire cependant pas de cette solution du cas particulier

1. καθ' ἡμᾶς, (la solution) d'après nous.

du lieu à quatre droites ; elle se base, au contraire, sur une série de propositions du quatrième livre des *Coniques* d'Apollonius visant les points d'intersection des coniques entre elles, et invoque, en outre, divers rapports que possèdent entre eux les rectangles compris sous les segments de cordes de l'ellipse menées dans certaines directions et se coupant mutuellement. Dès lors, après avoir déterminé deux diamètres conjugués de l'ellipse construite en passant par les cinq points, la proposition 14, qui résout finalement le problème de trouver les deux axes principaux de cette ellipse, se borne simplement à exposer la construction instrumentale de ces axes au moyen de la règle et du compas, sans l'accompagner d'une démonstration qui se fit attendre jusqu'à Euler à qui on doit en même temps plusieurs autres solutions de ce même problème [1].

A la suite de quelques propositions sur la sphère (prop. 15 à 18), qui, en raison de leur intérêt médiocre et de leur rédaction négligée, paraissent avoir été interpolées dans son ouvrage, Pappus présente la belle proposition 19, qui résout le problème de l'inscription de sept hexagones réguliers égaux dans un cercle donné, de manière que l'un d'eux soit concentrique au cercle, et que chacun des six autres soit basé sur un côté de l'hexagone central en ayant le côté opposé comme corde du cercle. Une solution un peu différente de ce problème vient ensuite ; elle est plus claire, mais probablement apocryphe [2].

La dernière partie du huitième livre traite des cinq puissances de Héron : le coin, le levier, la moufle, le treuil et la vis sans fin ; instruments simples, destinés à transmettre l'action d'une force donnée à un point non situé dans la direction de cette force, de telle sorte que celle-ci fasse mouvoir un corps grave, auquel elle n'est pas appliquée directement, dans une direction autre que celle de cette force.

Après avoir décrit ces cinq puissances d'une manière sommaire,

---

1. EULER, *Novi Commentarii*. Saint-Pétersbourg, t. III, 1750-1751.
2. E. Catalan a donné une solution élégante du problème analogue relatif au pentagone : « A un cercle donné inscrire six pentagones réguliers égaux, de manière que l'un d'eux soit concentrique au cercle, et que chacun des cinq autres ait un sommet sur la circonférence » (*Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire, par E. Catalan*. Paris, sixième édit., 1879, p. 306).

Pappus s'étend davantage sur la construction de la vis sans fin et sur quelques-unes de ses applications ; il expose le tracé pratique de la vis à une et à deux spires, et renvoie pour les démonstrations au traité d'Apollonius : *Sur la Vis* (1). Ce traité ne nous est pas parvenu ; mais on sait, par deux passages du commentaire de Proclus sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide, qu'Apollonius avait démontré que toutes les parties de l'hélice cylindrique sont similaires et peuvent coïncider entre elles (2) ; ce qui fait supposer que le traité *Sur la Vis* présentait déjà une théorie assez avancée relative à une ligne à double courbure dans laquelle le rapport des deux courbures en chaque point est constant (3). Les applications de la vis décrites par Pappus sont tirées des *Introductions mécaniques* de Héron. Une première application est celle de la vis sans fin qui engrène tangentiellement une roue dentée ; il expose la manière de tracer et de tailler les dents obliques de cette roue, et démontre son avancement d'une dent à chaque tour de la vis. Une autre application consiste dans la vis sans fin qui transforme son mouvement circulaire en un mouvement rectiligne longitudinal en faisant progresser parallèlement à son axe un ergot curseur guidé dans une rainure fixe. Ce dernier ensemble de petits organes était donc bien près de constituer la vis tournant dans un écrou, dont l'usage domine la construction mécanique chez les modernes, mais que les mécaniciens de l'Antiquité ne paraissent pas avoir connu.

Le huitième livre s'achève par la description des organes et l'exposé des principaux usages de quelques appareils de levage, empruntés aux ouvrages de Héron et de Philon de Byzance, tels que le cabestan, le mât de charge et divers genres de grues. Pappus fait voir que tous ces appareils sont des combinaisons de quelques-unes des cinq puissances dont il a été question, lesquelles, dit-il, « procèdent toutes d'une structure unique » (4), c'est-à-dire qu'elles dérivent toutes du seul levier, dont le rôle primordial en mécanique

1. περὶ τοῦ κοχλίου.

2. *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum commentarii edidit F. Friedlein*. Lipsiae, 1873, p. 105.

3. PUISEUX, *Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant*. (*Journal des Mathématiques*, t. XVI, 1851).

4. εἰς μίαν ἄγονται φύσιν.

avait déjà été proclamé par Aristote, plus d'un siècle avant Archimède, dans le passage du préambule de ses *Questions mécaniques* où il dit : « Les propriétés de la balance se ramènent à celles du cercle, celles du levier à celles de la balance, et la plupart des autres propriétés que présentent les mouvements mécaniques se ramènent aux propriétés du levier » (1).

Telle est donc dans ses grandes lignes la *Collection mathématique* ; elle n'est certes pas marquée au coin du génie comme les œuvres d'Archimède et d'Apollonius, qui ont jeté la science mathématique dans des sillons nouveaux, mais elle provoque toute l'admiration de ceux qui restent fidèles aux choses de l'esprit pour la richesse de ce qu'elle contient, la maîtrise avec laquelle elle a été écrite et l'érudition dont elle déborde ; en sorte que la gloire qui entoure les noms des deux grands prédécesseurs de Pappus n'enlève rien à l'universelle renommée qui, au vrai sens du terme, rappelle son nom presque à chaque pas de l'histoire des mathématiques.

***

L'œuvre de Pappus ne s'est pas limitée à la *Collection mathématique* ; mais il a produit d'autres travaux, dont quelques-uns seulement nous sont parvenus dans des fragments plus ou moins importants.

Suidas mentionne trois ouvrages de Pappus qui sont entièrement perdus (2) : un traité de géographie (3), un ouvrage sur les fleuves de la Lybie (4) et un traité sur l'interprétation des songes (5).

La préface du commentaire de Marinus sur le traité des *Données* d'Euclide (6) présente un passage final qui a fait supposer que Pappus avait aussi composé un commentaire sur cet

---

1. ARISTOTE, *Les Questions mécaniques*. Voir édit. Didot, t. IV, p. 53.
2. SUIDAS, *Lexicon graece recognovit Im. Bekker*. Berolini, 1854, in-8°. Voir le vocable : Πάππος ἀλεξανδρεύς.
3. Χωρογραφία οἰκουμενική, la Chorographie universelle, ou description détaillée de tous les endroits de la terre.
4. ποταμοὺς τοὺς ἐν Λιβύῃ.
5. ὀνειροκριτικά.
6. Μαρίνου φιλοσόφου ὑπόμνημα εἰς τὰ δεδομένα Εὐκλείδου.

ouvrage (1) ; mais il y a lieu plutôt de se rallier à l'opinion de Fabricius d'après qui, loin de viser un ouvrage particulier de Pappus, Marinus fait simplement allusion à l'analyse sommaire des *Données* que l'on trouve au début du septième livre de la *Collection mathématique* (2).

Le catalogue arabe, dénommé le Fihrist, composé vers l'an 987 de notre ère, mentionne : « Un commentaire au livre de Ptolémée sur le *Planisphère* (3), traduit en arabe par Thabit » (4) ; mais cet ouvrage, attribué par les Arabes à Pappus, ne nous est pas parvenu.

On a attribué à Pappus un commentaire sur les *Harmoniques* de Claude Ptolémée (5) en se basant avec quelque vraisemblance sur les indications placées en tête de l'un des divers manuscrits du Vatican qui contiennent le commentaire de Porphyre sur les *Harmoniques*. D'après ces indications, Porphyre n'aurait pas commenté entièrement cet ouvrage de Ptolémée, mais seulement les quatre premiers chapitres du premier livre, et Pappus aurait commenté tout le reste à partir du cinquième chapitre (6). Cette

1. *Euclidis Data, Cl. Hardy graece nunc primum edidit, latine vertit, scholiisque illustravit ; adjectus est Marini commentarius gr. et lat.* Lutetiae Parisiorum, 1625, in-4°, p. 16 : « ὡς ὁ Πάππος ἱκανῶς ἀπέδειξεν ἐν τοῖς εἰς τὸ βιβλίον ὑπομνήμασι », c'est-à-dire : « comme Pappus l'a suffisamment montré dans ses commentaires sur le livre (des Données) ».

2. Fabricius, *Bibliotheca graeca, editio quarta, curante G. Ch. Harles*. Hamburgi, 1790, in-4°. Voir vol. IX, p. 16.

3. Ἅπλωσις ἐπιφανείας σφαίρας, le *Planisphère*, ouvrage de Claude Ptolémée dont le texte grec est perdu, mais qui nous a été conservé dans la version arabe de Maslem ben Ahmed el Magriti. Une traduction latine en a été publiée pour la première fois à Toulouse, en 1544, et pour la seconde fois par Commandin à Venise, en 1558. Voir : *Ptolemaei Opera astronomica minora, edit. Heiberg*. Leipzig, 1907, p. CLXXX. L'ouvrage traite de la représentation des cercles de la sphère céleste sur le plan, afin de se rendre compte des mouvements diurnes et de trouver l'heure par le soleil et les étoiles. Comme cette théorie appartient entièrement à Hipparque, l'ouvrage doit probablement lui être attribué plutôt qu'à Ptolémée.

4. *Das Mathematiker Verzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Ja'Kub An-Nadim. Zum ersten Mal vollständig ins deutsche übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr Heinrich Suter* (*Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*. Heft V. Leipzig, 1892, p. 22).

5. Ἁρμονικά, les *Harmoniques ;* ouvrage divisé en trois livres, dans lequel Ptolémée réduit à sept les treize ou quinze tons musicaux des Anciens. Il fut publié d'abord par Ant. Gogavinus, avec l'ouvrage d'Aristoxène sur la musique, à Venise, en 1562 ; puis par J. Wallis sous le titre : *Claudii Ptolemaei Harmonicorum libri III (graece et latine), Joh. Wallis recensuit, edidit, versione et notis illustravit, et auctarium adjecit.* Oxonii, 1682, in-4°.

6. Lucas Holstenius dit à la fin du chapitre VII de son édition de la *Vie de Pythagore* par Porphyre, à laquelle il joint quelques autres ouvrages de Porphyre, notamment son commentaire sur les *Harmoniques* de Ptolémée (Rome, 1630,

attribution à Pappus a cependant été fortement mise en doute par Joh. Wallis (1).

Le catalogue de la bibliothèque laurentienne, établi par Bandini, mentionne un ouvrage d'astrologie présentant des tables quotidiennes relatives aux astres qui sont censés régir les événements, lequel serait attribué à Pappus ; mais il s'agit d'une attribution qui demanderait encore à être contrôlée par des arguments historiques et philologiques (2).

Nous avons déjà fait remarquer plus haut, à propos des renseignements que nous donne le préambule du septième livre de la *Collection* sur le traité *Des Contacts* d'Apollonius, qu'il y a lieu de croire que Pappus avait publié une recension des deux livres de ce traité, et qu'il y avait même ajouté une série de propositions qui se résument dans le problème général dont il nous donne l'énoncé, lequel semble bien lui appartenir en propre. Rien ne nous est cependant parvenu de ces propositions, qui se seront donc perdues en même temps que le traité d'Apollonius.

Il résulte des préliminaires de la proposition 23 de son quatrième livre, que Pappus a écrit un commentaire sur un ouvrage de Diodore d'Alexandrie (3) intitulé : l'*Analemme* (4),

---

in-8°) : « Neque tamen in universum ἁρμονικῶν opus scripsit Porphyrius, sed in quatuor duntaxat prima capita : cetera dein Pappus pertexuit. Ita enim in alio manuscripto Vaticano titulas indicat : Πορφυρίου ἐξήγησις εἰς δ' πρῶτα κεφάλαια τοῦ πρώτου τῶν ἁρμονικῶν Πτολεμαίου. Sequitur deinde Πάππου ὑπόμνημα εἰς τὰ ἀπὸ τοῦ ε' κεφαλαίου καὶ ἐφεξῆς » ; ce que nous traduisons : « Porphyre n'a cependant pas écrit l'ouvrage sur les *Harmoniques* en entier, mais seulement dans ses quatre premiers chapitres : Pappus acheva ensuite les autres. En effet, le titre indique dans un autre manuscrit du Vatican : « *Explication de Porphyre sur les quatre premiers chapitres du premier (livre) des Harmoniques de Ptolémée* ». Vient après cela : « *Commentaires de Pappus sur les chapitres à partir du cinquième et la suite* ».

Le même manuscrit du Vatican est d'ailleurs mentionné sous le titre : « *Pappi de Musica* » par Dom Bernard de Montfaucon. (*Bibliotheca bibliothecarum manuscriptorum nova*. Parisiis, 1739, 2 vol. in-folio. Vol. I, p. 11).

1. Outre l'édition des *Harmoniques* mentionnée dans la note avant-précédente, voir : J. Wallis, *Opera mathematica*. Oxoniae, 1695-1699, 4 vol. in-folio. Vol. III, p. 187.

2. Bandini, *Catalogus codicum mss. graecorum, lat. et ital. bibliothecae medicae laurentianae*. Florentiae, 1764-1778, 8 vol. in-folio. Voir vol. II, p. 6.

3. Diodore n'est connu que par les simples mentions qui en sont faites par Pappus, puis par Achilles Tatius qui l'appelle Diodore d'Alexandrie le mathématicien dans son commentaire sur les *Phénomènes d'Euclide*, et enfin par Marinus dans son commentaire sur les *Données* d'Euclide.

4. ἀνάλημμα, analemme, expression qui, dérivant du verbe ἀναλαμβάνειν pris dans le sens de reprendre, s'applique à la reprise ou à la description en projection orthographique sur le plan des cercles de la sphère céleste.

et que c'est dans ce commentaire qu'il publia d'abord sa solution du problème de la trisection de l'angle ou de l'arc au moyen de la conchoïde de Nicomède. Ce commentaire est perdu ainsi que l'ouvrage de Diodore sur le contenu duquel on n'est d'ailleurs pas fixé. Il est cependant probable que cet ouvrage se rattachait à la description ou au tracé des cercles de la sphère céleste dans le plan ; projection orthographique qui constitue proprement l'*Analemme* de Ptolémée (1), et, comme ce dernier est amené, dans la construction de cet analemme, à diviser certains segments du demi-cercle du tropique en six parties égales, il y a lieu de supposer que ce sont précisément ces questions de division d'arcs dans l'ouvrage de Diodore qui auront amené Pappus à insérer sa solution de la trisection de l'arc dans son commentaire sur cet ouvrage.

Pappus a écrit un commentaire important sur les *Éléments* d'Euclide qui s'étendait probablement à l'ouvrage entier. Proclus apprécie l'autorité des explications et des critiques de ce commentaire dont il nous donne trois courts extraits dans son propre commentaire sur le premier livre d'Euclide (2), et il nous dit, en outre, dans un autre passage, que « les disciples de Héron et de Pappus (3) ont encore développé l'ouvrage d'Euclide à la suite de ces derniers en s'efforçant de donner de nouvelles démonstrations pour certaines de ses propositions » (4). Eutocius d'Ascalon confirme d'ailleurs l'autorité du commentaire de Pappus dans son propre commentaire sur le premier livre du traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède, en disant, à propos de la manière d'inscrire dans un cercle donné un polygone semblable à celui qui est inscrit dans un autre cercle, que cette manière a été « indiquée aussi par Pappus dans son commentaire sur les *Éléments* » (5). Enfin, le commentaire de Pappus sur le dixième

1. *Ptolemaeus. Liber de analemmate a Fed. Commandino instauratus et commentariis illustratus. Ejusdem Commandini liber de horologiorum descriptione.* Romae, 1562, in-4°.

2. Proclus, édit. précitée de Friedlein, pp. 189-190, pp. 197-198 et pp. 249-250.

3. οἱ περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον.

4. Proclus, édit. Friedlein, p. 429.

5. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii iterum edidit J. L. Heiberg.* Lipsiae, 1910-1915, 3 vol. in-8°. Voir vol. III, p. 28, l. 21 : « εἴρηται δὲ καὶ Πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν Στοιχείων.

livre d'Euclide nous a été conservé dans une version arabe, faite dans la première moitié du X^e siècle par Abû Othmân al-Dimashki, signalée depuis assez longtemps déjà par l'orientaliste F. Woepcke, laquelle a été publiée il y a quelques années dans une traduction allemande avec des notes historiques et bibliographiques par H. Suter [1], et tout récemment dans une traduction anglaise par G. Junge et W. Thomson [2].

Si rien ne nous était parvenu du commentaire de Pappus sur la *Composition mathématique* ou *Almageste* de Ptolémée, nous aurions du moins appris de diverses sources qu'il avait réellement été écrit. Tout d'abord, Pappus lui-même nous dit incidemment, au cours de la proposition 22 de son septième livre, qu'il a démontré à sa manière, dans son commentaire sur le premier livre de l'*Almageste*, la première proposition du traité : *De la Mesure du Cercle* d'Archimède, laquelle démontre que l'aire du cercle équivaut à l'aire du triangle rectangle ayant les côtés de l'angle droit respectivement égaux au rayon et au périmètre du cercle [3]. Ce commentaire sur le premier livre de Ptolémée est perdu, sauf un petit fragment précisément constitué par cette proposition d'Archimède démontrée d'une manière différente, et que l'on trouve au rang de proposition 3 dans le cinquième livre de la *Collection*, où elle doit avoir été introduite par Pappus lui-même, ou bien par un interpolateur qui l'a empruntée au commentaire de Pappus. D'autre part, Suidas nous rapporte que Pappus a écrit « des commentaires sur les quatre livres de *La Grande Composition* de Ptolémée » [4]. Or, la critique considère que, dans cette phrase, le sigle qui représente le mot « quatre » est une altération de celui qui devait représenter le mot « treize »,

1. H. Suter, *Der Kommentar des Pappus zum X. Buche des Euklides, aus der arabischen Uebersetzung des Abu 'Othman al-Dimashki, ins Deutsche übertragen. Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern,* von H. Suter hrsg. von J. Frank, pp. 9-78 dans : *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin.* Erlangen, Heft IV, 1922.

2. G. Junge and W. Thomson, *The Commentary of Pappus on book X of Euclid's Elements. Harvard Semitic Series N° 8.* Cambridge (Massachusetts), 1930.

3. Archimède, *De la Mesure du Cercle,* prop. 1. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 127.

4. Suidas, *Lexicon*, édit. précitée, voir vocable : Πάππος ἀλεξανδρεύς, sous lequel se présente la mention : εἰς τὰ τέσσαρα βιβλία τῆς Πτολεμαίου μεγάλης συντάξεως ὑπόμνημα.

nombre des livres que contient en réalité l'ouvrage de Ptolémée [1]; de sorte que le texte de Suidas ainsi rectifié indiquerait que le commentaire de Pappus s'étendait à l'ouvrage entier. Enfin, Eutocius renvoie aux commentaires de Pappus dans son propre commentaire sur le traité : *De la Mesure du Cercle* d'Archimède, en disant, à propos des rapports de racines carrées de nombres qui interviennent dans la proposition 30 de ce traité [2] : « Comment on doit trouver la racine (carrée) approximative d'un nombre donné, cela a été dit par Héron dans ses *Métriques* [3], de même que par Pappus, par Théon et par divers autres commentateurs de la *Grande Composition* de Ptolémée » [4]. D'ailleurs, Eutocius s'en rapporte encore tacitement au commentaire de Pappus, lorsqu'il rapproche ce dernier de Théon, autre commentateur de l'*Almageste,* et qu'il les invoque tous deux dans son commentaire sur la quatrième proposition du second livre *De la Sphère et du Cylindre,* à propos de la composition des rapports qui intervient dans cette proposition [5]. Ces références d'Eutocius font supposer que le commentaire de Pappus existait encore en entier au VI^e siècle ; mais il ne nous en est parvenu que la partie relative aux cinquième et sixième livres de l'*Almageste.*

Le commentaire sur le cinquième livre a été publié, conjointement avec le commentaire de Théon, à la suite de la première édition du texte grec de l'*Almageste,* donnée à Bâle, en 1538, par Simon Grinaeus et Joachim Camerarius. Basée uniquement sur le manuscrit de Nuremberg que le cardinal Bessarion avait

---

1. Hultsch a proposé de remplacer le mot « quatre », qu'il considère comme une altération, par le mot « treize », dans la note suivante (Cfr. *loc. cit.*, vol. III p. VIII, note 1) : « Scriptura τὰ τέσσαρα primos quatuor Ptolemaei operis libros significare videtur. At vero nostra aetate etiam commentarii in quintum et sextum exstant; ergo τέσσαρα, i. e. Δ, ex ΙΓ, qui est plenus librorum συντάξεως numerus, corruptum esse videtur.

2. Archimède, *De la Mesure du Cercle*, prop. 3. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 130.

3. *Hero Alexandrinus. Opera quae supersunt omnia. Vol. V: Heronis quae feruntur stereometrica et de mensuris. Copiis G. Schmidt usus ed. J. L. Heiberg.* Lipsiae, 1914, in-8°.

4. Voir édition d'Archimède par Heiberg, vol. III : *Eutocii Commentarii*, p. 232, ll. 13-17 : « ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοίς Μετρικοῖς, εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν ἐξηγουμένοις τὴν Μεγάλην σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. ».

5. Eutocius, *ibidem*, vol. III, p. 120, ll. 5-11.

donné à Régiomontanus, cette édition est très fautive, et la version latine qui l'accompagne est celle que George de Trébizonde avait déjà fait paraître sous la révision de Luc Gauric, à Venise en 1528 [1].

Le commentaire relatif au sixième livre était connu depuis longtemps à l'état manuscrit ; il vient de faire l'objet d'une excellente édition, dont l'appareil critique se fonde sur dix-huit manuscrits, par l'abbé A. Rome [2]. Cette édition, qui comprend également le texte revisé du commentaire sur le cinquième livre de Ptolémée, attend désormais un traducteur en langue moderne, de manière à faciliter la nouvelle contribution que ce commentaire de Pappus doit apporter à l'histoire de l'astronomie ancienne.

***

La nomenclature et la filiation des manuscrits de la *Collection mathématique* qui nous ont été conservés, et qui paraissent tous dériver d'un manuscrit archétype du Vatican [3], ont été exposées d'une manière magistrale par Frédéric Hultsch dans la préface de son édition critique du texte grec de Pappus [4].

Lorsque l'attention des grands humanistes de la Renaissance, absorbée jusque-là par les œuvres philosophiques et de science simplement latente de Platon et d'Aristote, se fut tournée vers les monuments scientifiques proprement dits de l'Antiquité, elle fut attirée d'abord par les œuvres d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, d'Hipparque et de Ptolémée, et plus tard seulement, par celles des épigones et des commentateurs de ces grands géomètres et astronomes grecs : Pappus, Théon d'Alexandrie, Proclus, Eutocius et autres. L'importance de l'œuvre de Pappus en tant que commentaire de certaines œuvres mathématiques

---

1. Κλ. Πτολεμαίου μεγάλης συντάξεως βιβλ. ιγ. Θέωνος ἀλεξανδρέως εἰς τὰ αὐτὰ ὑπομνημάτων βιβλ. ια. *Claudii Ptolemaei Magnae Constructionis, id est, Perfectae coelestium motuum pertractationis lib. XIII. Theonis Alexandrini in eosdem commentariorum lib. XI.* Basilae, 1538, in-folio.

2. *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. Texte établi et annoté par A. Rome. Tome I, Pappus d'Alexandrie. Commentaire sur les livres V et VI de l'Almageste.* Roma, Bibliotheca Apostolica Vaticana, 1931, gr. in-8°.

3. Codex Vaticanus graecus 218, saec. XII.

4. Cfr. HULTSCH, édit. précitée, vol. I, *Praefatio*, pp. V-XXV.

antérieures, et sa grande valeur au point de vue de l'histoire des mathématiques, avaient à peine été entrevues par l'humaniste Vossius, et le savant Scaliger s'était borné à consigner quelques remarques philologiques et géométriques en marge du manuscrit de Pappus de la bibliothèque de Leyde, lorsque Fédéric Commandin (1) fut amené à traduire quelques passages de l'œuvre de Pappus pour les introduire à titre de commentaire dans les versions latines des ouvrages de deux mathématiciens grecs qu'il publia. C'est ainsi que, dans sa traduction des quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius, il inséra une version des lemmes que le septième livre de Pappus démontre pour éclaircir les propositions de ce traité (2), et que, dans sa traduction de l'ouvrage d'Aristarque de Samos : *Sur les Grandeurs et les Distances du Soleil et de la Lune*, il ajouta une version de la notice que le sixième livre de Pappus consacre à cet ouvrage (3). Ces deux premiers

1. Federigo Commandino, né à Urbino, en 1509, mort en 1575 dans cette ville dont son père, Giovan Battista, architecte, avait élevé les fortifications. Après de brillantes premières études dans sa ville natale, il fut attaché à la Cour du Pape Clément V en raison de ses connaissances étendues, jusqu'à la mort de ce pontife, en 1534. Après s'être remis pendant dix ans à l'étude des mathématiques, à Padoue, et à l'étude de la médecine, à Ferrare, où il conquit le grade de docteur, il fut attaché quelque temps au duc Guidobaldo d'Urbino, général des Vénitiens, à qui il enseigna l'architecture militaire ; puis au cardinal Ranuccio Farnèse. Rentré à Urbino après la mort de ce prélat, il s'y confina jusqu'à sa mort dans les immenses travaux auxquels les sciences mathématiques lui sont grandement redevables. Il publia successivement les premières traductions latines des ouvrages des principaux auteurs scientifiques grecs : le traité du *Planisphère* de Ptolémée (Venise, 1558) ; quelques ouvrages d'Archimède (Venise, 1558) ; le traité de *L'Analemme* de Ptolémée (Rome, 1562) ; le traité *Des Corps flottants* d'Archimède (Bologne, 1565) ; les quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius (Bologne, 1566) ; le traité d'Aristarque sur *Les Distances du Soleil et de la Lune* (Pise, 1572) ; les XV livres des *Éléments* d'Euclide avec leurs commentaires anciens (Pise, 1572) ; les *Pneumatiques* de Héron d'Alexandrie (Urbin, 1575) ; les *Pneumatiques* de Ctésibius (Venise, 1585), et enfin, la *Collection mathématique* de Pappus (Pise, 1588). Comme ouvrages particuliers, il publia encore un traité du *Centre de gravité*, inséré dans sa traduction précitée des *Corps flottants* d'Archimède ; un traité de perspective (*Planispherium commentarius, in quo universa scenographia ratio, ac demonstrationibus confirmatur*, 1558) ; un ouvrage de gnomonique (*De Horlogiorum descriptio*), et enfin, la traduction latine, faite sur l'arabe, de la *Géodésie* de Méhémet de Bagdad (Pise, 1570).

2. *Apollonii Pergaei conicorum libri quatuor, una cum Pappi Alexandrini lemmatibus et commentariis Eutocii Ascalonitae, etc., quae omnia nuper Fed. Commandinus Urbinas e graeco convertit.* Bononiae, 1566, in-folio. (Édition très rare).

3. *Aristarchi De Magnitudinibus et Distanciis Solis et Lunae liber, cum Pappi Alexandrini explicationibus quibusdam, a Federico Commandino Urbinate in latinum conversus, ac commentariis illustratus.* Pisauri, apud Camillum Franciscinum, 1572, in-8°. (Édition très rare).

extraits marquent donc la date la plus reculée à laquelle l'œuvre de Pappus fut partiellement remise en lumière, et c'est à partir de ce moment que Commandin se livra à son dernier grand travail d'une version latine complète de la *Collection* qui, entièrement achevée à sa mort, en septembre 1575, fut publiée aux frais du duc François II d'Urbin, sous le titre : *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Fed. Commandino Urbinate in Latinum conversae et commentariis illustratae.* Pisauri, 1588, in-4° (1).

Le succès de la traduction de Commandin fut considérable, non seulement en raison des propositions géométriques remarquables que contient l'ouvrage de Pappus, mais surtout pour ses révélations sur de nombreux ouvrages d'analyse géométrique perdus d'Euclide et d'Apollonius, qui donnèrent lieu aussitôt à des essais de restauration de la part de plusieurs éminents géomètres. Répandu rapidement, une réimpression textuelle de l'ouvrage s'imposait dès 1589 (2), et une seconde réimpression fut faite, en 1602, sous un titre un peu différent (3). Les exemplaires de ces trois tirages étant devenus difficiles à trouver trois quarts de siècle plus tard, une seconde édition fut donnée par

1. Une autre traduction de l'ouvrage de Pappus aurait été entreprise, sinon achevée, à la même époque par l'humaniste Anton Pazzi, qui professa les mathématiques à Rome de 1567 à 1576 (publico lettore delle Mathematiche in Roma), et qui mourut à Reggio, en 1585. Il résulte, en effet, de la notice biographique que lui consacre Girolamo Tiraboschi (*Bibliotheca Modenese, o Notizie della vita e delle opere degli scrittori natii degli stati del Serenissimo Duca di Modena*, t. IV, pp. 71-78), qu'à la suite de l'envoi qu'avait fait l'architecte Gherardo Spini de son ouvrage d'architecture : *Libri degli ornamenti architettonici*, qui serait resté manuscrit dans la Bibliothèque Nani, à Venise, Pazzi écrivit à Spini une longue lettre, rapportée par le biographe Tiraboschi, dans laquelle, après avoir montré ce que l'architecture des Anciens doit aux mathématiques, il l'engage à s'en rendre compte dans une série d'ouvrages qu'il énumère, et notamment dans « les traductions qu'il a faites de Héron et de Pappus, qui ont traité excellemment des machines et des instruments particuliers dont l'architecture fait usage », (*avrete pronto a scoprire questa verità, perciocchè per le traduzioni che io ho fatto del greco Herone, e del Pappo Alessandrino, i quali trattano tanto maravigliosamente delle macchine e strumenti speciale, di che l'Architettura si serve*...). Ces traductions, dont on ne sait si elles ont été faites en latin ou en italien, n'ont jamais été publiées. Toutefois, d'après Ettore Bortolotti, professeur à l'Université de Bologne, à l'amitié de qui nous devons les renseignements qui précèdent, il serait utile de faire des recherches au sujet de ces traductions manuscrites dans les fonds manuscrits des bibliothèques italiennes.

2. Venetiis, apud Franciscum de Franciscis Senensem, 1598, in-4°.

3. *Fed. Commandini commentaria in libros octo mathematicarum collectionum Pappi Alexandrini, ad Seren. Franciscum Mariam II Urbini Ducum.* Pisauri, apud Hieronymum Concordiam, 1602, in-4°.

C. Manolessius sous le titre : *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Federico Commandino Urbinate in Latinum conversae et commentariis illustratae. In hac nostra editione ab innumeris, quibus scatebant mendis et precipuè in graeco textu diligenter vindicatae, et Serenissimo Principi Leopoldo Gulielmo Archiduci Austriae dedicatae.* Bononiae, 1660, in-4°. Cette édition est de beaucoup inférieure à la première ; car, contrairement à ce qu'annonce le titre, Manolessius introduit dans le texte plus de fautes qu'il n'en corrige, et, malgré son présomptueux « avis au lecteur », il commet de nombreuses erreurs en modifiant les judicieux commentaires de Commandin (1). Le seul complément intéressant apporté à l'ouvrage est le fameux passage, d'une authenticité contestée, qui se rapporte à la proposition dite de Guldin, et que Commandin n'avait pas rencontré dans le manuscrit sur lequel il a basé sa version latine. Il y a lieu de remarquer que le fragment du second livre de Pappus est encore absent dans les deux éditions qui précèdent, car il ne devait être découvert qu'un quart de siècle plus tard.

Le texte grec de la *Collection mathématique* a d'abord été publié sous la forme d'extraits plus ou moins importants qui furent annexés à divers ouvrages, ou imprimés à part.

La partie relative aux propositions 232, 233 et 234 du septième livre, lesquelles démontrent quelques transformations de rapports inégaux, a été publiée la toute première par Marc Meiboom dans ses *Dialogues sur les Proportions*, en 1655 (2).

La partie publiée en second lieu fut précisément le fragment du second livre, que Commandin n'a pas connu, et qui fut découvert par J. Wallis dans un manuscrit grec que son collègue Edw. Bernard, professeur d'astronomie au collège de Savile, avait copié sur un manuscrit copié lui-même de la main d'Henry Savile sur un manuscrit du Vatican. Wallis fit paraître le fragment dans son édition de l'ouvrage d'Aristarque intitulée : *Aristarchi de Magnitudinibus et Distanciis Solis et Lunae liber graece et*

1. L'édition de Manolessius est d'une belle exécution typographique. Un frontispice in-4° présente le portrait équestre de l'archiduc Léopold d'Autriche, gravé par J. Troyen, d'après le tableau de D. Teniers, et le titre porte le cartouche armorié gravé par Fontana.
2. *M. Meibomii de Proportionibus.* Hafniae, 1655, in-folio. Voir pp. 154-156.

latine ex versione F. Commandini editus et notis illustratus a Joh. Wallis. Oxoniae, 1688, in-4°. Wallis inséra encore dans le même ouvrage le texte grec, publié ainsi pour la première fois, de la notice et des propositions 39, 40 et 41 que le sixième livre de Pappus consacre à l'ouvrage d'Aristarque ([1]).

La partie de la préface du septième livre, relative aux *Données* d'Euclide, a été publiée pour la première fois, d'après les manuscrits de la bibliothèque savilienne, dans l'édition des *Éléments* d'Euclide donnée par David Gregory à Oxford, en 1703 ([2]).

La préface entière du septième livre et tous les lemmes de ce même livre, c'est-à-dire les vingt et une premières propositions relatives aux deux traités de la *Section de Rapport* et de la *Section d'Aire* d'Apollonius, ont été publiés par Halley, en 1706, dans son ouvrage contenant tout à la fois les deux livres d'Apollonius sur la *Section de Rapport*, traduits d'après la version arabe dans laquelle ils nous sont parvenus, et une restauration conjecturale des deux livres perdus d'Apollonius sur la *Section d'Aire* ([3]).

Les soixante lemmes (prop. 165 à 233) du septième livre, que Pappus démontre à titre de commentaire des huit livres des *Coniques* d'Apollonius, ont été publiés pour la première fois par Halley, en 1710, dans son édition gréco-latine des *Coniques* ([4]).

Les huit lemmes (prop. 119 à 126) du septième livre, qui démontrent à titre de commentaire certaines propositions du traité d'Apollonius sur les *Lieux Plans*, ont été publiés séparément dans l'essai de reconstitution de ce traité par Robert Simson à Glasgow, en 1749 ([5]).

---

1. L'édition des œuvres complètes de Wallis (*Opera mathematica varia et miscellanaea.* Oxonii, 1695-1699) reproduit le fragment du livre II de Pappus en grec (vol. III, pp. 597-610), ainsi que la notice et les propositions 39 à 41 du livre VI de Pappus (vol. III, pp. 570-572 et pp. 578-580).

2. *Euclidis quae supersunt omnia ex recensione Davidi Gregorii, graece et latine.* Oxoniae, 1703, in-folio.

3. *Apollonii Pergaei de Sectione Rationis libri duo ex arabico manuscripto latine versi. Accedunt ejusdem de Sectione Spatii libri duo restituti. Praemittitur Pappi Alexandrini praefatio ad septimum Collectionis Mathematicae, nunc primum graece edita: cum lemmatibus ejusdem Pappi ad hos Apollonii libros. Opera et et studio Edmundi Halleii.* Oxonii, 1706, in-8°.

4. *Apollonii Pergaei Conicorum libri IV, priores cum Pappi Alexandrini lemmatis ex codd. mss. Graecis edidit Edmundus Halleius.* Oxoniae, 1710, in-folio.

5. *Apollonii Pergaei locorum planorum libri duo restituti a Roberto Simson.* Glasguae, 1749.

Les propositions 26 à 29 du quatrième livre, dans lesquelles Pappus démontre les propriétés de la quadratrice de Dinostrate, ont été publiées pour la première fois, d'après l'un des manuscrits du Vatican, dans le traité de géométrie de Joseph Torelli, à Vérone, en 1769 (1).

La partie de la préface du septième livre qui analyse les deux livres du traité perdu d'Apollonius sur les *Inclinaisons*, ainsi que la proposition 70 du septième livre relative au rhombe, ont été publiées d'abord par Samuel Horsley dans son essai de reconstitution de ce traité, à Oxford, en 1770 (2).

Le passage de la préface du septième livre relatif au traité perdu d'Apollonius sur les *Contacts*, et les vingt-trois lemmes (prop. 96 à 118) qui commentent les propositions de ce traité, ont été publiés pour la première fois par J. G. Camerer, à Gotha, en 1795, dans son essai de reconstitution des deux livres de ce traité (3).

La partie finale du troisième livre, constituée par la longue proposition 59 qui démontre, autrement que Pappus, la proposition du même livre dans laquelle ce dernier expose sa propre méthode instrumentale pour la détermination des deux moyennes proportionnelles, a été publiée pour la première fois par G. G. Bredow, en 1812, d'après le seul manuscrit (4) qui contient ce passage, probablement interpolé dans l'ouvrage de Pappus (5).

La seconde partie du cinquième livre, contenant quarante propositions sur les polyèdres réguliers et semi-réguliers, a été publiée pour la première fois en 1824, à Paris, par Hermann Jos. Eisenmann, professeur à l'École royale des Ponts et Chaussées (6). Le texte de cette édition partielle laisse à désirer,

---

1. *Josephi Torelli Veronensis Geometrica*. Veronae, 1769, in-8°, pp. 89-96.
2. *Apollonii Pergaei Inclinationum libri duo. Restituebat Samuel Horsley*. Oxonii, 1770.
3. *Apollonii de Tactionibus quae supersunt, ac maxime lemmata Pappi in hos libros graece nunc primum edita e codicibus manuscriptis, a Joanne Guilielmo Camerer*. Gothae et Amstelodami, 1795, in-8°.
4. Codex Guelferbytanus graecus 7 ; manuscrit contenant les livres III, IV, V, VI et une partie du livre VII.
5. G. G. Bredow, *Epistolae Parisienses, in quibus de rebus variis, quae ad studium antiquitatis pertinent, agitur (de Pappi collectionibus)*. Lipsiae, 1812, in-8°. Voir pp. 187-200.
6. Πάππου συναγωγαί. *Pappi Alexandrini Collectiones mathematicae nunc primum graece edidit Herm. Jos. Eisenmann. Libri quinti pars altera*. Parisiis, 1824.

parce qu'il a été établi sur un seul manuscrit de Paris fort altéré [1].

Une dernière édition partielle fut donnée par C. J. Gerhardt à Halle, en 1871. S'étendant sur les septième et huitième livres [2], elle est accompagnée d'une traduction allemande qui reproduit les nombreux défauts d'un texte grec basé sur trois manuscrits de second rang de Paris et de la bibliothèque ambrosienne de Milan [3]. Le titre de l'ouvrage de Gerhardt indique qu'il s'agit de la seconde partie d'un travail qui n'a donc pas été achevé [4].

Une édition critique complète de l'ouvrage de Pappus a été donnée par F. Hultsch sous le titre : *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* Berolini, 1875-1878, 3 vol. in-8°.

C'est sur cette édition définitive et excellente, dont l'appareil critique s'étend sur tous les manuscrits actuellement connus, que nous avons élaboré notre traduction française, la première en langue vulgaire, de la *Collection mathématique* de Pappus.

PAUL VER EECKE.

1. Codex Parisianus 2368.
2. *Die Sammlung des Pappus von Alexandrien. Griechisch und deutsch herausgegeben von C. J. Gerhardt. Zweiter Band.* Halle, 1871.
3. Codex Parisinus 2368 et Codex Parisinus 2440 mentionnés p. 216, en note, et Codex Ambrosianus 266 mentionné p. 300 de l'ouvrage de Gerhardt.
4. Un article intitulé : *Die Sammlung des Pappus von Alexandrien* fut publié par Gerhardt au sujet de son édition de 1871 dans : *Programm des Gymnasiums in Eisleben für* 1875.

TABLEAU DES LETTRES GRECQUES
EMPLOYÉES DANS LES FIGURES ET DANS LE TEXTE

CARACTÈRES	VALEUR	APPELLATION	CARACTÈRES	VALEUR	APPELLATION
Α α	a	alpha	Ξ ξ	x, cs, gs	xi
Β β ϐ	b	bêta	Ο ο	o (*bref*)	omicronn
Γ γ	g (*dur*)	gamma	Π π	p	pi
Δ δ	d	delta	Ρ ρ	r	rô
Ε ε	e (*bref*)	epsilonn	Σ σ, ς	s, ç (*dur*)	sigma
Ζ ζ	dz, ds	dzêta	Τ τ	t (*dur*)	tau
Η η	ê (*long*)	êta	Υ υ	y, u (*bref*)	upsilonn
Θ θ ϑ	th	thêta	Φ φ	ph, f	phi
Ι ι	i	iôta	Χ χ	ch, kh	khi
Κ κ	c, k	kappa	Ψ ψ	ps, bs	psi
Λ λ	l	lambda	Ω ω	ô (*long*)	oméga
Μ μ	m	mu	Ϙ ϛ		kophe
Ν ν	n	nu	ϡ ϡ		sampi

PAPPUS D'ALEXANDRIE

FRAGMENT DU LIVRE II DE LA COLLECTION (1)

PROPOSITION 14. — .... (2)

En effet, que ceux-ci (3) soient plus petits qu'une centaine et divisibles par une dizaine, et qu'il faille exprimer le nombre solide (4) résultant de ces nombres sans les multiplier eux-mêmes.

Soient donc les nombres 50, 50, 50, 40, 40, 30. Leurs nombres fondamentaux (5) seront dès lors, 5, 5, 5, 4, 4, 3. Le nombre solide qui en résulte est donc 6000 unités. Et puisque la quantité des dizaines est 6 (6), laquelle, divisée par 4, laisse 2 (7), le nombre solide issu de ces dizaines sera 100 myriades simples (8). De plus,

---

1. Le livre I de la *Collection mathématique* de Pappus paraît irrémédiablement perdu en grec ; mais l'espoir d'en découvrir un jour une version arabe ne doit cependant pas être abandonné.

2. Le fragment du livre II qui nous est parvenu débute au milieu de la proposition 14. Cette proposition, et celles qui vont suivre, sont des commentaires sur les écrits perdus d'Apollonius de Perge sur la théorie des nombres, et notamment sur les procédés de multiplication des grands nombres.

3. Sous-entendu: ἀριθμοί, c'est-à-dire les nombres dont il a été question dans la première partie perdue de la proposition 14.

4. στερεόν, le (nombre) solide, c'est-à-dire le produit continu de plusieurs nombres.

5. πυθμήν, la base, le fondement, c'est-à-dire le nombre fondamental ; expression que Paul Tannery rend par le néologisme « pythmène » pour désigner le plus petit nombre qui possède une propriété donnée. Le mot affecte cependant dans certains cas une autre acceptation qui remonte aux pythagoriciens : celle de reste de la division d'un nombre par 9.

6. C'est-à-dire les six dizaines 10, 10, 10, 10, 10, 10 considérées dans les six nombres proposés.

7. μετρούμενον ὑπὸ τετράδος λείπει δύο, mesuré (divisé) par 4, laisse 2, c'est-à-dire que 6 divisé par 4 donne 1 comme quotient et 2 comme reste.

8. μυριάδων ἁπλῶν ἑκατόν, cent myriades simples, c'est-à-dire 100 myriades à la première puissance ; de sorte que la quantité des 6 dizaines considérées donne : $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100 \times 10{,}000 = 100$ myriades.

puisque le nombre solide résultant des dizaines multiplié par le nombre solide issu des nombres fondamentaux forme le nombre solide issu des nombres du début, il s'ensuit que 100 myriades multipliées par 6000 unités forment 60 myriades doublées [1] ; de sorte que le nombre solide résultant des nombres 50, 50, 50, 40, 40, 30 est 60 myriades doublées.

XV.

Proposition 15. — Soient de nouveau des nombres, tant qu'on voudra, notamment les nombres B [2], respectivement plus petits que 1000, divisibles par 100, et qu'il faille exprimer le nombre solide qui en résulte sans multiplier ces nombres mêmes.

Que [3] le double de la quantité de ces nombres soit, en outre, d'abord divisible par 4, et posons une centaine sous chacun des nombres B. Dès lors, chacun des nombres B étant divisé par une centaine, que l'on obtienne les nombres Γ. Les nombres Γ sont donc les fondamentaux des nombres B. D'autre part, soit E le nombre solide issu de ces nombres fondamentaux [c'est-à-dire 120 unités] [4]. En conséquence, on démontrera au moyen de lignes [5] que le nombre solide formé par les nombres B est 120 myriades doublées [6], parce que le nombre solide formé par les nombres B est aussi égal au nombre solide formé au moyen des centaines multipliées par le nombre solide issu des nombres

1. μυριάδας ξ' διπλᾶς, 60 myriades doublées, c'est-à-dire 60 myriades à la seconde puissance, ou $60 \times \overline{10{,}000}^2 = 6.000.000.000$.

2. Le nombre B désigne ici une série de nombres concrets envisagés dans une proposition de l'ouvrage perdu d'Apollonius sur la multiplication des grands nombres.

3. D'après Hultsch, le texte présenterait une lacune qu'il propose de combler par le mot γεγονέτω, que ce soit (chose) obtenue. (*Pappi Alexandrini collectionis quae superunt, e libris manu scriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* Berolini, apud Weidmannos, 1875-1878, 3 vol. in-8°. Voir vol. I, p. 2, l. 18).

4. La phrase que nous mettons entre crochets a probablement été interpolée; c'est une remarque de scoliaste basée sur le nombre que le texte mentionne plus loin. (Cfr. Hultsch, édit. mentionnée dans la note précédente, vol. I, p. 4, l. 3).

5. C'est-à-dire au moyen des lignes représentatives des nombres utilisées dans les démonstrations de l'ouvrage perdu d'Apollonius.

6. C'est-à-dire : $120 \times \overline{10.000}^2$, ou 12.000.000.000.

fondamentaux, c'est-à-dire à 1 myriade doublée multipliée par 120 unités (1).

Mais, que le double de la quantité des nombres B ne soit pas divisible par 4. Dès lors, le dividende laissera nécessairement deux unités (2), car cela a été démontré précédemment ; de sorte qu'il en sera de même pour le double de la quantité des centaines divisée par 4 (3). En conséquence, la quantité des centaines divisée par deux unités laissera une centaine. Dès lors, le nombre solide formé par les centaines sera 100 myriades dénommées par le nombre Z (4), c'est-à-dire doublées (5) ; de sorte qu'il est clair que le nombre formé par les nombres B est 100 myriades, dénommées par le nombre Z, multipliées par le nombre E [les 120 unités] (6) ; ce qui est 1 myriade et 2000 myriades doublées (7).

XVI.

PROPOSITION 16. — Soient deux nombres A, B. Posons d'une part le nombre A plus petit que 1000 unités et divisible par

1. Dans cet essai de généralisation, où Pappus désigne par des lettres les séries de nombres concrets envisagés dans une proposition d'Apollonius, le nombre concret mentionné ici permet de reconstituer ces séries d'Apollonius, comme l'a montré Wallis (*Iohannis Wallis operum mathematicorum*. Oxoniae, 1699, vol. III, pp. 597-610). En effet, dans le premier cas considéré, celui de la série dont le double de la quantité des nombres est divisible par 4, la série B sera : 200, 300, 400, 500 ; la série Γ sera donc : 2, 3, 4, 5, et le nombre solide E sera donc : $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

2. Si, dans la seconde hypothèse, la quantité des nombres de la série B est impaire, le double de cette quantité divisé par 4 donnera 2 comme reste, et le quotient indiquera la puissance de la myriade multipliant le produit continu des nombres fondamentaux de la série envisagée.

3. L'énoncé ayant posé que les nombres de la série B sont divisibles par 100, le double de la quantité impaire des centaines de la série B, divisé par 4, donnera aussi 2 comme reste.

4. ἔσται μυριάδων ρ' ὁμωνύμων τῷ Z, sera 100 myriades homonymes au (nombre) Z, c'est-à-dire 100 myriades élevées à une puissance ayant même nom que le nombre Z, ou ayant le quotient Z de la division comme indice.

5. C'est-à-dire au carré.

6. Les mots τὰς ρκ' μονάδας sont considérés par Hultsch comme ayant été interpolés. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 4, l. 17).

7. μυριὰς μία δισχίλιαι διπλῶν μυριάδων, c'est-à-dire $12000 \times \overline{10.000}^2$. Dans le second cas considéré, celui dont le double de la quantité des nombres de la série B n'est pas divisible par 4, c'est-à-dire dans laquelle la quantité est impaire, la série B sera : 100, 200, 300, 400, 500 ; la série Γ sera 1, 2, 3, 4, 5, l'exposant Z de la myriade sera le quotient 2, et le nombre E sera : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

100 unités, soit 500 unités et, d'autre part, le nombre B plus petit que 100 unités et divisible par 10 unités, soit 40 unités, et qu'il faille exprimer le nombre résultant de ces nombres sans les multiplier eux-mêmes.

La chose est manifeste en opérant par les nombres [1]. En effet, 5 et 4 étant les nombres fondamentaux [2], si on les multiplie entre eux, ils forment 20 unités, et mille fois le nombre 20 forme 2 myriades ; ce qui constitue le produit des nombres A, B. Au reste, le procédé linéaire est manifeste d'après les choses démontrées par Apollonius [3].

XVII.

Proposition 17. — Sur le théorème XVIII [4]. Soit une quantité de nombres, notamment les nombres A [5], respectivement plus petits que 100 et divisibles par 10, et une autre quantité de nombres, notamment les nombres B, respectivement plus petits que 1000 et divisibles par 100, et qu'il faille exprimer le nombre solide résultant des nombres A et B sans les multiplier eux-mêmes.

En effet, que les nombres fondamentaux des nombres de A soient les nombres de H, c'est-à-dire 1, 2, 3 et 4 unités, et que les nombres fondamentaux de B soient les nombres Θ, c'est--à-dire 2, 3, 4 et 5 unités. Ayant pris le nombre solide des nombres fondamentaux [6], c'est-à-dire le nombre E, ou 2880 unités, que la quantité des nombres de A, augmentée du double de la quantité des nombres de B soit d'abord divisible par 4 [7], et Apollonius

1. C'est-à-dire en considérant les nombres eux-mêmes, et non pas leur représentation linéaire.

2. Le texte présente ici la petite interpolation μο. ε' καὶ μο. δ' c'est-à-dire : 5 unités et 4 unités. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 6, l. 2).

3. Les démonstrations géométriques d'Apollonius en matière de nombres ne nous sont pas parvenues.

4. C'est-à-dire commentaire sur le théorème XVIII de l'ouvrage perdu d'Apollonius.

5. C'est-à-dire : Soit une série de nombres désignée par la lettre A.

6. Le texte a ici la petite interpolation explétive : τῶν β' γ' δ' β' γ' δ' ε', c'est-à-dire des (nombres) 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 6, l. 15).

7. Le texte a ici l'interpolation κατὰ τὸν Z, μετρεῖ δὲ αὐτούς, et (4) mesure (ces nombres) suivant le nombre Z, c'est-à-dire : et soit Z le quotient de la division de la quantité A + 2B par 4.

démontre que le nombre solide issu de tous les nombres de A et B est constitué d'autant de myriades dénommées par le nombre Z qu'il y a d'unités dans le nombre E, c'est-à-dire 2880 myriades triplées (1) (2).

Mais, que la quantité de nombres dont se compose A, augmentée du double de la quantité de nombres dont se compose B, divisée par 4, laisse d'abord 1 (3), et Apollonius en conclut que le nombre solide issu des nombres dont se composent A et B est d'autant de myriades dénommées par le nombre Z que donne le décuple du nombre E (4).

D'autre part, si la quantité précitée (5) divisée par 4 laisse 2, le nombre solide issu des nombres dont se composent A et B est d'autant de myriades dénommées par le nombre Z que donne le centuple du nombre E (6).

Enfin, s'il reste 3 (7), le nombre solide issu des nombres est

---

1. Reprenons explicitement : Soit une série A de nombres plus petits que 100 et divisibles par 10, notamment : 10, 20, 30, 40, et une série B de nombres inférieurs à 1000 et divisibles par 100, notamment : 200, 300, 400, 500. Le produit des nombres fondamentaux (πυθμένες) est, comme dans le texte : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2880$. Si, comme cela se présente dans ces deux séries, la quantité des nombres de A augmentée du double de la quantité des nombres de B, c'est-à-dire si $4 + 2 \times 4 = 12$ est divisible par 4 avec quotient $Z = 3$, la démonstration d'Apollonius à laquelle Pappus fait allusion, démonstration probablement linéaire, donne 3 comme puissance de la myriade qui multiplie 2880. En sorte que le produit continu des nombres des deux séries A,B est : $10 \times 20 \times 30 \times 40 \times 200 \times 300 \times 400 \times 500 = 2880 \times \overline{10.000}^3$.

2. Cette première partie de la proposition se termine par une longue phrase interpolée par un scoliaste. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 6, ll. 23-28). Nous la traduisons ici pour mémoire : En effet, la myriade dénommée par le nombre Z, c'est-à-dire la myriade triplée, multipliée par le nombre E, c'est-à-dire par 2880, forme le nombre solide issu des nombres dont se composent A et B ; donc, le nombre solide issu des nombres dont se composent A et B est de tant de myriades dénommées par le nombre Z qu'il y a d'unités dans le nombre E.

3. C'est-à-dire : soit 1 le quotient de la division désigné par Z dans le texte.

4. C'est-à-dire que le produit continu des nombres des séries A et B sera la myriade élevée à la puissance $Z = 1$, multipliée par le décuple du nombre E, ou décuple du produit des nombres fondamentaux des nombres des séries A et B.

5. C'est-à-dire la somme de la quantité des nombres de la série A et du double de la quantité des nombres de la série B.

6. C'est-à-dire que le produit continu des nombres des séries A et B sera la myriade élevée à la puissance $Z = 2$, ou $\overline{10.000}^2$, multipliée par 100 E, ou le centuple produit continu des nombres fondamentaux des nombres des séries A et B.

7. C'est-à-dire si le quotient Z de la division par 4 est 3.

d'autant de myriades dénommées par le nombre Z que donne mille fois le nombre E (1).

XVIII.

Proposition 18. — Sur le théorème XIX (2). Soit un nombre A plus petit que 100 et divisible par 10, et soient d'autres nombres, tant qu'on voudra, plus petits que 10 [tels que B, Γ, Δ, E] (3), et qu'il faille exprimer le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ, E.

En effet, soit Z le nombre suivant lequel le nombre A est divisé par 10, c'est-à-dire le nombre fondamental du nombre A; prenons le nombre solide issu des nombres Z, B, Γ, Δ, E, et que ce soit le nombre H; je dis que le nombre solide formé par les nombres A, B, Γ, Δ, E est le décuple du nombre H.

Cela est manifeste au moyen des nombres (4) ; car si l'on pose par exemple que A est 20 unités, B, 3 unités, Γ, 4 unités, Δ, 5 unités et E, 6 unités, leur nombre solide est 7200 unités. Mais le nombre Z, fondamental du nombre A, étant 2 unités, le nombre solide issu de ce nombre et des nombres B, Γ, Δ, E, pris [dix fois] (5), sera 7200 unités; ce qui est égal au nombre solide des nombres A, B, Γ, Δ, E. Or, cela a été démontré linéairement par Apollonius.

XIX.

Proposition 19. — Mais, soient les deux nombres A, B respectivement plus petits que 100 et divisibles par 10, tandis que chacun des nombres Γ, Δ, E est plus petit que 10, et qu'il faille exprimer le nombre solide issu de ces nombres.

---

1. C'est-à-dire que le produit continu des nombres des séries A et B sera la myriade à la puissance 3, ou $\overline{10.000}^3$, multipliée par 1000 E, ou mille fois le produit continu des nombres fondamentaux des nombres des séries A et B.
2. Commentaire relatif à la proposition XIX de l'ouvrage perdu d'Apollonius.
3. Lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc cit.*, vol. I, p. 8, l. 15).
4. C'est-à-dire en opposition avec la méthode linéaire de la proposition visée d'Apollonius.
5. Lacune comblée facilement par δεκάκις (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 8, l. 26).

En effet, soient Z, H les nombres fondamentaux des nombres A, B ; je dis que le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ, E est le centuple du nombre solide issu des nombres Z, H, Γ, Δ, E.

Cela est aussi manifeste au moyen de nombres : A étant 20 unités, B, 30 unités, Γ, 2 unités, Δ, 3 unités, E, 4 unités, Z, 2 unités, et H, 3 unités. En effet, le nombre solide formé par les nombres A, B, Γ, Δ, E est 14.400 unités ; et celui formé par les nombres Z, H, Γ, Δ, E est 144 unités, ce qui, pris cent fois, donne 14.400 unités. La démonstration au moyen de lignes se trouve parmi celles d'Apollonius.

XX.

Proposition 20. — Mais, soient trois nombres A, B, Γ, et que chacun d'eux soit plus petit que 100 et divisible par 10 ; tandis que chacun des nombres Δ, E, Z est plus petit [que 10] (1). Soient H, Θ, K les nombres fondamentaux des nombres A, B, Γ ; prenons le nombre solide issu des nombres H, Θ, K, Δ, E, Z, et que ce soit le nombre Ξ ; je dis que le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ ,E est égal à mille fois le nombre Ξ.

La chose est manifeste au moyen de nombres : le nombre A étant par exemple 20 unités, le nombre B, 30 unités, le nombre Γ, 40 unités, [le nombre Δ, 2 unités] (2), le nombre E, 3 unités, le nombre Z, 4 unités ; tandis que le nombre H est 2 unités, le nombre Θ, 3 unités et le nombre K, 4 unités. En effet, le nombre solide formé par les nombres A, B, Γ, Δ, E, Z est 57 myriades simples plus 6000 unités (3), et celui qui est formé par les nombres fondamentaux H, Θ, K et par les nombres Δ, E, Z sera 576 unités, lesquelles, prises mille fois, ce qui sera le nombre solide [issu de tous les nombres] (4), deviennent 57 myriades simples plus 6000 unités.

---

1. Lacune comblée par le mot δεκάδος (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 10, l. 17).
2. Lacune comblée par les mots καὶ τοῦ Δ μονάδων β′ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 10, l. 24).
3. μυριάδων νζ′ ἁπλῶν καὶ μονάδων ϛ, c'est-à-dire $57 \times 10.000 + 6000 = 576000$.
4. Lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 10, l. 27).

XXI.

PROPOSITION 21. — Mais, soient des nombres A, B, Γ, Δ, E en quantité supérieure à trois ; que chacun d'eux soit plus petit que 100 et divisible par 10, et que chacun des nombres Z, H, Θ soit plus petit que 10 (1).

Que la quantité des nombres A, B, Γ, Δ, E... soit d'abord divisible par 4 suivant le nombre O (2), et que les nombres K, Λ, M, N, Ξ... soient les nombres fondamentaux des nombres A, B, Γ, Δ, E..., je dis que le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ... Z, H, Θ est égal à autant de myriades dénommées par le nombre O qu'il y a d'unités dans le nombre solide issu des nombres K, Λ, M, N... multiplié par celui qui est issu des nombres Z, H, Θ.

La chose est manifeste au moyen de nombres en supposant par exemple que le nombre A soit 10 unités, le nombre B 20 unités, le nombre Γ 30 unités et le nombre Δ 40 unités, les unités des nombres fondamentaux K, Λ, M, N étant 1, 2, 3 et 4. Dès lors, le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ est 24 myriades simples ; celui qui est issu des nombres A, B, Γ, Δ, Z, H, Θ est 144 myriades simples (3), et celui qui est issu des nombres fondamentaux K, Λ, M, N est 24 unités ; nombre qui, multiplié par celui qui est issu des nombres Z, H, Θ, c'est-à-dire 6 unités, forme 144 unités qui sont la quantité de myriades simples du nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ, Z, H, Θ, parce que [la quantité] (4) des nombres A, B, Γ, Δ est divisée une seule fois par 4 (5).

Mais que la quantité des nombres A, B, Γ, Δ, E... ne soit

---

1. Hultsch a supposé que cette proposition a été interpolée, à cause des nombreuses négligences qu'elle présente (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 11, en note).

2. C'est-à-dire que le nombre de termes de la série A, B, Γ, Δ, E... soit d'abord divisible par 4, et que le quotient soit O.

3. Pour obtenir le produit continu des nombres A, B, Γ, Δ, Z, H, Θ, le texte néglige de dire ici que l'on suppose Z = 1, H = 2 et Θ = 3.

4. Lacune comblée par τὸ πλῆθος (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 12, l. 18).

5. C'est-à-dire parce que la quantité 4 des nombres A, B, Γ, Δ, divisée par 4 donne le quotient 1, puissance de la myriade dans le produit continu des nombres A, B, Γ, Δ, Z, H, Θ, dont les quatre premiers sont plus petits que 100. Le produit est donc : 144 × 10.000 = 1.440.000.

pas divisible par 4. La division laissera donc 1 ou 2 ou 3. Dès lors, si elle laisse 1, le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ, E... Z, H, Θ sera d'autant de myriades dénommées par le nombre O [1] que l'indique le décuple du nombre solide issu des nombres K, Λ, M, N, Ξ multiplié par celui qui est issu des nombres Z, H, Θ. Si la division laisse 2, ce sera [le nombre solide que l'on vient de dire pris] [2] cent fois. Enfin, si la division laisse 3, il y aura autant [de myriades] [3] dénommées par le nombre O que le nombre solide issu des nombres K, Λ, M, N, Ξ multiplié par celui qui est issu des nombres Z, H, Θ, pris mille fois, aura d'unités. La démonstration par lignes est manifeste d'après les *Éléments* [4].

XXII.

PROPOSITION 22. — Que le nombre A soit plus petit que 1000 et divisible par 100 ; tandis que les nombres B, Γ, Δ sont respectivement plus petits que 10, et qu'il faille exprimer le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ.

En effet, posons que E est le nombre fondamental du nombre A, et que le nombre solide issu des nombres E, B, Γ, Δ est le nombre Z; [je dis que] [5] le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ est le centuple du nombre Z.

Cela est aussi manifeste au moyen de nombres, en supposant par exemple que le nombre A est 300 unités, le nombre B 3 unités, le nombre Γ 4 unités, et le nombre Δ 5 unités. En effet, le produit des nombres A, B, Γ, Δ est 18 myriades et le produit des nombres E, B, Γ, Δ est 180 unités ; nombre qui, pris cent fois, sera 18 myriades. La démonstration par lignes est [manifeste] [6] d'après les *Éléments*.

---

1. C'est-à-dire autant de myriades à la puissance indiquée par le nombre O, quotient de la division par 4 du nombre de termes de la série considérée des nombres à multiplier entre eux.

2. La phrase placée entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 12, l. 25).

3. Lacune comblée par le mot μυριάδων (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 14, l. 2).

4. C'est-à-dire que la démonstration linéaire de cette proposition est évidente d'après le livre des *Éléments* sur la matière composé par Apollonius.

5. Lacune comblée par le mot ὅτι (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 14, l. 8).

6. Lacune comblée par le mot δῆλον (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 14, l. 15).

XXIII [1].

Proposition 23. — Sur le théorème XXIV [2]. Si nous supposons par exemple que le nombre A est 200 unités, le nombre B 300 unités, le nombre Γ 2 unités, le nombre Δ 3 unités et le nombre E 4 unités, le nombre solide issu de ces nombres sera 144 myriades simples, puisque le double de la quantité des nombres A, B est divisé une seule fois par 4 [suivant le nombre K] [3], et que le produit des nombres fondamentaux Z, H [4] et des nombres Γ, Δ, E est 144 unités [5].

D'autre part, si le double de la quantité des nombres A, B... n'est pas divisible par 4, il est évident que s'il est divisé suivant le nombre K [6], il reste 2 ; car cela a été démontré plus haut [7]. En conséquence [8], on aura 100 myriades indiquées par le nombre K, et le nombre Θ, nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ, E, est [égal] [9] au [nombre solide issu des nombres Z, H, Γ, Δ, E] [10] multiplié par 100 myriades indiquées par le nombre K [11]. La démonstration se fait comme chez Apollonius.

---

1. L'attribution de cette proposition à Pappus est douteuse, du moins dans sa forme négligée.
2. C'est-à-dire : Proposition se rapportant au théorème XXIV de l'ouvrage d'Apollonius.
3. Hultsch a considéré les mots placés entre crochets comme une interpolation. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 14, l. 21). Ce nombre K est le quotient de la division par 4 du double de la quantité 2 des nombres A, B, c'est-à-dire que K = 1.
4. C'est-à-dire les nombres fondamentaux de A et B qui sont donc Z = 2 et H = 3.
5. Le texte présente ici une phrase interpolée par un commentateur : ὁ Θ στερεός. ἁπλῶν οὖν μυριάδων ρμδ̄ ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, B, Γ, Δ, E, στερέος. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 14, ll. 22-23). Si l'on rattache cette phrase aux derniers mots du texte « est 144 unités » cette interpolation signifie : (lesquelles unités sont) le nombre solide Θ. Donc, le (nombre) solide issu des (nombres) A, B, Γ, Δ, E est 144 myriades simples.
6. C'est-à-dire suivant le quotient de la division par 4, quotient désigné probablement par la lettre K dans la démonstration linéaire du théorème d'Apollonius.
7. Voir proposition 15.
8. Le texte présente ici l'interpolation superflue : ἐκ τοῦ λείπεσθαι δύο. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 14, l. 27).
9. ἴσος, restauration due à Hultsch. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 14, l. 28).
10. ἐκ τῶν ΖΗΓΔΕ στερεῷ, restauration due à Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 16, l. 1).
11. C'est-à-dire : $100 \times \overline{10.000}^{k}$.

XXIV.

Proposition 24. — Sur le théorème XXV [1]. Que chacun des nombres A, B, soit plus petit que 100 et divisible par 10; que chacun des nombres Γ, Δ, E soit plus petit que 10, et qu'il faille exprimer le nombre solide issu de ces nombres.

En effet, que les nombres Θ, K soient les nombres fondamentaux des nombres A, B, et que le nombre Λ soit égal au nombre solide issu des nombres Θ, K, Γ, Δ, E; je dis que le nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ, E est égal à cent nombres Λ.

Or, la chose est manifeste au moyen de nombres si le nombre A est 20 unités, le nombre B 20 unités, le nombre Γ 5 unités, le nombre Δ 6 unités, le nombre E 7 unités, et si les nombres fondamentaux Θ, K sont 2 unités. En effet, le nombre solide des nombres Θ, K, Γ, Δ, E devient 840 unités; nombre qui, pris cent fois, sera 8 myriades 4000 unités, ce qui est égal au nombre solide issu des nombres A, B, Γ, Δ, E.

XXV.

Proposition 25. — Le théorème le plus important XXVI [2] comporte la proposition et la démonstration suivantes : Soient deux nombres ou plus, A, B..., respectivement plus petits que 1000 et divisibles par 100, et d'autres nombres, tant qu'on voudra Γ, Δ, E..., respectivement plus petits que 100 et divisibles par 10, et, enfin, d'autres nombres, tant qu'on voudra, Z, H, Θ..., respectivement plus petits que 10, et qu'il faille exprimer le nombre solide issu des nombres A, B... Γ, Δ, E... Z, H, Θ.

En effet, soient Λ, M... N, Ξ, Θ les nombres fondamentaux des nombres A, B... Γ, Δ, E. Dès lors, le double [de la quantité] [3] des nombres A, B..., conjointement avec le nombre simple des nombres Γ, Δ, E... est ou n'est pas divisible par 4.

Qu'il soit d'abord divisible par 4 suivant le nombre K [4], et

1. Proposition relative au théorème XXV de l'ouvrage d'Apollonius.
2. C'est-à-dire le théorème XXVI de l'ouvrage d'Apollonius.
3. Lacune comblée par τοῦ πλήθους (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 16, l. 26).
4. C'est-à-dire le quotient K.

substituons les centaines Π, Ρ... aux nombres Α, Β... et les dizaines Σ, Τ, Υ... aux nombres Γ, Δ, Ε... (1). Dès lors, il est clair que le nombre issu des nombres Π, Ρ... Σ, Τ, Υ..., multiplié par celui qui est issu des nombres Λ, Μ... Ν, Ξ, Ο..., [est égal] (2) au [nombre solide issu des nombres Α, Β... Γ, Δ, Ε...] (3). Prenons donc le nombre solide issu des nombres ΛΜ... ΝΞΟ... ΖΗΘ..., et que ce soit le nombre Φ ; je dis que le nombre solide issu des nombres Α, Β... ΓΔΕ... ΖΗΘ... comporte autant de myriades indiquées par le nombre Κ (4) qu'il y a d'unités dans le nombre Φ. Apollonius a d'ailleurs démontré cela d'une manière linéaire.

Mais, si le double de la quantité des nombres Α, Β..., conjointement avec la quantité des nombres Γ, Δ, Ε..., n'est pas divisible par 4, il s'ensuit que, divisé suivant le nombre Κ, il restera 1, 2 ou 3 (5). Dès lors, s'il reste 1, le nombre solide issu des nombres ΠΡ... ΣΤΥ... comportera 10 myriades indiquées par le nombre Κ ; s'il reste 2, il comportera 100 myriades indiquées par le nombre Κ, et s'il reste 3, il comportera 1000 myriades indiquées par le nombre Κ. Et il est évident, d'après les démonstrations par les lignes (6), que le nombre solide issu des nombres Α, Β... ΓΔΕ... ΖΗΘ... comporte autant de myriades dénommées par le nombre Κ que l'indique le décuple du nombre Φ (7), ou autant de myriades dénommées par le nombre Κ que l'indique le centuple du nombre Φ (8), ou autant de myriades dénommées

1. Le texte présente ici l'interpolation (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 18, l. 3): καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα τοῦ πλήθους τῶν ΠΡ μετὰ τοῦ πλήθους τῶν ΣΤΥ μετρεῖται ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Κ. C'est-à-dire : Donc, le double de la quantité des (nombres) ΠΡ, augmenté de la quantité des (nombres) ΣΤΥ, est divisible par 4 suivant le (nombre) Κ.

2. Lacune comblée par Hultsch au moyen des mots ἴσος ἐστί. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 18, l. 6).

3. Lacune comblée au moyen des mots ἐκ τῶν ΑΒΓΔΕ στερεῷ par Joh. Wallis dans la première édition qu'il donna du fragment du livre II dans son ouvrage édité à Oxford, en 1688, sous le titre que nous avons mentionné dans notre introduction. Restauration adoptée dans l'édition critique de Hultsch, vol. I, p. 18, ll. 6-7.

4. C'est-à-dire à la puissance Κ.

5. C'est-à-dire que la division par 4 aura Κ comme quotient et 1, 2 ou 3 comme reste.

6. Les démonstrations linéaires d'Apollonius.

7. C'est-à-dire que dans le cas où le reste de la division est 1 on aura : $\overline{10.000}^{K} \times 10\ \Phi$.

8. Dans le cas où le reste de la division est 2 on aura : $\overline{10.000}^{K} \times 100\ \Phi$.

par le nombre K que l'indique mille fois le nombre Φ [1].

PROPOSITION 26. — Ce dernier théorème étant considéré au préalable, on voit clairement comment on peut multiplier un vers donné et exprimer le nombre obtenu en multipliant le premier nombre affecté à la première lettre par le second nombre affecté à la seconde lettre ; en multipliant le nombre obtenu par le troisième nombre affecté à la troisième lettre, et en continuant ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait parcouru le vers qu'Apollonius énonce originairement ainsi [2] :

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι [3]. (Il a dit d'ailleurs κλεῖτε au lieu de ὑπομνήσατε) [4]. Dès lors, puisque le vers possède trente-huit lettres qui renferment les dix nombres : 100, 300, 200, 300, 100, 300, 200, 600, 400 et 100 [5], respectivement inférieurs à un millier et divisibles par une centaine, ainsi que les dix-sept nombres : 40, 10, 70, 20, 30, 10, 20, 70, 60, 70, 70, 50, 50, 50, 20, 70 et 10 [6], respectivement inférieurs à une centaine et divisibles par une dizaine, et les nombres restants [groupe des unités] [7] : 1, 5, 4, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 1 et 1 [8], respectivement inférieurs à une dizaine, il s'ensuit que, si [9] l'on sub-

1. Dans le cas où le reste de la division est 3 on aura : $\overline{10.000}^{k} \times 1000\ \Phi$.

2. Le texte présente ici les mots κατὰ τὸν στίχον (d'après le vers). Hultsch les met entre crochets (*loc. cit.*, vol. I, p. 18, l. 31) pour marquer, sinon leur interpolation, du moins leur altération, et propose de les remplacer par κατὰ τὸ στοιχεῖον (dans les *Éléments*).

3. C'est-à-dire : Célébrez, ô vous les neuf Muses, la puissance suprême d'Arthémis.

4. C'est-à-dire qu'Apollonius aurait substitué le verbe « célébrer » au verbe originaire du vers « remettre en mémoire », probablement dans le but de pouvoir faire mieux correspondre le vers à son problème.

5. Ces dix lettres considérées dans leur représentation numérique sont : $\rho' = 100$, $\tau' = 300$, $\sigma' = 200$, $\tau' = 300$, $\rho' = 100$, $\tau' = 300$, $\sigma' = 200$, $\chi' = 600$, $\nu' = 400$ et $\rho' = 100$.

6. Les dix-sept lettres du vers numériquement représentées par des nombres inférieurs à 100 sont : $\mu' = 40$, $\iota' = 10$, $o' = 70$, $\varkappa' = 20$, $\lambda' = 30$, $\iota' = 10$, $\varkappa' = 20$, $o' = 70$, $\xi' = 60$, $o' = 70$, $o' = 70$, $\nu' = 50$, $\nu' = 50$, $\nu' = 50$, $\varkappa' = 20$, $o' = 70$, $\iota' = 10$.

7. Le texte présente ici la petite interpolation συν ταῖς μονάσιν. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 20, l. 8).

8. Le vers contient encore onze lettres numériquement représentées par des nombres inférieurs à 10 : $\alpha' = 1$, $\varepsilon' = 5$, $\delta' = 4$, $\varepsilon' = 5$, $\varepsilon' = 5$, $\alpha' = 1$, $\varepsilon' = 5$, $\varepsilon' = 5$, $\alpha' = 1$, $\alpha' = 1$.

9. L'édition critique de Hultsch abandonne ici la phrase interpolée : τοὺς δέκα ἀριθμοὺς διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς γενομένους κ' προσθῶμεν τοῖς εἰρημένοις ἁπλῶς

stitue aux dix nombres ces mêmes dix nombres rangés dans l'ordre des centaines, et si l'on substitue de la même manière les dix-sept dizaines aux dix-sept nombres (1), il est clair que, d'après le théorème de logistique XII qui précède (2), les dix centaines, conjointement avec les dix-sept dizaines, forment dix myriades ennuplées (3) ; [car, les dix centaines prises deux fois, c'est-à-dire vingt centaines, auxquelles on ajoute les dix-sept dizaines, donnent trente-sept nombres qui sont des analogues (4). Or, ces trente-sept nombres, divisés par 4, donnent 9 comme résultat de la division, et il reste 1 ; en sorte qu'on a dix myriades ennuplées résultant des dix centaines et des 17 dizaines] (5).

D'autre part, puisque les nombres fondamentaux des nombres divisibles par 100 et des nombres divisibles par 10 sont les vingt-sept suivants :

1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 6, 4, 1 ;
4, 1, 7, 2, 3, 1, 2, 7, 6, 7, 7, 5, 5, 5, 2, 7, 1 ;

mais, qu'il y a onze nombres inférieurs à une dizaine, c'est-à-dire les nombres : 1, 5, 4, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 1, 1, si l'on multiplie entre eux le nombre solide issu de ces onze nombres et celui qui est issu de ces vingt-sept nombres, on aura le nombre solide : 19 myriades quadruplées plus 6036 myriades triplées plus 8480 myriades doublées (6).

[Cependant, on obtiendra aussi un nombre égal à ce dernier au moyen des nombres fondamentaux (7) du vers : *'Αρτέμιδος*

ἀριθμοῖς ἑπτακαίδεκα, τὰ γενόμενα ὁμοῦ λζ´ ἕξομεν τῶν ὑπ' αὐτοῦ γενομένων ἀναλόγων, κἂν.. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 20, ll. 10-13).

1. C'est-à-dire si nous rangeons de même les dix-sept nombres dont il a été question plus haut dans l'ordre des dizaines.

2. Ce théorème XII de logistique, c'est-à-dire relatif au calcul de nombres concrets, appartient à la partie perdue du livre II.

3. C'est-à-dire $10 \times \overline{10.000}^9$.

4. ἀναλόγων ὄντα. Ces nombres ayant été rangés dans l'ordre des centaines et des dizaines, Pappus les appelle analogues, c'est-à-dire en proportion, dans le sens adopté par Archimède dans son *Arénaire*. Voir : *Œuvres complètes d'Archimède, traduites du grec en français, avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke*, Bruxelles, 1921, gr. in-8°, p. 366.

5. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme interpolée par un commentateur. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 20, ll. 18-22).

6. C'est-à-dire : $19 \times \overline{10.000}^4 + 6036 \times \overline{10.000}^3 + 8480 \times \overline{10.000}^2$.

7. Hultsch ajoute ici les mots nécessaires : ἅμα ταῖς μονάσιν (conjointement avec les unités). Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 22, l. 8.

κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι, qui sont : 1, 1, 3, 5, 4, 1, 4, 7, 2, 2, 3, 5, 1, 3, 5, 2, 1, 1, 3, 7, 2, 5, 6, 7, 6, 7, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 2, 7, 4, 1, 1, 1 (1)...

En effet, 1 multiplié par 1 devient 1, qui, multiplié par 3 devient 3 ; ce qui, multiplié par 5, devient 15 ; ce qui, multiplié par 4, devient 60 ; ce qui, multiplié par 1, devient 60 ; ce qui, multiplié par 4, devient 240 ; ce qui, multiplié par 7, devient 1680 ; ce qui, multiplié par 2, devient 3360 ; ce qui, multiplié par 2, devient 6720 ; ce qui, multiplié par 3, devient 2 myriades plus 160 unités (2) ; ce qui, multiplié par 5, devient 10 myriades plus 800 unités (3) ; ce qui, multiplié par 1, devient 10 myriades plus 800 unités ; ce qui, multiplié par 3, devient 30 myriades plus 2400 unités (4) ; ce qui, multiplié par 5, devient 151 myriades plus 2000 unités (5) ; ce qui, multiplié par 2, devient 302 myriades plus 4000 unités (6) ; ce qui, multiplié par 1, devient 302 myriades plus 4000 unités ; ce qui, multiplié encore par 1, devient 302 myriades plus 4000 unités ; ce qui, multiplié par 3, devient 907 myriades plus 2000 unités (7) ; ce qui, multiplié par 7, devient 6350 myriades plus 4000 unités (8) ; ce qui, multiplié par 2, devient 1 myriade doublée plus 2700 myriades plus 8000 unités (9) ; ce qui, multiplié par 5, devient 6 myriades doublées plus 3504 myriades (10) ; ce qui, multiplié par 6, devient 38 myriades doublées plus 1024 myriades (11) ; ce qui, multiplié par 7, devient 266 myriades doublées plus 7168 myriades (12) ; ce qui, multiplié par 6, devient 1600 myriades doublées plus 3008 myriades (13) ;

1. Cette suite de nombres comprend donc, outre les unités, les nombres fondamentaux des centaines et des dizaines qui répondent aux lettres dont se compose le vers grec.

2. $2 \times 10.000 + 160 = 20160$.

3. $10 \times 10.000 + 800 = 100.800$.

4. $30 \times 10.000 + 2400 = 302.400$.

5. $151 \times 10.000 + 2000 = 1.151.200$.

6. $302 \times 10.000 + 4000 = 3.024.000$.

7. $907 \times 10.000 + 2000 = 9.072.000$.

8. $6350 \times 10.000 + 4000 = 63.504.000$.

9. γίνεται μ^{β} α΄ καὶ μ^{α} ͵βψ΄ καὶ μ^{o} ͵η c'est-à-dire: devient $\overline{10.000}^2 + 2700 \times 10.000 + 8000 = 127.008.000$.

10. $6 \times \overline{10.000}^2 + 3504 \times 10.000 = 635.040.000$.

11. $38 \times \overline{10.000}^2 + 1024 \times 10.000 = 3.810.240.000$.

12. $266 \times \overline{10.000}^2 + 7168 \times 10.000 = 26.671.680.000$.

13. $1600 \times \overline{10.000}^2 + 3008 \times 10.000 = 160.030.080.000$.

ce qui, multiplié par 7, devient 1 myriade triplée plus 1202 myriades doublées plus 1056 myriades (1) ; ce qui, multiplié par 5, devient 5 myriades triplées plus 6010 myriades doublées plus 5280 myriades (2) ; ce qui, multiplié par 5, devient 28 myriades triplées plus 52 myriades doublées plus 6400 myriades (3) ; ce qui, multiplié par 5, devient 140 myriades triplées plus 263 myriades doublées plus 2000 myriades (4) ; ce qui, multiplié par 5, devient 700 myriades triplées plus 1316 myriades doublées (5) ; ce qui, multiplié par 5, devient 3500 myriades triplées plus 6580 myriades doublées (6) ; ce qui, multiplié par 1, devient 3500 myriades triplées plus 6580 myriades doublées ; ce qui, multiplié par 2, devient 7001 myriades triplées plus 3160 myriades doublées (7) ; ce qui, multiplié par 7, devient 4 myriades quadruplées plus 9009 myriades triplées plus 2120 myriades doublées (8) ; ce qui, multiplié par 4, devient 19 myriades quadruplées plus 6036 myriades triplées plus 8480 myriades doublées (9)] (10).

Dès lors, ce nombre étant multiplié par le nombre solide issu des centaines et des dizaines, c'est-à-dire les 10 myriades [ennuplées] (11), établies plus haut, il forme 196 myriades trédécuplées plus 368 myriades dodécuplées plus 4800 myriades undécuplées (12). [En effet, la myriade ennuplée multipliée par la myriade quadruplée forme la myriade trédécuplée, et, multipliée par la myriade

1. γίνεται μ$^{\gamma}$ α΄ καὶ μ$^{\beta}$ ͵ασβ΄ καὶ μ$^{\alpha}$ ͵ανϛ΄, c'est-à-dire : devient $\overline{10.000}^3 + 1202 \times \overline{10.000}^2 + 1056 \times 10.000 = 1.120.210.560.000$.

2. $5 \times \overline{10.000}^3 + 6010 \times \overline{10.000}^2 + 5280 \times 10.000 = 5.601.052.800.000$.

3. $28 \times \overline{10.000}^3 + 52 \times \overline{10.000}^2 + 6400 \times 10.000 = 28.005.264.000.000$.

4. $140 \times \overline{10.000}^3 + 263 \times \overline{10.000}^2 + 2000 \times 10.000 = 140.026.320.000.000$.

5. $700 \times \overline{10.000}^3 + 1316 \times \overline{10.000}^2 = 700.131.600.000.000$.

8. $3500 \times \overline{10.000}^3 + 6580 \times \overline{10.000}^2 = 3.500.658.000.000.000$.

7. $7001 \times \overline{10.000}^3 + 3160 \times \overline{10.000}^2 = 7.001.316.000.000.000$.

8. γίνεται μ$^{\delta}$ δ΄ καὶ μ$^{\gamma}$ ͵θθ΄ καὶ μ$^{\beta}$ ͵βρκ΄, c'est-à-dire : devient $4 \times \overline{10.000}^4 + 9009 \times \overline{10.000}^3 + 2120 \times \overline{10.000}^2 = 49.009.212.000.000.000$.

9. $19 \times \overline{10.000}^4 + 6036 \times \overline{10.000}^3 + 8480 \times \overline{10.000}^2 = 196.036.848.000.000.000$, nombre identique à celui qui a été trouvé par la méthode abrégée précédente.

10. Le long passage que nous avons placé entre crochets est une interpolation due à un scoliaste grec ayant voulu vérifier tout au long le calcul abrégé de Pappus. (Cfr. Hultsch, *loc.*, *cit.*, pp. 22-24).

11. Lacune que Hultsch a comblée par le mot ἐνναπλᾶς. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 24, l. 19).

12. Ποιοῦσιν μυριάδας τρισκαιδεκαπλᾶς ρϞϛ΄, δωδεκαπλᾶς τξη΄, ἑνδεκαπλᾶς ͵δω΄, c'est-à-dire : $196 \times \overline{10.000}^{13} + 368 \times \overline{10.000}^{12} + 4800 \times \overline{10.000}^{11}$, nombre obtenu en multipliant celui de la note antépénultième par $10 \times \overline{10.000}^9$.

triplée, elle forme la myriade dodécuplée, et, de même, multipliée par la myriade doublée, on obtient la myriade undécuplée] (1). Toutes ces choses ont d'ailleurs été démontrées plus haut.

En conséquence, on peut dire que le vers du début : Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι donne, par multiplications répétées, la quantité de 196 myriades trédécuplées plus 368 myriades dodécuplées plus 4800 myriades undécuplées ; ce qui concorde avec les choses qu'Apollonius expose d'abord suivant sa méthode au commencement de son livre.

Soit donné de nouveau le vers suivant : Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου ; prenons les nombres analogues (2) et les nombres fondamentaux (3), conjointement avec les unités, de la manière dont ils sont disposés ci-après : 4, 8, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 4, 5, 9, 5, 1, 4, 8, 4, 8, 3, 5, 1, 7, 2, 1, 3, 3, 1, 7, 2, 1, 1, 8, 7, 4, (4) et multiplions ces nombres entre eux. Ils donnent 2 myriades quadruplées plus 1849 myriades triplées plus 4402 myriades doublées plus 5600 myriades simples (5).

En effet, 4 unités multipliées par 8 deviennent 32 ; ce qui, multiplié par 5, devient 160 ; ce qui, multiplié par 1, devient 160 ; ce qui, multiplié par 5, devient 800 ; ce qui, multiplié par 1, devient 800 ; ce qui, multiplié par 5, devient 4000 ; ce qui, multiplié par 1, devient 4000 ; ce qui, multiplié par 4, devient 1 myriade plus 6000 unités ; ce qui, multiplié par 5, devient 8 myriades ; ce qui, multiplié par 9, devient 72 myriades ; ce qui, multiplié

1. Le passage placé entre crochets est un petit commentaire interpolé (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 24, ll. 20-23). Ce commentaire explique inutilement que l'on a : $\overline{10.000}^9 \times \overline{10.000}^4 = \overline{10.000}^{13}$; $\overline{10.000}^9 \times \overline{10.000}^3 = \overline{10.000}^{12}$, et $\overline{10.000}^9 \times \overline{10.000}^2 = \overline{10.000}^{11}$.

2. C'est-à-dire, prenons, comme précédemment pour le vers d'Apollonius, les lettres qui représentent les nombres analogues, ou en proportion, plus petits que 1000 et divisibles par 100, et ceux qui sont plus petits que 100 et divisibles par 10.

3. C'est-à-dire prenons le premier chiffre des centaines et des dizaines.

4. Cette suite de nombres comprend les nombres fondamentaux des centaines, puis les nombres fondamentaux des dizaines, puis les unités. Ils correspondent aux lettres suivantes accentuées dans la numération alphabétique grecque : $\delta' = 4$; $\eta' = 8$; $\varepsilon' = 5$; $\alpha' = 1$; $\varepsilon' = 5$; $\alpha' = 1$; $\varepsilon' = 5$; $\alpha' = 1$; $\delta' = 4$; $\varepsilon' = 5$; $\theta' = 9$; $\varepsilon' = 5$; $\alpha' = 1$; $\delta' = 4$; $\eta' = 8'$; $\delta' = 4$; $\eta' = 8$; $\gamma' = 3$; $\varepsilon' = 5$; $\alpha' = 1$; $\zeta' = 7$; $\beta' = 2$; $\alpha' = 1$; $\gamma' = 3$; $\gamma' = 3$; $\alpha' = 1$; $\zeta' = 7$; $\beta' = 2$; $\alpha' = 1$; $\alpha' = 1$; $\eta' = 8$; $\zeta' = 7$; $\delta' = 4$.

5. Le produit des lettres représentatives des nombres sera donc : $2 \times \overline{10.000}^4 + 1849 \times \overline{10.000}^3 + 4402 \times \overline{10.000}^2 + 5600 \times 10.000$.

par 5, devient 360 myriades ; ce qui, multiplié par 1, devient 360 myriades ; ce qui, multiplié par 4, devient 1440 myriades ; ce qui, multiplié par 8, devient 1 myriade doublée plus 1520 myriades ([1]) ; ce qui, multiplié par 4, devient 4 myriades doublées plus 6080 myriades ([2]) ; ce qui, multiplié par 8, devient 36 myriades doublées plus 8640 myriades ([3]) ; ce qui, multiplié par 3, devient 110 myriades doublées plus 5920 myriades ([4]) ; ce qui, multiplié par 5, devient 552 myriades doublées plus 9600 myriades ([5]) ; ce qui, multiplié par 1, devient 552 myriades doublées plus 9600 myriades ; ce qui, multiplié par 7, devient 3870 myriades doublées plus 7200 myriades ([6]) ; ce qui, multiplié par 2, devient 7741 myriades doublées plus 4400 myriades ([7]) ; ce qui, multiplié par 1, devient 7741 myriades doublées plus 4400 myriades ; ce qui, multiplié par 3, devient 2 myriades triplées plus 3224 myriades doublées plus 3200 myriades ([8]) ; ce qui, multiplié par 3, devient 6 myriades triplées plus 9672 myriades doublées plus 9600 myriades ([9]) ; ce qui, multiplié par 1, devient 6 myriades triplées plus 9672 myriades doublées plus 9600 myriades ; ce qui, multiplié par 7, devient 48 myriades triplées plus 7710 myriades doublées plus 7200 myriades ([10]) ; ce qui, multiplié par 2, devient 97 myriades triplées plus 5421 myriades doublées plus 4400 myriades ([11]) ; ce qui, multiplié par 1 et encore par 1, devient 97 myriades triplées plus 5421 myriades doublées plus 4400 myriades ; ce qui, multiplié par 8, devient 780 myriades triplées plus 3371 myriades doublées plus 5200 myriades ([12]) ; ce qui, multiplié par 7, devient 5462 myriades triplées plus 3600 myriades doublées plus 6400 myriades ([13]) ; ce qui, multiplié par 4, devient

1. $\overline{10.000}^2 + 1520 \times 10.000 = 115.200.000$.
2. $4 \times \overline{10.000}^2 + 6080 \times 10.000 = 460.800.000$.
3. $36 \times \overline{10.000}^2 + 8640 \times 10.000 = 3.686.400.000$.
4. $110 \times \overline{10.000}^2 + 5920 \times 10.000 = 11.059.200.000$.
5. $552 \times \overline{10.000}^2 + 9600 \times 10.000 = 55.296.000.000$.
6. $3870 \times \overline{10.000}^2 + 7200 \times 10.000 = 387.072.000.000$.
7. $7741 \times \overline{10.000}^2 + 4400 \times 10.000 = 774.144.000.000$.
8. $2 \times \overline{10.000}^3 + 3224 \times \overline{10.000}^2 + 3200 + 10.000 = 2.322.432.000.000$.
9. $6 \times \overline{10.000}^3 + 9672 \times \overline{10.000}^2 + 9600 \times 10.000 = 6.967.296.000.000$.
10. $48 \times \overline{10.000}^3 + 7710 \times \overline{10.000}^2 + 7200 \times 10.000 = 48.771.072.000.000$.
11. $97 \times \overline{10.000}^3 + 5421 \times \overline{10.000}^2 + 4400 \times 10.000 = 97.542.144.000.000$.
12. $780 \times \overline{10.000}^3 + 3371 \times \overline{10.000}^2 + 5200 \times 10.000 = 780.337.152.000.000$.
13. $5462 \times \overline{10.000}^3 + 3600 \times \overline{10.000}^2 + 6400 \times 10.000 = 5.462.360.064.000.000$.

2 myriades quadruplées plus 1849 myriades triplées plus 4402 myriades doublées plus 5600 myriades simples (1).

Divisons donc les vingt-deux nombres analogues (2) par 4 [il reste 2 unités] (3), et faisons croître (4) autant de fois qu'il y a d'unités obtenues (5) le nombre mis en évidence (6) par les unités et les nombres fondamentaux qui ont été multipliés (nous voulons dire faire croître autant de fois relativement à la myriade), de sorte que la première obtention de 2 [myriades] (7) quadruplées plus 1849 myriades triplées plus 4402 myriades doublées plus 5600 myriades simples devient maintenant 2 myriades ennuplées plus 1849 myriades octuplées plus 4402 myriades septuplées plus 5600 myriades sextuplées (8).

Or, comme il est resté 2 de la division des nombres analogues (9), la quantité dont nous multiplierons le nombre que nous venons d'exprimer sera une centaine (10) ; de sorte que le nombre sera 218 myriades ennuplées plus 4944 myriades octuplées plus 256 myriades septuplées (11).

Il est donc permis de dire que le vers du début : *Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου* donne par multiplications répétées (12) la quantité de 218 myriades ennuplées plus 4944 myriades octuplées plus 256 myriades septuplées.

---

1. $2 \times \overline{10.000}^4 + 1849 \times \overline{10.000}^3 + 4402 \times \overline{10.000}^2 + 5600 \times 10.000 = 21.849.440.256.000.000$.
2. C'est-à-dire les vingt-deux premiers nombres de la suite considérée, lesquels représentent les nombres fondamentaux des centaines et des dizaines.
3. Mots probablement interpolés. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 28, l. 14).
4. αὐξήσομεν a ici la signification de faire croître en puissance indiquée par le quotient de la division, et non pas de multiplier par ce quotient.
5. Le texte présente ici la petite interpolation explicative: μέτρω εἰς ε'. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, p. 28, l. 14). C'est-à-dire que le quotient de la division est 5.
6. τὸν ἐκβάντα... ἀριθμόν, le nombre exposé, mis en évidence, c'est-à-dire la myriade qui est le coefficient des produits des nombres de base et des unités.
7. Lacune comblée dans l'édition de Hultsch par le mot μυριάδων. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 28, l. 18).
8. On a donc : $[2 \times \overline{10.000}^4 + 1849 \times \overline{10.000}^3 + 4402 \times \overline{10.000}^2 + 5600 \times 10.000] \times \overline{10.000}^5 = 2 \times \overline{10.000}^9 + 1849 \times \overline{10.000}^8 + 4402 \times \overline{10.000}^7 + 5600 \times \overline{10.000}^6$.
9. C'est-à-dire que le reste de la division par 4 des vingt-deux premiers nombres analogues des centaines et des dizaines est 2.
10. Voir la proposition 21, alinéa 4.
11. On a donc : $[2 \times \overline{10.000}^9 + 1849 \times \overline{10.000}^8 + 4402 \times \overline{10.000}^7 + 560 \times \overline{10.000}^6] \times 100 = 218 \times \overline{10.000}^9 + 4944 \times \overline{10.000}^8 + 256 \times \overline{10.000}^7$.
12. πολλαπλασιασθέντα, c'est-à-dire par produit continu des caractères représentatifs de nombres du vers proposé.

LIVRE III DE LA COLLECTION DE PAPPUS D'ALEXANDRIE

contenant des problèmes de géométrie plane et solide.

Ceux qui, excellent Pandrosius, veulent discerner plus habilement ce que l'on cherche en géométrie, jugent qu'il convient d'appeler problème ce dans quoi l'on propose de réaliser ou de construire quelque chose, et théorème ce dans quoi, une fois certaines suppositions faites, on en perçoit la conséquence et, d'une manière générale, ce qui les affecte, nonobstant que, parmi les Anciens, les uns disent que tout est problème et les autres que tout est théorème. Dès lors, celui qui propose un théorème après en avoir perçu de certaine manière une conséquence, jugera à propos de la chercher, et ne proposera pas raisonnablement le théorème autrement que pour elle. D'autre part, celui qui propose un problème, même lorsque [ignorant ou entièrement profane] (1), il impose quelque chose qui est impossible à construire, est excusable et n'encourt pas de responsabilité, parce qu'il incombe aussi à celui qui cherche d'établir ce qui est possible et ce qui est impossible, et, pour ce qui est possible, quand, comment et de combien de manières ce le sera ; tandis qu'il n'est pas disculpé de faute celui qui, bien que se réclamant des mathématiques, est pour ainsi dire sans expérience. C'est dans ces conditions que certains de ceux qui paraissent se réclamer de toi pour les mathématiques m'ont entretenu dernièrement comme des ignorants sur des questions qui se rapportent aux problèmes. C'est au sujet de ces questions et de ce qui s'y rattache qu'il faut que je donne certaines démonstrations dans ce troisième livre de la *Collection*,

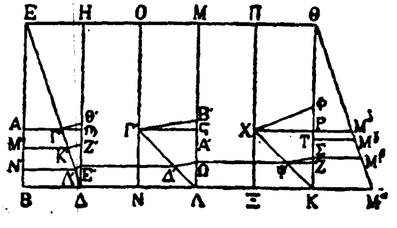
---

1. Les mots mis entre crochets sont considérés par Hultsch comme ayant été interpolés (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 30, l. 1).

afin que toi et ceux qui aiment à s'instruire vous en retiriez profit. Il y en a donc un qui passe pour être un grand géomètre et qui m'a entretenu comme un ignorant au sujet du premier de ces problèmes ; car il a dit, lorsque deux lignes droites sont données, savoir en prendre deux moyennes proportionnelles en proportion continue (1) par la considération du plan (2), et cet homme a demandé que je réponde après examen au sujet de la construction établie par lui et qui se présente de la façon ci-après.

I.

Soient deux droites AB, AΓ à angles droits entre elles ; menons par le point B la droite BΔ parallèle à la droite AΓ ; posons la droite BΔ égale à la droite AB ; menons la droite de jonction ΔΓ rencontrant la droite BA (3) au point E ; menons par le point E la droite EΘ parallèle à la droite AΓ ; prolongeons la droite BΔ ; menons par le point Δ la droite ΔH parallèle à la droite BE et posons les droites ΔN, NΛ, ΛΞ, ΞK égales à la droite BΔ (4). Menons, par les points N, Λ, Ξ, K, les droites NO, ΛM, ΞΠ, KΘ parallèles à la droite BE ; posons la droite KP égale à la droite BA et coupons la droite KP en deux parties égales au point Σ. Que la droite ΣΘ soit à une droite ΘT comme la droite KΘ est à la droite ΘΣ, et que la droite ΘT soit à une droite ΘΦ comme la droite ΣΘ est à la droite ΘT. Découpons sur la droite ΞΠ une droite XΞ égale à la droite AB, et menons la droite de jonction XK et la droite de jonction XΦ. Menons du point Σ la droite ΣΨ parallèle à la droite



1. ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, en analogie ou proportion continue, c'est-à-dire en progression géométrique.

2. δι' ἐπιπέδου θεωρίας, c'est-à-dire au moyen de la considération de lignes qui ont leur origine dans le plan, telles la ligne droite et la circonférence de cercle, ou, en d'autres termes au moyen de la règle et du compas.

3. C'est-à-dire la droite BA prolongée.

4. C'est-à-dire : posons ces droites égales à la droite BΔ sur la droite BΔ prolongée.

XΦ, et, du point Ψ, la droite ΨΩ parallèle à la droite KΞ. Que la droite ΩM soit à une droite MA′ comme la droite ΛM est à la droite MΩ, et que la droite A′M soit à une droite MB′ comme la droite ΩM est à la droite MA′. Découpons sur la droite ON une droite NΓ′ égale à la droite AB, et menons la droite de jonction Γ′Λ et la droite de jonction Γ′B′. Menons du point Ω la droite ΩΔ′ parallèle à la droite B′Γ′, et, du point Δ′, la droite Δ′E′ parallèle à la droite ΛN. Que la droite HE′ soit à une droite HZ′ comme la droite ΔH est à la droite HE′, et que la droite Z′H soit à une droite HΘ′ comme la droite E′H est à la droite HZ′. Menons la droite de jonction Θ′Γ, les droites Z′K′, E′Λ′ parallèles à la droite Θ′Γ, et, des points K′, Λ′, les droites K′M′, Λ′N′ parallèles aux droites AΓ, BΔ. Il faudra démontrer que les droites M′K′, N′Λ′ sont les moyennes proportionnelles des droites AΓ, BΔ (1).

Voilà les choses qu'il m'a communiquées par écrit, sans toutefois les accompagner de la démonstration du problème proposé. Mais, puisque Hierus le Philosophe et beaucoup d'autres de ses amis que je connais ont désiré que je réponde au sujet de la construction proposée en attendant qu'il en fournisse la démonstration promise, je me bornerai pour le moment à dire qu'il a fait usage d'une construction qui n'est pas convenable, et d'une manière inexpérimentée en plus.

En effet, après avoir divisé la droite PK en deux parties égales au point Σ et avoir fait en sorte que la droite ΘΣ soit à une droite ΘT comme la droite KΘ est à la droite ΘΣ, il établit la droite TΘ dans le même rapport avec une droite ΘΦ. Or, ni lui ni moi, nous ne pourrons forcément pas trouver un point de section en troisième proportionnelle tel que le point Φ. Cette circonstance embarrassante, attribuable à sa faute, montre qu'il n'en a pas aperçu la conséquence. En effet, puisqu'il est impossible de déterminer un point de section en troisième proportionnelle, tel que Φ, sans avoir fourni d'abord le rapport de la droite KΘ à la droite ΘP, c'est-à-dire de la droite BE à la droite EA, il essaie, non seulement de trouver une chose impossible, mais il nous le demande aussi.

1. Pappus se propose de faire voir l'illégitimité d'une certaine construction qui lui a été soumise pour déterminer deux moyennes proportionnelles entre deux droites données.

Toutefois, si nous fournissons le rapport de la droite ΚΘ à la droite ΘΡ, c'est-à-dire de la droite ΒΕ à la droite ΕΑ, et si la droite ΚΘ est donnée, une droite plus petite sera donnée comme troisième proportionnelle (1). Or, le point Θ est donné ; donc, l'autre extrémité de cette droite plus petite est donnée aussi (2), et il est évident qu'elle tombera entre les points Θ, Ρ, ou entre les points Ρ, Τ, [car nous démontrerons également que le point Τ tombe entre les points Ρ, Σ, et, tout d'abord, que le point Φ tombe tantôt entre les points Θ, Ρ, tantôt entre les points Ρ, Τ, dans l'hypothèse du rapport donné de la droite ΚΘ à la droite ΘΡ] (3).

En effet, supposons en premier lieu que le rapport donné soit celui du double (4). Dès lors, le rapport de la droite ΚΘ à la droite ΘΡ est celui de 2 à 1, c'est-à-dire de 4 à 2 ; donc, le rapport de la droite ΚΘ à la droite ΘΣ est aussi celui de 4 à 3 (5). De plus, la droite ΘΣ est à la droite ΘΤ comme la droite ΚΘ est à la droite ΘΣ, c'est-à-dire que 3 est à 2 plus $\frac{1}{4}$ comme 4 est à 3 (6).

---

1. Euclide, *Données*, prop. 2 : « Si une grandeur donnée a une raison donnée avec une autre grandeur, celle-ci est donnée de grandeur. » (*Les Œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours, par F. Peyrard.* Paris 1814-1818, 3 vol. in-4°. Voir vol. III, p. 305). Voir aussi la dernière édition critique des œuvres d'Euclide : *Euclidis opera omnia ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge.* Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri, 1883-1889, 8 vol. in-8°, vol. II, *Euclidis Data cum commentariis Marini et scholiis antiquis edidit Henricus Menge*, 1896.

2. Euclide, *Données*, prop. 27 : « Si l'une des extrémités d'une ligne droite donnée de position et de grandeur est donnée, l'autre extrémité sera donnée. » Voir trad. précitée de Peyrard, vol. III, p. 340.

3. Toute la phrase que nous mettons entre crochets paraît avoir été interpolée. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 34, ll. 25 et suiv.).

4. Le texte présente ici l'interpolation : « celui de la droite ΚΘ à la droite ΘΡ, c'est-à-dire celui de la droite ΒΕ à la droite ΕΑ, ou de la droite ΒΔ à la droite ΑΓ. » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 36, ll. 6-7).

5. Soit, en première hypothèse : $\frac{K\Theta}{\Theta P}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$. Or, on a par construction : $P\Sigma=\frac{1}{2}PK$, d'où : $K\Theta = 4\,P\Sigma$, et $\Theta\Sigma = 3\,P\Sigma$; donc, comme le texte : $\frac{K\Theta}{O\Sigma}=\frac{4}{3}$.

6. On a par hypothèse du début : $\frac{\Theta\Sigma}{\Theta T}=\frac{K\Theta}{\Theta\Sigma}$, d'où (note précédente) : $\frac{\Theta\Sigma}{\Theta T}=\frac{4}{3}$, d'où, si $K\Theta = 4$ unités, dont $\Theta\Sigma = 3$ unités, on aura : $\Theta T = \frac{3}{4}\Theta\Sigma = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ unités ; donc, les trois droites se présentent dans la proportion, comme le texte : $\frac{3}{2\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$.

Or la droite de 2 unités plus $\frac{1}{4}$ est à une autre droite plus petite que la droite de deux unités ΘP comme la droite de 3 unités est à celle de 2 unités plus $\frac{1}{4}$; en sorte que la plus petite droite en troisième proportionnelle (1) est plus petite que la droite ΘP, et que le point de section, tel que Φ, tombe entre les points Θ, P (2).

Mais, que le rapport donné soit celui du quadruple. Dès lors, le rapport de la droite KΘ à la droite ΘP est celui de 8 à 2 ; donc, le rapport de la droite ΘK à la droite ΘΣ est celui de 8 à 5 (3). Or, 5 est à $3\frac{1}{8}$ comme 8 est à 5 (4). Or, la droite de 3 unités plus $\frac{1}{8}$ est à une droite plus petite que celle de 2 unités comme la droite de 5 unités est à celle de 3 unités plus $\frac{1}{8}$; en sorte que la section de troisième proportionnelle tombe de nouveau entre les points Θ, P (5).

Derechef, supposons que le rapport de la droite KΘ à la droite ΘP soit celui du quintuple. Dès lors, le rapport de la droite KΘ à la droite ΘP est celui de 10 à 2, et le rapport de la droite KΘ à la droite ΘΣ est donc celui de 10 à 6 (6). Or, 6 est

---

1. C'est-à-dire la droite ΘΦ. Le texte présente ici la petite interpolation : καὶ πασῶν ελαχίστην, et la plus petite de toutes. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I. p. 36, l. 14).

2. D'après la première hypothèse, si KΘ = 4 unités, ΘP = 2 unités ; donc l'hypothèse du début exige que le petit terme extrême en troisième proportionnelle soit tel que l'on ait : $\frac{2\frac{1}{4}}{\Theta\Phi < \Theta P = 2} = \frac{3}{2\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire que le point Φ doit tomber entre les points Θ, P.

3. Si, dans la seconde hypothèse : $\frac{K\Theta}{\Theta P} = \frac{4}{1} = \frac{8}{2}$, la droite KΘ est représentée par 8 unités et la droite ΘP par 2 unités ; on a : KΘ — ΘP = PK = 6 unités et $\frac{1}{2}$ PK = PΣ = 3 unités ; donc : ΘP + PΣ = ΘΣ = 6, d'où, comme le texte : $\frac{K\Theta}{\Theta\Sigma} = \frac{8}{5}$.

4. On a par hypothèse du début : $\frac{\Theta\Sigma}{\Theta T} = \frac{K\Theta}{\Theta\Sigma}$, d'où (note précédente) : $\frac{\Theta Z}{\Theta T} = \frac{8}{5}$, d'où, si KΘ = 8 unités, dont ΘΣ = 5 unités, on aura : $\Theta T = \frac{5}{8}\,\Theta\Sigma = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$, donc les trois droites se présentent dans la proportion, comme le texte : $\frac{5}{3\frac{1}{8}} = \frac{8}{5}$.

5. En raisonnant comme dans la note antépénultième, on a de nouveau : ΘΦ < ΘP, d'où Φ tombe entre Θ et P.

6. Si, dans la troisième hypothèse : $\frac{K\Theta}{\Theta P} = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}$, la droite KΘ est représentée par 10 unités, et la droite ΘP par 2 unités, on a : KΘ — ΘP = PK = 8 unités

à 3 plus $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{10}$ comme 10 est à 6 (1), et la droite qui est de 3 plus $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{10}$ unités est à une certaine droite plus grande que celle de 2 unités comme la droite de 6 unités est à celle de 3 plus $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{10}$ unités. Or, la droite ΘP est de 2 unités ; donc, la section de troisième proportionnelle tombe entre les points P, T (2).

Il est en outre manifeste que tous les rapports inférieurs à celui du quadruple détermineront la section dont il s'agit entre les points Θ, P, et que tous les rapports supérieurs à celui du quadruple détermineront le point de section entre les points P, T. Nous avons du reste placé ci-dessous un lemme utile se rapportant aux proportions de ce genre (3).

En conséquence, puisque nous avons démontré que le point de section, tel que Φ, tombe tantôt entre les points Θ, P et tantôt entre les points P, T, ce qu'il n'a pas remarqué pour la raison que nous avons dite (4), il y a lieu d'observer avant tout que, où qu'il prenne le point Φ, soit au-dessus soit au-dessous du point P, la droite TΘ ne sera pas à la droite ΘP comme la droite ΣΘ est à la droite ΘT, c'est-à-dire comme la droite KΘ est à la droite ΘΣ. Dès lors, quand il dit : « que la droite ΘΣ soit à la droite ΘT, et la droite TΘ à la droite ΘP, comme la droite KΘ est à la droite ΘΣ », il se contredit au même instant en prenant ce que l'on cherche pour ce dont on a convenu. En effet, si la droite ΞK est prolongée ;

---

et $\frac{1}{2}$ PK $=$ PΣ $= 4$ unités; donc : $\Theta P + P\Sigma = \Theta\Sigma = 6$ unités, d'où, comme le texte : $\frac{K\Theta}{\Theta\Sigma} = \frac{10}{6}$.

1. On a par hypothèse du début : $\frac{\Theta\Sigma}{\Theta T} = \frac{K\Theta}{\Theta\Sigma}$, d'où (note précédente) : $\frac{\Theta\Sigma}{\Theta T} = \frac{10}{6}$, d'où, si $K\Theta = 10$ unités dont $\Theta\Sigma = 6$ unités, on aura : $\Theta T = \frac{6}{10}\Theta\Sigma = \frac{36}{10} = 3\frac{3}{5} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$; donc les trois droites se présentent dans la proportion : $\frac{6}{3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{6}$.

2. En raisonnant comme dans les notes précédentes, on doit avoir : $\Theta\Phi > \Theta P$, d'où le point Φ tombe entre les points P, T.

3. Voir la proposition qui va suivre.

4. Le texte présente ici l'interpolation : αὐτὸς δὲ λέγει δεικνύται τὸ προκείμενον, ἐάν τε μεταξὺ τῶν ΘΡ ᾖ τὸ Φ σημεῖον ἐάν τε μεταξὺ τῶν ΡΤ, car il dit démontrer la proposition si le (point) Φ est entre les (points) Θ, P et entre les (points) P, T. (Cfr. Hultsch *loc. cit.*, vol. I, p. 38, ll. 12-14).

si la droite KM^α est posée égale à la droite ΞK ; si l'on mène la droite de jonction $M^\alpha\Theta$, et si l'on mène par les points Σ, T et P des parallèles à la droite KM^α, on aura réalisé ce que l'on cherche, et cela d'une manière évidente. En effet, la droite ΣM^β sera à la droite TM^γ et la droite TM^γ à la droite PM^δ comme la droite KM^α est à la droite ΣM^β (1). Or, la droite KM^α est égale à la droite $B\Delta$, la droite KP égale à la droite AB et la droite BE égale à la droite $K\Theta$ (2) ; en sorte que la droite $A\Gamma$ soit aussi égale à la droite PM^δ, et que soient trouvées les deux droites ΣM^β, TM^γ, moyennes proportionnelles aux deux droites $A\Gamma$, $B\Delta$, c'est-à-dire aux deux droites KM^α, PM^δ ; ce qui est impossible. En effet, si on a une droite ΘK et, sur celle-ci, un point P, il n'est pas possible de prendre, par la considération du plan (3), deux points, tels que T, Σ, situés entre les points P, K, de manière que la droite $\Theta\Sigma$ soit à la droite ΘT et la droite $T\Theta$ à la droite ΘP comme la droite $K\Theta$ est à la droite $\Theta\Sigma$; de sorte que, si l'on prenait le point Z au lieu du point Σ, le problème serait également impossible ; car il est de nature solide (4). Dans ces conditions, je crois que, sachant lui aussi qu'il prend la chose cherchée pour celle dont on convient, il n'ose pas dire « que l'autre extrémité de la plus petite droite est le point P », et que, lorsqu'il la prend plus haut, c'est-à-dire entre les points P, Θ, au point Φ, il achève la construction comme il veut l'obtenir, et n'en retombe pas moins inconsciemment dans la difficulté du début. Au reste, ce n'est pas pour induire délibérément en erreur ceux qui le lisent qu'il écrit ainsi fautivement avec prolixité ; mais c'est lui-même qu'il induit en erreur par de faux raisonnements, comme je vais d'ailleurs le montrer en poursuivant d'abord la proposition au moyen d'un procédé convenable [et en réfutant ensuite la proposition qu'il pose d'une manière qui ne convient pas] (5).

1. Euclide, liv. VI, prop. 4 : « Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et les côtés qui sous-tendent les angles égaux sont homologues. » Voir éd. précitée de la trad. de Peyrard, vol. I, p. 298.

2. Il fallait ici : la droite $K\Theta$ égale à la droite BE ; mais l'ordre des droites est interverti dans la suite de la démonstration.

3. C'est-à-dire par la considération de lignes qui prennent leur origine dans le plan.

4. C'est-à-dire que sa nature est telle qu'il ne peut être résolu qu'à l'intervention de sections de solides, ou courbes du second degré.

5. La phrase que nous plaçons entre crochets doit certainement avoir été interpolée (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 40, l. 20).

Puisque le rapport de la droite KΘ à la droite ΘP est donc donné, et que la droite ΘK est donnée (car il faut que cela soit supposé) (1), il s'ensuit que la droite ΘP est donnée aussi (2), ainsi que la droite PK (3). Mais, la droite ΣP, moitié de la droite PK, est donnée aussi (4), et la droite PΘ est donnée ; donc, la droite entière ΘΣ est donnée (5) ; en sorte que le rapport de la droite KΘ à la droite ΘΣ est donné aussi (6). De plus, la droite ΘΣ est à la droite ΘT comme la droite KΘ est à la droite ΘΣ (7), et on a démontré que la droite ΘΣ est donnée ; donc, la droite TΘ est donnée aussi. Or, pour les mêmes raisons, la droite ΘΦ sera donnée aussi ; en sorte que la différence des droites ΘP, ΘΦ est donnée aussi. En conséquence, le point Φ est trouvé entre les points Θ, P comme on l'a déjà démontré par des nombres (8). Et puisque la différence ΦP est donnée (9), ainsi que la droite reliant les points P, X qui est égale à la droite ΞK, il s'ensuit que le triangle rectangle ΦXP est donné d'espèce et de grandeur (10). En conséquence, l'angle compris sous les droites PΦ, ΦX est donné et est égal à l'angle extérieur compris sous les droites KΣ, ΣΨ (11) ; donc, si la droite ΩΨ est prolongée jusqu'au point Z, le triangle rectangle ΣZΨ sera donné d'espèce (12). [Mais, il sera donné aussi

1. Voir les prémisses de la question.
2. Euclide, *Données*, prop. 2, énoncée p. 24, n. 1.
3. Euclide, *Données*, prop. 4 : « Si d'une grandeur donnée on retranche une grandeur donnée, la grandeur restante sera donnée. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 307.
4. Euclide, *Données*, prop. 7 : « Si une grandeur donnée est partagée en une raison donnée, chacun des segments est donné. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 310.
5. Euclide, *Données*, prop. 5 : « Si une grandeur a une raison donnée avec une de ses parties, elle aura aussi une raison donnée avec l'autre partie. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 308.
6. Euclide, *Données*, prop. 1 : « La raison qu'ont entre elles des grandeurs données est donnée. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 304.
7. Par hypothèse.
8. Voir la première partie de la proposition.
9. $\Phi P = \Theta P - \Theta\Phi$.
10. Euclide, *Données*, prop. 41 : « Si un triangle a un angle donné, et si les côtés autour de l'angle donné ont entre eux une raison donnée, le triangle est donné d'espèce. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 366.

Euclide, *Données*, prop. 52 : « Si sur une droite donnée de grandeur on décrit une figure donnée d'espèce, la figure décrite est donnée de grandeur. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 386.
11. A cause des parallèles XΦ, ΨZ.
12. Euclide, *Données*, prop. 40 : « Si chacun des angles d'un triangle est

de grandeur] (1) ; donc, la droite ΨZ, parallèle à la droite ΞK et en direction de la droite ΨΩ, est donnée aussi. En conséquence, la droite ΩΛ, égale à la droite ZK, est donnée aussi (2). Et puisque la droite ΘK est égale à la droite MΛ et la droite ΩΛ plus petite que la droite ΣK (car la droite ΩΛ est égale à la droite KZ) ; que la droite ΣΘ est à la droite ΘT et la droite TΘ à la droite ΘΦ comme la droite KΘ est à la droite ΘΣ ; tandis que la droite MΩ est à la droite MA′ et la droite A′M à la droite MB′ comme la droite ΛM est à la droite MΩ, il s'ensuit que la droite MB′ sera plus grande que la droite ΘΦ (car cela sera aussi démontré dans la suite). En conséquence, la droite restante B′Λ est plus petite que la droite restante ΦK (3).

D'autre part, puisque la droite ΩΛ est donnée (car on a démontré qu'elle est égale à la droite donnée ZK), et que la droite ΛM est donnée aussi (parce que la droite KΘ est donnée aussi) (4), il s'ensuit que le rapport de la droite ΛM à la droite MΩ est donné aussi (5). De plus, la droite ΩM est à la droite MA′ comme la droite ΛM est à la droite MΩ, et la droite ΩM est donnée ; donc, la droite MA′ est donnée (6). Pour les mêmes raisons

---

donné de grandeur, le triangle est donné d'espèce. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 365.

L'authenticité des mots τῷ εἴδει (quant à la figure, ou d'espèce) a été contestée par Eberhard (*Ienaer Literaturzeitung*, 1876, p. 20).

1. ἀλλὰ καὶ τῷ μεγέθει (mais aussi de grandeur), reconstitution proposée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 42, l. 12), mais dont Eberhard a contesté l'utilité en présence de l'authenticité douteuse des mots τῷ εἴδει de la phrase précédente. D'ailleurs, Hultsch substitue cette reconstitution à une phrase de trente-cinq mots, qui se termine par les mots καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ἔσται, et qui doit être considérée soit comme un remaniement, soit comme une mauvaise interpolation de scoliaste. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 42, ll. 13-21).

2. L'aire ΩZKΔ est donnée d'espèce, car c'est un parallélogramme rectangulaire, et il est donné aussi de grandeur, car KΔ est donné par construction, et on a démontré que ZK est donné ; donc, ΩΔ est donné.

3. On a : $\frac{\Sigma\Theta}{\Theta T}=\frac{\Theta T}{\Theta\Phi}=\frac{K\Theta}{\Sigma\Theta}$ et $\frac{M\Omega}{MA'}=\frac{MA'}{MB'}=\frac{\Lambda M}{M\Omega}$. Or, on a vu que $\Theta K = M\Lambda$; que $\Omega\Lambda < \Sigma K$ et que $\Omega\Lambda = ZK$, d'où : $\Theta\Sigma < M\Omega$; donc, comme le texte, on a la relation : $MB' > \Theta\Phi$ que Pappus se réserve de démontrer plus loin, à la proposition 2, et d'où : $K\Theta - \Theta\Phi > \Lambda M - MB'$ ou, comme le texte : $B'\Lambda < \Phi K$.

4. Car on a par construction : $\Lambda M = K\Theta$.

5. Les droites ΩΛ, ΛM sont données, d'où le rapport $\frac{\Lambda M}{\Lambda M - \Omega\Lambda}=\frac{\Lambda M}{M\Omega}$ est donné.

6. On a par hypothèse : $\frac{M\Omega}{MA'}=\frac{\Lambda M}{M\Omega}$, et MΩ est donné ; donc, en présence du rapport donné de la note précédente, MA′ est donné aussi.

d'ailleurs la droite MB' est donnée aussi ; de sorte que le point B' est donné aussi (1) ; point qu'il place où il veut, soit entre les points ϛ, M où il se trouve maintenant, soit entre les points ϛ, A' en supposant que la droite ϛΛ est égale à chacune des droites KP, AB... (2). Au reste, s'il dit que le point B' tombe au point ϛ, il n'en prend pas moins ce que l'on cherche pour ce dont on a convenu. D'ailleurs, il paraît prendre encore une fois la droite donnée de position MΛ, sur laquelle est donné un point ϛ, les points Ω, A' entre les deux points (3), et faire en sorte que la droite ΩM soit à la droite MA' et la droite MA' à la droite Mϛ comme la droite ΛM est à la droite MΩ ; ce que personne ne lui concédera. Au reste, les Anciens qui ont recherché la question ont été aussi dans l'impossibilité de la résoudre au moyen des plans (4), comme je le ferai voir en considérant leurs discours d'une manière comparative (5), et nul ne pourra nous objecter quelque chose lorsque nous lui dirons : « Si ϛ est nécessairement le point de section en troisième proportionnelle, démontrez-nous qu'il ne peut tomber ni entre les points ϛ, A' ni entre les points M, ϛ » ; car nous avons démontré au début que ce point peut tomber au-dessus et au-dessous du point P. (6) Il en est de même si l'on fait dériver la solution du fait que le triangle ϛB'Γ' est donné d'espèce et de grandeur, même si le point de section B' est situé entre les points ϛ, A', et du fait que le triangle Δ'ΩΛ est donné aussi. Enfin, si, comme pour les droites précédentes, la droite ΔE' est donnée aussi, le rapport de la droite ΔH à la

1. Euclide, *Données*, prop. 27 : « Si l'une des extrémités d'une ligne droite, donnée de position et de grandeur, est donnée, l'autre extrémité sera donnée. » (Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 341). Or, on a par hypothèse : $\frac{MA'}{MB'} = \frac{M\Omega}{MA'}$; donc, la droite MB' et le point B' sont donnés.

2. Le texte a perdu ici quelques mots qui indiquaient probablement que la solution du problème est impossible dans ces conditions de détermination arbitraire du point B'. La lacune pourrait donc être remplie, par analogie avec un passage précédent, au moyen de : καὶ οὕτως ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα (et ainsi le problème sera impossible).

3. C'est-à-dire entre les deux points ϛ, Λ.

4. C'est-à-dire au moyen de lignes qui ont leur origine dans le plan, telles que la droite et la circonférence de cercle.

5. Voir à partir de la proposition 5.

6. Le texte présente ici l'interpolation : πίπτει γὰρ παρὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ λόγου, (le point) tombe d'après la condition du rapport (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 46, l. 4).

droite HE, c'est-à-dire de la droite E'H à la droite HZ', c'est-à-dire de la droite Z'H à la droite HΘ', sera donné aussi. Mais, au contraire, il n'en sera pas ainsi du rapport de la droite ΔH à la droite Hϡ, en supposant maintenant aussi que la droite Δϡ soit égale à la droite KP, c'est-à-dire à la droite AB, même s'il veut que le point Θ' tombe entre les points Z', ϡ; car personne n'aura ainsi d'objections à faire si on nous entend dire : «démontrez que ce point ne tombe ni entre les points ϡ, H ni entre les points ϡ, Z' ». Mais si, par pure concession, il veut que le point de section en question soit au point ϡ, il prend encore une fois ce qu'on cherche pour ce dont on a convenu. D'autre part, si on ne lui concède pas que la section est au point ϡ, puisque, en faisant la démonstration sur la droite KΘ, nous n'avons pas concédé que cette section fût au point P, et s'il veut prendre, entre les points E' H, un autre point tel que Z', il prend le point Θ' après avoir été induit en erreur je ne sais comment. Mais, posons que le point soit, comme il le prétend, distinct du point ϡ. Dès lors, menant la droite de jonction Θ'Γ; menant les droites Z'K', E'Λ' parallèles à la droite ΓΘ', et menant par les points K', Λ' les droites K'M', Λ'N' parallèles à la droite AΓ, il montre manifestement qu'il n'a pas compris le problème.

En effet, la droite Θ'Γ n'étant pas parallèle à la droite EH, l'angle compris sous les droites ΓΘ', Θ'H est obtus si le point Θ' tombe entre les points H, ϡ, et il est aigu si le point Θ' [est] (1) entre les points ϡ, Z'. Car, l'angle au point ϡ est droit, condition unique suivant laquelle le problème surgit, si, comme nous l'avons déjà dit souvent, il est concédé qu'on puisse prendre, sur la droite ΔH donnée de position, et le point ϡ étant donné aussi, deux points, tels que E' Z', de manière que la droite HE' soit à la droite HZ' et la droite HZ' à la droite Hϡ comme la droite ΔH est à la droite HE'. Or, si cela n'est pas concédé, ce qu'il propose sera impossible à trouver par l'intermédiaire des plans, comme ceux qui utilisent le *Canon* (2) de Ptolémée relatif aux lignes droites situées dans le cercle (3) pourront du reste s'en persuader au

1. Lacune comblée par Hultsch au moyen de ὄντος (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 48, l. 7).
2. κανῶν, la Règle, qui désigne ici une table manuelle, ou le Canon.
3. Les divers Canons ou Tables de Ptolémée, qui donnent la mesure de

moyen des nombres mêmes qui correspondent à notre solution. D'ailleurs, plutôt que de vouloir trouver la solution de cette manière, il valait mieux qu'elle fût mise en doute [1], comme nous allons le faire pour d'autres propositions ; et nous allons exposer maintenant les choses que nous avons différées [2].

II.

PROPOSITION I. – Soit une droite AH divisée en parties égales aux points B, Γ, Δ, E, Z ; je dis que la droite BΓ est à la moitié de la droite BΓ comme la droite AΓ est à la droite ΓB ; que la droite BΔ est à la droite ΔΓ, augmentée du tiers de la droite ΓB, comme la droite AΔ est à la droite ΔB ; que la droite BE est à la droite EΓ, augmentée du quart de la droite ΓB, comme la droite AE est à la droite EB ; que la droite BZ est à la droite ZΓ, augmentée du cinquième de la droite ΓB, comme la droite AZ est à la droite ZB, et que la droite BH est à la droite HΓ, augmentée du sixième de la droite ΓB, comme la droite AH est à la droite HB.

Il est clair que, si l'on prend des nombres [tels que 1, 2, 3] [3], et ainsi de suite, le nombre donné, à moins d'une unité, des droites égales à partir du point A, est à ce dernier nombre, à moins d'une

diverses droites inscrites dans le cercle en fonction de l'arc, se trouvent dans les éditions suivantes : *Ptolemaei Magnae Constructionis lib. XIII. Theonis Alexandrini in eosdem comment. libri XI, graece edidit Sim. Grinaeus.* Basileae, 1558, in-folio ; *Ptolemaei Cl. Opera quae exstant omnia.* Leipzig, 1898-1903, 2 vol. in-8° ; *Composition mathématique de Claude Ptolemée, traduite pour la première fois en français sur les manuscrits de la Bibliothèque Impériale, par M. Halma (avec le texte grec), suivie de notes de M. Delambre.* Paris, 1813-1816, 2 vol. in-4°. Voir vol. I, pp. 38-45.

1. La solution du problème des deux moyennes proportionnelles par la règle et le compas, dont Pappus réfute longuement la légitimité à la demande du philosophe Hierus, doit, en somme, être considérée comme un moyen d'approximation indéfinie. Elle présente d'ailleurs un intérêt qui paraît avoir échappé aux Anciens : celui de constituer un procédé pour calculer des valeurs numériques approchées de racines cubiques. Paul Tannery a émis des considérations à ce sujet dans son étude intitulée : *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus.* (Voir : *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1880, t. III, pp. 351-371, ou bien : *Mémoires scientifiques de Paul Tannery*, vol. I, pp. 80-105).

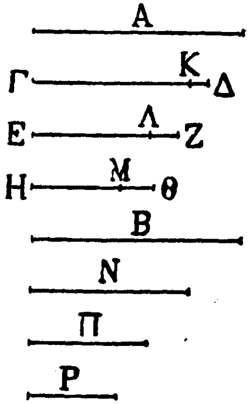
2. C'est-à-dire que les quelques propositions qui vont suivre vont démontrer des relations qui ont été assumées sans démonstration préalable au cours de la discussion qui précède.

3. Lacune des manuscrits comblée conjecturalement par Hultsch. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 49, l. 27).

unité, augmenté de la fraction de la droite ΓΒ ayant pour dénominateur la quantité donnée de droites égales, comme le nombre donné est à ce nombre à moins d'une unité [1].

III.

Proposition 2. — Soient des droites égales A, B et une droite ΓΔ plus grande qu'une droite N [tout en étant plus petite que chacune des droites A, B] [2], et qu'il soit fait en sorte que la droite ΓΔ soit à une droite EZ, et la droite EZ à une droite HΘ, comme la droite A est à la droite ΓΔ, et que la droite N soit à une droite Π, et la droite Π à une droite P, comme la droite B est à la droite N; je dis que la droite P est plus petite que la droite HΘ.



En effet, puisque la droite ΓΔ est plus grande que la droite N, posons une droite ΓK égale à la droite N. Dès lors, la droite B est à la droite N comme la droite A est à la droite ΓK [3]. Et puisque la droite ΓΔ est à la droite EZ comme la droite A est à la droite ΓΔ, faisons en sorte que la droite ΓK soit à une droite EΛ comme la droite A est à la droite ΓK. Or, la droite N est aussi à la droite Π comme la droite B est à la droite N; tandis que la droite A est égale

---

1 Les parties égales de la droite AH donnent la progression : 1.2.3... On a donc : $\frac{B\Gamma}{\frac{1}{2}B\Gamma}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$; $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma+\frac{1}{3}B\Gamma}=\frac{A\Delta}{B\Delta}$; $\frac{BE}{E\Gamma+\frac{1}{4}B\Gamma}=\frac{AE}{EB}$; $\frac{BZ}{Z\Gamma+\frac{1}{5}B\Gamma}=\frac{AZ}{ZB}$; $\frac{BH}{H\Gamma+\frac{1}{6}B\Gamma}=\frac{AH}{BH}$. Algébriquement, si la droite considérée se compose de n parties égales à a, le texte dans lequel Pappus généralise sa proposition se traduit donc par l'expression : $\frac{a(n-1)}{a(n-2)+\frac{1}{n}a}=\frac{an}{a(n-1)}$.

2. ἐλάσσων οὖσα ἑκατέρας τῶν A, B, phrase considérée par Hultsch comme ayant été interpolée. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 50, l. 2).

3. Euclide, liv. V, prop. 9 : « Les grandeurs qui ont une même raison avec une même grandeur sont égales entre elles; et les grandeurs avec lesquelles une même grandeur a une même raison sont aussi égales entre elles. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 257.

à la droite B et la droite ΓK égale à la droite N ; donc, par raison d'identité, la droite B est à la droite Π comme la droite A est à la droite EΛ [1]. En conséquence, la droite EΛ est égale à la droite Π. D'autre part, pour les mêmes raisons, puisque la droite EZ est à la droite HΘ comme la droite A est à la droite ΓΔ, il s'ensuit que la droite ΓK sera à la droite EΛ, et la droite EΛ à une droite plus petite que la droite HΘ, comme la droite A est à la droite ΓK. Qu'elle soit à la droite HM [2]. Dès lors, puisque la droite EΛ est à la droite HM comme la droite ΓK est à la droite EΛ, que la droite Π est à la droite P comme la droite N est à la droite Π, et que la droite ΓK est égale à la droite N, et la droite EΛ égale à la droite Π, il s'ensuit que la droite P est aussi égale à la droite HM ; donc, la droite P est plus petite que la droite HΘ [3].

IV.

LA MÊME PROPOSITION D'UNE AUTRE MANIÈRE [4].

Soit une droite A égale à une droite E, tandis qu'une droite B est plus grande qu'une droite Z, et faisons en sorte que la droite B

1. EUCLIDE, liv. V, prop. 22 : « Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, ces grandeurs auront la même raison par égalité. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 281.

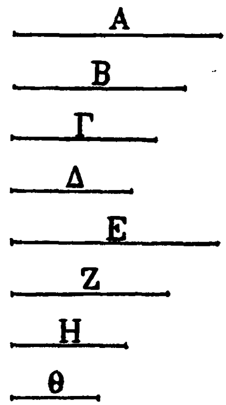
2. C'est-à-dire que $E\Lambda$ soit à $HM < H\Theta$.

3. On a par hypothèse: $A = B > \Gamma\Delta > N$; $\frac{\Gamma\Delta}{EZ} = \frac{EZ}{H\Theta} = \frac{A}{\Gamma\Delta}$ (I), et $\frac{N}{\Pi} = \frac{\Pi}{P} = \frac{B}{N}$ (II): Soit $\Gamma K = N$. Dès lors (EUCLIDE, liv. V, prop. 9) on peut écrire : $\frac{B}{N} = \frac{A}{\Gamma K}$, Posons : $\frac{\Gamma K}{E\Lambda} = \frac{A}{\Gamma K}$ (III). Or, d'après (II) on a : $\frac{N}{\Pi} = \frac{B}{N}$; donc (EUCLIDE, liv. V, prop. 22), par raison d'identité avec (III), on a : $\frac{B}{\Pi} = \frac{A}{E\Lambda}$, d'où, comme le texte : $E\Lambda = \Pi$. D'autre part, d'après (I) : $\frac{EZ}{H\Theta} = \frac{A}{\Gamma\Delta}$. Or, $E\Lambda < EZ$, et on a posé: $\Gamma K = N < \Gamma\Delta$; donc, on peut trouver $HM < H\Theta$ de manière à avoir : $\frac{E\Lambda}{HM} = \frac{A}{\Gamma K}$, d'où, d'après (III), comme le texte : $\frac{E\Lambda}{HM} = \frac{\Gamma K}{E\Lambda}$. Or, d'après (II) on a : $\frac{\Pi}{P} = \frac{N}{\Pi}$ ou $\frac{E\Lambda}{P} = \frac{\Gamma K}{E\Lambda}$, d'où : $\frac{E\Lambda}{P} = \frac{E\Lambda}{HM}$, d'où, comme le texte : $P = HM$, d'où : $P < H\Theta$.

4. Ἄλλως τὸ αὐτό, la même (proposition démontrée) autrement. Il y a doute sur le point de savoir si cette variante de la démonstration est due à Pappus ou à un scoliaste. La première démonstration est autonome et revêt une forme plus ancienne ; tandis que la seconde, plus élégante, est plus expéditive parce qu'elle se base sur deux lemmes que Pappus démontre dans les propositions 3 et 4 qui suivent.

soit à une droite Γ et la droite Γ à une droite Δ comme la droite A est à la droite B ; tandis que la droite Z est à une droite H et la droite H à une droite Θ comme la droite E est à la droite Z ; je dis que la droite Δ est plus grande que la droite Θ.

Puisque la droite B est plus grande que la droite Z, et que la droite A est égale à la droite E, le rapport de la droite B à la droite A est donc plus grand que celui de la droite Z à la droite E, et, inversement, le rapport de la droite A à la droite B est plus petit que celui de la droite E à la droite Z. [Mais, la droite B est à la droite Γ comme la droite A est à la droite B ; donc, le rapport de la droite B à la droite Γ est plus petit que celui de la droite E à la droite Z] (1). Or, la droite Z est à la droite H comme la droite E est à la droite Z ; donc, le rapport de la droite B à la droite Γ est aussi plus petit que celui de la droite Z à la droite H. Mais, la droite Γ est à la droite Δ comme la droite B est à la droite Γ ; donc, le rapport de la droite Γ à la droite Δ est aussi plus petit que celui de la droite Z à la droite H. Or, la droite H est à la droite Θ comme la droite Z est à la droite H ; donc, le rapport de la droite Γ à la droite Δ est aussi plus petit que celui de la droite H à la droite Θ. Dès lors, puisque le rapport de la droite A à la droite B est plus petit que celui de la droite E à la droite Z ; que le rapport de la droite B à la droite Γ est plus petit que celui de la droite Z à la droite H, et que le rapport de la droite Γ à la droite Δ est plus petit que celui de la droite H à la droite Θ, il s'ensuit, par raison d'identité en vertu de ce qui va suivre (2), que le rapport de la droite A à la droite Δ est plus petit que celui de la droite E à la droite Θ. Or, la droite A est égale à la droite E ;

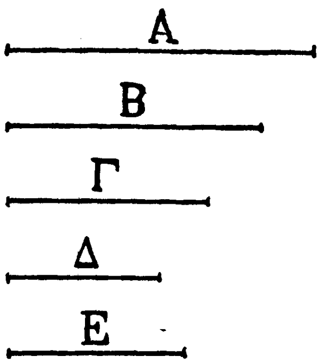


1. La phrase mise entre crochets est une reconstitution conjecturale de Hultsch, par analogie avec la phrase qui suit, pour combler une lacune supposée à cet endroit (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 52, ll. 28-29).
2. Voir les propositions suivantes 3 et 4.

donc, la droite Δ est plus grande que la droite Θ [1] ; ce qu'il fallait démontrer [2].

V.

Proposition 3. — Que le rapport d'une droite A à une droite B soit plus petit que celui d'une droite Γ à une droite Δ ; je dis que, par permutation [3], le rapport de la droite A à la droite Γ est aussi plus petit que celui de la droite B à la droite Δ [4].



Faisons en sorte que la droite Γ soit à une droite E comme la droite A est à la droite B; donc, la droite E est plus grande que la droite Δ. Dès lors, puisque la droite Γ est à la droite E comme la droite A est à la droite B, [il s'ensuit] [5] que, par permutation, la droite B est à la droite E comme la droite A est à la droite Γ. Or, le rapport de la droite B à la droite E est plus petit que celui de la droite B à la droite Δ [6] ; donc, le

1. Euclide, liv. V, prop. 10: « Des grandeurs ayant une raison avec la même grandeur, celle qui a la plus grande raison est la plus grande, et celle avec laquelle elle a la plus grande raison est la plus petite ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, 258.

2. On a par hypothèse : $A=E$; $B > Z$; $\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{A}{B}$ (I), et $\frac{Z}{H}=\frac{H}{\Theta}=\frac{E}{Z}$ (II). Dès lors : $\frac{B}{A}>\frac{Z}{E}$, d'où, comme le texte : $\frac{A}{B}<\frac{E}{Z}$. Donc, d'après (I) il vient : $\frac{B}{\Gamma}<\frac{E}{Z}$, d'où, d'après (II) : $\frac{B}{\Gamma}<\frac{Z}{H}$, d'où d'après (I) : $\frac{\Gamma}{\Delta}<\frac{Z}{H}$, d'où d'après (II) : $\frac{\Gamma}{\Delta}<\frac{H}{\Theta}$. Dès lors, les inégalités $\frac{A}{B}<\frac{E}{Z}$, $\frac{B}{\Gamma}<\frac{Z}{H}$, $\frac{\Gamma}{\Delta}<\frac{H}{\Theta}$ donnent par raison d'identité, comme Pappus le démontrera dans les deux propositions suivantes : $\frac{A}{\Delta}<\frac{E}{\Theta}$! Or, on a posé : $A = E$; donc (Euclide, liv. V, prop. 10) $\Delta > \Theta$.

3. ἐναλλάξ, réciproquement, c'est-à-dire par permutation de termes.

4. Pappus démontrera la même chose d'une manière un peu différente au livre VII, prop. 5.

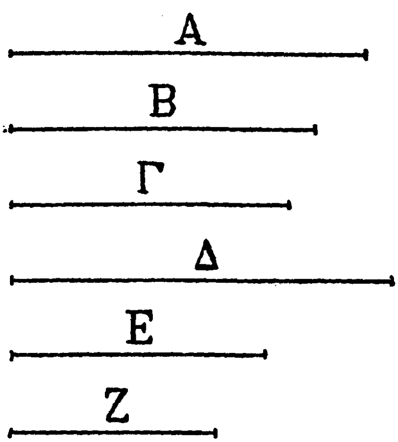
5. Lacune comblée par le mot ἄρα (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 52, l. 17.)

6. Euclide, liv. V, prop. 8 : « Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, 253.

rapport de la droite A à la droite Γ est plus petit que celui de la droite B à la droite Δ (1).

VI.

Proposition 4. — Cela étant démontré (2), que le rapport de la droite A à la droite B soit plus petit que celui de la droite Δ à la droite E, et que l'on ait aussi le rapport de la droite B à la droite Γ plus petit que celui de la droite E à la droite Z ; je dis que, par raison d'identité, le rapport de la droite A à la droite Γ est plus petit que celui de la droite Δ à la droite Z.



En effet, puisque le rapport de la droite A à la droite B est plus petit que celui de la droite Δ à la droite E, par permutation, le rapport de la droite A à la droite Δ est plus petit que celui de la droite B à la droite E. Pour les mêmes raisons, le rapport de la droite B à la droite E est aussi plus petit que celui de la droite Γ à la droite Z. [Dès lors, puisque le rapport de la droite A à la droite Δ est, à fortiori, plus petit que celui de la droite Γ à la droite Z] (3), par permutation, le rapport de la droite A à la

---

1. On a par hypothèse : $\frac{A}{B} < \frac{\Gamma}{\Delta}$. Soit E tel que l'on ait : $\frac{\Gamma}{E} = \frac{A}{B}$ (I) ; donc : $\frac{\Gamma}{E} < \frac{\Gamma}{\Delta}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 10 énoncée quelques notes plus haut) : $E > \Delta$. Or, (I) donne : $\frac{B}{E} = \frac{A}{\Gamma}$, tandis qu'on a (Euclide, liv. V, prop. 8) : $\frac{B}{E} < \frac{B}{\Delta}$; donc, comme le texte : $\frac{A}{\Gamma} < \frac{B}{\Delta}$.

2. Voir proposition 3.

3. La phrase mise entre crochets est une reconstitution de Hultsch, faite d'après une première reconstitution proposée par Scaliger en marge du manuscrit de Leyde pour combler une lacune qui semble exister en cet endroit (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 52, ll. 28-29).

droite Γ est plus petit que celui de la droite Δ à la droite Z [1] ; ce qu'il fallait démontrer [2].

VII.

Telles sont les choses que je devais exposer au préalable ; mais, tout en te laissant toi-même et ceux qui sont exercés en géométrie vous former votre opinion sur ce qu'il a avancé au sujet de la construction du problème et sur les objections que j'y ai faites, je crois à propos d'exposer l'opinion des Anciens sur le problème en question, et de dire d'abord quelques mots au sujet des problèmes que l'on considère en géométrie ; ce par quoi je débuterai aussitôt.

Les Anciens ont admis que les problèmes appartiennent à trois genres en géométrie : les uns sont appelés plans [3], d'autres solides [4] et d'autres encore grammiques [5]. On appelle à juste titre plans ceux qui peuvent être résolus au moyen de lignes droites et de circonférences de cercles ; car les lignes au moyen desquelles les problèmes de ce genre sont résolus trouvent leur origine dans le plan. Quant aux problèmes dont la solution invoque une ou plusieurs sections de cône, ils sont appelés solides ; car il faut faire usage de surfaces de figures solides pour leur construction, notamment de surfaces coniques. Reste le troisième genre de problèmes appelés grammiques, parce que, outre les lignes que nous venons de dire, ils en admettent d'autres pour leur construction, dont l'origine est plus variée et plus complexe, telles que [les spirales] [6], les quadra-

1. On a par hypothèse: $\frac{A}{B} < \frac{\Delta}{E}$ et $\frac{B}{\Gamma} < \frac{E}{Z}$; donc, on a (proposition 3): $\frac{A}{\Delta} < \frac{B}{E}$ et $\frac{B}{E} < \frac{\Gamma}{Z}$, d'où, à fortiori: $\frac{A}{\Delta} < \frac{\Gamma}{Z}$, d'où, par permutation, comme le texte: $\frac{A}{\Gamma} < \frac{\Delta}{Z}$.

2. Le texte ne porte que l'abréviation : ὅπερ: ce qu'il, etc.

3. τὰ ἐπίπεδα προβλήματα, les problèmes plans.

4. τὰ στερεά προβλήματα, les problèmes solides.

5. τὰ γραμμικά προβλήματα, les problèmes linéaires ou grammiques, d'après le néologisme introduit par P. Tannery dans son étude : *Pour l'histoire des lignes et des courbes dans l'Antiquité* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, 1883, t. VII, pp. 278-291, ou bien : *Mémoires scientifiques de Paul Tannery publiés par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen*. Paris, vol. II, p. 13).

6. αἱ ἕλικες, les hélices, c'est-à-dire, comme il s'agit ici de courbes planes, les spirales telles que celle d'Archimède, la spirale parabolique, la spirale hyper-

trices (1), les conchoïdes (2) et les cissoïdes (3) qui possèdent des propriétés nombreuses et étonnantes (4).

La différence qui existe entre les problèmes étant donc telle, les anciens géomètres n'ont pas pu construire le problème précité relatif aux deux droites (5), solide par nature, d'une manière conforme au raisonnement géométrique, parce qu'il n'est pas facile de tracer des sections de cône dans le plan (6) ; mais ils y sont parvenus cependant d'une façon admirable en faisant usage d'instruments propres à exécuter la construction manuellement et commodément, comme on peut le constater (7) dans le *Mésolabe* d'Ératosthène et dans les *Mécaniques* de Philon et de Héron (8). En effet, ces derniers ayant admis que le problème est solide, ils ont effectué la construction uniquement d'une manière instrumentale, [se conformant ainsi à Apollonius de Perge, qui réalisa aussi la solution du problème au moyen des sections de cône. D'autres l'ont réalisée au moyen des *Lieux Solides* (9) d'Aristée ; mais personne ne l'a réalisée au moyen des lieux plans proprement dits] (10) ;

---

bolique et la spirale logarithmique. Le mot que nous avons mis entre crochets manque d'ailleurs dans les manuscrits qui présentent une petite lacune à cet endroit. Sa restauration a été proposée d'abord par Commandin dans sa version latine (*Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae.* Bononiae, 1660, petit in-folio. Voir p. 7, note 2). Cette restauration a été ensuite admise par Hultsch. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 54, l. 20).

1. τετραγωνίζουσαι, littéralement: (lignes) qui rendent carré, c'est-à-dire qui permettent d'obtenir la quadrature d'aires délimitées par des courbes, ou quadratrices, dont Pappus attribue l'invention à Dinostrate.

2. κοχλοειδεῖς, les cochloïdes ou conchoïdes, courbes dont Pappus attribue la découverte à Nicomède.

3. κισσοειδεῖς, les cissoïdes, dont Pappus attribue la découverte à Dioclès.

4. Pappus reprendra l'étude de ces diverses courbes au livre IV, chap. 57.

5. C'est-à-dire les deux droites moyennes proportionnelles.

6. Le texte présente ici le commentaire interpolé : ὡς δεῖ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, dès qu'il s'agit de prendre pour deux droites données deux moyennes proportionnelles en proportion continue (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 54, ll. 27-28).

7. Le texte présente ici l'interpolation: ἀπὸ τῶν φερομένων αὐτοῖς συνταγμάτων, λέγω δ', par les traités méthodiques qu'ils ont publiés, je dis (dans) (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 54, ll. 30-31).

8. Une petite interpolation ajoute ici : ἢ καταπαλτικοῖς, ou *Catapultes* ; titre d'un ouvrage de Héron d'Alexandrie connu aussi sous le titre de *Poliorcétique*.

9. τόποι στερεοί, titre d'un ouvrage perdu d'Aristée l'Ancien dont il sera question au livre VII.

10. La phrase mise entre crochets est suspecte d'interpolation (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 56, ll. 4-7).

tandis que Nicomède a résolu le problème en employant la ligne conchoïde, au moyen de laquelle il a réalisé aussi la tripartition de l'angle.

Nous allons donc exposer quatre constructions du problème en y comprenant un perfectionnement qui nous est personnel.

Il y a d'abord la construction d'Ératosthène ; la seconde est celle des partisans de Nicomède ; la troisième, celle des partisans de Héron, laquelle se prête surtout à l'opération manuelle pour ceux qui désirent pratiquer l'architecture, et la dernière, celle qui a été inventée par nous-même. [Car, si l'on prend deux moyennes en proportion continue entre deux droites données, on pourra construire un autre solide semblable à tout solide donné et dans un rapport donné, comme l'a exposé Héron dans ses *Mécaniques* et ses *Catapultes*] (1).

PROPOSITION 5. — Soit donc (2) une plinthe (3) rigide ΑΒΓΔ et, dans celle-ci, des triangles égaux ΑΕΘ, ΜΖΚ, ΝΗΛ ayant les angles droits aux points Ε, Ζ, Η. Que le triangle ΑΕΘ reste attaché, et que le triangle ΜΖΚ puisse se mouvoir dans les règles ΑΒ, ΓΔ (4), de telle sorte que le côté ΜΖ soit transporté

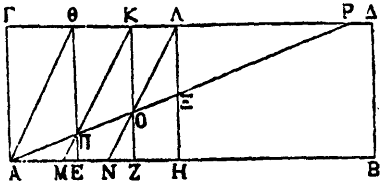
1. La phrase placée entre crochets énonce un théorème vrai de Héron ; mais, comme elle ne se rattache nullement à la phrase précédente, elle paraît être un petit commentaire anticipatif interpolé. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 56, ll. 11-14).

2. Ce premier exemple d'une solution mécanique ou instrumentale, c'est-à-dire empirique, du problème des deux moyennes proportionnelles est donc celui que Pappus emprunte à Ératosthène dans la lettre que ce dernier adresse au roi Ptolémée au sujet de la duplication du cube. L'exposé de Pappus diffère cependant assez bien d'avec celui d'Ératosthène. On trouvera le texte grec de la lettre d'Ératosthène, à défaut d'une traduction en langue vulgaire, dans le commentaire d'Eutocius d'Ascalon sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède. Les commentaires d'Eutocius ont été publiés dans les deux éditions suivantes: I. *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis ex recensione Josephi Torelli Veronensis, cum nova versione latina*. Oxonii 1792, in-folio. Voir pp. 144-146 ; II. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii iterum edidit J. L. Heiberg*. Lipsiae, 1910-1915, 3 vol. in-8°. Voir vol. III, pp. 89-95.

3. πλινθίον, plinthe, petit carreau de brique ou tuile plate, signifiant ici un petit cadre indéformable en forme de parallélipipède rectangulaire oblong.

4. Commandin a fait remarquer dans la note suivante que Pappus intervertit l'ordre du triangle stabilisé et du triangle mobile tel que le présente la lettre d'Ératosthène : « Ex epistola Eratosthenis, quae legitur in commentariis Eutocii in secundum librum Archimedis de Sphaera et Cylindro, apparet ipsum voluisse medium parallelogramum seu triangulum affixum esse et manere, non primum. Sed res in idem recidit ; nam etiam si ultimum maneat et alia duo moveantur, idem plane continget. » Voir édit. précitée de Commandin, p. 8, en note.

dans la règle AB qui possède une rainure dans toute sa longueur, et que le sommet K le soit dans la règle ΓΔ qui est aussi rainurée dans toute sa longueur. Enfin, que le triangle ΝΗΛ puisse se mouvoir aussi de la même manière dans les règles AB, ΓΔ suivant les canaux que nous avons dits.



Les choses étant disposées de cette manière, celui qui veut faire en sorte qu'un cube soit le double d'un cube, découpera la droite ΛΞ, moitié de la droite ΑΓ, puis fera avancer les triangles ΜΖΚ, ΝΗΛ jusqu'à obtenir les points Α, Ξ sur la même droite contenant les points d'intersection Π, Ο des triangles, et, enfin, mènera la droite de jonction ΑΠΟΞ, rencontrant la droite ΓΔ au point Ρ (car cela doit nécessairement suivre), et ce qu'il s'est proposé se réalisera.

En effet, puisque la droite ΑΡ est à la droite ΠΡ, la droite ΑΘ à la droite ΠΚ, la droite ΘΡ à la droite ΡΚ, la droite ΠΘ à la droite ΟΚ, la droite ΠΡ à la droite ΡΟ, la droite ΠΚ à la droite ΟΛ, la droite ΚΡ à la droite ΡΛ et la droite ΟΚ à la droite ΛΞ comme la droite ΑΓ est à la droite ΠΘ, il s'ensuit que les droites ΠΘ, ΟΚ sont deux moyennes en proportion continue des droites ΑΓ, ΛΞ. Or, la droite ΑΓ est le double de la droite ΛΞ ; donc, le cube construit sur la droite ΑΓ est aussi le double du cube construit sur la droite ΠΘ (1). D'autre part, si le rapport de cube à cube est quelque autre, il faut que la droite ΑΓ ait ce même rapport

1. Les deux séries de triangles semblables résultant de la construction imposée donnent : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Pi\Theta}=\frac{\mathrm{AP}}{\Pi\mathrm{P}}=\frac{\mathrm{A}\Theta}{\Pi\mathrm{K}}=\frac{\Theta\mathrm{P}}{\mathrm{PK}}=\frac{\Pi\Theta}{\mathrm{OK}}=\frac{\Pi\mathrm{P}}{\mathrm{PO}}=\frac{\Pi\mathrm{K}}{\mathrm{O}\Lambda}=\frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{P}\Lambda}=\frac{\mathrm{OK}}{\Lambda\Xi}$, d'où la progression géométrique considérée dans le texte : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Pi\Theta}=\frac{\Pi\Theta}{\mathrm{OK}}=\frac{\mathrm{OK}}{\Lambda\Xi}$, dans laquelle ΠΘ, ΟΚ sont deux moyennes proportionnelles. Dès lors (Euclide, *Éléments*, liv. V, définition 11 : « Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 237), on aura évidemment : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Lambda\Xi}=\frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^3}{\overline{\Pi\Theta}^3}$. Or, $\mathrm{A\Gamma}=2\,\Lambda\Xi$; donc, comme le texte $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^3=2\,\overline{\Pi\Theta}^3$.

On trouvera des considérations sur la solution empirique d'Ératosthène dans l'ouvrage de Bretschneider : *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* (Leipzig, 1870, pp. 98 et suiv.), et dans une étude de Hultsch (*Neue Jahrbücher für Philologie und Paedagogik*, vol. 107. Leipzig, 1873, pp. 493-501).

avec la droite ΛΞ, et les choses restantes se construiront de la même manière. [Et il résulte clairement de ceci qu'il est impossible de résoudre la proposition au moyen des plans] (1).

VIII.

D'autre part, d'après Nicomède, si deux droites ΓΔ, ΔΑ sont données, les deux moyennes en progression s'obtiennent de la manière suivante (2).

Complétons le parallélogramme ΑΒΓΔ ; coupons chacune des droites ΑΒ, ΒΓ en deux parties égales aux points Λ, Ε ; prolongeons la droite de jonction ΛΔ, et qu'elle rencontre au point Η la droite ΓΒ prolongée. Menons la droite ΕΖ à angles droits sur la droite ΒΓ, et menons une droite de jonction ΓΖ de manière qu'elle soit égale à la droite ΑΛ (3). Menons la droite de jonction ΖΗ à laquelle nous menons la parallèle ΓΘ et, ayant l'angle compris sous les droites ΚΓ, ΓΘ (4), menons du point donné Ζ (5) la

1. La phrase mise entre crochets n'exprime pas une conséquence nécessaire de ce qui précède, de sorte qu'elle doit avoir été interpolée. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 58, ll. 21-22).

2. Pappus reviendra sur la solution de Nicomède au livre IV, prop. 24, de la même manière que l'a exposée Eutocius dans son commentaire sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède.(Voir Eutocius, édit. précitée de Torelli, p. 149, ou édition critique précitée de Heiberg, vol. III, p. 106).

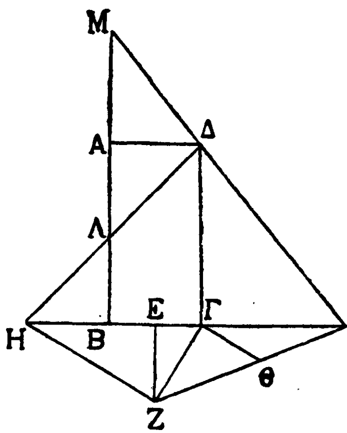
3. Le texte exprime peu correctement que la droite est menée au point Ε, perpendiculairement sur la droite ΒΓ, jusqu'à un point Ζ tel que la droite de jonction ΓΖ soit égale à la droite ΑΛ. D'autre part, Hultsch a relevé, à propos de la droite de jonction ΓΖ, cette note de main récente dans l'un des manuscrits recensionnés : « Oportet ex duabus datis ΓΔ, ΔΑ majorem esse τὴν ΔΓ. Aliter enim ΓΖ aequalis non subtenderet angulum rectum ΓΕΖ. » C'est-à-dire que l'on doit avoir : $\Delta\Gamma > \Delta A$, sinon pour $\Gamma Z = A\Lambda$ la droite ΓΖ ne pourrait constituer l'hypothénuse du triangle ΓΕΖ.

4. L'angle ΚΓΘ est donné par dévolution de propositions des *Données* d'Euclide ; car les côtés ΑΔ, ΔΓ du rectangle ΑΒΓΔ sont donnés de grandeur et de position, et $A\Lambda = \frac{1}{2} AB$; donc, les triangles ΗΒΛ, ΔΑΛ sont égaux et semblables, d'où, ΔΛΗ étant une ligne droite, le point Η est donné. Or, (EUCLIDE, *Données*, prop. 43 : « Si, dans un triangle rectangle, les côtés autour de l'un des angles aigus ont entre eux une raison donnée, ce triangle est donné d'espèce. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 370), le triangle ΕΓΖ est donné d'espèce, et les droites ΕΓ, ΓΖ sont données de grandeur ; donc, le point Ζ est donné. Dès lors (EUCLIDE, *Données*, prop. 41, énoncée p. 28, n. 10), l'angle ΕΗΖ est donné, d'où l'angle ΚΓΘ, qui lui est égal, est donné aussi.

5. Voir note précédente où le point Ζ est donné parce que l'hypothénuse ΓΖ est donnée de grandeur.

droite ZΘK de manière à obtenir que la droite ΘK soit égale à la droite AΛ ou à la droite ΓZ (car il a été démontré que cela peut se faire au moyen de la ligne conchoïde) (1). Enfin, prolongeons la droite de jonction KΔ, et qu'elle rencontre au point M la droite BA prolongée ; je dis que la droite ΓK est à la droite MA, et la droite MA à la droite AΔ, comme la droite ΔΓ est à la droite ΓK (2).

En effet, puisque la droite BΓ est coupée en deux parties égales au point E, et que la droite ΓK lui est ajoutée, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites BK, KΓ, conjointement avec le carré de la droite ΓE, équivaut au carré de la droite EK (3). Ajoutons de part et d'autre le carré de la droite EZ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites BK, KΓ, conjointement avec les carrés des droites ΓE, EZ, c'est-à-dire avec le carré de la droite ΓZ, équivaut aux carrés des droites KE, EZ, c'est-à-dire au carré de la droite KZ. Et puisque la droite MΔ est à la droite ΔK comme la droite MA est à la droite AB, et que la droite BΓ est à la droite ΓK comme la droite MΔ est à la droite ΔK, il s'ensuit que la droite BΓ est aussi



1. La démonstration détermine donc le point K en vertu de la solution supposée connue du problème de la sécante issue d'un point (Z), et interceptée sur une longueur donnée (AΛ = ΓZ) entre deux droites de longueur indéterminée (ΓΘ, ΓK) ; problème qui, dans le cas général, ne comporte pas de solution par les lieux plans, c'est-à-dire par la règle et le compas, mais exige l'intervention des lieux solides, c'est-à-dire des sections coniques et d'autres courbes, telles que la conchoïde de Nicomède qui est invoquée ici. Pappus donnera plus loin, au livre IV, la solution de la sécante interceptée sur longueur donnée au moyen de la conchoïde.

2. C'est-à-dire que les droites ΓK, MA sont deux moyennes proportionnelles entre les droites proposées ΓΔ, AΔ.

3. Euclide, liv. II, prop. 6 : « Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le carré de la moitié de la droite entière, est égal au carré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 95.

à la droite ΓΚ comme la droite ΜΑ est à la droite ΑΒ. De plus, la droite ΑΛ est la moitié de la droite ΑΒ, et la droite ΓΗ est le double de la droite ΒΓ ; donc, la droite ΗΓ sera aussi à la droite ΓΚ comme la droite ΜΑ est à la droite ΑΛ. Mais, la droite ΖΘ est à la droite ΘΚ comme la droite ΓΗ est à la droite ΓΚ à cause des parallèles ΗΖ, ΓΘ ; donc, par composition, la droite ΖΚ est à la droite ΚΘ comme la droite ΜΛ est à la droite ΛΑ. Or, on a supposé que la droite ΑΛ est égale à la droite ΘΚ [puisque la droite ΑΛ est aussi égale à la droite ΓΖ] (1) ; donc, la droite ΜΛ est aussi égale à la droite ΖΚ, et le carré de la droite ΜΛ est donc aussi égal au carré de la droite ΖΚ. De plus, le carré de la droite ΜΛ équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΜ, ΜΑ conjointement avec le carré de la droite ΛΑ (2), et on a démontré que le carré de la droite ΖΚ équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΚ, ΚΓ conjointement avec le carré de la droite ΓΖ ; tandis que, parmi ces carrés, celui de la droite ΑΛ est égal au carré de la droite ΓΖ (car on a posé la droite ΑΛ égale à la droite ΓΖ) ; donc, le rectangle restant compris sous les droites ΒΜ, ΜΑ, équivaut au rectangle restant compris sous les droites ΒΚ, ΚΓ. En conséquence, la droite ΓΚ est à la droite ΜΑ comme la droite ΜΒ est à la droite ΒΚ (3). Mais, la droite ΔΓ est à la droite ΓΚ comme la droite ΜΒ est à la droite ΒΚ (4) ; donc, la droite ΓΚ est aussi à la droite ΑΜ comme la droite ΔΓ est à la droite ΓΚ. Or, la droite ΜΑ est aussi à la droite ΑΔ comme la droite ΜΒ est à la droite ΒΚ (5) ; donc, la droite ΚΓ est à la droite ΑΜ et la droite ΜΑ à la droite ΑΔ comme la droite ΔΓ est à la droite ΓΚ (6).

1. La phrase mise entre crochets est une référence inutile qui doit avoir été interpolée. (Cfr. Hultsch, vol. I, p. 62, l. 2).
2. Euclide, liv. II, prop. 6 (voir note 3 page précédente).
3. Euclide, liv. VI, prop. 16 : « Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les deux droites extrêmes est égal au rectangle qui est compris sous les deux droites moyennes ; et si le rectangle compris sous les deux droites extrêmes est égal à celui qui est compris sous les deux droites moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 323.
4. A cause des parallèles ΜΒ, ΔΓ.
5. A cause des parallèles ΒΚ, ΑΔ.
6. La démonstration se déroule explicitement comme suit : Considérant la droite ΒΓ divisée en deux parties égales en Ε et la droite en prolongation ΓΚ, on a (Euclide, liv. II, prop. 6 qui démontre l'identité : $(a+b)\ b+\frac{a^2}{4}=$

IX.

Nous montrerons maintenant comment, lorsque deux droites sont données, l'on peut, d'après les partisans de Héron, obtenir les deux moyennes proportionnelles d'une manière instrumentale, parce que, comme le dit aussi Héron, ce problème est solide. Il dit d'ailleurs : « exposons celle d'entre les démonstrations qui convient le mieux pour l'opération manuelle » (1).

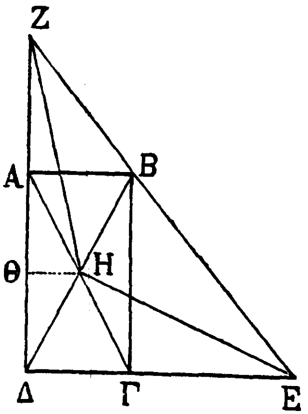
Soient données les droites AB, BΓ disposées entre elles à angles droits et auxquelles il s'agit de trouver deux moyennes proportionnelles. Complétons le parallélogramme ABΓΔ ; prolongeons les

---

$(\frac{a}{2}+b)^2)$: $BK \times K\Gamma + \overline{\Gamma E}^2 = \overline{EK}^2$, d'où : $BK \times K\Gamma + \overline{\Gamma E}^2 + \overline{EZ}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{EZ}^2$ ou, comme le texte : $BK \times K\Gamma + \overline{\Gamma Z}^2 = \overline{KZ}^2$ (I). Or, la similitude des triangles MAΔ, ΔΓK donne : $\frac{M\Delta}{\Delta K} = \frac{MA}{\Delta\Gamma} = \frac{MA}{AB}$ et $\frac{A\Delta}{\Gamma K} = \frac{B\Gamma}{\Gamma K} = \frac{M\Delta}{\Delta K}$, d'où, comme le texte : $\frac{B\Gamma}{\Gamma K} = \frac{MA}{AB}$ (II). Or, $A\Lambda = \frac{AB}{2}$ et $HB = A\Delta = B\Gamma$, d'où $\Gamma H = 2B\Gamma$; donc, la relation (II) devient : $\frac{\frac{1}{2}\Gamma H}{\Gamma K} = \frac{MA}{2A\Lambda}$ ou, comme le texte : $\frac{\Gamma H}{\Gamma K} = \frac{MA}{A\Lambda}$ (III). Or, le parallélisme des droites ΓΘ, HZ donne : $\frac{Z\Theta}{\Theta K} = \frac{H\Gamma}{\Gamma K}$, d'où, en présence dela relation (III) il vient : $\frac{Z\Theta}{\Theta K} = \frac{MA}{A\Lambda}$, d'où, comme le texte : $\frac{Z\Theta + \Theta K}{\Theta K} = \frac{MA + A\Lambda}{A\Lambda}$ ou : $\frac{ZK}{\Theta K} = \frac{M\Lambda}{A\Lambda}$. Or, on suppose avoir construit $\Theta K = A\Lambda$ à l'intervention de la conchoïde ; donc : $M\Lambda = ZK$, d'où : $\overline{M\Lambda}^2 = \overline{ZK}^2$ (IV). D'autre part, considérant la droite AB divisée en deux parties égales en Λ et la droite en prolongation MA, on a (Euclide, liv. II, prop. 6), par analogie avec la relation (I) : $\overline{M\Lambda}^2 = BM \times MA + \overline{A\Lambda}^2$ ou, en présence de l'égalité (IV) : $\overline{ZK}^2 = BM \times MA + \overline{A\Lambda}^2$, d'où, en présence de l'expression (I) : $BM \times MA + \overline{A\Lambda}^2 = BK \times K\Gamma + \overline{\Gamma Z}^2$. Or, on a par hypothèse : $A\Lambda = \Gamma Z$; donc, comme le texte : $BM \times MA = BK \times K\Gamma$, d'où (Euclide, liv. VI prop. 16, énoncée dans la note antépénultième) : $\frac{\Gamma K}{MA} = \frac{BM}{BK}$ (V), d'où, considérant les triangles semblables ΔΓK, MBK qui donnent : $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma K} = \frac{MB}{BK}$, il vient comme dans le texte : $\frac{\Gamma K}{MA} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma K}$. Or, les triangles semblables MAΔ, MBK donnent : $\frac{MA}{A\Delta} = \frac{MB}{BK}$, d'où la relation (V) donne : $\frac{MA}{A\Delta} = \frac{\Gamma K}{MA}$. Dès lors, on a la progression : $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma K} = \frac{\Gamma K}{AM} = \frac{AM}{A\Delta}$, et les droites ΓK, AM sont les deux moyennes géométriques cherchées entre les droites proposées ΔΓ, AΔ.

1. La démonstration de Héron est donnée de la même manière, mais en termes assez différents, par Eutocius dans son commentaire sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède. (Voir Eutocius, édit. précitée de Torelli, p. 139, ou édit. critique précitée de Heiberg, vol. III, p. 59).

droites ΔΓ, ΔΑ et menons les droites de jonction ΔΒ, ΓΑ [1]. Appliquons une règle au point Β, et qu'elle se meuve en coupant les droites ΓΕ, ΑΖ jusqu'à ce que la droite, menée du point Η au point de section de la droite ΓΕ, devienne égale à la droite menée du point Η au point de section de la droite ΑΖ [2]. Que cela soit obtenu ; soit ΕΒΖ la position de la règle, et que les droites ΕΗ, ΗΖ soient égales [3] ; je dis que les droites ΑΖ, ΓΕ sont les moyennes proportionnelles des droites ΑΒ, ΒΓ.



En effet, puisque le parallélogramme ΑΒΓΔ est rectangle, les quatre droites ΔΗ, ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ sont égales entre elles. Dès lors, puisque la droite ΔΗ est égale à la droite ΑΗ, et qu'on a mené la droite ΗΖ [4], il s'ensuit [5] que le rectangle compris sous les droites ΔΖ, ΖΑ, conjointement avec le carré de la droite ΑΗ, équivaut au carré de la droite ΗΖ. Pour la même raison d'ailleurs, le rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΕΓ, conjointement avec le carré de la droite ΓΗ, équivaut au carré de la droite ΗΕ [6]. Or, les droites ΗΕ, ΗΖ sont égales ;

1. Le texte sous-entend ici évidemment : τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Η, c'est-à-dire qui se coupent au point Η.

2. L'exposé d'Eutocius s'exprime mieux à cet endroit en disant : καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ΖΒΕ κινούμενον περί τινα τύλον μένοντα πρὸς τῷ Β καὶ κινείσθω, ἕως.., c'est-à-dire : « et imaginons une règle, telle que ΖΒΕ, mobile autour d'une cheville fixe au point Β, et faisons la mouvoir jusqu'à ce que... ». (Cfr. EUTOCIUS, éd. Heiberg, vol. III, p. 60, l. 3).

3. C'est-à-dire obtenons empiriquement l'égalité des droites ΕΗ, ΗΖ en faisant pivoter la règle autour du point Β.

4. Suppléons à la concision du texte en disant : puisque le triangle ΑΗΔ est isocèle, que la perpendiculaire (que nous ajoutons en pointillé dans la figure du texte) coupe la base en deux parties égales en Θ, et qu'on a mené la droite ΗΖ du sommet sur le prolongement de la base ΑΔ.

5. C'est-à-dire qu'il suit de la considération des éléments : base ΑΔ, point milieu Θ, et droite en prolongement ΑΖ.

6. La proposition 6 du livre II d'Euclide, dont l'énoncé reproduit dans une note précédente se traduit par l'identité $(a+b)\,b+\frac{a^2}{4}=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$ donne: $\Delta Z \times ZA + \overline{A\Theta}^2 = \overline{Z\Theta}^2$, d'où : $\Delta Z \times ZA + \overline{A\Theta}^2 + \overline{H\Theta}^2 = \overline{Z\Theta}^2 + \overline{H\Theta}^2$, ou, comme le texte : $\Delta Z \times ZA + \overline{AH}^2 = \overline{HZ}^2$ (I). En considérant de même la moitié de la base ΔΓ du triangle

donc, le rectangle compris sous les droites ΔZ, ZA, conjointement avec le carré de la droite AH, équivaut aussi au rectangle compris sous les droites ΔE, EΓ conjointement avec le carré de la droite ΓH; expression dans laquelle le carré de la droite ΓH est égal au carré de la droite HA. En conséquence, le rectangle restant compris sous les droites ΔE, EΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔZ, ZA et, par suite, la droite ZA est à la droite ΓE comme la droite EΔ est à la droite ΔZ. Or, la droite BA est à la droite AZ et la droite EΓ à la droite ΓB comme la droite EΔ est à la droite ΔZ; en sorte que la droite ZA est aussi à la droite ΓE et la droite ΓE à la droite ΓB comme la droite AB est à la droite AZ. Dès lors, les droites AZ, ΓE sont les moyennes proportionnelles des droites AB, BΓ (1).

X.

Au reste, ce n'est pas seulement le cube double d'un cube que l'on trouvera au moyen de la règle appliquée d'une manière qui nous est propre (2), mais aussi, d'une façon générale, le cube qui possède un rapport imposé.

Construisons le demi-cercle ABΓ; élevons de son centre Δ la droite ΔB à angles droits, et faisons mouvoir une règle autour du point A, de telle sorte qu'une de ses extrémités soit retenue par une cheville disposée au point A, et que l'autre extrémité circule autour de la cheville prise comme centre, entre les

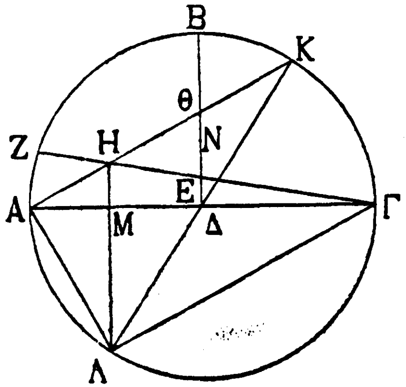
---

isocèle ΔHΓ et la droite ΓE en prolongement de la base, on aura, comme le texte : $\Delta E \times E\Gamma + \overline{\Gamma H}^2 = \overline{HE}^2$ (II).

1. Les droites HE, HZ étant égales par construction empirique au moyen de la règle mobile, les expressions (I) et (II) de la note précédente donnent : $\Delta Z \times ZA + \overline{AH}^2 = \Delta E \times E\Gamma + \overline{\Gamma H}^2$. Or, $\overline{\Gamma H}^2 = \overline{AH}^2$; donc : $\Delta E \times E\Gamma = \Delta Z \times ZA$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 16) : $\frac{ZA}{E\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z}$. Or, les triangles semblables ZAB, BΓE, ZΔE donnent : $\frac{BA}{AZ} = \frac{E\Gamma}{\Gamma B} = \frac{E\Delta}{\Delta Z}$, d'où : $\frac{AB}{AZ} = \frac{AZ}{\Gamma E} = \frac{\Gamma E}{\Gamma B}$.

2. Pappus expose ici sa propre manière (καθ' ἡμᾶς) de déterminer empiriquement les deux moyennes proportionnelles au moyen de la règle mobile, et il y reviendra dans la proposition 11 du livre VIII. D'autre part, Eutocius, dans son commentaire sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède (voir éd. Torelli, p. 139, ou éd. Heiberg, vol. III, p. 71), reproduit presque textuellement (κατὰ λέξιν) la construction de Pappus, et montre en quoi elle ressemble à celle de Dioclès et en quoi elle en diffère.

points B, Γ. Ces constructions étant faites, qu'il soit imposé de trouver deux cubes ayant entre eux un rapport donné ; faisons en sorte que le rapport d'une droite BΔ à une droite ΔE soit ce rapport donné et prolongeons la droite de jonction ΓE jusqu'au point Z. Faisons maintenant passer la règle entre les points B, Γ jusqu'à ce que sa partie découpée entre les droites ZE, EB devienne égale à celle qui est découpée entre la droite BE et l'arc BKΓ ; ce qui se fait aisément en tâtonnant continuellement et en faisant avancer la règle. Que ce soit donc chose faite, et que la règle ait la position AHΘK, de manière que les droites HΘ, ΘK soient égales ; je dis que le cube construit sur la droite BΔ est au cube construit sur la droite ΔΘ dans le rapport imposé, c'est-à-dire celui de la droite ΔB à la droite ΔE.



En effet, imaginons que le cercle soit complété ; prolongeons la droite de jonction KΔ jusqu'au point Λ et menons la droite de jonction ΛH ; cette droite est donc parallèle à la droite BΔ, parce que la droite KΘ est égale à la droite ΘH et la droite KΔ égale à la droite ΔΛ [1]. Menons encore la droite de jonction AΛ et la droite de jonction ΛΓ. Dès lors, puisque l'angle compris sous les droites HA, AΛ est droit comme étant situé dans un demi-cercle, et que la droite AM est une perpendiculaire [2], il s'ensuit que le carré de la droite ΛM est au carré de la droite MH comme le carré de la droite ΛM est au carré de la droite MA, c'est-à-dire comme la droite ΓM est à la droite MA, (car la droite MA est aussi à la droite MH comme

1. Euclide, liv. VI, prop. 2 : « Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 293.

2. Perpendiculaire abaissée du sommet sur la base du triangle rectangle AΛH.

la droite ΛM est à la droite MA (1) ; de sorte que le carré de la droite AM est aussi au carré de la droite MH comme le carré de la droite ΛM est au carré de la droite MA et comme la droite ΓM est à la droite MA) (2). Appliquons de part et d'autre le rapport de la droite AM à la droite MH (3) ; il s'ensuit que le rapport composé de celui de la droite ΓM à la droite MA et de celui de la droite AM à la droite MH, c'est-à-dire de la droite ΓM à la droite MH, est le même que le rapport composé de celui du carré de la droite AM au carré de la droite MH et de celui de la droite AM à la droite MH. Or, le rapport composé de celui du carré de la droite AM au carré de la droite MH et de celui de la droite AM à la droite MH est le même que le rapport du cube construit sur la droite AM au cube construit sur la droite MH ; donc, le rapport de la droite ΓM à la droite MH est aussi le même que le rapport du cube construit sur la droite AM au cube construit sur la droite MH. Mais, la droite ΓΔ est à la droite ΔE, c'est-à-dire la droite BΔ à la droite ΔE, comme la droite ΓM est à la droite MH, et la droite AΔ est à la droite ΔΘ, c'est-à-dire la droite ΔB à la droite ΔΘ, comme la droite AM est à la droite MH ; donc, le cube construit sur la droite BΔ est aussi au cube construit sur la droite ΔΘ comme la droite BΔ est à la droite ΔE, c'est-à-dire dans le rapport donné (4). En conséquence, si nous faisons en

---

1. EUCLIDE, liv. VI, prop. 8, corollaire : « Il suit de là que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire conduite de l'angle droit sur la base est moyenne proportionnelle entre les segments de la base, et que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre la base et le segment qui lui est contigu ». (Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 309).

2. EUCLIDE, liv. V, défin. 10 : « Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde. » (Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 237).

3. κοινὸς προσκείσθω, littéralement : soit appliqué d'une manière commune ; expression dans laquelle le verbe προσκεῖσθαι ne reçoit pas ici l'acception ordinaire d'un accroissement par addition, mais celle d'un accroissement par multiplication.

4. La démonstration se déroule explicitement comme suit : Considérant la hauteur du triangle rectangle ΛAH, on a (EUCLIDE, liv. VI, prop. 8, corollaire) : $\frac{MA}{MH}=\frac{\Lambda M}{MA}$, d'où $\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MH}^2}=\frac{\overline{\Lambda M}^2}{\overline{MA}^2}$ (I). De même, en considérant la hauteur ΛM du triangle rectangle AΛΓ, on a : $\frac{\Gamma M}{\Lambda M}=\frac{\Lambda M}{MA}$, d'où (EUCLIDE, liv. V, défin. 10) : $\frac{\Gamma M}{MA}=\frac{\overline{\Gamma M}^2}{\overline{\Lambda M}^2}=\frac{\overline{\Lambda M}^2}{\overline{MA}^2}$, d'où, en présence de la relation (1) il vient, comme dans

sorte que la droite $\Delta\Theta$ soit à une autre droite, telle que ΔN, comme la droite $B\Delta$ est à la droite $\Delta\Theta$, les droites $\Delta\Theta$, ΔN seront les deux moyennes proportionnelles des droites $B\Delta$, ΔE (1).

XI.

Le second problème était celui-ci (2) :

Un autre géomètre a déclaré avoir obtenu les trois médiétés (3) dans un demi-cercle. Après avoir établi le demi-cercle $AB\Gamma$ dont le centre est le point E, pris un point quelconque Δ sur la droite $A\Gamma$, mené de ce point la droite ΔB à angles droits sur la droite $E\Gamma$, mené la droite de jonction EB et mené sur celle-ci la perpendiculaire ΔZ, il affirme simplement que les trois médiétés sont présentées dans le demi-cercle : la droite $E\Gamma$ étant la moyenne arithmétique, la droite ΔB la moyenne géométrique et la droite BZ la moyenne harmonique.

Comme conséquence (4), il est clair que la droite $B\Delta$ est la moyenne des droites $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ en proportion géométrique, et la droite $E\Gamma$ la moyenne de ces droites en médiété arithmétique ; car, d'une part, la droite ΔB est à la droite $\Delta\Gamma$ comme la droite $A\Delta$

---

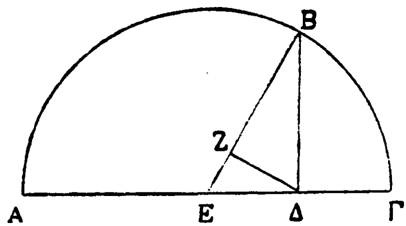
le texte: $\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MH}^2}=\frac{\Gamma M}{MA}$. Or, on peut écrire : $\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MH}^2}\times\frac{MA}{MH}=\frac{\Gamma M}{MA}\times\frac{MA}{MH}$ ou : $\frac{\overline{MA}^3}{\overline{MH}^3}=\frac{\Gamma M}{MH}$ (II). Or, considérant les triangles semblables $\Delta\Gamma E$, $M\Gamma H$, et observant que $B\Delta=\Gamma\Delta$, on a: $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}=\frac{B\Delta}{\Delta E}=\frac{\Gamma M}{MH}$; tandis que, considérant les triangles semblables $\Delta A\Theta$, MAH, et observant que $\Delta B=A\Delta$, on a: $\frac{A\Delta}{\Delta\Theta}=\frac{\Delta B}{\Delta\Theta}=\frac{AM}{MH}$, d'où substituant dans la relation (II), il vient, comme dans le texte : $\frac{\overline{\Delta B}^3}{\overline{\Delta\Theta}^3}=\frac{B\Delta}{\Delta E}$.

1. La relation de la note précédente montre (EUCLIDE, liv. V, défin. 11, énoncée p. 41, n. 1) que les droites $B\Delta$, ΔE sont respectivement les premier et quatrième termes d'une progression géométrique dans laquelle la droite $\Delta\Theta$ sera le second terme, et dont le troisième terme sera une droite ΔN déterminée par la relation : $\frac{\Delta B}{\Delta\Theta}=\frac{\Delta\Theta}{\Delta N}$, dans laquelle les deux premiers termes sont donnés. Dès lors, $\Delta\Theta$, ΔN sont les moyennes proportionnelles entre les droites $B\Delta$, ΔE.

2. C'est-à-dire le second problème dont Pappus critique la solution fautive qui lui a été proposée par un géomètre inexpérimenté.

3. Dans le langage des mathématiciens grecs, la médiété (μεσότης) est soit une série de trois termes en proportion continue ou en progression, soit le terme moyen qui relie les deux termes extrêmes de la progression. Les trois genres de médiétés connus de Platon sont : la médiété arithmétique, la médiété géométrique et la médiété harmonique.

4. οὖν, c'est-à-dire comme conséquence de la construction indiquée.



est à la droite ΔB (1), et, d'autre part, l'excédent des droites AΔ, AE, c'est-à-dire des droites AΔ, EΓ, est à celui des droites EΓ, ΓΔ comme la droite AΔ est à elle-même (2). Mais, il omet de dire comment et de quelles droites la droite ZB est une moyenne en médiété harmonique, et dit simplement qu'elle est la troisième proportionnelle des droites EB, BΔ (3), en ignorant qu'on constituera la médiété harmonique au moyen des droites EB, BΔ, BZ qui sont en proportion géométrique. En effet, nous démontrerons plus loin (4) que, si deux droites EB, trois droites ΔB et une droite BZ sont prises ensemble comme n'en constituant qu'une seule (5), elles forment le plus grand terme extrême de la médiété harmonique ; que deux droites ΔB et une droite BZ forment le terme moyen, et qu'une droite ΔB et une droite BZ forment le plus petit terme extrême (6).

Il y a lieu de traiter de ces trois médiétés en premier lieu [et, conjointement avec elles, de celles qu'on trouve dans le demi-cercle] (7) ; de traiter ensuite des trois autres qui leur sont opposées d'après les Anciens ; enfin, il y a lieu de traiter des quatre médiétés qu'on rencontre chez les auteurs récents d'après leurs préceptes à ce sujet, et d'exposer la manière dont chacune de ces médiétés

1. EUCLIDE, liv. VI, prop. 8, corollaire. Voir p. 49, n. 1.

2. C'est-à-dire que l'on a: $\frac{A\Delta - AE}{E\Gamma - \Gamma\Delta} = \frac{A\Delta - E\Gamma}{E\Gamma - \Gamma\Delta} = \frac{A\Delta}{A\Delta}$; ce qui se démontre plus loin être la médiété arithmétique.

3. Dans le triangle BΔE, on a (EUCLIDE, liv. VI, prop. 8, corollaire): $\frac{EB}{B\Delta} = \frac{B\Delta}{BZ}$.

4. Voir proposition 20, où il sera traité de la médiété harmonique.

5. ὡς μία συνεθεῖσα, posées ensemble comme une seule (droite) ou mises ensemble en direction l'une de l'autre, de manière à ne constituer qu'une seule droite.

6. C'est-à-dire qu'il sera démontré (prop. 20), qu'étant donnés les trois termes d'une progression géométrique $\frac{EB}{\Delta B} = \frac{\Delta B}{BZ}$ on en déduira une médiété harmonique dont le grand terme extrême sera : $2EB + 3\Delta B + BZ$; le terme moyen : $2\Delta B + BZ$ et le petit terme extrême : $\Delta B + BZ$.

7. La phrase que nous affectons de crochets doit être considérée comme une petite interpolation (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 70, l. 10).

peut être trouvée au moyen de la proportion géométrique ; de telle sorte que la démonstration que nous nous proposons de donner ait une portée plus étendue.

XII.

DES TROIS MÉDIÉTÉS.

La médiété se différencie de la proportion en ce sens que ce qui est proportion est également médiété, et que le contraire n'a pas lieu (1). Les médiétés sont au nombre de trois : l'arithmétique, la géométrique et l'harmonique (2).

La médiété est dite arithmétique lorsque, ayant trois termes, le moyen excède l'un des extrêmes d'une quantité égale à celle dont il est excédé par l'autre extrême (comme 6 se comporte avec le nombre 9 et le nombre 3) ; ou bien, lorsque le premier excédent est au second comme le premier terme est à lui-même (3).

Il y a médiété géométrique, c'est-à-dire progression proprement dite, lorsque l'un des termes extrêmes est au moyen comme le moyen est à l'autre extrême (de la manière dont le nombre 6 se comporte avec le nombre 12 et le nombre 3) ; et, autrement,

1. Le mot μεσότης, médiété, s'applique à la proportion continue, ou progression de trois termes ; tandis que le mot ἀναλογία désigne particulièrement la proportion discontinue ou continue (ἀναλογία συνεχής) de quatre termes.

2. Platon fait déjà intervenir la proportion $\frac{a-b}{a}=\frac{b-c}{c}$ sans la dénommer harmonique dans l'échelle diatonique qu'il expose dans le dialogue du *Timée*. D'après ce que nous rapporte Jamblique, cette médiété faisait partie des trois genres de rapports déjà reconnus par Pythagore et ses disciples ; elle fut d'abord dénommée sous-contraire (ὑπεναντία) à la médiété arithmétique, et elle fut ensuite appelée harmonique par Archytas de Tarente et par Hippasos. (*Jamblichi in Nicomachi Arithmeticam Introductionem liber, edidit H. Pistelli.* Lipsiae, 1894, in-8°, p. 100).

3. La double définition de la médiété artihmétique entre trois termes $a>b>c$ s'exprime donc par la relation : $a-b=b-c$ ou, par la relation : $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}$, et Pappus applique cette double définition à l'exemple concret 9, 6, 3, qui donne évidemment : $9-6=6-3$, ou encore : $\frac{9-6}{6-3}=\frac{3}{3}=\frac{6}{6}=\frac{9}{9}$.

lorsque le premier excédent des termes est au second excédent comme le premier terme est au second [1].

La médiété est harmonique lorsque le terme moyen excède l'un des extrêmes et est excédé par l'autre extrême de leur même fraction (de la manière dont le nombre 3 se comporte avec le nombre 2 et le nombre 6) ; ou bien, lorsque le premier excédent des termes est au second excédent comme le premier terme est au troisième [2].

Cela étant établi, trouvons les trois médiétés simultanément dans un nombre de cinq droites minima [3] après avoir exposé d'abord les choses suivantes :

Proposition 6. — Deux droites AB, BΓ étant données, qu'il faille d'abord trouver leur moyenne en progression géométrique.

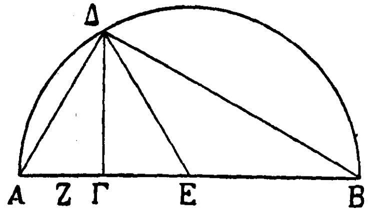
---

1. La double définition de la médiété géométrique, ou progression géométrique, entre les trois termes $a > b > c$ s'exprime par la relation: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, et par la relation: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, et l'exemple 12, 6, 3, du texte donne : $\frac{12}{6} = \frac{6}{3}$ et $\frac{12-6}{6-3} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6}$.

2. La double définition de la médiété harmonique entre les trois termes $a > b > c$ s'exprime donc par les relations : $b - c = \frac{c}{n}$, $a - b = \frac{a}{n}$, ou bien par la relation : $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, et l'exemple du texte pour la suite 6, 3, 2 donne : $3-2 = 1 = \frac{2}{2}$ et $6-3 = 3 = \frac{6}{2}$, ou bien : $\frac{6-3}{3-2} = \frac{6}{2}$. La seconde définition donne pour expression du terme moyen harmonique : $b = \frac{2ac}{a+c}$, laquelle, mise sous la forme : $b = \frac{(a-c)c}{a+c} + c$, traduit algébriquement la manière indiquée par Nicomaque pour trouver ce terme moyen (édit. de Hoche, liv. II, chap. XXVII, p. 140): τῶν ἄκρων τὴν διαφορὰν ποιητέον ἐπὶ τὸν ἐλάττονα καὶ τὸν γενόμενον παραβλητέον ἐπὶ τὸν σύνθετον ἐκ τῶν ἄκρων, εἶτα τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς προσθετέον τῷ ἐλάττονι, καὶ ἔσται ὁ γινόμενος ἁρμονικὴ μεσότης, c'est-à-dire : « il faut multiplier la différence des (termes) extrêmes par le petit (terme), diviser le produit par la somme des extrêmes, ajouter ensuite le quotient de la division au petit (terme), et le (nombre) obtenu sera le moyen harmonique ». D'autre part, l'expression $b = \frac{2ac}{a+c}$, mise sous la forme $(a+c)\,b = 2ac$, met en évidence la propriété que Nicomaque (édit. Hoche, liv. II, chap. XXV, p. 133) exprime comme suit : ἔτι ἡ ἁρμονικὴ ἔχει ἴδιον συμβεβηκὸς τὸ τοὺς ἄκρους συντεθέντας καὶ πολυπλασιασθέντας ὑπὸ τοῦ μέσου διπλάσιον ἀποτελεῖν τοῦ ἐξ ἀλλήλων πολυπλασιασμοῦ, c'est-à-dire que « (la médiété) harmonique a comme propriété particulière le fait que, si on additionne les (termes) extrêmes, et si on multiplie par le terme moyen, on obtient le double du produit de la multiplication des extrêmes entre eux ».

3. Voir plus loin la proposition 15.

Menons la droite ΓΔ à angles droits et coupons la droite AB en deux parties égales au point E. Que la circonférence décrite autour du point E et passant par le point B coupe au point Δ la droite menée à angles droits ; découpons une droite BZ égale à la droite de jonction BΔ, et la droite BZ devient la moyenne cherchée.



En effet, la droite de jonction AΔ comprend un angle droit avec la droite BΔ, parce que chacune des droites BE, EA est égale à la droite de jonction ΔE [1]. Or, l'angle situé au point Γ est droit aussi ; donc, le triangle ABΔ est équiangle avec le triangle BΓΔ [2], et, par suite, les côtés placés autour de l'angle commun, situé au point B de ces triangles, sont proportionnels. En conséquence, la droite BΔ est à la droite BΓ comme la droite AB est à la droite ΔB, et la droite BΔ, égale à la droite BZ, est la moyenne [3] des droites AB, BΓ.

XIII.

Proposition 7. — D'autre part, étant données deux droites AB, BZ, qu'il faille trouver la plus petite droite extrême [4].

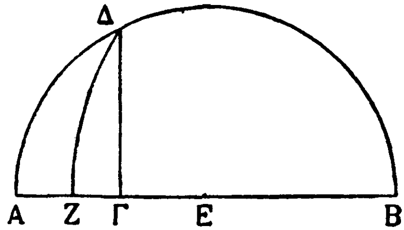
Coupons la droite AB en deux parties égales au point E ; décrivons autour du point E une circonférence passant par le point B ; qu'elle soit coupée au point Δ par la circonférence décrite autour du centre B et passant par le point Z ; menons la perpendiculaire ΔΓ, et la droite BΓ devient la troisième proportionnelle des droites AB, BZ. Cela se démontre en effet d'une manière

1. Manière indirecte de dire que le point Δ est situé par construction sur la demi-circonférence du cercle de centre E et de diamètre AB ; puis, Euclide, liv. III, prop. 31 : « Dans un cercle, l'angle qui est compris dans le demi-cercle est droit, etc. ». Voir trad. de Peyrard, p. 161.

2. Euclide, liv. VI, prop. 8 : « Si, dans un triangle rectangle, on conduit une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles placés autour de la perpendiculaire sont semblables au triangle total et semblables entre eux ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 309.

3. Sous-entendu : κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν, en proportion géométrique.

4. Sous-entendu : en proportion géométrique avec ces deux droites données.

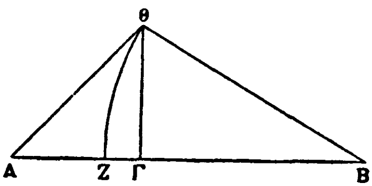


semblable à celle que nous avons exposée plus haut pour la moyenne (1).

[Et il est clair que, si le rapport donné de la proportion est celui du double, de telle sorte que la droite AB soit le quadruple de la droite BΓ, la droite posée égale à la droite BΔ est la moitié de la droite AB, constituant la droite EB ; tandis que, si le rapport est plus grand que celui du double, cette droite est plus petite que la moitié ; enfin, si le rapport est plus petit que celui du double, la droite est plus grande que la moitié de la droite EB] (2).

PROPOSITION 8. — Les deux droites BZ, BΓ étant données, qu'il s'agisse maintenant de trouver la plus grande droite extrême (3).

Menons la droite ΓΘ à angles droits ; que la circonférence décrite autour du centre B en passant par le point Z coupe cette droite au point Θ ; menons la droite AΘ à angles droits sur la droite de jonction BΘ, et la droite AB devient la troisième proportionnelle des droites ΓB, BZ. En effet, cela est aussi manifeste en vertu de ce qui a été démontré précédemment.



XIV.

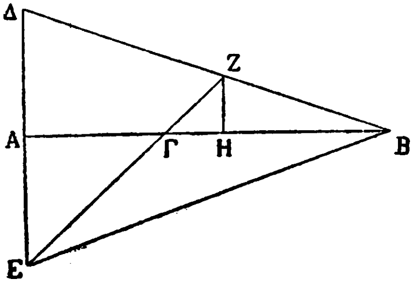
PROPOSITION 9. — Soient de nouveau deux droites AB, BΓ (4). Menons la droite ΔAE à angles droits sur la droite AB, de telle

1. Sous-entendu : ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, en proportion géométrique.

2. Hultsch a placé cette phrase entre crochets avec l'annotation : « haec alienum a Pappo stilum produnt » (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 74, ll. 4-9). Il s'agit en effet, d'un commentaire inutile interpolé par un scoliaste dont le langage mathématique est incorrect.

3. C'est-à-dire en progression géométrique avec les deux droites données.

4. Pappus ne fait pas précéder la solution de ce problème d'un énoncé, et il en sera de même pour la série des problèmes qui vont suivre jusqu'à la pro-



sorte que la droite AΔ soit égale à la droite AE ; menons les droites de jonction BΔ, EΓZ, et menons du point Z la perpendiculaire ZH sur la droite ΓB ; je dis que l'excédent des droites AB, BΓ est à l'excédent des droites ΓB, BH, comme la droite AB est à la droite BH.

En effet, puisque la droite ΔA est à la droite ZH, c'est-à-dire la droite AE à la droite ZH, comme la droite AB est à la droite BH (car la droite AE est égale à la droite AΔ), il s'ensuit que la droite AE est aussi à la droite ZH comme la droite AB est à la droite BH. Mais, la droite AΓ est à la droite ΓH comme la droite AE est à la droite ZH, parce que les triangles AΓE, ΓZH sont équiangles ; en conséquence, la droite AΓ est aussi à la droite ΓH comme la droite AB est à la droite BH. De plus, la droite AΓ est l'excédent des droites AB, BΓ, et la droite ΓH est l'excédent des droites ΓB, BH ; par conséquent, l'excédent des droites AB, BΓ est à l'excédent des droites ΓB, BH comme la droite AB est à la droite BH (1).

[D'ailleurs, ce théorème a son utilité en vue de la médiété harmonique ; car, la première droite est AB, la seconde BΓ et la troisième BH] (2).

position 15. La version latine de Commandin fait précéder cette solution de l'énoncé suivant : « Datis rectis lineis AB, BΓ minorem extremam in harmonica medietate invenire ». (Cfr. COMMANDIN, *loc. cit.*, p. 14, l. 10.) D'autre part, l'édition critique de Hultsch fait précéder la démonstration de l'énoncé suivant : « Datis rectis AB, BΓ, minor extrema in harmonica medietate inveniatur ». (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, p. 75, l. 16.) Nous énoncerons plus explicitement en disant : Deux droites AB, BΓ étant données, trouver la droite qui leur correspond comme petit terme extrême en médiété harmonique.

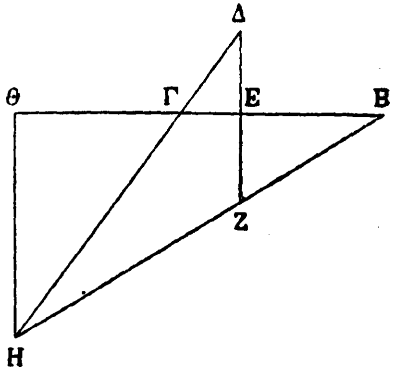
1. Considérant le parallélisme des droites ΔA, ZH et l'égalité des droites ΔA, AE, on a : $\frac{\Delta A}{ZH}=\frac{AE}{ZH}=\frac{AB}{BH}$. Or, la similitude des triangles AΓE, ΓHZ donne : $\frac{A\Gamma}{\Gamma H}=\frac{AE}{ZH}$; donc : $\frac{A\Gamma}{\Gamma H}=\frac{AB}{BH}$ ou, comme le texte : $\frac{AB-B\Gamma}{B\Gamma-BH}=\frac{AB}{BH}$; relation qui, d'après la seconde définition donnée plus haut par Pappus, est celle de la médiété harmonique ; donc : BH est le petit terme extrême de la suite harmonique AB, BΓ, BH.

2. La phrase mise entre crochets doit avoir été interpolée par un commentateur qui emploie improprement le mot théorème (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 77, ll. 5-7).

Proposition 10. — D'autre part, si les droites AB, BH sont données comme étant des extrêmes, et si nous cherchons la droite moyenne [1], menons la droite de jonction BΔ [2] ; menons du point H la droite ZH à angles droits [3], et menons la droite de jonction ZΓE du point Z au point E. Nous obtenons ainsi la droite ΓB moyenne des droites AB, BH, et la démonstration est claire.

XV.

Proposition 11. — Enfin, les droites EB, BΓ étant données, on trouve la plus grande droite extrême [4] en menant du point E la droite ΔEZ à angles droits, ce point frappant d'égalité les droites ΔE, EZ, et en menant les droites de jonction BZ, ΔΓ que nous prolongeons jusqu'au point H. En effet, la perpendiculaire HΘ étant amenée du point H sur la droite BΓ prolongée, elle découpe une droite ΘB égale à la droite cherchée (les droites étant, en effet, menées comme se rencontrant du côté du point H, on doit donc supposer que la droite BE est plus grande que la droite EΓ) [5].



1. C'est-à-dire si les droites AB, BH sont données comme étant les termes extrêmes d'une médiété harmonique, il s'agit de trouver la droite qui leur corresponde comme terme moyen. Commandin fait précéder cette solution de l'énoncé : « Datis lineis rectis AB, BH, mediam in harmonica medietate invenire ». (Cfr. *loc. cit.*, p. 15, l. 8).

2. Voir la figure de la proposition précédente.

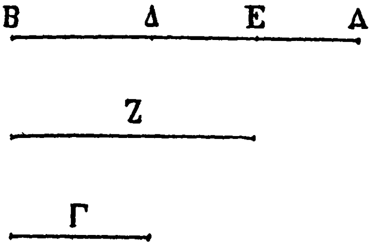
3. Sous-entendu : ἐπὶ τὴν AB, sur la (droite) AB.

4. Solution du problème qui s'énonce : Deux droites EB, BΓ étant données, trouver la droite qui leur correspond comme grand terme extrême en médiété harmonique. Commandin supplée à l'absence d'énoncé en grec en disant dans sa version latine : « Datis rectis lineis in harmonica medietate majorem extremam invenire ». (Cfr. *loc. cit.*, p. 15, l. 17.)

5. La phrase que nous mettons entre parenthèses est une remarque banale qui doit avoir été interpolée.

XVI.

PROPOSITION 12. — Étant de nouveau données deux droites AB, Γ dont la plus grande est la droite AB, nous trouverons la moyenne en égale différence de la manière suivante [1] :



Posons une droite ΔB égale à la droite Γ; coupons la droite ΔA en deux parties égales au point E; posons une droite Z égale à la droite EB, et il est clair que la droite Z est la droite cherchée.

PROPOSITION 13. — Pareillement d'ailleurs, si les droites Z, Γ étaient données [2], en ajoutant leur excédent à la droite Z, nous aurons la droite ainsi obtenue égale à la droite AB [3].

PROPOSITION 14. — Derechef, si les droites AB, Z étaient données [4], leur excédent retranché de la droite Z formerait la troisième droite Γ [5].

PROPOSITION 15. — Dès lors [6], que la droite Z soit la

---

1. Cette proposition s'énonce : Trouver une droite moyenne proportionnelle arithmétique entre deux droites données AB, Γ, dont AB constitue le plus grand des termes extrêmes d'une progression ou médiété arithmétique.

Commandin supplée à l'absence d'un énoncé dans le texte grec en interpolant dans sa version latine l'énoncé : Datis rectis lineis AB, Γ, mediam in arithmetica medietate invenire (Cfr. *loc. cit.*, p. 16, l. 31.)

2. Voir la figure de la proposition précédente.

3. Cette proposition s'énonce : Deux droites Z, Γ étant données, trouver la droite qui leur correspond comme terme grand extrême en progression ou médiété arithmétique.

Commandin supplée comme suit à l'absence d'énoncé : Datis rectis lineis Z, Γ, majorem extremam in medietate arithmetica invenire (Cfr. *loc. cit.*, p. 16, l. 42).

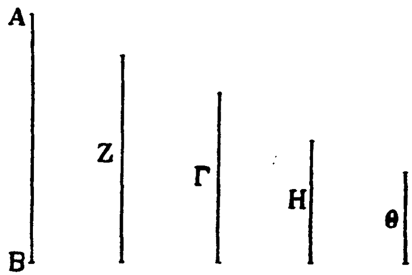
4. Voir la figure de la proposition 12.

5. Proposition qui s'énoncera de même : Deux droites AB, Z étant données, trouver la droite qui leur correspond comme petit terme en médiété ou progression arithmétique.

Commandin donne l'énoncé : Datis rectis lineis AB, Z, minorem extremam in arithmetica medietate invenire (Cfr. *loc. cit.*, p. 17, l. 2).

6. On peut suppléer comme suit à l'absence d'énoncé pour cette proposition : Trouver les trois médiétés arithmétique, géométrique et harmonique établies simultanément parmi cinq droites en décroissance. Commandin fait du reste précéder ici sa version latine de l'énoncé : « Tres medietates simul in minimis rectis lineis numero quinque invenire » (Cfr. *loc. cit.*, p. 17, l. 7).

moyenne en égale différence des droites AB, Γ, et il y aura médiété arithmétique des droites AB, Z, Γ. D'autre part, faisons encore en sorte que la droite Γ soit à une droite H comme la droite Z est à la droite Γ, et il y aura médiété géométrique des droites Z, Γ, H, c'est-à-dire proportion proprement dite. Enfin, si, en raison de ce que nous avons démontré précédemment [1], nous adjoignons une droite Θ aux deux droites Γ, H, dont Γ est la plus grande, de telle sorte que l'excédent des droites Γ, H soit à l'excédent des droites H, Θ comme la droite Γ est à la droite Θ, il y aura aussi médiété harmonique des droites Γ, H, Θ. Or, parmi les termes extrêmes de la médiété arithmétique [2] et de la médiété harmonique [3], le rapport de la droite AB à la droite Γ est le même que celui de la droite Γ à la droite Θ [4] ; donc, on aura des droites les plus petites [5], au nombre de cinq, comportant les trois médiétés. [Elles peuvent aussi être incommensurables entre elles] [6].



1. Voir proposition 9.
2. C'est-à-dire les droites AB et Γ.
3. C'est-à-dire les droites Γ et Θ.
4. La relation $\frac{AB}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Theta}$ s'établit comme suit : Soient cinq droites de grandeurs décroissantes AB, Z, Γ, H, Θ, telles que les trois premières AB, Z, Γ soient en progression arithmétique, c'est-à-dire que l'on ait $AB-Z=Z-\Gamma$ (I) ; telles que les trois suivantes à partir de la seconde, c'est-à-dire Z, Γ, H, soient en progression géométrique, c'est-à-dire que l'on ait : $\frac{Z}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{H}$ (II), et telles que les trois dernières Γ, H, Θ soient en progression harmonique, c'est-à-dire que l'ont ait : $\frac{\Gamma}{\Theta}=\frac{\Gamma-H}{H-\Theta}$ (III). Dès lors (II) donne : $\frac{2Z-\Gamma}{\Gamma}=\frac{2\Gamma-H}{H}$ (IV). Or, (I) donne : $AB=2Z-\Gamma$; donc (IV) devient : $\frac{AB}{\Gamma}=\frac{2\Gamma-H}{H}$ (V). Or, (III) donne : $\frac{\Gamma}{\Theta}=\frac{2\Gamma-H}{H}$, d'où (V) donne, comme le texte : $\frac{AB}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Theta}$.
5. C'est-à-dire les plus petites en décroissance vers l'unité de droite.
6. Bien que cette assertion soit vraie, elle ne semble pas avoir été consignée ici par Pappus, qui n'y revient pas dans la suite, mais par un commentateur. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.* p. 78, l. 17).

Cela s'établit (1) aussi simultanément au moyen de cinq nombres minima se présentant en rapports appelés multiples (2), épimores (3) et autres, l'unité restant toutefois non divisée (4). Ainsi, par exemple, le rapport de la droite AB à la droite Γ étant celui du double, les nombres minima réalisant la proposition seront 12, 9, 6, 4, 3, et, pour le rapport du triple, les nombres minima seront 18, 12, 6, 3, 2. La manière dont on doit trouver aussi les trois médiétés dans des nombres minima se présentant suivant d'autres rapports est évidente. D'ailleurs, pour qui veut les établir chacune en particulier, la chose est manifeste en raison de ce qui a été exposé précédemment ; car, les trois termes en médiété arithmétique seront 3, 2, 1 ; en médiété géométrique ils seront 4, 2, 1 (5), et, considérés comme pythmènes (6) se présentant dans un rapport donné, ces nombres seront changés en équimultiples, en épimores et autres. Ainsi, la droite AB étant à la droite Γ comme 2 est à 1, on posera 4 au lieu de 2 et 2 au lieu de 1 [en même excédent de 2] (7). Et puisqu'il faut que la moyenne de ces droites excède ou soit excédée de manière égale, la droite

1. C'est-à-dire les trois premières médiétés.

2. πολλαπλάσιος λόγος, rapport multiple ; expression définie par Théon de Smyrne dans les termes que nous traduisons : « Il y a rapport multiple quand le plus grand terme contient le plus petit plus d'une fois », c'est-à-dire lorsque le plus grand terme est divisible sans reste par le plus petit. (*Theo Smyrnaeus. Expositio rerum mathematicarum, recognovit Ed. Hiller*, Lipsiae, 1878, in-8° ; voir p. 76).

3. ἐπιμόριος λόγος, rapport épimore ; expression que les versions latines de Commandin et de Hultsch rendent par les mots « ratio superparticularis », et dont Théon (cfr. éd. Hiller, p. 76) donne la définition que nous traduisons : « Il y a rapport épimore lorsque le plus grand terme contient le plus petit une fois conjointement avec une certaine partie du plus petit », c'est-à-dire lorsque la différence entre le plus grand terme et le plus petit est un facteur du plus petit.

4. C'est-à-dire, puisqu'il s'agit de nombres les plus petits, que le plus petit nombre de la suite considérée ne peut pas être une fraction de l'unité.

5. Hultsch conjecture que le texte présente ici une petite lacune qu'il propose de combler par les mots ἐπὶ δὲ τῆς ἁρμονικῆς ς′ γ′ β′, c'est-à-dire : et (en médiété) harmonique (ils seront) 6, 3, 2. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 80 en note).

6. πυθμένες, les pythmènes ou nombres de fond, de base ; expression rendue en latin par « numeri fundamentales », désignant ici les plus petits nombres à partir de l'unité jouissant des mêmes propriétés que leurs multiples.

7. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, τῷ β′, mots constituant une mauvaise interpolation ; car il ne s'agit pas ici de l'égale différence entre 4 et 2 et entre 2 et 1, mais du même rapport ; ce que Pappus aurait correctement exprimé en disant ἐν ἴσῃ ἀναλογίᾳ. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 80, l. 15).

[moyenne] (1) Z devient trois unités, et le rapport de la droite Z à la droite Γ est sesquialtère (2), comme 3 est à 2. Mais, si l'on fait le rapport de la droite Γ à la droite H égal à ce rapport, l'unité devant rester non divisée, le problème ne se réalisera pas. Prenons donc le tout trois fois, et l'on obtient le nombre 12 au lieu du nombre 4, le nombre 9 au lieu du nombre 3 et le nombre 6 au lieu du nombre 2. En conséquence (3), la droite H devient 4 unités, la droite Θ 3 unités, et, par suite, les nombres des trois médiétés sont 12, 9, 6, 4, 3 (4) (5).

XVII.

PROPOSITION 16. — Telles sont donc les choses relatives aux trois médiétés selon les Anciens, et il en résulte manifestement

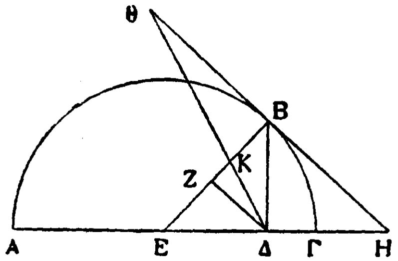
---

1. Hultsch a placé le mot μέσον entre crochets, le considérant comme interpolé (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 80, l. 17).
2. λόγος ἡμιόλιος, le rapport d'une quantité à celle qu'elle contient une fois et demie, ou qu'elle dépasse de moitié, ou rapport sesquialtère.
3. C'est-à-dire dans le cas : $\frac{AB}{\Gamma}=\frac{2}{1}$.
4. Commandin a donné de ce passage le commentaire latin que nous traduisons littéralement comme suit : « En effet, si nous voulons que le premier terme soit en médiété arithmétique avec le dernier, de manière que AB soit à Γ dans le rapport du double, opérons de la manière suivante : Posons d'abord les nombres minima dans le rapport du double, c'est-à-dire 2 et 1. Mais, comme il ne tombe pas de nombre moyen entre eux, prenons 4 au lieu de 2 et 2 au lieu de 1 ; nombres dont le moyen en médiété arithmétique est 3. D'autre part, il faut que 2 ait avec un autre nombre le même rapport que 3 avec 2, c'est-à-dire le rapport sesquialtère. Or, comme cela est impossible si l'unité doit rester non divisée, il faut passer à d'autres nombres. Doublons-les donc, et ils deviennent 8, 6, 4. Mais, comme on n'obtient de nouveau pas de troisième nombre en médiété géométrique, triplons les nombres qui deviennent donc : 12, 9, 6. Et si nous faisons en sorte que 6 soit à un autre nombre comme 9 est à 6, ce nombre sera 4. Enfin, le troisième nombre en médiété harmonique, c'est-à-dire le dernier, sera 3 ; car, l'excédent des nombres 6 et 4, ou 2, est à l'excédent des nombres 4 et 3, ou 1, comme 6 est à 3. D'autre part, si nous voulons que AB soit à Γ dans le rapport du triple, posons les nombres minima de ce rapport, soit 3 et 1, et leurs doubles 6 et 2, dont le moyen est 4. Ainsi 2 est à 1 comme 4 est à 2. Et comme on ne peut aller plus loin, ayons recours à leurs doubles, c'est-à-dire à 12, 8, 4 ; nombres dont le troisième fournit le nombre de la médiété géométrique, c'est-à-dire 2. Or, le troisième nombre de la médiété harmonique ne pouvant être fourni ainsi, triplons les nombres qui deviennent : 18, 12, 6. Or, le quatrième sera 3 et le dernier 2. En conséquence, les nombre minima des trois médiétés constitués dans le rapport du triple seront : 18, 12, 6, 3, 2 ; et de même pour d'autres rapports ». (Cfr. *loc. cit.*, p. 18, ll. 32-49).
5. Ce dernier alinéa tout entier paraît avoir été introduit dans l'ouvrage de Pappus par un autre auteur. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, p. 78, en note).

qu'il est possible de les établir aussi dans un demi-cercle parmi des droites minima au nombre de six.

Soit donc posé le demi-cercle qui présente une perpendiculaire ΒΔ, le rayon ΕΒ et la perpendiculaire ΔΖ. Menons par le point Β la droite ΘΗ tangente au cercle, puis, prolongeant la droite ΕΓΗ, posons la droite ΒΘ égale à la droite ΒΗ, et menons la droite de jonction ΔΚΘ ; je dis que la droite ΕΚ est la moyenne des droites ΒΕ, ΕΖ en médiété harmonique, la droite ΒΕ étant la plus grande et la droite ΕΖ la plus petite.

En effet, puisque les angles aux points Β, Ζ sont droits (1), il s'ensuit que la droite ΗΒ est à la droite ΖΔ comme la droite ΒΕ est à la droite ΕΖ. Or, la droite ΒΗ est égale à la droite ΒΘ ; donc, la droite ΒΘ est aussi à la droite ΔΖ comme la droite ΒΕ est à la droite ΕΖ. Mais la droite ΒΚ est à la droite ΚΖ comme la droite ΒΘ est à la droite ΔΖ (2), et la droite ΒΚ est l'excédent des droites ΒΕ, ΕΚ, tandis que la droite ΚΖ est l'excédent des droites ΚΕ, ΕΖ ; donc, l'excédent des droites ΒΕ, ΕΚ est à l'excédent des droites ΚΕ, ΕΖ comme la droite ΒΕ est à la droite ΕΖ. En conséquence, les droites ΒΕ, ΕΚ, ΕΖ comportent la médiété harmonique, la droite ΕΚ étant la moyenne, la droite ΒΕ la plus grande et la droite ΕΖ la plus petite. D'autre part, nous avons aussi démontré que les droites ΑΔ, ΕΓ, ΓΔ comportent la médiété arithmétique et les droites ΑΔ, ΒΔ, ΔΓ la médiété géométrique ; par conséquent, les trois médiétés sont établies simultanément dans le demi-cercle (3).



1. Le texte porte ici le commentaire interpolé (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 82, ll. 9-12) que nous traduisons : « la droite ΔΖ est parallèle à la droite ΘΗ, et le triangle ΕΒΗ est équiangle avec le triangle ΕΖΔ, tandis que le triangle ΒΘΚ est équiangle avec le triangle ΖΚΔ ».

2. Voir paragr. XI, alinéa 2.

3. La similitude des triangles ΕΒΗ, ΕΖΔ donne : $\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{Z\Delta}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EZ}}$. Or, par construction : ΒΗ = ΒΘ ; donc : $\frac{\mathrm{B\Theta}}{\mathrm{Z\Delta}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EZ}}$. Or, la similitude des triangles ΒΘΚ, ΖΔΚ donne : $\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{KZ}}=\frac{\mathrm{B\Theta}}{\mathrm{Z\Delta}}$; donc : $\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{KZ}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EZ}}$ ou : $\frac{\mathrm{BE}-\mathrm{EK}}{\mathrm{EK}-\mathrm{EZ}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EZ}}$, c'est-à-dire que les droites

XVIII.

Au reste, puisque Nicomaque le Pythagoricien (1) et d'autres (2) ont traité non seulement des trois premières médiétés qui sont des plus utiles pour la lecture des Anciens, mais encore de trois autres médiétés que l'on rencontre chez les Anciens, et, qu'en plus de ces six médiétés, des auteurs récents en ont imaginé quatre autres, nous nous sommes efforcé de traiter les médiétés d'une manière plus soignée, conformément aux auteurs anciens qui ont exposé les trois médiétés dont il a été question plus haut, en établissant la transition des termes à partir du plus

---

BE, EK, EZ sont en médiété harmonique. Or, les droites ΑΔ, ΕΓ, ΔΓ sont en médiété arithmétique, et les droites ΑΔ, ΒΔ, ΔΓ en médiété géométrique ; donc, on a dans le demi-cercle six droites minima BE = ΕΓ, EK, EZ, ΑΔ, ΔΓ, ΒΔ qui comportent les trois médiétés.

1. Nicomaque de Gérase, néo-pythagoricien, vécut vers la fin du premier siècle de notre ère. On possède deux de ses ouvrages : *Le Manuel d'harmonie* (Ἐγχειρίδιον ἁρμονικῆς), et l'*Introduction Arithmétique* (Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή). C'est à ce dernier ouvrage, qui a joui d'une grande réputation dans l'Antiquité et se caractérise déjà par l'abandon de l'appareil géométrique des livres arithmétiques des *Éléments* d'Euclide, que Pappus emprunte sa nomenclature des dix médiétés. Le chapitre que Nicomaque consacre aux proportions présente, en effet, le passage suivant : Εἰσὶν οὖν ἀναλογίαι αἱ μὲν πρῶται καὶ παρὰ πᾶσι τοῖς παλαιοῖς ὁμολογούμεναι, Πυθαγόρᾳ τε καὶ Πλάτωνι καὶ Ἀριστοτέλει, τρεῖς πρώτισται ἀριθμητική, γεωμετρική, ἁρμονική, αἱ δὲ ταύταις ὑπεναντίαι ἄλλαι τρεῖς, ἰδίων μὴ τετευχυῖαι ὀνομάτων, κοινότερον δὲ λεγόμεναι μεσότητες τετάρτη, πέμπτη, ἕκτη· μεθ' ἃς καὶ ἄλλας τέσσαρας οἱ νεώτεροι εὑρίσκουσι, συμπληροῦντες τὸν δέκατον ἀριθμὸν κατὰ τὸ τοῖς Πυθαγορικοῖς δοκοῦν ὡς τελειότατον. (*Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae libri II. Recensuit Ricardus Hoche. Accedunt codicis cizensis problemata arithmetica*. Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri, 1866, in-8°. Voir : liv. II, chap. XXII, p. 122, ll. 11-20). A défaut de pouvoir renvoyer à une traduction française de l'ouvrage de Nicomaque, nous traduisons ce passage ainsi: « Il y a donc les premières proportions, admises par tous les Anciens, Pythagore, Platon et Aristote: d'abord trois, l'arithmétique,la géométrique et l'harmonique; puis trois autres sous-contraires à ces dernières, n'ayant pas reçu de noms particuliers, mais appelées plus communément quatrième, cinquième et sixième médiétés. En plus de celles-ci, les auteurs récents en ont imaginé quatre autres, complétant ainsi le nombre de dix qui, d'après les Pythagoriciens, est considéré comme étant le plus parfait. »

L'ouvrage de Nicomaque a fait l'objet d'une première traduction en anglais, accompagnée d'une étude excellente sur l'arithmétique des Grecs, sous le titre : *Nicomachus of Gerasa. Introduction to Arithmetic, translated into english by Martin Luther D'Ooge, with studies in greek arithmetic by Frank Egleston Robbins and Louis Charles Karpinski.* New-York, The Macmillan Company, 1926, petit in-4°. Voir p. 266.

2. Notamment Proclus dans son commentaire sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide. Voir : *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii. Recognovit G. Friedlein.* Leipzig, 1873, in-8°, liv. I, p. 67.

grand... [1] [et à partir du plus petit terme pour les trois autres qui, différentes des premières, ont une portée plus grande] [2].

Ainsi, lorsque l'excédent du premier terme [3] est à l'excédent du second [4] comme le troisième terme est au premier, ils appellent la médiété la sous-contraire [5] à l'harmonique [6]. D'autre part, lorsque l'excédent du premier terme est à l'excédent du second comme le troisième terme est au second, la médiété est appelée la cinquième [7] et sous-contraire à la géométrique (car certains la nomment ainsi) [8].

Enfin, lorsque le premier excédent est au second comme le second terme est au premier, la médiété est appelée la sixième [9]. D'aucuns l'appellent aussi la sous-contraire à la géométrique, en raison de la même succession contrariée des rapports [10] ; en sorte que, d'après les Anciens, il y a six médiétés.

Comme nous l'avons dit, les auteurs récents ont imaginé quatre autres médiétés qui concordent jusqu'à un certain point [11], mais auxquelles leurs inventeurs ont attribué des définitions particulières. En effet, ils appellent premier excédent celui du premier

1. Lacune des manuscrits.

2. La phrase placée entre crochets doit avoir été interpolée par un scoliaste qui fait du reste erreur ; car il résulte des propositions qui suivent (prop. 21 et 23), que les trois autres médiétés seront aussi établies à partir du plus grand terme de la série de nombres. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 84, ll. 9-11, et p. 87, note 1).

3. C'est-à-dire l'excédent du premier terme sur le second.

4. C'est-à-dire l'excédent du second terme sur le troisième.

5. ὑπεναντία, (la médiété) sous-contraire.

6. Trois grandeurs $a>b>c$ seront dites en quatrième médiété lorsqu'elles satisfont à la relation : $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$. Cette médiété est appelée la sous-contraire de l'harmonique, parce que cette dernière est définie par la relation : $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$.

7. La cinquième médiété s'exprime donc par la relation : $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$.

8. En raison du rapport contrarié en présence de la médiété géométrique : $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

9. La sixième médiété s'exprime donc par la relation : $\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$.

10. En raison, comme pour la cinquième médiété, du rapport contrarié en présence de la médiété géométrique : $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

11. C'est-à-dire qui concordent d'une certaine manière avec les six premières médiétés dont il a été question plus haut.

terme sur le second, second excédent celui du second terme sur le troisième, et troisième excédent celui du premier terme sur le troisième, en visant et nommant comme premier terme le plus grand, comme second terme le moyen et comme troisième le plus petit, ainsi que nous l'avons du reste exposé au début (1).

Ainsi, lorsque le second terme est au troisième comme la troisième différence est à la première, ils appellent la médiété la septième (2).

D'autre part, lorsque le rapport des excédents restant le même, le premier terme est au second dans ce rapport, la médiété est dénommée la huitième (3).

Mais, lorsque le premier terme est au troisième comme le troisième excédent est au premier excédent, la médiété est dite la neuvième (4).

Enfin, lorsque le second terme est au troisième comme le troisième excédent est au second excédent, ils nomment cette médiété la dixième (5).

Ces définitions étant posées (6), nous exposerons aussi la génération des dix médiétés au moyen de la progression géométrique, comme nous l'avons annoncé (7). [La proportion se compose de rapports, et l'égalité est à l'origine de tout rapport] (8).

---

1. Renvoi probable au début du chapitre XVIII, où l'ordre de grandeur des termes de la progression est simplement mentionné, sans autres détails qui peuvent avoir été perdus dans le passage lacuneux.

2. Les grandeurs $a > b > c$ seront donc en septième médiété lorsqu'elles répondent à la relation : $\frac{b}{c} = \frac{a-c}{a-b}$. On remarquera que le texte intervertit ici l'ordre des rapports énoncés dans les médiétés précédentes.

3. La huitième médiété répond donc à la relation : $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{a-b}$.

4. La neuvième médiété répond à la relation : $\frac{a}{c} = \frac{a-c}{a-b}$.

5. La dixième médiété répond à la relation : $\frac{b}{c} = \frac{a-c}{b-c}$.

6. Les dix médiétés définies par Pappus ne sont pas exactement les mêmes que celles qui sont définies dans l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase (voir éd. mentionnée p. 63, n. 1). Leurs différences notables ont fait l'objet de remarques pour la première fois de la part de P. Tannery dans son étude : *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1880, t. III, pp. 351-371, ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. I, 1912, pp. 80-105).

7. Voir chapitre XI, *in fine*.

8. La phrase placée entre crochets est une interpolation de scoliaste empruntée à un passage de Proclus dans son commentaire sur le *Timée* de Platon. (*Procli*

Au reste, comme la médiété géométrique tire sa première origine de l'égalité, qu'elle s'établit d'elle-même et établit les autres médiétés, elle indique ainsi, d'après l'opinion du divin Platon, que la proportion est, de par nature, la cause de toutes les choses harmoniques et de ce qui naît de rationnel et d'ordonné ; car il dit que la nature divine de la proportion est l'unique lien de toutes les connaissances, la cause de la création et le lien de toutes les choses créées (1). Nous allons d'ailleurs démontrer l'établissement des dix médiétés au moyen de la proportion géométrique en considérant au préalable ceci :

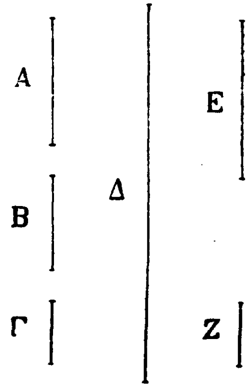
Diadochi commentarius in Platonis Timaeum, recognovit C. E. Schneider. Vrat. 1847 in-8°, p. 342).

La première définition du rapport et de la proportion est celle d'Euclide (*Éléments*, liv. V, définitions) : λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις. ἀναλογία δ'ἐστὶν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης ; littéralement : « la raison (ou le rapport) est une relation de certaine nature (ou relation qualitative) établie en considération quantitative de deux grandeurs homogènes ; tandis que la proportion est une similitude de raisons ». Peyrard a fait remarquer (voir trad. précitée, liv. V) que la définition peu satisfaisante de la proportion donnée par Euclide résulte du mot ομοιότης, similitude, qui se présente dans une partie des manuscrits et dans les premières éditions grecques, et qu'il y a lieu de remplacer ce mot par ταυτότης, identité, qui se présente dans deux manuscrits de Paris du dixième siècle. Peyrard traduit d'ailleurs la définition d'Euclide qui précède en disant : « La raison est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles, suivant la quotuplicité. Une proportion est une identité de raisons. » Euclide donne d'ailleurs une autre définition de la proportion (Liv. VII, déf. 21) : Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν, c'est-à-dire : « Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple, ou la même partie, ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième. » Il y a licu de remarquer toutefois que cette définition ne convient que pour les nombres commensurables.

Nicomaque donne de la proportion la définition suivante (voir éd. précitée de Hoche, liv. II, p. 120, ll. 2-3) : ἔστιν οὖν ἀναλογία κυρίως δυεῖν ἢ πλειόνων λόγων σύλληψις ἐς τὸ αὐτό, κοινότερον δὲ δυεῖν ἢ πλεόνων σχέσεων, c'est-à-dire : « Une proportion proprement dite est donc un rapprochement de deux ou de plusieurs rapports, et plus généralement, de deux ou plusieurs relations.

1. Pappus ne reproduit pas textuellement un passage de Platon ; mais il s'inspire de plusieurs passages du *Timée*, notamment du passage suivant : « Dieu commença donc par faire le corps de l'Univers en le composant de feu et de terre ; mais il n'est pas possible de bien joindre deux corps sans un troisième ; car il faut qu'il y ait au milieu d'eux un lien qui les unisse : or, le plus beau lien est celui qui donne la plus grande unité et à lui-même et aux choses qu'il unit, et il est de la nature de la proportion de produire cet effet d'une manière parfaite ; etc. ». (*Œuvres de Platon, nouvelle édition accompagnée de notes, d'arguments et de tables analytiques, par M. Aimé-Martin*. Paris, 1845, 2 vol. gr. in-8°. Voir vol. II, *Timée ou de la Nature*, p. 638, col. 2, ll. 22-31).

PROPOSITION 17. — Soient trois termes proportionnels A, B, Γ et un terme Δ égal à la somme des termes A, Γ conjointement avec deux termes B ; puis, un terme E égal à la somme des termes B, Γ ; enfin, un terme Z égal au terme Γ ; je dis que les termes Δ, E, Z sont proportionnels.



En effet, puisque le terme B est au terme Γ comme le terme A est au terme B, par composition, la somme des termes B, Γ sera au terme Γ comme la somme des termes A, B est au terme B. En conséquence, tous les antécédents étant à tous les conséquents dans le même rapport [1], la somme des termes B, Γ est au terme Γ comme la somme des termes A, B, conjointement avec la somme des termes B, Γ, est à la somme des termes B, Γ. Or, le terme Δ est égal à la somme des termes A, B conjointement avec la somme des termes B, Γ, le terme E égal à la somme des termes B, Γ et le terme Z égal au terme Γ [2] ; donc, les termes Δ, E, Z sont aussi proportionnels [3] [dans le rapport de la somme des termes A, B, au terme B] [4].

PROPOSITION 18. — Dès lors [5], si l'on suppose que les termes A, B, Γ sont égaux, les termes Δ, E, Z deviennent en proportion du double ; car la somme des termes A, Γ, conjointement avec deux termes B, devient double de la somme des

1. EUCLIDE, liv. V, prop. 12 : « Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 262.

2. Par hypothèse.

3. En notations usuelles, étant donnée la progression géométrique : $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$, et si l'on pose : $\Delta=A+2\ B+\Gamma$, $E=B+\Gamma$, $Z=\Gamma$, on a : $\frac{A+B}{B}=\frac{B+\Gamma}{\Gamma}$, d'où : $\frac{(A+B)+(B+\Gamma)}{B+\Gamma}=\frac{B+\Gamma}{\Gamma}$, ou : $\frac{A+2B+\Gamma}{B+\Gamma}=\frac{B+\Gamma}{\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Delta}{E}=\frac{E}{Z}$.

4. La phrase mise entre crochets doit avoir été interpolée (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 88, l. 18).

5. Commandin fait précéder ici sa version latine d'un énoncé que le texte grec ne présente pas : « Geometricas medietates per analogiam invenire ». (Cfr. *loc. cit.*, p. 20, l. 34).

termes B, Γ, et la somme des termes B, Γ devient double du terme Γ (1). D'autre part, si les termes A, B, Γ sont supposés être en proportion du double, le plus grand d'entre eux étant A, les termes Δ, E, Z [seront] (2) en proportion du triple, et, si A est le plus petit terme, ils seront en proportion sesquialtère (3) ; car, si le terme A est le double du terme B, la somme des termes A, B est aussi le triple du terme B, tandis que, si le terme A est la moitié du terme B, la somme des termes A, B est moitié plus grande que le terme B (4). On trouvera de la même manière pour les rapports suivants les rapports de multiples et de nombres fractionnaires. Et si, en retour (5), les termes A, B, Γ sont des unités, la médiété géométrique des termes Δ, E, Z sera établie dans les plus petits nombres 4, 2, 1 (6) (7) (8).

---

1. Dans l'hypothèse $A=B=\Gamma$, les expressions de Δ, E deviennent : $A+2B+\Gamma=2(B+\Gamma)$ et $B+\Gamma=2\Gamma$; donc : $\frac{\Delta}{E}=\frac{E}{Z}=\frac{2}{1}$.

2. Lacune que Hultsch comble par le mot ἔσονται (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 88, l. 24).

3. C'est-à-dire dans le rapport de $\frac{3}{2}$, ou $1+\frac{1}{2}$, à 1.

4. C'est-à-dire que, dans le premier cas de $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}=\frac{2}{1}$, on a : $A=2B$, d'où : $A+B=3B$, d'où : $\frac{\Delta}{E}=\frac{E}{Z}=\frac{3}{1}$, ou autrement, on a : $A=2B$ et $B=2\Gamma$, d'où : $A+2B+\Gamma=3(B+\Gamma)$ et $B+\Gamma=3\Gamma$; tandis que, dans le second cas de $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}=\frac{1}{2}$, on a : $A=\frac{1}{2}B$ et $A+B=\frac{3}{2}B$ ou, autrement, on a : $A+2B+\Gamma=\frac{3}{2}(B+\Gamma)$ et $B+\Gamma=\frac{3}{2}\Gamma$, d'où, comme le texte : $\frac{\Delta}{E}=\frac{E}{Z}=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$.

5. C'est-à-dire, si l'on en revient comme au début à l'égalité des termes A, B, Γ.

6. Dans l'hypothèse : $A=B=\Gamma=1$ on aura : $\Delta=4$, $E=2$, $Z=1$, c'est-à-dire la progression géométrique exprimée par les nombres les plus petits.

7. Le passage constituant la proposition 18 est rédigé d'une manière un peu confuse, et son authenticité est fort douteuse. De même que le dernier alinéa du chapitre XVI, il est probablement dû à un auteur postérieur.

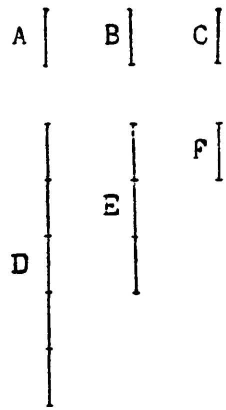
8. Comme le chapitre qui suit établit la médiété harmonique au moyen de la progression géométrique, Commandin a supposé que les manuscrits présentent ici la lacune de toute une proposition 19 établissant d'abord, comme Pappus semble l'avoir annoncé, la médiété arithmétique au moyen de la progression géométrique. Commandin a donc comblé conjecturalement cette lacune en complétant sa version latine par une proposition que nous ne traduisons donc que pour mémoire :

« Proposition 19. — Établir la médiété arithmétique au moyen de la proportion.

» Posons les trois termes proportionnels A, B, C. Soit un terme D égal à la somme de deux termes A, de deux termes B et d'un terme C ; soit un terme E

XIX.

PROPOSITION 20. — La médiété harmonique s'établit comme suit au moyen de la progression (1).



égal à la somme d'un terme A, d'un terme B et d'un terme C, et soit un terme F égal à un terme C. Je dis que les termes D, E, F constituent une médiété arithmétique.

» En effet, la somme des termes A, B est à elle-même comme la somme de deux termes A, de deux termes B et d'un terme C est à elle-même, c'est-à-dire comme le terme D est à lui-même. Mais, la somme des termes A, B est l'excédent dont la somme de deux termes A, de deux termes B et d'un terme C dépasse la somme des termes A, B, C ; excédent qui est celui des termes D, E. Or, la somme des termes A, B est aussi l'excédent dont la somme des termes A, B, C dépasse le terme C ; excédent qui est celui des termes E, F ; donc, l'excédent des termes D, E est à l'excédent des termes E, F comme le terme D est à lui-même. Or, lorsque le premier excédent est au second comme le premier terme est à lui-même, on a la médiété arithmétique. Dès lors, si les termes A, B, C sont posés comme étant l'unité, la médiété est établie par les nombres les plus petits 5, 3, 1. » (Cfr. *loc. cit.*, p. 21).

Cette solution de Commandin n'est pas satisfaisante. En effet, au chapitre XII, alinéa 2, Pappus définit la médiété arithmétique par la relation : $D - E = E - F$, ou bien : $\frac{D - E}{E - F} = \frac{D}{D}$, et il se propose de l'établir au moyen de la progression géométrique $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$. Or, Commandin pose : $D = 2A + 2B + C$; $E = A + B + C$, $F = C$ et, sans la déduire de la progression géométrique, il écrit la relation : $\frac{A+B}{A+B} = \frac{2A+2B+C}{2A+2B+C} = \frac{D}{D}$. Puis, faisant remarquer qu'on a : $A + B = 2A + 2B + C - (A + B + C) = D - E$ et $A + B = A + B + C - C = E - F$, il en tire : $\frac{D-E}{E-F} = \frac{D}{D}$. Enfin, posant : $A = B = C = 1$, il vient : $D = 5$, $E = 3$, $F = 1$, nombres qui ne sont pas minima en médiété arithmétique, et qui devraient être 3, 2, 1.

La solution que Hultsch substitue à celle de Commandin n'est pas plus satisfaisante ; car il pose : $\Delta = 2A + 3B + \Gamma$; $E = A + 2B + \Gamma$ et $Z = B + \Gamma$, et, négligeant aussi la condition imposée : $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$, il écrit : $\frac{A+B}{A+B} = \frac{\Delta}{\Delta}$; puis, faisant remarquer qu'on a : $A + B = \Delta - E = E - Z$, il en tire : $\frac{\Delta - E}{E - Z} = \frac{\Delta}{\Delta}$. Enfin, en supposant : $A = B = \Gamma = 1$, il trouve les nombres minima : 6, 4, 2. (Cfr. *loc. cit.*, p. 19, ll. 7-12.)

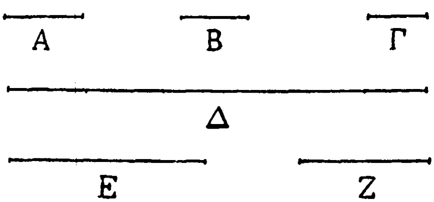
En présence de ces deux essais de reconstitution défectueux, il y a lieu de croire que, s'il manque ici une proposition annoncée, qui devait être la dix-neuvième, Pappus ne l'aura jamais donnée, parce qu'il aura échoué dans l'établissement de la médiété arithmétique en déduction préconçue de la progression géométrique.

1. Sous-entendu : γεωμετρικῆς, géométrique.

Nous abandonnons ici la phrase inutile, non admise par Hultsch à titre de commentaire interpolé (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 90, ll. 9-10), ni par Commandin

Supposons trois termes proportionnels A, B, Γ. Soit un terme Δ égal à deux termes A plus trois termes B plus un terme Γ ; un terme E égal à deux termes B plus un terme Γ, et un terme Z égal à un terme B, plus un terme Γ ; je dis que les termes Δ, E, Z forment une médiété harmonique.

En effet, puisque les termes A, B, Γ sont proportionnels, deux termes B, conjointement avec un terme Γ, sont aussi au terme Γ comme deux termes A, conjointement avec un terme B, sont au terme B, et, de tous à tous (1), deux termes A, conjointement avec un terme B, sont au terme B comme deux termes A, conjointement avec trois termes B plus un terme Γ, sont à la somme des termes B, Γ, c'est-à-dire comme le terme Δ est au terme Z (2). De plus, deux termes A, conjointement avec un terme B, sont l'excédent dont deux termes A plus trois termes B plus un terme Γ dépassent deux termes B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ, E ; tandis qu'un terme B est l'excédent dont deux termes B plus un terme Γ dépassent la somme des termes B, Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes E, Z. Dès lors, si l'excédent des termes Δ, E est à l'excédent des termes E, Z comme le terme Δ est au terme Z, la médiété est harmonique (3), et il est évident qu'elle sera exprimée au moyen des nombres minima 6, 3, 2 si les termes A, B, Γ sont supposés de même être des unités (4).



(cfr. *loc. cit.*, p. 22, l. 16) : καὶ τῆς ἰσότητος ἐν τῇ τάξει τῆς ἀναλογίας διαφόρως κἀνταῦθα κἀν τοῖς ἑξῆς παραλαμβανομένης.

1. C'est-à-dire que tous les antécédents sont à tous les conséquents.
2. Par hypothèse.
3. Voir chap. XII, alinéa 4.
4. En notations actuelles, soit : $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$ et posons: $\Delta=2A+3B+\Gamma$, $E=2B+\Gamma$ et $Z=B+\Gamma$. Dès lors, on a : $\frac{2A+B}{B}=\frac{2B+\Gamma}{\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. V, prop 12, énoncée p. 67, n. 1) : $\frac{2A+B}{B}=\frac{2A+3B+\Gamma}{B+\Gamma}$, d'où : $\frac{2A+B}{B}=\frac{\Delta}{Z}$. Or, $2A+B= 2A+3B+\Gamma-(2B+\Gamma)=\Delta-E$ et $B=2B+\Gamma-(B+\Gamma)=E-Z$; donc: $\frac{\Delta-E}{E-Z}=\frac{\Delta}{Z}$; relation caractérisant la médiété harmonique qui, pour $A=B=\Gamma=1$ s'exprime au moyen des nombres minima : 6, 3, 2.

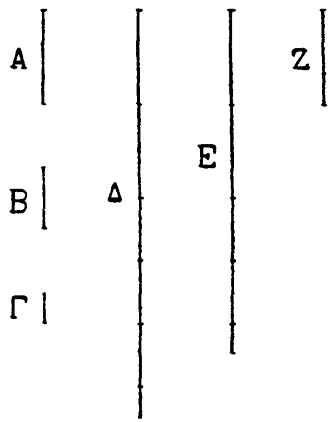
Outre la série 6, 3, 2 donnée par Pappus, Jamblique (voir p. 108 de l'édition

XX.

Proposition 21. — La médiété sous-contraire à l'harmonique s'établit de la manière suivante au moyen de la progression [1].

Les termes A, B, Γ étant supposés proportionnels, soit un terme Δ égal à deux termes A plus trois termes B plus un terme Γ ; un terme E égal à deux termes A plus deux termes B plus un terme Γ, et un terme Z égal à un terme B plus un terme Γ ; je dis que les termes Δ, E, Z forment la médiété que nous venons de dire.

En effet, deux termes A, conjointement avec un terme B, seront de nouveau au terme B, ainsi que nous l'avons démontré précédemment [2], comme le terme Δ est au terme Z. De plus, deux termes A, conjointement avec un terme B, sont l'excédent dont deux termes A plus deux termes B plus un terme Γ dépassent un terme B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes E, Z ; tandis qu'un terme B est l'excédent dont deux termes A plus trois termes B plus un terme Γ dépassent deux termes A plus deux termes B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ, E ; donc, l'excédent des termes Δ, E est à l'excédent des termes E, Z comme le terme Z est au terme Δ ; ce qui se rapporte à la médiété sous-contraire à l'harmonique [3]. Or, il est évident aussi que, si les termes A, B, Γ sont supposés être des



mentionnée, p. 52, n. 2) indique encore la seconde série des nombres pythmènes (πυθμένες), ou fondamentaux, de la médiété harmonique, et les multiples et épimores des termes de ces deux séries donnent lieu à d'autres séries, notamment la série : 12, 8, 6 que Nicomaque (voir p. 135, liv. II, chap. XXVI de l'édition de Hoche mentionnée p. 63, n. 1) considère comme étant la médiété la plus parfaite parce qu'elle correspond aux douze arêtes, aux huit angles et aux six faces du cube.

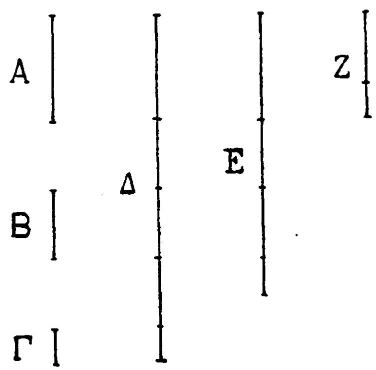
1. C'est-à-dire au moyen de la progression géométrique.
2. Voir proposition 20.
3. Voir chap. XVIII, alinéa 2.

unités, cette médiété sera exprimée par les nombres minima 6, 5, 2 (1) (2).

PROPOSITION 22. — La cinquième médiété s'établit de la manière suivante au moyen de la progression.

Posons trois termes proportionnels A, B, Γ. Soit un terme Δ égal à un terme A plus trois termes B plus un terme Γ; un terme E égal à un terme A plus deux termes B plus un terme Γ, et un terme Z égal à un terme B plus un terme Γ; je dis que les termes Δ, E, Z sont en cinquième médiété.

En effet, puisque, à cause de la progression, le terme B, conjointement avec le terme Γ, est au terme Γ comme le terme A, conjointement avec le terme B, est au terme B, la somme des termes A, B sera aussi au terme B comme l'antécédent, somme des termes A, B conjointement avec la somme des termes B, Γ, est au conséquent, somme des termes B, Γ, c'est-à-dire comme le terme E est au terme Z. Or, la somme des termes A, B est l'excédent dont un terme A plus deux termes B plus un terme Γ



1. Le texte présente ici l'interpolation : ἡ αὐτὴ καταγραφή, la figure (est) la même (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 92, l. 26).

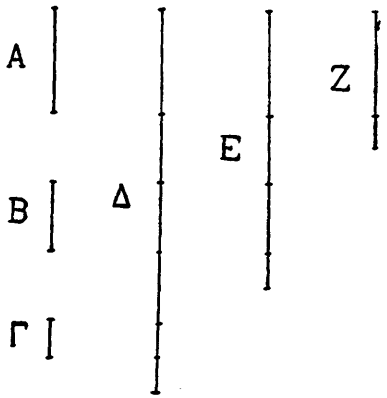
2. En notations usuelles: soit $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$. Posons: $\Delta=2A+3B+\Gamma$; $E=2A+2B+\Gamma$ et $Z=B+\Gamma$. Dès lors, on a, comme dans la proposition précédente (voir note) : $\frac{2A+B}{B}=\frac{\Delta}{Z}$. Or, $2A+B=2A+2B+\Gamma-(B+\Gamma)=E-Z$ et $B=2A+3B+\Gamma-(2A+2B+\Gamma)=\Delta-E$; donc, comme le texte: $\frac{\Delta-E}{E-Z}=\frac{Z}{\Delta}$; relation qui caractérise la quatrième médiété, ou médiété sous-contraire à l'harmonique qui, pour $A=B=\Gamma=1$, est constituée par les nombres minima: $\Delta=6$, $E=5$ et $Z=2$.

Il y a lieu de remarquer que Nicomaque donne comme exemple de la quatrième médiété la suite des nombres minima : 6, 5, 3 qui ne diffère de la suite de Pappus que par les plus petits termes 3 et 2 qui sont précisément les deux racines de l'équation du second degré à laquelle mène la recherche du plus petit terme Z dans l'expression : $\frac{\Delta-E}{E-Z}=\frac{Z}{\Delta}$; celle-ci donne, en effet : $Z=\frac{E\pm\sqrt{E^2-4\Delta(\Delta-E)}}{2}=3$ ou 2.

dépassent un terme B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes E, Z ; tandis que le terme B est l'excédent dont un terme A plus trois termes B plus un terme Γ dépassent un terme A plus deux termes B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ, E ; donc, l'excédent des termes Δ, E est à l'excédent des termes E, Z comme le terme Z est au terme E ; ce qui correspond à la cinquième médiété [1]. Et si les termes A, B, Γ sont supposés être des unités, la médiété sera exprimée par les nombres minima 5, 4, 2 [2] [3].

Proposition 23. — La sixième médiété s'établit de la manière suivante au moyen de la progression :

Posons la même progression des termes A, B, Γ. Posons un terme Δ égal à un terme A plus trois termes B plus deux termes Γ ; un terme E égal à un terme A plus deux termes B plus un terme Γ, et soit un terme Z l'excédent dont la somme des termes A, B dépasse le terme Γ ; je dis que les termes Δ, E, Z forment la médiété proposée.



En effet, puisque, à cause de la progression, le terme B, conjointement avec deux termes Γ, est à la somme des termes B, Γ comme le terme A, conjointement avec deux termes B, est à la somme des termes A, B, tous les antécédents sont aussi à tous les conséquents dans le même rapport du terme A plus trois ter-

1. Voir chap. XVIII, alinéa 3.

2. Nous abandonnons ici l'interpolation : ἡ αὐτὴ δὲ καταγραφή, et la figure (est) la même (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, p. 94, l. 18).

3. En notations usuelles : Soit $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$. Posons $\Delta=A+3B+\Gamma$; $E=A+2B+\Gamma$, $Z=B+\Gamma$. Dès lors, on a : $\frac{A+B}{B}=\frac{B+\Gamma}{\Gamma}$ d'où (Euclide, liv. V, prop. 12), comme le texte : $\frac{A+B}{B}=\frac{(A+B)+(B+\Gamma)}{B+\Gamma}=\frac{A+2B+\Gamma}{B+\Gamma}=\frac{E}{Z}$. Or, $A+B=A+2B+\Gamma-(B+\Gamma)=E-Z$ et $B=A+3B+\Gamma-(A+2B+\Gamma)=\Delta-E$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta-E}{E-Z}=\frac{Z}{E}$; relation caractérisant la cinquième médiété, ou sous-contraire à la géométrique, qui, pour $A=B=\Gamma=1$, s'exprimera par les nombres minima $\Delta=5$, $E=4$, $Z=2$.

mes B plus deux termes Γ à la somme des termes A, B conjointement avec la somme des termes B, Γ, c'est-à-dire que le terme B, conjointement avec deux termes Γ, est à la somme des termes B, Γ comme le terme Δ est au terme E. Or, le terme B, conjointement avec deux termes Γ, est l'excédent dont le terme A, conjointement avec deux termes B et un terme Γ, dépasse l'excédent dont la somme des termes A, B dépasse le terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes E, Z ; tandis que la somme des termes B, Γ est l'excédent dont le terme A, conjointement avec trois termes B et deux termes Γ, dépasse un terme A plus deux termes B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ, E ; par conséquent, l'excédent des termes Δ, E est à l'excédent des termes E, Z comme le terme E est au terme Δ ; en sorte que les termes Δ, E, Z forment la sixième médiété [1]. Et si l'on pose les termes A, B, Γ comme étant des unités, cette médiété s'établit dans les nombres minima 6, 4 et 1 [2] [3] [4].

1. Voir chap. XVIII, alinéa 4.

2. La proposition se termine, comme les deux précédentes, par l'interpolation : ἡ αὐτὴ καταγραφή, la même figure (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 96, l. 16).

3. En notations usuelles : Soit $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$, et posons : $\Delta=A+3B+2\Gamma$, $E=A+2B+\Gamma$ et $Z=A+B-\Gamma$. Dès lors, on a : $\frac{A+B}{B}=\frac{B+\Gamma}{\Gamma}$, d'où : $\frac{A+B}{A+2B}=\frac{B+\Gamma}{B+2\Gamma}$, d'où comme le texte : $\frac{B+2\Gamma}{B+\Gamma}=\frac{A+2B}{A+B}$, d'où (EUCLIDE, liv. V, prop. 12), comme le texte : $\frac{B+2\Gamma}{B+\Gamma}=\frac{(B+2\Gamma)+(A+2B)}{(B+\Gamma)+(A+B)}=\frac{A+3B+2\Gamma}{A+2B+\Gamma}=\frac{\Delta}{E}$. Or, $B+2\Gamma=A+2B+\Gamma-(A+B-\Gamma)=E-Z$ et $B+\Gamma=A+3B+2\Gamma-(A+2B+\Gamma)=\Delta-E$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta-E}{E-Z}=\frac{E}{\Delta}$; relation caractérisant la sixième médiété qui, pour $A=B=\Gamma=1$ s'établit par les nombres minima : $\Delta=6$, $E=4$ et $Z=1$.

4. Comme l'établissement de la septième médiété au moyen de la progression géométrique, annoncée au chapitre XVIII, alinéa 7, fait défaut dans les manuscrits, Commandin a supposé une lacune qu'il comble conjecturalement dans sa version latine au moyen d'une proposition que nous traduisons littéralement comme suit :

« PROPOSITION 24. — Établir la septième médiété par la proportion.

» Posons trois termes proportionnels A, B, C. Soit un terme D égal à la somme d'un terme A, de deux termes B et de deux termes C ; un terme E égal à la somme d'un terme A, d'un terme B et d'un terme C, et un terme F égal à la somme d'un terme B et d'un terme C ; je dis que les termes Δ, E, F constituent la septième médiété.

» En effet, la somme des termes A, B, C est à la somme des termes B, C comme le terme E est au terme F. Mais, la somme des termes A, B, C est l'excédent dont la somme d'un terme A, de deux termes B et de deux termes C

XXI.

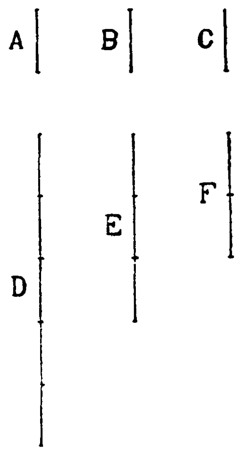
Proposition 25. — La huitième médiété s'établit de la manière suivante au moyen de la progression :

Posons trois termes proportionnels **A, B, Γ**. Soit un terme **Δ** égal à deux termes **A** plus trois termes **B** plus un terme **Γ** ; un terme **E** égal à un terme **A** plus deux termes **B** plus un terme **Γ**, et un terme **Z** égal à deux termes **B** plus un terme **Γ** ; je dis que les termes **Δ, E, Z** sont établis suivant la huitième médiété.

En effet, puisque, d'après la progression, deux termes **B**, conjointement avec le terme **Γ**, sont à la somme des termes **B, Γ** comme deux termes **A**, conjointement avec le terme **B**, sont à la somme des termes **A, B**, il en résulte que, de tous à

---

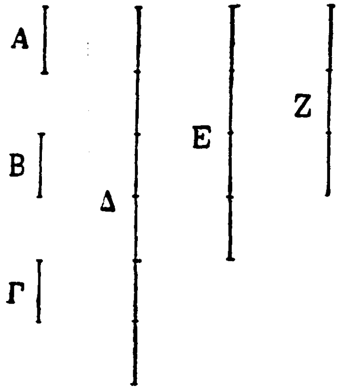
dépasse la somme des termes B, C, c'est-à-dire l'excédent des termes D, F ; tandis que la somme des termes B, C est l'excédent dont la somme d'un terme A, de deux termes B et de deux termes C dépasse la somme des termes A, B, C, c'est-à-dire l'excédent des termes D, E ; par conséquent, l'excédent des termes D, F est à l'excédent des termes D, E comme le terme E est au terme F ; ce qui répond à la septième médiété. Or, si les termes A, B, C sont des unités, elle s'établit dans les nombres minima 5, 3, 2. (Cfr. *loc. cit.*, p. 24.)



Cette solution de Commandin n'est pas satisfaisante. En effet, il pose : $D=A+2B+2C$; $E=A+B+C$, $F=B+C$ et, sans la déduire de la progression $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$, il écrit la relation : $\frac{A+B+C}{B+C}=\frac{E}{F}$; puis faisant remarquer qu'on a : $A+B+C=A+2B+2C-(B+C)=D-F$, et que $B+C=A+2B+2C-(A+B+C)=D-E$, il tire : $\frac{D-F}{D-E}=\frac{E}{F}$. D'où pour $A=B=C=1$, il exprime la septième médiété en nombres minima : $D=5$, $E=3$, $F=2$.

La solution que Hultsch substitue à celle de Commandin n'est pas plus satisfaisante ; car, il pose : $\Delta=A+B+\Gamma$; $E=A+B$ et $Z=\Gamma$ et, négligeant aussi la condition imposée : $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$, il écrit : $\Delta-Z=A+B=E$ et $\Delta-E=\Gamma=Z$, d'où : $\frac{\Delta-Z}{\Delta-E}=\frac{E}{Z}$. Puis supposant : $A=B=\Gamma=1$, il trouve les nombres minima 3, 2, 1. (Cfr. *loc. cit.*, p. 97.)

Ces deux essais de reconstitution de la proposition manquante 24 donnent lieu à la même remarque que nous avons faite à propos de la proposition manquante 19, c'est-à-dire que la lacune du texte a peut-être été intentionnelle de la part de Pappus, qui n'aura pas pu établir la septième médiété en déduction de la progression géométrique comme il l'avait annoncé.



tous (1), deux termes A, conjointement avec le terme B, sont à la somme des termes A, B comme deux termes A plus trois termes B plus un terme Γ sont à un terme A plus deux termes B plus un terme Γ, c'est-à-dire comme le terme Δ est au terme E. Or, deux termes A, conjointement avec le terme B, sont l'excédent dont deux termes A plus trois termes B plus un terme Γ dépassent deux termes B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ, Z ; tandis que la somme des termes A, B est l'excédent dont deux termes A plus trois termes B plus un terme Γ dépassent un terme A plus deux termes B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ, E ; par conséquent, l'excédent des termes Δ, Z est aussi à l'excédent des termes Δ, E comme le terme Δ est au terme E ; ce qui établit la huitième médiété (2). Et si les termes A, B, Γ sont dénommés des unités, elle sera exprimée dans les nombres minima 6, 4, 3 (3).

XXII.

Proposition 26. — La neuvième médiété s'établit de la manière suivante au moyen de la progression :

Supposant les termes A, B, Γ proportionnels, soit un terme Δ

---

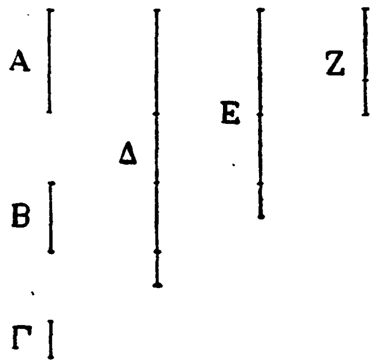
1. πάντες πρὸς πάντας, tous à tous, locution abrégée pour πάντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς πάντας τοὺς ἑπομένους, tous les antécédents à tous les conséquents.

2. Voir chapitre XVIII, alinéa 8.

3. En notations actuelles, soit : $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$ et posons : $\Delta=2A+3B+\Gamma$, $E=A+2B+\Gamma$ et $Z=2B+\Gamma$. Dès lors, on a : $\frac{A}{A+B}=\frac{B}{B+\Gamma}$, d'où : $\frac{A+(A+B)}{A+B}=\frac{B+(B+\Gamma)}{B+\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{2A+B}{A+B}=\frac{2B+\Gamma}{B+\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 12) : $\frac{2A+B}{A+B}=\frac{(2A+B)+(2B+\Gamma)}{(A+B)+(B+\Gamma)}=\frac{2A+3B+\Gamma}{A+2B+\Gamma}=\frac{\Delta}{E}$. Or, on a : $2A+B=2A+3B+\Gamma-(2B+\Gamma)=\Delta-Z$ et $A+B=2A+3B+\Gamma-(A+2B+\Gamma)=\Delta-E$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta-Z}{\Delta-E}=\frac{\Delta}{E}$; relation caractérisant la huitième médiété qui, pour : $A=B=\Gamma=1$, s'exprime par les nombres minima : $\Delta=6$, $E=4$, $Z=3$.

égal à un terme A plus deux termes B plus un terme Γ ; un terme E égal à un terme A plus un terme B plus un terme Γ, et un terme Z égal à un terme B plus un terme Γ ; je dis que les termes Δ, E, Z forment la neuvième médiété.

En effet, puisque la somme des termes B, Γ est au terme Γ comme la somme des termes A, B est au terme B, il s'ensuit que, de tous à tous (1), la somme des termes A, B est au terme B comme le terme A, conjointement avec deux termes B et le terme Γ, est à la somme des termes B, Γ, c'est-à-dire comme le terme Δ est au terme Z. Mais, la somme des termes A, B est l'excédent dont un terme A plus deux termes B plus un terme Γ dépassent la somme des termes B, Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ,Z; tandis que le terme B est l'excédent dont un terme A plus deux termes B plus un terme Γ dépassent un terme A plus un terme B plus un terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ, E ; par conséquent, l'excédent des termes Δ, Z est aussi à l'excédent des termes Δ, E comme le terme Δ est au terme Z ; ce qui caractérise la neuvième médiété (2). Et celle-ci comportera les plus petits nombres 4, 3, 2, si l'on suppose qu'il en est de même (3) pour les termes A, B, Γ (4).



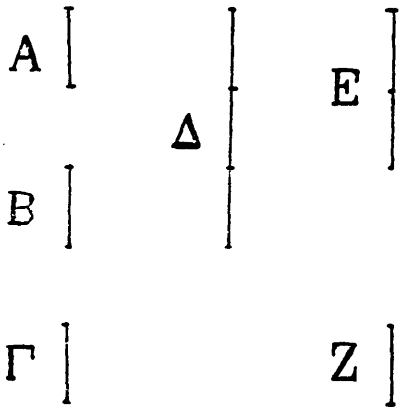
1. Voir la note 1, p. 76, pour ce qui concerne cette expression.
2. Voir chapitre XVIII, alinéa 9.
3. C'est-à-dire si les termes A, B, Γ sont aussi supposés être les plus petits nombres, soit $A=B=\Gamma=1$.
4. En notations usuelles : soit $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$ et posons $\Delta=A+2B+\Gamma$, $E=A+B+\Gamma$ et $Z=B+\Gamma$. Dès lors, on a : $\frac{A+B}{B}=\frac{B+\Gamma}{\Gamma}$, d'où : $\frac{A+B}{B}=\frac{(A+B)+(B+\Gamma)}{B+\Gamma}=\frac{A+2B+\Gamma}{B+\Gamma}=\frac{\Delta}{Z}$. Or, $A+B=A+2B+\Gamma-(B+\Gamma)=\Delta-Z$ et $B=A+2B+\Gamma-(A+B+\Gamma)=\Delta-E$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta-Z}{\Delta-E}=\frac{\Delta}{Z}$; relation caractérisant la neuvième médiété qui, pour $A=B=\Gamma=1$, donne les nombres minima : $\Delta=4$, $E=3$, $Z=2$.

XXIII.

PROPOSITION 27. — La dixième médiété s'établit de la manière suivante au moyen de la progression :

Ayant de nouveau trois termes proportionnels A, B, Γ, soit un terme Δ égal aux termes A, B, Γ, un terme E égal aux termes B, Γ et un terme Z égal au terme Γ ; je dis que les termes Δ, E, Z sont en dixième médiété.

En effet, puisque la somme des termes A, B est au terme B comme la somme des termes B, Γ est au terme Γ, c'est-à-dire comme le terme E est au terme Z, et que la somme des termes A, B est l'excédent dont les termes A, B, Γ excèdent le terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes Δ, Z ; tandis que le terme B est l'excédent dont les termes B, Γ excèdent le terme Γ, c'est-à-dire l'excédent des termes E, Z, il s'ensuit que l'excédent des termes Δ, Z est à l'excédent des termes E, Z comme le terme E est au terme Z ; ce qui correspond à la dixième médiété (1). Et elle donne les nombres minima : 3, 2, 1,. si les termes A, B, Γ sont supposés être des unités (2).



Au reste, pour la facilité de la chose, disposons en rang les nombres par lesquels sont respectivement multipliés les termes de la proportion en vue de constituer les diverses médiétés (3), et plaçons en regard les nombres minima que comportent ces

1. Voir chapitre XVIII, alinéa 10.

2. Soit $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$, et posons : $\Delta=A+B+\Gamma$, $E=B+\Gamma$ et $Z=\Gamma$. Dès lors, on a : $\frac{A+B}{B}=\frac{B+\Gamma}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$. Or, $A+B=A+B+\Gamma-\Gamma=\Delta-Z$ et $B=B+\Gamma-\Gamma=E-Z$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta-Z}{E-Z}=\frac{E}{Z}$; relation caractérisant la dixième médiété qui, pour $A=B=\Gamma=1$ donne les nombres minima : $\Delta=3$, $E=2$, $Z=1$.

3. C'est-à-dire les coefficients qui affectent les termes de la progression géométrique pour former les termes de la médiété cherchée.

médiétés. Ainsi, dans le tableau relatif à la sixième médiété, la rangée 1, 3, 2 indique que l'ensemble du premier terme de la proportion pris une fois, du second terme pris trois fois et du troisième pris deux fois réalise le premier terme de la médiété ; tandis que la seconde rangée 1, 2, 1 du tableau indique que le premier terme de la proportion pris une fois plus le second pris deux fois plus le troisième pris une fois réalise le second terme de la médiété. D'autre part, la troisième rangée du tableau, uniment établie pour les autres médiétés de la manière dont nous l'avons écrite [1], mais qui, dans ce tableau-ci, est en particulier 1, 1, 1, indique

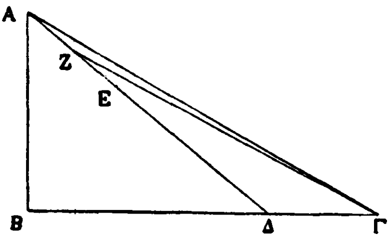
MÉDIÉTÉS.	A	B	Γ	LES TROIS PLUS PETITS NOMBRES QUI RENFERMENT LES MÉDIÉTÉS.		
Arithmétique.	2 1	3 2 1	1 1 1	6	4	2
Géométrique.	1	2 1	1 1 1	4	2	1
Harmonique.	2	3 2 1	1 1 1	6	3	2
Sous-contraire à l'harmonique.	2 2	3 2 1	1 1 1	6	5	2
Cinquième.	1 1	3 2 1	1 1 1	5	4	2
Sixième.	1 1 1	3 2 1	2 1 1	6	4	1
Septième.	1	1 1	1 1 1	3	2	1
Huitième.	2 1	3 2 2	1 1 1	6	4	3
Neuvième.	1 1	2 1 1	1 1 1	4	3	2
Dixième.	1	1 1	1 1 1	3	2	1

1. C'est-à-dire que, pour toutes les autres médiétés, la troisième rangée des coefficients est plus simple, et n'en contient qu'un ou deux toujours positifs.

que le troisième terme est issu de l'excédent dont l'ensemble du premier terme de la proportion pris une fois et du second terme pris une fois dépasse le troisième terme pris une fois (1). Enfin, dans la troisième [partie] (2) du tableau, les nombres 6, 4, 1 renferment la médiété même. [En effet, l'excédent du premier terme sur le second, c'est-à-dire l'excédent de six unités sur quatre, ou deux unités, est à l'excédent du second terme sur le troisième, c'est-à-dire de quatre unités sur une unité, ou trois unités, comme le second terme est au premier, c'est-à-dire comme quatre unités sont à six unités. Chacun des rapports (3) est d'ailleurs sous-sesquialtère (4) ; car quatre unités en présence des six, et deux unités en présence des trois, comportent le même rapport sous-sesquialtère] (5). Il faut d'ailleurs entendre les choses de la même manière pour les autres tableaux (6).

XXIV.

Proposition 28. — Le troisième problème était celui-ci : (7)



Soit le triangle rectangle ΑΒΓ ayant l'angle B droit. Menons une droite ΑΔ, et posons une droite ΔΕ égale à la droite AB. Si l'on coupe la droite EA en deux parties égales au point Z, et si l'on même la droite de jonction ZΓ, [on démon-

1. Pour l'établissement de la sixième médiété, le coefficient du troisième terme de la progression géométrique est négatif.

2. D'après Hultsch, le texte sous-entend ici, ou aura perdu, le mot μερίδος, partie (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 104, l. 3).

3. C'est-à-dire les rapports : $\frac{4}{6}$ et $\frac{2}{3}$.

4. λόγος ὑφημιόλιος, rapport sous-sesquialtère dans lequel l'un des termes est inférieur à l'autre d'une moitié.

5. La phrase placée entre crochets est une interpolation de commentateur. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 104, ll. 4-12).

6. Il est probable que le tableau récapitulatif et la partie du texte qui s'y rapporte ont été introduits par un scoliaste et, de même que nous avons montré dans les notes qui précèdent que les reconstitutions de Commandin et de Hultsch en ce qui concerne la génération de la médiété arithmétique et de la septième médiété sont illégitimes, il y a lieu de rejeter les indications du tableau relatives à ces deux médiétés.

7. Voir premier alinéa du livre III.

trera que la somme] [1] des deux côtés ΔZ, ZΓ situés à l'intérieur du triangle est plus grande que la somme des côtés extérieurs BA, AΓ.

La chose est d'ailleurs évidente ; car les droites ΓZ, ZA, c'est-à-dire les droites ΓZ, ZE sont plus grandes que la droite ΓA ; tandis que la droite ΔE est égale à la droite AB ; donc, les droites ΓZ, ZΔ sont plus grandes que les deux droites ΓA, AB [2].

Il est d'ailleurs plus correct de présenter la proposition sous la forme suivante : Supposant un triangle rectangle quelconque ABΓ, prendre un point à l'intérieur de ce triangle, et mener de ce point deux droites : l'une coupant la droite BΓ, l'autre allant au point Γ, de telle sorte que leur ensemble soit plus grand que celui des droites extérieures ; et ceci aux fins que celui auquel on fait cette proposition, après avoir mené une droite quelconque AΔ, fait la droite ΔE égale à la droite AB, et coupé la droite EA en deux parties égales, démontre que le point Z satisfait au problème ; car, si l'on mène la droite de jonction ΓZ, les deux droites ΓZ, ZΔ sont plus grandes que les droites extérieures ΓA, AB. Mais, quelle que soit la façon dont on veuille proposer la chose, il est évident qu'on la montrera d'une infinité de manières, et il ne sera pas hors de propos de traiter les problèmes de ce genre d'une manière plus générale, en les présentant, comme il va suivre, d'après les paradoxes publiés par Érycinus.

XXV.

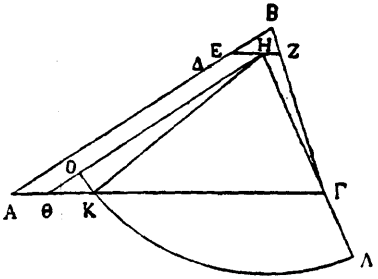
PROPOSITION 29. — Dans tout triangle, exception faite pour le triangle équilatéral et le triangle isocèle ayant la base plus petite que les côtés, il est possible d'établir, intérieurement sur la base, deux droites égales [3] à la somme des droites extérieures.

Soit d'abord un triangle non isocèle ABΓ ayant le côté AB plus grand que le côté BΓ. Divisons la somme des droites AB, BΓ en deux parties égales au point Δ ; prenons un point quelconque E

1. Lacune comblée par Hultsch au moyen de δεῖξαι συναμφοτέρας (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 104, l. 18).

2. On a : $\Gamma Z + ZA > \Gamma A$ ou : $\Gamma Z + ZE > \Gamma A$. Ajoutons de part et d'autre $AB = \Delta E$, il vient : $\Gamma Z + ZE + \Delta E > \Gamma A + AB$ ou : $\Gamma Z + Z\Delta > \Gamma A + AB$.

3. C'est-à-dire égales en tant que somme.



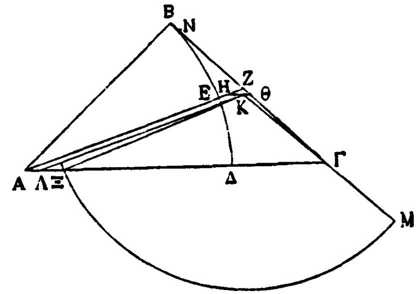
entre les points Δ, B; menons la droite EZ parallèle à la droite AΓ; prenons sur cette droite un point quelconque H; menons la droite HΘ parallèle à la droite EA, et prolongeons la droite de jonction HΓ. Puisque les droites EB, BZ sont plus grandes que la droite EZ, et les droites ΓZ, ZH plus grandes que la droite ΓH, la somme des droites EB, BΓ, conjointement avec la droite HZ, est donc plus grande que la somme des droites EZ, HΓ. Retranchons de part et d'autre la droite ZH, il s'ensuit que la somme des droites EB, BΓ est plus grande que la somme des droites EH, HΓ et, à fortiori, plus grande que la droite HΓ. Que la droite HΛ soit égale à la somme des droites EB, BΓ, et décrivons autour du centre H la circonférence de cercle ΛKO passant par le point Λ. Celle-ci coupe chacune des droites ΓΘ, ΘH, puisque la droite AE, c'est-à-dire la droite ΘH, est plus grande que la somme des droites EB, BΓ, c'est-à-dire la droite HΛ. Menons la droite de jonction KH; je dis que la somme des droites ΘH, HK est égale à la somme des droites AB, BΓ.

Or, la chose est manifeste; car la droite HΘ est égale à la droite AE et la droite KH égale à la droite HΛ, c'est-à-dire à la somme des droites EB, BΓ [1]; et cela s'obtient d'une infinité de manières.

XXVI.

Soit maintenant le triangle isocèle ABΓ ayant la droite AB égale à la droite BΓ et la droite AΓ plus grande que chacune de ces dernières. Décrivons autour du centre A la circonférence de cercle BEΔ passant par le point B; menons transversalement une

1. On a : $EB + BZ > EZ$ et $\Gamma Z + ZH > H\Gamma$; donc : $EB + BZ + \Gamma Z + ZH > EZ + H\Gamma$ ou : $EB + B\Gamma + ZH > EZ + H\Gamma$, d'où : $EB + B\Gamma > EZ + H\Gamma - ZH$ ou : $EB + B\Gamma > EH + H\Gamma$, d'où, à fortiori : $EB + B\Gamma > H\Gamma$. Posons : $H\Lambda = EB + B\Gamma$, et le cercle de centre H et de rayon HΛ coupe HΘ; car $H\Theta = AE > A\Delta > EB + B\Gamma = H\Lambda$. Dès lors, $H\Theta + HK = AE + H\Lambda = AE + EB + B\Gamma = AB + B\Gamma$.



droite AEZ coupant la droite BΓ en dehors de la circonférence [1] ; prenons, sur la droite EZ, un point quelconque H ; menons la droite HΘ parallèle à la droite AΓ, et prenons, sur cette droite, un point quelconque K. Menons la droite KΛ parallèle à la droite AZ; menons la droite de jonction KΓ que nous prolongeons sur le point M [2], et découpons une droite BN égale à la droite EH. Dès lors, la droite AH, c'est-à-dire la droite KΛ, est égale à la somme des droites AB, BN, et la droite restante NΓ est plus petite que la droite KΛ. Et puisque les droites ΘZ, ZH [3] sont plus grandes que la droite ΘH et les droites ΓΘ, ΘK plus grandes que la droite ΓK, il s'ensuit que la somme des droites ΓZ, ZH, conjointement avec la droite ΘK, est plus grande que la somme des droites ΓK, ΘH. Retranchons de part et d'autre la droite ΘK ; il s'ensuit que la somme restante des droites ΓZ, ZH est plus grande que la somme des droites ΓK, KH. Ajoutons de part et d'autre la droite AH, il s'ensuit que la somme des droites AZ, ZΓ est plus grande que la somme des droites AH, HK, KΓ. Or, les droites AB, BΓ sont plus grandes que les droites AZ, ZΓ [4] ; donc, les droites AB, BΓ sont aussi plus grandes que les droites AH, HK, KΓ; droites chez lesquelles la droite sommée ABN est égale à la droite AH [5] ; par conséquent, la droite restante NΓ est plus grande que la somme des droites HK, KΓ, et, à fortiori, plus grande que la droite KΓ. Posons une droite KM égale à la droite NΓ ; que la circonférence de cercle décrite par le point M autour du centre K coupe la droite ΓΛ au point Ξ, et menons la droite de jonction KΞ ; je dis que la somme des droites ΛK, KΞ est égale à la somme des droites AB, BΓ.

1. Ceci étant dit pour le cas où l'angle ABΓ est aigu.
2. Le point M n'est déterminé que plus loin par la construction KM = NΓ.
3. C'est-à-dire les droites ΘZ, ZH prises ensemble.
4. Euclide, liv. I, prop. 21 : « Si des extrémités d'un côté d'un triangle on mène deux droites qui se rencontrent dans ce triangle, ces deux droites seront plus courtes que les deux autres côtés du triangle, mais elles comprendront un angle plus grand ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 35.
5. Par construction.

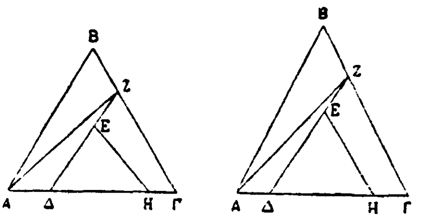
Or, la chose est manifeste ; car la droite $K\Lambda$ est égale à la somme des droites AB, BN ; tandis que la droite $K\Xi$ est égale à la droite KM, c'est-à-dire à la droite $N\Gamma$ [1] ; et cela se produit d'une infinité de manières.

XXVII.

Proposition 30. — D'autre part, je dis que, si le triangle est équilatéral, ou bien isocèle ayant la base plus petite que les côtés, il sera impossible d'établir [2] à l'intérieur des droites égales à celles de l'extérieur ; mais que les droites intérieures seront plus petites que ces dernières.

En effet, soit un triangle $AB\Gamma$ équilatéral, ou bien isocèle ayant la base $A\Gamma$ plus petite que chacune des droites AB, $B\Gamma$, et établissons à l'intérieur des droites ΔE, EH ; je dis que celles-ci sont plus petites que les droites AB, $B\Gamma$ [3].

Prolongeons la droite ΔE jusqu'au point Z et menons la droite de jonction AZ. Puisque l'angle compris sous les droites BA, $A\Gamma$ est égal à l'angle compris sous les droites $B\Gamma$, ΓA, l'angle compris sous les droites $B\Gamma$, ΓA est plus grand que celui compris sous les droites ZA, $A\Gamma$. Or, l'angle compris sous les droites $Z\Delta$, ΔA est plus grand que celui compris sous les droites $B\Gamma$, ΓA ;



donc, l'angle compris sous les droites $Z\Delta$, ΔA est, à fortiori, plus

1. Explicitement : Il résulte des constructions qu'on a : $AH = K\Lambda = AB + BN$; donc : $N\Gamma < K\Lambda$. Or, $\Theta Z + ZH > \Theta H$ et $\Gamma\Theta + \Theta K > \Gamma K$, d'où : $\Gamma\Theta + \Theta K + \Theta Z + ZH > \Gamma K + \Theta H$ ou, comme le texte : $\Gamma Z + ZH + \Theta K > \Gamma K + \Theta H$, d'où : $\Gamma Z + ZH > \Gamma K + \Theta H - \Theta K$ ou, comme le texte : $\Gamma Z + ZH > \Gamma K + KH$, d'où : $AH + \Gamma Z + ZH > AH + \Gamma K + KH$ ou, comme le texte : $AZ + \Gamma Z > AH + \Gamma K + KH$. Or, (Euclide, liv. I, prop. 21) on a : $AB + B\Gamma > AZ + \Gamma Z$; donc : $AB + B\Gamma > AH + \Gamma K + KH$. Or, on a par construction : $AB + BN = AH$, d'où : $AB + B\Gamma - (AB + BN) > AH + \Gamma K + KH - AH$ ou, comme le texte : $N\Gamma > \Gamma K + KH$, d'où, à fortiori : $N\Gamma > \Gamma K$. Posons : $KM = N\Gamma$. Or, on a par construction : $\Lambda K = AB + BN$ et $K\Xi = KM$; donc : $K\Xi = N\Gamma$. Dès lors, $\Lambda K + K\Xi = AB + BN + N\Gamma$ ou, comme le texte : $\Lambda K + K\Xi = AB + B\Gamma$.

2. C'est-à-dire d'établir sur la base du triangle, comme dans la proposition précédente.

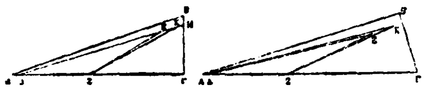
3. C'est-à-dire que l'on aura : $\Delta E + EH < AB + B\Gamma$.

grand que l'angle compris sous les droites ZA, AΔ ; en sorte que la droite AZ est aussi plus grande que la droite ZΔ. D'autre part, puisque l'angle compris sous les droites AZ, ZB est plus grand que celui compris sous les droites BΓ, ΓA, et que, par hypothèse, l'angle compris sous les droites BΓ, ΓA n'est pas plus petit que celui compris sous les droites AB, BΓ, l'angle compris sous les droites AZ, ZB sera plus grand que celui compris sous les droites AB, BZ ; en sorte que la droite AB est aussi plus grande que la droite AZ. Or, on a démontré que la droite AZ est plus grande que la droite ZΔ ; donc, la droite AB est aussi plus grande que la droite ΔZ, et, à fortiori, plus grande que la droite ΔE. On démontrera semblablement que la droite BΓ est aussi plus grande que la droite EH ; donc, les droites HE, EΔ sont plus petites que les droites AB, BΓ.

XXVIII.

Proposition 31. — Cependant, dans les triangles où s'établissent des droites intérieures égales aux droites extérieures, on peut trouver aussi des droites intérieures plus grandes que les droites extérieures [1].

Soient, dans le triangle ABΓ, les droites ΔE, EZ égales aux droites AB, BΓ. Prolongeons l'une des droites intérieures ΔE jusqu'au point H ; prenons, entre les points E, H, un point quelconque K et menons la droite de jonction KZ. Dès lors, les droites ΔK, KZ seront plus grandes que les droites ΔE, EZ ; en sorte qu'elles seront plus grandes que les droites AB, BΓ.



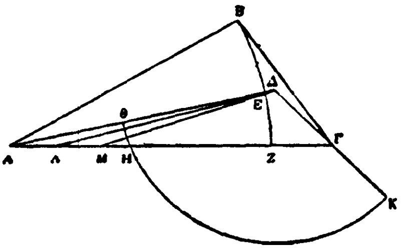
Il est d'ailleurs évident que, si le point K est pris à l'intérieur du triangle ABΓ, de manière que les droites ΔE, EZ soient comprises sous les droites reliant ce point aux points Δ, Z, comme cela se présente dans la seconde figure, il en sera comme tantôt, et la chose proposée aura lieu d'une infinité de manières dans chacun des cas.

1. Il faut entendre ici la somme de droites intérieures plus grande que la somme des deux côtés du triangle.

XXIX.

Proposition 32. — Comme tout cela semble paradoxal pour ceux qui ne connaissent pas la géométrie, il semblera encore plus paradoxal, non seulement que la somme des droites établies à l'intérieur [1] puisse égaler ou dépasser la somme des droites extérieures, mais aussi que chacune des droites intérieures puisse égaler ou dépasser chacune des droites extérieures. On démontre cela de la manière suivante :

Supposons un triangle ABΓ ayant la droite AB pas plus petite que la droite BΓ et la droite AΓ plus grande que chacune de ces dernières. Décrivons autour du centre A la circonférence de cercle BEZ passant par le point B ; prenons, entre celle-ci et la droite BΓ, un point quelconque Δ, et menons les droites de jonction AΔ, ΔΓ. Puisque la droite AΔ est plus grande que la droite AB [2] et, par hypothèse, plus grande que la droite BΓ; tandis que la droite ΔΓ est plus petite que la droite BΓ [3], si, prolongeant la droite ΔΓ, nous posons chacune des droites ΔΘ, ΔK égale à la droite BΓ, le cercle décrit par les points Θ, K autour du centre Δ coupe la droite AZ. Qu'il la coupe au point H, et prenons un point quelconque Λ entre les points A, H. Dès lors, il est évident que, si l'on mène la droite de jonction ΔΛ, les droites AΔ, ΔΛ seront respectivement plus grandes que les droites AB, BΓ [4].

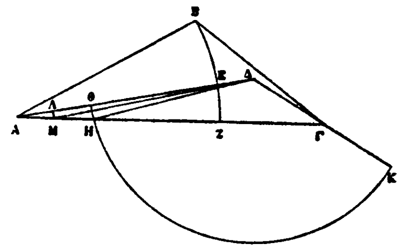


1. Sous-entendu : τοῦ τριγώνου, du triangle.
2. Par construction.
3. Euclide, liv. I, prop. 21, énoncée p. 70, n. 2.
4. Nous traduisons la dernière phrase d'après le texte grec tel qu'il a été corrigé par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 115, ll. 20-22). La figure ayant été altérée par l'adjonction de la droite MΔ, il s'en est probablement suivi une altération du texte, qui dit par erreur que les droites AΔ, MΔ sont respectivement plus grandes que les droites AB, BΓ. Commandin fait remarquer dans une note relative à cette proposition (cfr. *loc. cit.*, p. 30) que, si l'on prend deux points au lieu d'un seul entre les points A, H, le texte aurait dû dire à peu près : « et inter A, H puncta sumantur Λ, M. Perspicuum est, junctis ΔΛ, ΔM, singulas ipsarum AΔ, ΔΛ vel AΔ, ΔM singulis AB, BΓ majores esse ».

XXX.

Proposition 33. — Cependant, si l'on veut que les droites soient respectivement égales [1], il faudra supposer que la droite ΑΓ est plus grande que la droite ΑΒ et la droite ΒΓ plus petite que la droite ΒΑ.

En effet, qu'il en soit ainsi ; décrivons la circonférence ΒΕΖ de la même manière [2] ; prenons le point Δ ; menons les droites de jonction ΔΑ, ΔΓ, et, prolongeant la droite ΔΓ, posons la droite ΔΚ égale à la droite ΒΓ. Enfin, que la circonférence ΚΗΘ, menée comme tantôt [3], coupe la droite ΑΔ au point Θ et la droite ΑΖ au point Η. Or, puisque la droite ΑΒ est plus grande que la droite ΒΓ, elle sera aussi plus grande que la droite ΔΘ. Posons la droite ΔΛ qui lui soit égale, et que la circonférence décrite par le point Λ autour du centre Δ coupe la droite ΑΗ au point Μ. Dès lors, il est clair que les droites de jonction ΔΜ, ΔΗ sont respectivement égales aux droites ΑΒ, ΒΓ.



XXXI.

Proposition 34. — Mais le paradoxe est plus prononcé quand la somme des droites établies sur la base, à l'intérieur d'un triangle, est, non plus simplement égale ou supérieure à la somme des deux côtés, mais dans un rapport imposé avec cette dernière somme.

En effet, construisons les droites ΕΖ, ΖΚ égales aux droites ΑΒ, ΒΓ [4] (car il a été dit au début comment il est possible de les obtenir) [5] ; que le point Π coupe en deux parties

1. C'est-à-dire si l'on veut que deux droites menées d'un point intérieur du triangle sur la base soient respectivement égales aux côtés de ce triangle.

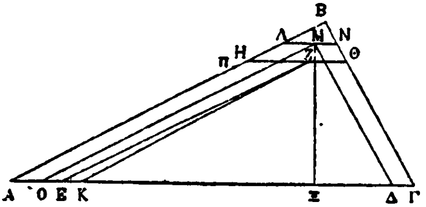
2. Voir proposition précédente.

3. Voir proposition précédente.

4. C'est-à-dire construisons : ΕΖ + ΖΚ = ΑΒ + ΒΓ.

5. Voir proposition 29. Le texte présente ici la petite interpolation : διὰ τῶν πρώτων, au moyen des premières (propositions). (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I p. 116, l. 13).

égales la droite sommée ΑΒΓ, et menons la droite ΘΖΗ parallèle à la droite ΑΓ [1]. Que le rapport donné soit celui de la droite ΑΒ à une droite ΑΛ ; menons la droite ΛΜΝ parallèle à la droite ΑΓ, et prenons, sur la droite ΛΜΝ, un point Μ de manière que les droites ΜΟ, ΜΔ menées de ce point, parallèlement aux droites ΒΑ, ΒΓ, embrassent le point Ζ. Dès lors, le rapport de la somme des droites ΑΒ, ΒΓ, c'est-à-dire la somme des droites ΕΖ, ΖΚ, à la somme des droites ΑΛ, ΝΓ, c'est-à-dire à la somme des droites ΟΜ, ΜΔ, sera aussi le rapport donné [2]. En conséquence, les droites ΕΖ, ΖΚ [3], situées à l'intérieur du triangle ΟΜΔ, ont le rapport imposé avec les droites ΟΜ, ΜΔ qui les comprennent.



Cependant, comme la droite ΛΜΝ doit tomber plus haut que la droite ΗΘ [4], il faut que la droite ΒΑ soit plus petite que le double de la droite ΑΛ (puisqu'elle est aussi plus petite que le double de la droite ΑΠ) ; en sorte que le rapport donné devra être plus petit que celui du double [5]. Or, il est évident qu'à mesure que la droite ΑΒ devient multiple de la droite ΒΓ, ou que l'angle Β devient plus obtus, les droites ΕΖ, ΖΚ se rapprochent d'autant plus du rapport du double [6], et ce rapprochement

---

1. Le texte présente ici la phrase : καὶ ἡ ΖΕ δὲ παράλληλος ἔστω τῇ ΒΑ, soit la (droite) ΖΕ parallèle à la (droite) ΒΑ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 116, l. 15-16). Cette phrase doit être abandonnée comme interpolation ; car, les droites ΕΖ, ΖΚ étant déjà établies par construction d'hypothèse, la droite ΕΖ est parallèle à la droite ΒΑ en vertu de la proposition 29.

2. Les triangles semblables ΑΒΓ, ΑΒΝ donnent : $\frac{AB}{A\Lambda}=\frac{B\Gamma}{N\Gamma}$, d'où : $\frac{AB}{A\Lambda}=\frac{AB+B\Gamma}{A\Lambda+N\Gamma}$. Or, on a par construction : $EZ + ZK = AB + B\Gamma$, et les droites ΟΜ, ΜΔ, respectivement parallèles aux droites ΑΒ, ΒΓ, donnent : $OM + M\Delta = A\Lambda + N\Gamma$; donc, comme le texte : $\frac{AB}{A\Lambda}=\frac{EZ+ZK}{OM+M\Delta}$.

3. C'est-à-dire la somme de ces droites.

4. Le point Μ a été pris tel que les droites ΜΟ, ΜΔ embrassent le point Ζ et, par suite, les droites ΕΖ, ΖΚ.

5. En vertu de la proposition 29, le point Η est pris entre les points Π et Β. Dès lors, on a par construction : $AB + B\Gamma = 2A\Pi$; donc : $AB < 2A\Pi$. Or, $A\Lambda > A\Pi$; donc: $AB < 2A\Lambda$, d'où la condition: $\frac{AB}{A\Lambda}<\frac{2}{1}$, d'où il suit: $\frac{EZ+ZK}{OM+M\Delta}<\frac{2}{1}$.

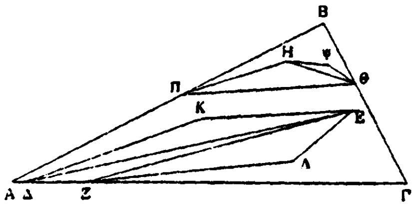
6. Si la somme $AB + B\Gamma$ des côtés est constante, il résulte de la relation $AB + B\Gamma = 2A\Pi$, qu'à mesure que le côté ΑΒ augmente au détriment du

augmente encore si les droites EZ, ZK ne sont pas égales aux droites AB, ΒΓ, mais plus grandes qu'elles [1] ; ce qui est manifeste si, menant la perpendiculaire ΜΞ, ces droites sont considérées par rapport aux droites OM, ΜΞ. La même chose est du reste possible par d'autres voies ; mais cette manière-ci suffit pour la mettre en évidence.

XXXII.

Proposition 35. — Ce n'est pas seulement sur la base d'un triangle que s'établissent intérieurement des droites qui, prises ensemble, sont plus grandes que les droites extérieures, mais, dans un quadrilatère, il s'établit aussi deux droites plus grandes que trois droites et trois plus grandes que trois [2]. Et pareillement, dans le cas d'un plus grand nombre de côtés, tant de droites intérieures peuvent être plus grandes qu'autant de droites extérieures.

En effet, si l'on a un triangle ΑΒΓ dans lequel sont établies des droites ΔΕ, EZ plus grandes que les droites AB, ΒΓ [3], et si l'on mène transversalement une droite quelconque ΠΘ au-dessus du point E, les droites ΔΕ, EZ seront plus grandes que les droites ΑΠ, ΠΘ, ΘΓ dans le quadrilatère ΑΠΘΓ [4].



Si l'on brise une ligne quel-

côté ΒΓ, la grandeur AB se rapproche de la grandeur 2ΑΠ, c'est-à-dire (voir note précédente) de la grandeur 2ΑΛ, d'où $EZ + ZK$ se rapproche de $2(OM + M\Delta)$.

Si, au contraire, les côtés AB, ΒΓ sont constants, et si la base ΑΓ augmente ou, comme dit le texte, si l'angle B devient de plus en plus obtus, les droites EZ, ZK augmentent, tandis que le point M pouvant être abaissé, les droites OM, ΜΔ peuvent diminuer ; en sorte que $EZ + ZK$ se rapproche encore de $2(OM + M\Delta)$.

1. Si, au lieu d'avoir par construction : $EZ + ZK = AB + B\Gamma$, on avait : $EZ + ZK > AB + B\Gamma$, les relations précédentes montrent que $EZ + ZK$ se rapprocherait encore davantage de la valeur $2(OM + M\Delta)$.

2. C'est-à-dire qu'il est possible d'établir sur un côté d'un quadrilatère deux et trois droites intérieures dont la somme est plus grande que la somme des trois autres côtés.

3. C'est-à-dire un triangle dans lequel on a : $\Delta E + EZ > AB + B\Gamma$.

4. Si l'on mène une droite ΠΘ, on aura : $\Delta E + EZ > A\Pi + \Pi\Theta + \Theta\Gamma$ dans le quadrilatère ΑΠΘΓ.

conque ΔKE, l'ensemble des trois droites ΔK, KE, EZ sera plus grand que celui des trois droites AΠ, ΠΘ, ΘΓ (1).

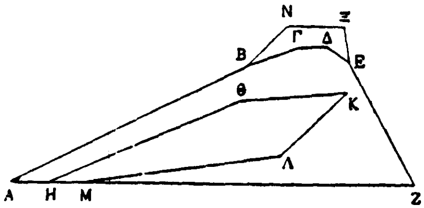
Si l'on brise de nouveau une ligne ΠHΘ, les droites ΔE, EZ, de même que les droites ΔK, KE, EZ, seront plus grandes que les quatre droites AΠ, ΠH, HΘ, ΘΓ dans le quintilatère (2).

Si, de plus, on brise une ligne EΛZ, les quatre droites ΔK, KE, EΛ, ΛZ seront plus grandes que les quatre droites AΠ, ΠH, HΘ, ΘΓ (3). Enfin, si l'on brise une ligne ΠHΨΘ, et si la brisure se produit en plus de points que H, Ψ et K, Λ, il se produira la même chose. Et celui qui imposera indéfiniment autant de droites intérieures qu'il y en a d'extérieures, fera les constructions de la même manière.

XXXIII.

Proposition 36. — Il est possible aussi que l'ensemble de droites intérieures soit égal à l'ensemble de quel que soit le nombre des droites extérieures qui les entourent.

En effet, si, comme on l'a démontré précédemment, on construit des droites HΘ, ΘK, KΛ, ΛM (4) plus grandes que des droites en nombre quelconque AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EZ, et si, en vue d'égalité, on brise une ligne BNΞE plus grande que la ligne BΓΔE (5), la chose proposée sera obtenue.



1. Si l'on base une ligne brisée ΔKE sur la droite ΔE on aura : $\Delta K + KE + EZ > A\Pi + \Pi\Theta + \Theta\Gamma$ dans le même quadrilatère AΠΘΓ.

2. Si l'on base une ligne brisée ΠHΘ sur la droite ΠΘ on aura : $\Delta E + EZ > A\Pi + \Pi H + H\Theta + \Theta\Gamma$ et $\Delta K + KE + EZ > A\Pi + \Pi H + H\Theta + \Theta\Gamma$ dans le quintilatère (ἐν πενταπλεύρῳ) AΠHΘΓ.

3. Si l'on base une ligne brisée EΛZ sur la droite EZ on aura : $\Delta K + KE + E\Lambda + \Lambda Z > A\Pi + \Pi H + H\Theta + \Theta\Gamma$ dans le quintilatère AΠHΘΓ.

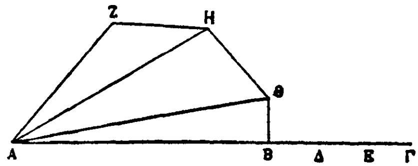
4. Sous-entendu ὁμοῦ, (prises) ensemble.

5. τῷ ἴσῳ μείζων τῆς BΓΔE. Expression concise signifiant que la ligne brisée BNΞE doit être construite telle qu'elle dépasse la ligne brisée BΓΔE d'une longueur égale à celle dont la ligne brisée HΘKΛM dépasse la ligne brisée ABΓΔEZ, c'est-à-dire telle que l'on ait : $BN + N\Xi + \Xi E - (B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E) = H\Theta + \Theta K + K\Lambda + \Lambda M - (AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EZ)$; construction qui fera l'objet de la proposition 37.

XXXIV.

Proposition 37. — Il est d'ailleurs facile de briser, à partir des deux points B, E, la ligne BNΞE (1) généralement égale à une droite donnée, et présentant un nombre donné de brisures.

En effet, soient A, B des points donnés, et soit AΓ une droite de grandeur donnée, plus grande que la droite AB. Divisons la droite BΓ en un certain nombre de droites BΔ, ΔE, EΓ, inférieur d'une unité au nombre des brisures. Brisons d'une part une ligne AΘB excédant la droite AB de la droite BΔ (car cela se fait facilement) (2) ; d'autre part, brisons une ligne AHΘ excédant



la droite AΘ de la droite ΔE ; enfin, brisons une ligne AZH excédant la droite AH de la droite EΓ. Dès lors, le nombre de droites AZ, ZH, HΘ, ΘB sera égal à celui qui est donné, et la droite composée de toutes ces dernières sera égale à la droite AΓ (3) ; car il est facile de voir par la construction qu'il en est ainsi et que cela s'obtient indéfiniment.

XXXV.

Proposition 38. — On peut aussi trouver un parallélogramme sur la base duquel s'établiront intérieurement deux droites (4) égales aux trois droites qui les entourent, ou bien plus grandes que ces dernières, en enseignant d'abord ce qui suit :

Soit la droite AB (5) plus grande à l'égard de la droite BΓ

---

1. La mention des points B, E et de la ligne brisée BNΞE n'est faite ici que pour marquer le rattachement de la proposition à celle qui précède.

2. C'est-à-dire que cela revient à construire un triangle d'espèce indéterminée, de base AB donnée, et dont la somme AΔ des deux autres côtés est donnée.

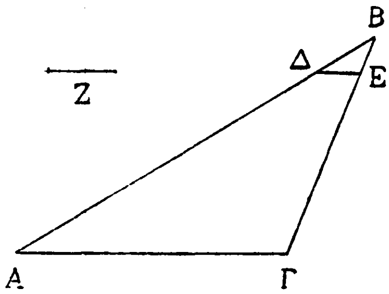
3. Les constructions des trois lignes brisées donnent respectivement : $A\Theta + \Theta B = AB + B\Delta$; $AH + H\Theta = A\Theta + \Delta E$ et $AZ + ZH = AH + E\Gamma$, d'où additionnant membre à membre, il vient, comme dans le texte : $AZ + ZH + H\Theta + \Theta B = AB + B\Delta + \Delta E + E\Gamma = A\Gamma$.

4. Sous-entendu συναμφότεραι, (droites prises) l'une et l'autre ensemble.

5. C'est-à-dire la droite AB dans le triangle ABΓ donné d'espèce.

d'une droite donnée qu'en raison (¹) ; mener une parallèle ΔE à la droite AΓ et faire en sorte que la droite AΔ soit à la somme des droites ΔE, BΓ dans la même raison.

Que ce soit chose faite. Puisque la droite AB dépasse d'une droite donnée la droite BΓ dans le rapport qu'elle a avec celle-ci, que ce rapport soit celui de la droite AB à la droite BΓ conjointement avec une droite donnée qui soit la droite Z (²). Or, ce rapport est le même que celui de la droite AΔ à la somme des droites ΔE, BΓ (³) ; donc, le rapport restant de la droite BΔ à l'excédent des droites Z, ΔE est aussi le même (⁴). Or, la droite Z est donnée ; donc, la droite ΔE est donnée aussi (⁵) ;



1. Ἔστω ἡ AB τῆς BΓ δοθείσῃ μείζων ἢ ἐν λόγῳ, expression singulière signifiant, en notations actuelles, qu'étant donnés le rapport $\frac{m}{n}=k$ et une droite l, on a par hypothèse : $\frac{\mathrm{AB}-l}{\mathrm{B\Gamma}}=k$ ou $\mathrm{AB}=k.\ \mathrm{B\Gamma}+l$, c'est-à-dire que la droite AB dépasse d'une droite donnée l une multiplicité donnée k de la droite BΓ, ou signifiant d'une manière générale qu'un rapport $\frac{a-d}{b}$ et une grandeur d sont donnés sans que les grandeurs a, b soient données. Cette relation qui embarrasse un peu les raisonnements est exprimée de la même manière assez obscure que l'on rencontre dans les *Données* d'Euclide, où la *Définition* II énonce sous la forme d'une égalité à deux termes une égalité à trois termes, en disant, comme l'a traduit Peyrard (vol. III, p. 303) : « Une grandeur est plus grande à l'égard d'une autre d'une donnée qu'en raison quand la grandeur donnée étant retranchée, le reste a, avec l'autre, une raison donnée. »

2. Le texte ne démontre pas que la droite Z est une donnée résultant des deux données $\frac{m}{n}=k$ et l de la relation d'hypothèse : $\frac{\mathrm{AB}-l}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{m}{n}$, et Commandin y supplée par une fort longue démonstration géométrique à la manière des Anciens. (Cfr. *loc. cit.*, p. 35). Mais, algébriquement, en posant, comme le texte : $\frac{\mathrm{AB}-l}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{Z}}$, on a : $\frac{\mathrm{AB}-l}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{AB}-l-\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}-(\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{Z})}=\frac{l}{\mathrm{Z}}$, d'où : $\mathrm{Z}=\frac{l.\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}-l}$ donnée.

3. Le problème étant supposé résolu, on a : $k=\frac{\mathrm{AB}-l}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{Z}}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta E}+\mathrm{B\Gamma}}$.

4. La relation de la note précédente donne, comme le texte : $k=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{Z}}=\frac{\mathrm{AB}-\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{Z}-(\mathrm{\Delta E}+\mathrm{B\Gamma})}=\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{Z}-\mathrm{\Delta E}}$.

5. Si, pour suppléer au laconisme du texte, on représente par k' le rapport donné $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}$ dans le triangle ABΓ donné d'espèce, les triangles semblables ABΓ,

donc elle est donnée de position (1) ; en sorte que, si la droite AB est plus grande que le double de la droite BΓ, il sera possible de mener la parallèle ΔE de manière que la droite AΔ soit le double de la somme des droites ΔE, BΓ (2).

XXXVI.

PROPOSITION 39. — Posons donc un tel triangle ABΓ (3), de manière que la droite AB soit plus grande que le double de la droite BΓ et que la droite AΓ soit le double de la droite ΓB, et menons la parallèle ΔE faisant en sorte que la droite AΔ soit le double de la somme des droites ΔE, BΓ. Posons, en prolongement de droite (4), la droite AZ double de la droite ΔE, et complétons le parallélogramme ΓH (5).

En effet, puisque la droite ZA est le double de la droite ΔE

ΔBE donnent : $\frac{B\Delta}{\Delta E}=\frac{AB}{A\Gamma}=k'$, d'où : $B\Delta=k'\times\Delta E$. Or, la relation de la note précédente donne : $B\Delta=k\times(Z-\Delta E)$; donc : $k\times(Z-\Delta E)=k'\times\Delta E$, d'où : $\Delta E=\frac{k.Z}{k+k'}$. Or, on a (note antépénultième) : $k=\frac{l}{Z}$, ou : $k.Z=l$; donc : $\Delta E=\frac{l}{k+k'}$, d'où la droite ΔE est donnée de grandeur.

1. Car la droite ΔE doit être parallèle à la droite AΓ ; donc, le point Δ sera donné en menant par un point pris sur la droite AΓ, à la distance donnée ΔE du point Γ, une parallèle à la droite BΓ.

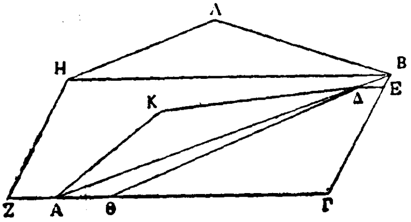
2. Si, conformément au cas général qui précède, le rapport donné est : $\frac{m}{n}=k=2$, c'est-à-dire, si l'on a : $\frac{AB-l}{B\Gamma}=2$, d'où : $AB=2B\Gamma+l$, d'où, comme le texte : $AB>2B\Gamma$, il s'ensuit que la relation : $\frac{A\Delta}{\Delta E+B\Gamma}=k$, dont la possibilité à été démontrée, devient : $\frac{A\Delta}{\Delta E+B\Gamma}=2$, d'où, comme le texte : $A\Delta=2\,(\Delta E+B\Gamma)$. Bien que les manuscrits ne présentent pas de lacunes dans le texte de cette proposition, Hultsch le considère néanmoins comme ayant été fortement altéré et même corrompu, surtout dans la dernière phrase, dont le sens paraît lui avoir échappé (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 125, et vol. III, *appendix*, pp. 1200-1221). Nous ne partageons pas son opinion ; car si le texte est en réalité trop concis, il n'est cependant pas obscur.

3. C'est-à-dire tel que celui qui a été considéré comme étant donné de figure dans la proposition précédente.

4. C'est-à-dire en prolongement de la droite AΓ.

5. Hultsch suppose que l'énoncé présente ici une lacune, et sa version latine propose de la combler conjecturalement comme suit : « dico in basi parallelogrammi ZHBΓ duas rectas constitui posse, quarum summa aequalis sit summae trium parallelogrammi laterum ipsas comprehendentium, itemque duas rectas, quarum summa major sit quam eorundem laterum ». (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 127, ll. 1-5).

et la droite AΓ le double de la droite ΓB, la droite entière ZΓ, c'est-à-dire la droite HB, sera le double de la somme des droites ΔE, BΓ. En conséquence, la droite HB est égale à la droite AΔ. Puisque la droite AΔ est plus grande que le double de la droite BΓ, amenons une droite ΔΘ double de la droite BΓ. En conséquence, la droite ΔΘ est égale aux droites HZ, BΓ. Or, on a démontré aussi que la droite AΔ est égale à la droite HB ; donc, les droites AΔ, ΔΘ sont égales aux droites ZH, HB, BΓ [1].



Il est d'ailleurs évident que les droites AΔ, ΔΘ peuvent aussi être plus grandes que les droites ZH, HB, BΓ [2].

Et si l'on prend un point K, les droites AK, KΔ, ΔΘ seront, à fortiori, plus grandes que les droites extérieures [3].

Enfin, si l'on brise une ligne HΛB dépassant la droite HB d'autant que ces dernières [4] sont plus grandes [5], les droites AK, KΔ, ΔΘ seront aussi égales aux droites ZH, HΛ, ΛB, BΓ dans le quintilatère ; et la manière sera la même dans les plurilatères, ainsi que nous l'avons démontré antérieurement pour les droites établies dans un quadrilatère quelconque [6].

---

1. On a par construction : $ZA = 2\Delta E$ et, par hypothèse : $A\Gamma = 2\Gamma B$; donc : $ZA + A\Gamma = Z\Gamma = 2(\Delta E + \Gamma B)$, d'où, comme le texte : $HB = 2(\Delta E + \Gamma B)$. Or, on a par hypothèse : $A\Delta = 2(\Delta E + \Gamma B)$; donc : $HB = A\Delta$ (I). D'autre part, puisque la relation $A\Delta = 2(\Delta E + \Gamma B)$ donne : $A\Delta > 2\Gamma B$, posons : $\Delta\Theta = 2\Gamma B$, d'où : $\Delta\Theta = ZH + \Gamma B$ (II). Ajoutons les égalités (I), (II) membre à membre, il vient, comme le texte : $A\Delta + \Delta\Theta = ZH + HB + B\Gamma$, et ces dernières droites sont les côtés du parallélogramme ZHBΓ à l'intérieur duquel sont établies les droites AΔ, ΔΘ.

2. C'est-à-dire qu'en vertu de la proposition 31, on pourra établir aussi des droites intérieures telles que l'on ait : $A\Delta + \Delta\Theta > ZH + HB + B\Gamma$.

3. C'est-à-dire que, si l'on prend un point quelconque K à l'intérieur du parallélogramme, mais non situé sur les droites AΔ, ΔΘ, et si l'on mène les droites de jonction AK, KΔ, l'inégalité de la note précédente devient, à fortiori : $AK + K\Delta + \Delta\Theta > ZH + HB + B\Gamma$.

4. C'est-à-dire les droites AK, KΔ, ΔΘ.

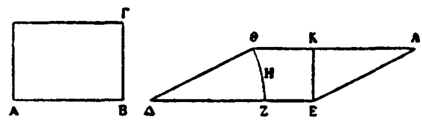
5. C'est-à-dire plus grandes que la somme des droites extérieures ZH, HB, BΓ.

6. Si l'on mène la ligne brisée HΛB telle que l'on ait : $H\Lambda + \Lambda B - HB = AK + K\Delta + \Delta\Theta - (ZH + HB + B\Gamma)$, il vient dans le pentagone ZHΛBΓ, comme dans le texte : $AK + K\Delta + \Delta\Theta = ZH + H\Lambda + \Lambda B + B\Gamma$.

XXXVII

PROPOSITION 40. — Les choses suivantes se rattachent aussi à celles que nous venons de dire : L'aire d'un parallélogramme étant donnée, il est possible de trouver un autre parallélogramme, de manière que celui-ci constitue une partie du parallèlogramme donné, et que chaque côté soit multiple de chaque côté suivant un nombre donné.

En effet, soit le parallélogramme ΑΒΓ ; prenons les droites ΕΔ, ΔΖ respectivement multiples des droites ΑΒ, ΒΓ suivant des nombres donnés, et menons la droite ΕΚ à angles droits sur la droite ΔΕ. Investissons (1), sous les droites ΔΕ, ΕΚ, la partie imposée du parallélogramme ΑΓ (2) ; menons par le point Κ la droite ΘΚΛ parallèle à la droite ΔΕ ; que la circonférence ΖΗΘ décrite autour du centre Δ coupe la droite ΘΚΛ au point Θ, et menons la droite ΕΛ parallèle à la droite de jonction ΔΘ. Il ressort évidemment de la construction que le parallélogramme ΔΛ est la partie donnée du parallélogramme rectangle ΑΓ, et que les côtés sont respectivement des multiples des côtés suivant les nombres proposés.



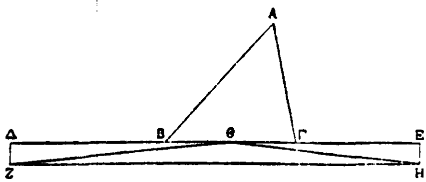
XXXVIII.

PROPOSITION 41. — Derechef, on trouve un triangle plus petit qu'un triangle donné ayant chaque côté plus grand que chaque côté.

En effet, soit le triangle ΑΒΓ ; prolongeons la base ΒΓ de part et d'autre, et posons la droite ΒΔ égale à la droite ΑΒ et la droite ΓΕ égale à la droite ΑΓ. Appliquons sur la droite ΔΕ un parallélogramme ΔΗ équivalent au triangle ΑΒΓ ; prenons un point quelconque Θ sur la droite ΒΓ, et menons les droites de

1. ἀπειλήφθω.

2. C'est-à-dire : prenons sur la perpendiculaire indéfinie ΕΚ un point Κ tel que le rectangle investi sous les droites ΔΕ, ΕΚ soit la portion imposée du parallélogramme ΑΒΓ.

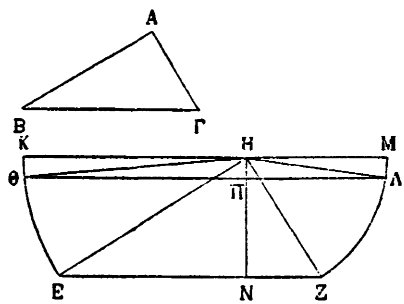


jonction ΘZ, ΘH. Et puisque la droite AB est égale à la droite BΔ, la droite ΔΘ est donc plus grande que la droite BA. On démontrera pareillement que la droite EΘ est plus grande que la droite AΓ. Or, la droite ZH est aussi plus grande que la droite BΓ ; donc, les trois droites ΘZ, ZH, HΘ sont respectivement plus grandes que les droites AB, BΓ, ΓA. Or, puisque le parallélogramme ΔH est le double du triangle ZHΘ, mais que le parallélogramme ΔH équivaut au triangle ABΓ, il s'ensuit que le triangle ABΓ, ayant de plus petits côtés, est plus grand que le triangle ZHΘ (1).

XXXIX.

Proposition 42. — Ce qui précède appartient aux paradoxes, mais il est encore plus paradoxal de trouver un triangle constituant lui-même une partie d'un triangle donné, en ayant chaque côté multiple de chaque côté suivant des nombres donnés [comme cela a été dit précédemment (2) pour le parallélogramme] (3), [ou bien plus grand sinon multiple] (4).

Soit, en effet, le triangle ABΓ, et établissons le triangle EZH ayant chaque côté multiple de chaque côté du triangle ABΓ suivant des nombres donnés. Décrivons autour du centre H la circonférence EΘK passant par le point E et la circonférence ZΛM passant par le point Z. Menons par le point H la droite KHM parallèle à la droite EZ, et menons du



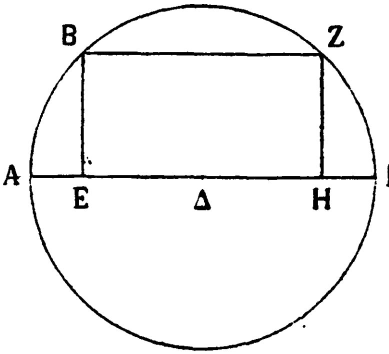
1. Sous-entendu : triangle ayant les côtés respectivement plus grands que ceux du triangle ABΓ.
2. Voir proposition 40.
3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 130, ll. 8-9).
4. Restauration de Hultsch qui suppose ici une omission de copiste (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 130, l. 9).

point H la perpendiculaire HN sur la droite EZ. Que le rectangle compris sous les droites KM, HΠ soit la partie imposée du triangle ABΓ (1) ; menons la droite ΘΠΛ parallèle à la droite KM et menons les droites de jonction HΘ, HΛ. Dès lors, il résulte manifestement de la construction que le triangle ΘHΛ est plus petit que la partie assumée du triangle ABΓ (car la droite ΘΛ est plus petite que la droite KM) (2), et que chacun de ses côtés est multiple suivant des nombres donnés de chacun des côtés du triangle ABΓ, ou bien plus grand [sinon multiple] (3), (car la droite ΘΛ est plus grande que la droite EZ) (4).

XL.

Inscrivons les cinq polyèdres dans une sphère donnée (5) ; mais exposons au préalable les choses suivantes.

Proposition 43. — Soit, dans une sphère, le cercle ABΓ dont AΓ est le diamètre et Δ le centre, et soit proposé d'insérer dans ce cercle une droite parallèle au diamètre AΓ et égale à une droite donnée pas plus grande que ce diamètre AΓ.



Posons une droite EΔ égale à la moitié de la droite donnée ; menons la droite EB à angles droits sur le diamètre AΓ et la

1. Nous abandonnons ici les mots interpolés : τοῦτο γὰρ προδέδεικται, car cela a été démontré précédemment (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 130, l. 18). Commandin avait déjà négligé ces mots dans sa version latine en faisant remarquer : « Nos consulto omisimus ; neque enim hoc a Pappo ante demonstratum est, sed ex elementis petitur » (Cfr. *loc. cit.*, p. 38, l. 5).

2. On a : $\Theta\Pi < \Theta H = KH$ et $\Pi\Lambda < \Lambda H = HM$; donc : $\Theta\Lambda < KM$; donc : triangle $\Theta H\Lambda < \frac{KM \times H\Pi}{2}$.

3. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 130, l. 23).

4. On a : $\Theta H = EH$, $H\Lambda = HZ$ et $\Theta\Lambda > EZ$.

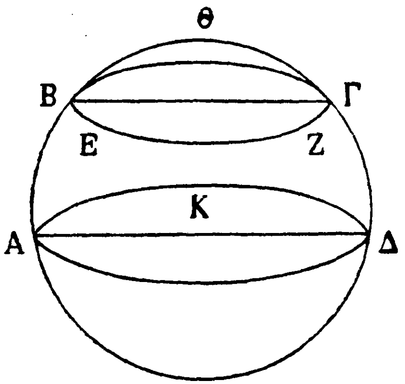
5. C'est-à-dire les cinq polyèdres réguliers, inscriptibles dans la sphère, dont il est question dans le *Timée* de Platon (voir éd. précitée de la traduction de Platon par Aimé-Martin, vol. II, pp. 651 et suiv.), et qui forment l'objet des propositions 13 à 17 du Livre XIII des *Éléments* d'Euclide.

droite BZ parallèle à la droite ΑΓ, laquelle sera égale à la droite donnée ; car elle est le double de la droite ΕΔ (puisqu'elle est aussi égale à la droite ΕΗ, la droite ΖΗ étant menée parallèlement à la droite ΒΕ).

XLI.

Proposition 44. — Soient, dans une sphère, les cercles parallèles ΑΚΔ, ΒΕΖΓ ; que la droite menée par les points Β, Γ soit un diamètre d'un cercle, et qu'il soit proposé de mener un diamètre du cercle ΑΚΔ parallèlement au diamètre passant par les points Β, Γ.

Étendons par les points Β, Γ un plan perpendiculaire au cercle, lequel déterminera comme section le cercle le plus grand ΑΒΓΔ. Le cercle ΑΒΓΔ passera donc par les pôles des cercles et coupera



aussi le cercle ΑΚΔ en deux parties égales (1). En conséquence, la droite reliant les points Α, Δ est un diamètre parallèle à la droite reliant les points Β, Γ. Or, cela est manifeste. Coupons, en effet, l'arc ΒΓ en deux parties égales au point Θ. Dès lors, puisque l'arc ΘΑ est égal à l'arc ΘΔ (car ils sont issus du pôle) (2), arcs chez lesquels l'arc ΘΒ est égal à l'arc ΘΓ, il

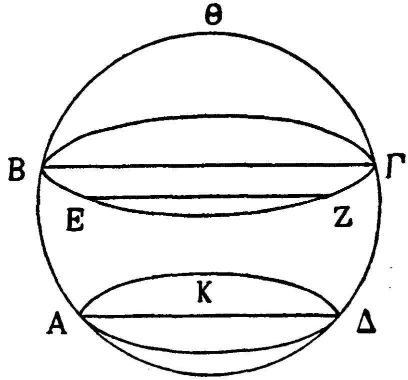
1. Théodose de Tripoli, *Les Sphériques*, liv. I, prop. XIII, énoncée : « Lorsque, dans une sphère, un cercle le plus grand coupe un des cercles de la sphère à angles droits, il le coupe en deux parties égales et en passant par les pôles. » (*Les Sphériques de Théodose de Tripoli. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke.* Bruges, 1927, gr. in-8° ; voir p. 19). On trouvera le texte grec de cette proposition dans l'édition critique : *Theodosius Tripolites Sphaerica von J. L. Heiberg.* (*Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, philologisch-historische Klasse, neue Folge, Bd. XIX*, 3). Berlin, 1927, p. 25.

2. ἡ περιφέρεια ἐκ τοῦ πόλου, l'arc issu du pôle ; expression qui correspond à ce que nous appelons maintenant « le rayon sphérique », c'est-à-dire la longueur de l'arc de grand cercle qui va du pôle d'un cercle de la sphère à un point quelconque de la circonférence de ce cercle. Au contraire, l'expression ἡ εὐθεῖα ἐκ τοῦ πόλου, la droite issue du pôle, correspond à ce que nous appelons « la distance polaire », c'est-à-dire la distance rectiligne qui sépare du pôle d'un cercle de la sphère un point quelconque de la circonférence de ce cercle.

s'ensuit que l'arc restant AB est égal à l'arc restant ΓΔ (1). En conséquence, le diamètre reliant les points A, Δ est parallèle au diamètre reliant les points B, Γ.

PROPOSITION 45. — Mais, qu'une droite reliant des points E, Z (2) ne soit pas un diamètre, et qu'il soit proposé de mener un diamètre du cercle AKΔ parallèlement à la droite qui relie les points E, Z.

Posons des arcs EB, ZΓ égaux l'un et l'autre à la moitié de l'excédent dont le demi-cercle dépasse l'arc EZ, et décrivons pareillement (3), par les points B, Γ, le cercle le plus grand ABΓΔ. Dès lors, le diamètre qui relie les points A, Δ du cercle AKΔ sera parallèle à la droite qui relie les points E, Z, parce que cette dernière est aussi parallèle au diamètre qui relie les points B, Γ (4).



XLII.

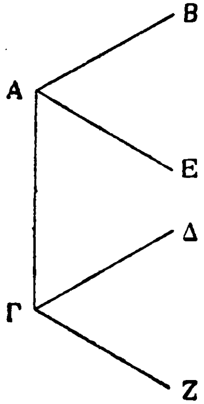
PROPOSITION 46. — Soient, dans des plans parallèles, les droites parallèles AE, ΓZ, et menons, dans ces mêmes plans, du même côté du plan étendu par les droites AE, ΓZ, des droites AB, ΓΔ formant des angles égaux compris sous les droites

1. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. II, prop. X : « Si l'on a des cercles parallèles dans une sphère, et si l'on décrit, par leurs pôles, des cercles les plus grands, les arcs des cercles parallèles situés entre les cercles les plus grands sont semblables, et les arcs des cercles les plus grands situés entre les cercles parallèles sont égaux ». (Voir éd. précitée de la trad. de P. Ver Eecke, p. 43, ou bien l'éd. précitée du texte grec de Heiberg, p. 55).

2. C'est-à-dire dans le cercle BEZΓ, parallèle au cercle AKΔ, situés tous deux dans une sphère.

3. C'est-à-dire comme dans la proposition qui précède immédiatement.

4. EUCLIDE, liv. XI, prop. 9 : « Les droites qui sont parallèles à une même droite, sans être dans le même plan que cette droite, sont cependant parallèles entre elles. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 22.



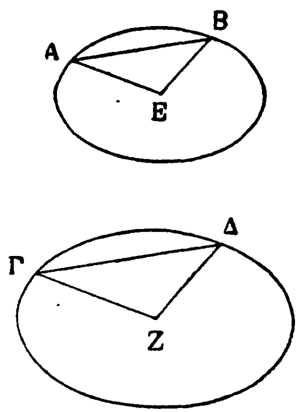
BA, AE et sous les droites ΔΓ, ΓZ ; je dis que les droites AB, ΓΔ sont aussi parallèles, c'est-à-dire que le plan étendu par les points B, A, Γ détermine la droite ΓΔ dans le plan passant par les points Δ, Γ, Z.

En effet, s'il détermine une autre droite dans ce plan, elle comprendra avec la droite ΓZ un angle égal à celui qui est compris sous les droites BA, AE ; ce qui est impossible ; car on a supposé que l'angle compris sous les droites BA, AE est égal à l'angle compris sous les droites ΔΓ, ΓZ.

XLIII.

Proposition 47. — Il ressort clairement de ce qui précède que, si l'on a des cercles dans des plans parallèles [1] et, dans ces cercles, des droites parallèles AB, ΓΔ qui découpent, des mêmes côtés des centres E, Z, des segments semblables des cercles, la droite AE sera parallèle à la droite ΓZ et la droite BE parallèle à la droite ΔZ.

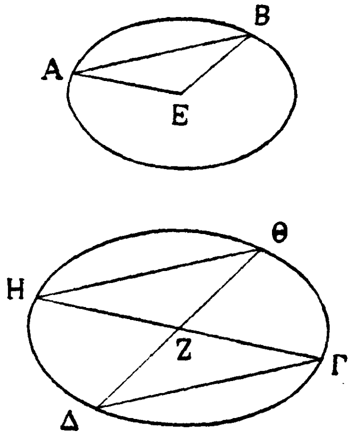
En effet, les angles A et Γ, ainsi que les angles B et Δ, deviennent égaux [2] à cause de la similitude des segments, et les parallèles AB, ΓΔ sont dans des plans parallèles.



1. Le texte de Hultsch abandonne ici les mots interpolés ὡς ὑπογεγραμμένοι, comme (ceux qui sont) décrits ci-dessous. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 134, l. 22).
2. Le texte présente ici l'interpolation ἴσαι ἀλλήλαις, égaux entre eux. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, *vol.* I, p. 136, l. 2).

XLIV.

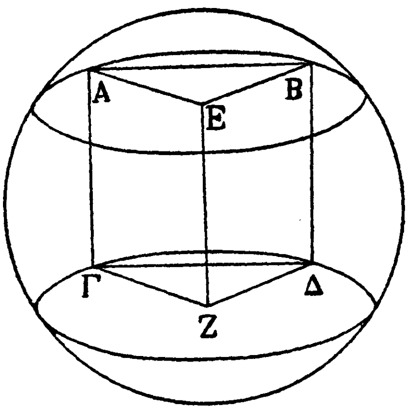
Proposition 48. — Mais, si les droites parallèles qui découpent les segments semblables des cercles ne sont pas situées des mêmes côtés des centres, les droites de jonction menées des centres aux extrémités non semblablement situées des parallèles seront parallèles.



Cela se démontre, en effet, tout comme pour la figure posée précédemment.

XLV.

Proposition 49. — Soient, dans une sphère, les cercles égaux et parallèles AB, ΓΔ et des droites égales et parallèles situées des mêmes côtés des centres ; je dis que les droites AΓ, BΔ qui relient les extrémités de ces droites sont égales, parallèles et à angles droits sur les plans des cercles.



Cela ressort manifestement de ce qu'on a démontré plus haut. En effet, les droites de jonction AE, ΓZ seront parallèles [1]. De plus, elles sont égales entre elles [2]; de sorte que les droites AΓ, EZ sont aussi parallèles. Il en est aussi de même pour les droites EZ, BΔ. Enfin, la droite EZ est perpendiculaire aux plans des cercles (car ils sont situés autour des mêmes pôles [3]) ; la droite

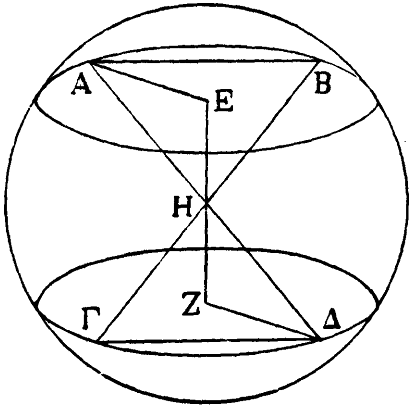
1. Voir proposition 47.
2. Comme étant des rayons de cercles égaux par hypothèse.
3. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. I : « Dans la sphère, les cercles parallèles sont situés autour des mêmes pôles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 33, ou édit. précitée du texte grec de Heiberg, p. 43.

menée par leurs pôles est perpendiculaire sur chacun d'eux, et elle passera par leurs centres et par celui de la sphère, comme cela se trouve dans les *Sphériques*) (1). En conséquence, les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales, parallèles et perpendiculaires aux cercles.

XLVI.

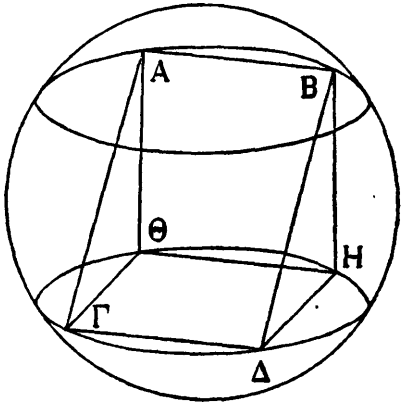
PROPOSITION 50. — Mais, que les droites égales et parallèles ΑΒ, ΓΔ ne soient pas situées des mêmes côtés des centres ; je dis que les droites [qui relient leurs extrémités] (2) Α, Δ et Β, Γ sont égales entre elles et égales au diamètre de la sphère.

En effet, qu'elles se coupent entre elles au point Η et menons, sur les centres, les droites de jonction ΑΕ, ΕΗ et les droites de jonction ΔΖ, ΖΗ. Puisque la droite ΑΒ est égale à la droite ΓΔ (3), et que les droites ΑΔ, ΒΓ les relient, il s'ensuit que les quatre droites ΑΗ, ΗΔ, ΒΗ, ΗΓ sont égales entre elles ; car cela est manifeste ; de sorte que la droite ΑΔ est aussi égale à la droite ΒΓ. Mais la droite ΑΕ est aussi égale à la droite ΔΖ (4) et l'angle, compris sous les droites ΕΑ, ΑΗ est égal à l'angle alterne (5) compris sous les droites ΗΔ, ΔΖ (6), tandis que la base ΑΗ est égale à la base ΗΔ; de sorte que l'angle compris sous les droites ΑΗ, ΗΕ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΔΗ, ΗΖ. Si on ajoute de part et d'autre



1. THÉODOSE, *ibidem*, liv. I, prop. X : « Si l'on a un cercle dans une sphère, la droite menée par les pôles de ce cercle est perpendiculaire sur le cercle, et elle passera par le centre du cercle et par celui de la sphère». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 15, ou édit. du texte grec de Heiberg, p. 19.
2. Lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, p. 138, ll.1-2).
3. Les droites ΑΒ, ΓΔ sont par hypothèse égales, parallèles et situées dans des cercles égaux et parallèles.
4. Le texte interpole ici : ἐκ κέντρου τῶν ἴσων κύκλων, (issues) du centre de cercles égaux, c'est-à-dire rayons de cercles égaux (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 138, l. 9).
5. ἐναλλάξ (γωνία), (l'angle) alterne.
6. La proposition 48 a démontré que les rayons ΑΕ, ΖΔ sont parallèles.

l'angle compris sous les droites EH, HΔ, les angles compris sous les droites AH, HE et sous les droites EH, HΔ, égaux à deux angles droits [1], deviennent égaux aux angles compris sous les droites EH, HΔ et sous les droites ΔH, HZ [2]. En conséquence, la droite EH est en prolongement de la droite HZ. De plus, on a démontré que la droite EH est égale à la droite HZ ; donc, le point H est le centre de la sphère, parce qu'on a supposé les cercles égaux [3]. Dès lors, les droites AΔ, BΓ sont des diamètres de la sphère et sont égales entre elles.



Proposition 51. — Mais, si les droites AΓ, BΔ sont menées de jonction des mêmes côtés [4], elles seront égales entre elles et comprendront des angles droits avec les droites AB, ΓΔ.

En effet, si l'on ajuste une droite ΘH parallèle et égale à la droite ΓΔ [5], cette droite ΘH sera perpendiculaire à chacune des droites ΘΓ, AΘ [6] et au plan de ces droites [7], de sorte que la droite ΓΔ le sera aussi [8].

1. Par construction.

2. Le texte présente ici le commentaire interpolé : « de sorte que les angles sous EH, HΔ et sous ΔH, HZ sont aussi égaux à deux droits ». (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 138, ll. 14-15).

3. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. VI : « Parmi les cercles situés dans la sphère, ceux qui passent par le centre de la sphère sont les plus grands, et, quant aux autres, ceux qui sont également éloignés du centre sont égaux, tandis que ceux qui en sont plus éloignés sont plus petits ». Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 7-10, ou éd. du texte grec de Heiberg, pp. 11-15.

4. C'est-à-dire des mêmes côtés des centres des deux cercles égaux et parallèles dans la sphère.

5. ἐφαρμοσθείσης, si on ajuste, c'est-à-dire si on établit dans le plan du cercle ΓΔ une parallèle ΘH à la droite ΓΔ.

6. La droite ΘH est perpendiculaire à la droite ΘΓ en vertu de la proposition suivante 52 ; tandis que la droite ΘH est perpendiculaire à la droite AΘ en vertu de la proposition 49, ou de cette même proposition suivante 52.

7. Euclide, liv. XI, prop. 4 : « Si deux droites se coupent mutuellement, la droite perpendiculaire à ces deux droites, à leur section commune, sera aussi perpendiculaire au plan de ces deux droites ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 10.

8. Euclide, liv. XI, prop. 8 : « Si deux droites sont parallèles, et si l'une d'elles est perpendiculaire à un plan, l'autre sera aussi perpendiculaire à ce même plan ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 19.

En conséquence, l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΔ est droit. Il en sera de même pour les choses restantes (1).

XLVII.

PROPOSITION 52. — Si l'on a des droites parallèles dans une sphère, les droites qui relient leurs extrémités placées dans le même ordre (2) seront égales entre elles ; et si ces parallèles sont aussi égales, ces dernières droites sont aussi parallèles et perpendiculaires à ces parallèles (3).

La chose est manifeste ; car, si on étend un plan par les parallèles, il détermine un cercle (4) dans lequel sont situées ces parallèles, et les droites qui relient ces parallèles, d'abord inégales, forment un trapèze ; tandis que, si les parallèles sont égales, les droites qui les relient n'enveloppent pas un trapèze, mais un carré ou une figure oblongue (5).

PROPOSITION 53. — Soient, dans le plan sous-jacent, les droites ΑΒ, ΒΓ comprenant des angles égaux avec la droite ΔΒΕ située dans le même plan, et érigeons (6) une droite ΒΖ comprenant des angles égaux avec chacune des droites ΑΒ, ΒΓ ; je dis que cette droite est perpendiculaire à la droite ΔΕ.

Menons la perpendiculaire ΖΗ (7) sur le plan sous-jacent, les droites ΗΓ, ΗΑ perpendiculaires sur les droites ΑΒ, ΒΓ et les droites de jonction ΑΖ, ΖΓ, ΗΒ. Dès lors, les droites ΑΖ, ΖΓ seront

1. C'est-à-dire que l'angle ΒΑΓ est droit aussi, et que les droites ΑΓ, ΒΔ sont parallèles.

2. ὁμοταγῆ πέρατα, les extrémités de même rang, c'est-à-dire situées dans le même hémisphère.

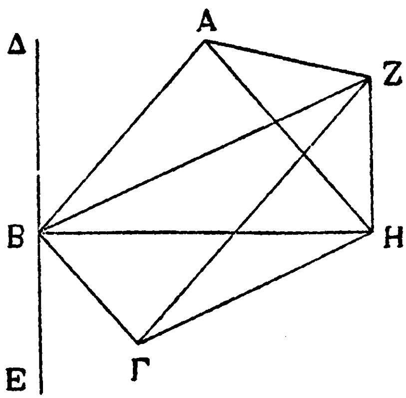
3. Proposition présentée d'une manière peu satisfaisante, dont l'authenticité a été mise en doute par Hultsch. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 141, en note).

4. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 1 : « Lorsqu'une surface sphérique est coupée par un plan, la ligne déterminée dans la surface de la sphère est une circonférence de cercle. » Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 2, ou éd. du texte grec de Heiberg, p. 3.

5. ἑτερόμηκες, ce qui a une dimension plus longue que l'autre ; mot que Commandin a hésité à rendre dans sa version latine en disant : « vel altera parte longius quod graece ἑτερόμηκες dicitur. » (Cfr. *loc. cit.*, p. 44, l. 5).

6. ἐφεστάτω, c'est-à-dire élevons une droite ΒΖ inclinée sur le plan sous-jacent des droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ.

7. Sous-entendu : abaissée d'un point Ζ pris sur la droite élevée hors du plan, perpendiculairement à la droite ΔΒΕ.



perpendiculaires sur les droites ΑΒ, ΒΓ (1). Et puisque les angles compris sous les droites AB, BZ et sous les droites ΓΒ, BZ sont égaux (2), les droites AB, BΓ seront égales, ainsi que les droites ZA, ZΓ, ainsi que les droites HA, HΓ, et l'angle compris sous les droites AB, BH sera égal à l'angle compris sous les droites ΓΒ, BH. Mais, on a supposé que l'angle compris sous les droites ΔΒ, ΒΑ est aussi égal à l'angle compris sous les droites EB, BΓ; donc, l'angle entier est égal à l'angle entier (3), et la droite HB est donc perpendiculaire sur la droite ΔE. Or, la droite ZH est aussi perpendiculaire sur le plan (4), donc, la droite ZB est perpendiculaire sur la droite ΔE.

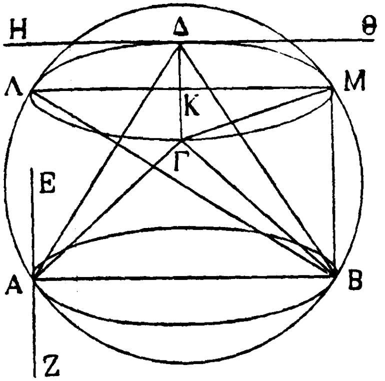
XLVIII.

PROPOSITION 54. — Inscrire la pyramide dans une sphère donnée.

Qu'elle soit inscrite et soient A, B, Γ, Δ les points de ses angles dans la surface de la sphère. Menons par le point A la droite EZ parallèle à la droite ΓΔ; elle comprendra donc des angles égaux avec les droites AΓ, AΔ (5). Et la droite AB est

1. EUCLIDE, liv. XI, prop. 18: « Si une droite est perpendiculaire sur un plan, tous les plans qui passent par cette droite sont perpendiculaires sur ce même plan. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 37.
2. Par hypothèse.
3. On a démontré que $\widehat{AB H} = \widehat{\Gamma B H}$, et on a par construction : $\widehat{\Delta B A} = \widehat{E B \Gamma}$; donc : $\widehat{\Delta B A} + \widehat{A B H} = \widehat{E B \Gamma} + \widehat{\Gamma B H}$; d'où : HB perpendiculaire sur ΔE.
4. Par construction; donc, le plan ZHB est perpendiculaire au plan HΔE.
5. EUCLIDE, liv. I, prop. 29 : « Si une droite tombe sur deux parallèles, les angles alternes sont égaux entre eux, l'angle extérieur est égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté et les angles intérieurs placés du même côté sont égaux à deux droits. » (Voir trad. de Peyrard, vol. I, 49). Le parallélisme des droites EAZ et ΔΓ donne donc : $\widehat{\Delta A E} = \widehat{A \Delta \Gamma}$ et $\widehat{\Gamma A Z} = \widehat{A \Gamma \Delta}$. Or, le triangle ΔAΓ, face de la pyramide inscrite, est équilatéral; donc: $\widehat{A \Delta \Gamma} = \widehat{A \Gamma \Delta}$, d'où, comme le texte : $\widehat{\Delta A E} = \widehat{\Gamma A Z}$.

Le texte porte à cet endroit le petit commentaire interpolé : « chacun d'eux érigée de façon à former des angles égaux avec les droites ΑΓ, ΑΔ (1); par conséquent, d'après ce qui a été démontré antérieurement, la droite ΕΖ est perpendiculaire à la droite ΑΒ (2) et tangente à la sphère. En effet, si on étend le plan qui passe par les droites ΔΑ, ΑΓ, il détermine un cercle dans lequel sera inscrit le triangle équilatéral ΑΔΓ, et la droite ΕΖ est parallèle à la droite ΓΔ ; par conséquent, la droite ΕΖ est tangente au cercle et, par suite, à la sphère (3). Dès lors, le plan étendu par les droites ΕΖ, ΑΒ déterminera, comme section de la sphère, un cercle dont la droite ΑΒ sera le diamètre, parce qu'elle est perpendiculaire à la droite ΕΖ qui est pareillement tangente (4). Et si l'on mène par le point Δ une droite ΗΘ parallèle à la droite ΑΒ, elle sera tangente à la sphère, et la droite ΓΔ lui sera perpendiculaire. Et si on étend le plan passant par les droites ΗΘ, ΓΔ, il déterminera un cercle ayant comme diamètre la droite ΓΔ ; cercle égal et parallèle à celui qui a comme diamètre la droite ΑΒ ; car les droites ΕΖ, ΓΔ et les droites ΑΒ, ΗΘ sont parallèles (5). Menons



est les deux tiers (διμοίρου) d'un angle droit, la droite ΕΖ étant dans le même plan de ces droites. » (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 142). En effet, les trois angles du triangle équilatéral ΔΑΓ étant égaux, chacun des angles ΔΑΕ, ΓΑΖ vaut les deux tiers de l'angle droit.

1. Les angles ΒΑΓ, ΒΑΔ sont égaux comme valant tous deux les deux tiers de l'angle droit.

2. Voir proposition 53.

3. EUCLIDE, liv. III, prop. 16 : « Une droite perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée par une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle, et il est impossible qu'il y ait une droite dans l'espace qui est compris entre cette perpendiculaire et la circonférence, etc. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 151.

Les droites ΕΖ, ΔΓ étant donc parallèles, si on élève en Α une perpendiculaire à ΕΖ dans le plan du triangle ΔΑΓ, elle coupera ΔΓ en deux parties égales en Κ et à angles droits ; donc, elle passera par le centre du cercle déterminé dans la sphère par le plan du triangle ΔΑΓ, d'où ΕΖ sera tangente à ce cercle et, par suite, à la sphère.

4. C'est-à-dire que la droite ΕΖ est tangente au cercle ΑΒ de la manière dont on a démontré déjà qu'elle est tangente à la sphère.

5. EUCLIDE, liv. XI, prop. 15 : « Si deux droites qui se touchent sont parallèles à deux droites qui se touchent, et qui ne sont pas dans le même plan,

par le centre K la droite ΛM perpendiculaire à la droite ΓΔ ; elle est donc parallèle à la droite AB. Et si nous menons les droites de jonction BΛ, BM, la droite BM sera perpendiculaire à chacune des droites AB, ΛM et aux plans des cercles, et la droite BΛ sera un diamètre de la sphère (car cela a été démontré précédemment) (1). Et puisque, si on mène la droite de jonction MΓ, le carré de la droite ΛM est le double du carré de la droite MΓ, le carré de la droite BΓ sera aussi le double du carré de la droite ΓM (2). De plus, l'angle compris sous les droites BM, MΓ est droit (3) ; donc, la droite BM est égale à la droite MΓ ; de sorte que le carré de la droite ΛM est le double du carré de la droite MB (4). En conséquence, le carré de la droite BΛ est de moitié plus grand que le carré de la droite ΛM (5). Or, le diamètre BΛ de la sphère est donné ; donc, le diamètre ΛM du cercle est donné aussi. De plus, les cercles sont donnés de position, et les points A, B, Γ, Δ sont donnés (6).

Dès lors, la synthèse (7) est manifeste. En effet, il faudra décrire dans la sphère deux cercles égaux et parallèles, de telle sorte que le carré du diamètre de la sphère soit de moitié plus

---

les plans qui passent par ces droites sont parallèles ». (Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 32). Les droites EZ, AB qui se rencontrent sont respectivement parallèles aux droites ΓΔ, HΘ qui se rencontrent dans un autre plan ; donc, les plans passant par ces deux couples de droites déterminent des cercles dont les plans sont parallèles et ces cercles sont, en outre, égaux comme ayant pour diamètres les arêtes égales AB, ΓΔ du prisme régulier.

1. Voir propositions 49 et 50.

2. Si nous supposons que la droite de jonction ΓΛ est tracée dans la figure du texte, on a : $\overline{\Lambda M}^2 = \overline{M\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Lambda}^2 = 2\overline{M\Gamma}^2$. Or, $B\Gamma = AB = \Lambda M$; donc, comme le texte : $\overline{B\Gamma}^2 = 2\overline{M\Gamma}^2$.

3. Parce que la droite BM est perpendiculaire au plan du cercle MΓΛΔ.

4. Explicitement : le triangle BMΓ, rectangle en M, donne : $\overline{B\Gamma}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{M\Gamma}^2$, d'où en présence de l'égalité de la note 2 ci-dessus : $\overline{BM}^2 + \overline{B\Gamma}^2 = 2\overline{M\Gamma}^2$ ou : $\overline{BM}^2 = \overline{M\Gamma}^2$, d'où, comme le texte : $BM = M\Gamma$. En conséquence : $\overline{B\Gamma}^2 = 2\overline{BM}^2$. Or, $B\Gamma = AB = \Lambda M$; donc, comme le texte : $\overline{\Lambda M}^2 = 2\overline{BM}^2$.

5. Le triangle BMΛ, rectangle en M, donne : $\overline{B\Lambda}^2 = \overline{\Lambda M}^2 + \overline{BM}^2$. Or, la dernière relation de la note précédente donne : $\overline{BM}^2 = \frac{1}{2}\overline{\Lambda M}^2$; donc : $\overline{B\Lambda}^2 = \overline{\Lambda M}^2 + \frac{1}{2}\overline{\Lambda M}^2$ ou, comme le texte : $\overline{B\Lambda}^2 = \frac{3}{2}\overline{\Lambda M}^2$.

6. L'un de ces quatre points, sommets de la pyramide inscrite, est une donnée de position arbitraire dans la surface de la sphère.

7. σύνθεσις, synthèse ou composition, c'est-à-dire la formation ou construction de la figure considérée comme suite à l'analyse qui vient d'être faite de ses éléments et de leurs relations.

grand que le carré de chacun de leurs diamètres (1), mener les deux diamètres parallèles AB, ΛM comme nous l'avons enseigné précédemment (2), puis, par le centre, la droite ΓΔ perpendiculaire à la droite ΛM, et obtenir ainsi les points A, B, Γ, Δ des angles de la pyramide. La démonstration se fera dans l'ordre inverse de l'analyse, et il sera démontré en même temps que le carré du diamètre de la sphère vaut une fois et demie le carré du côté de la pyramide (3).

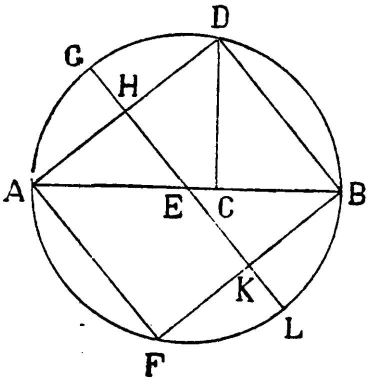
II.

PROPOSITION 55. — Inscrire le cube dans une sphère donnée.

Qu'il soit inscrit. Soient A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ les points de ses angles dans la surface de la sphère, et étendons des plans par

1. C'est-à-dire qu'il s'agit de décrire, dans la sphère, deux cercles égaux et parallèles tels que le carré du diamètre de la sphère soit équivalent à une fois et demie le carré du diamètre de ces deux cercles égaux.

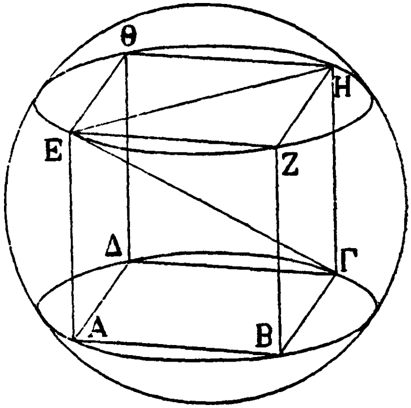
Pappus n'indique pas la manière de résoudre ce petit problème ; mais Commandin a donné la solution suivante dont nous traduisons littéralement le texte latin (cfr. *loc. cit.*, pp. 47-48) : « Soit une sphère dont le centre est E. Coupons-la par un plan passant par E, de manière que la section déterminée soit le cercle le plus grand ABD, et menons la droite de jonction AEB qui sera un diamètre. Dès lors, coupons AB en C de manière que AC soit le double de CB ; menons, par le point C, la droite CD perpendiculaire à la droite AB, et menons les droites de jonction AD, DB. Les triangles ABD, ADC seront semblables entre eux, et DA est à AC comme BA est à AD. En conséquence, le carré de la première droite est au carré de la seconde comme la première est à la troisième, c'est-à-dire que le carré de AB est au carré de AD comme BA est à AC. Or, la droite BA est une fois et demie la droite AC, puisqu'elle est triple de la droite CB. En conséquence, le carré de BA sera une fois et demie le carré de AD. Complétons le parallélogramme ADBF, et menons, par le point E, un autre diamètre parallèle aux droites AF, DB, de manière qu'il coupe AD en H et FB en K. Dès lors, si la sphère est coupée aux points H, K par deux plans perpendiculaires au diamètre GL, les sections seront des cercles égaux et parallèles ; le diamètre de l'un sera AD, son centre H et son pôle G ; tandis que le diamètre de l'autre sera FB, son centre K et son pôle L. Or, comme la droite GL, menée par le centre, coupe AD, FB à angles droits, elle coupera ces droites en deux parties égales. Donc, deux cercles égaux et parallèles ont été décrits dans la sphère, de telle sorte que le carré du diamètre de la sphère vaut une fois et demie le carré du diamètre de chacun des cercles. »



2. Voir proposition 44.

3. Parce que le côté de la pyramide inscrite est égal au diamètre des deux cercles égaux et parallèles décrits comme il a été prescrit.

ces points ; ils détermineront donc, comme sections, des cercles égaux et parallèles ; car les carrés [1] inscrits dans ces cercles sont aussi égaux et parallèles. La droite de jonction ΓE sera un diamètre de la sphère. Menons aussi la droite de jonction EH. Puisque le carré de la droite EH est le double du carré de la droite EΘ, c'est-à-dire du carré de la droite HΓ, et que l'angle compris sous les droites ΓH, HE est droit [2], le carré de la droite ΓE sera de moitié plus grand que le carré de la droite EH [3]. Or, le carré de la droite ΓE est donné [4] ; donc, le carré de la droite EH est donné aussi. De plus, cette droite est un diamètre du cercle EZHΘ; donc ce cercle est donné; de sorte que le cercle ABΓΔ est donné aussi, que les carrés situés dans ces cercles sont donnés aussi, et que les points d'angle du cube sont donnés aussi.



Dès lors, la synthèse est manifeste. En effet, il faut décrire, dans la sphère, deux cercles parallèles ; le carré du diamètre de la sphère doit être de moitié plus grand que les carrés des diamètres égaux de ces cercles [5] ; il faut inscrire, dans l'un de ceux-ci, le carré ABΓΔ ; mener dans l'autre cercle la droite ZH, égale à la droite BΓ, parallèlement à la droite BΓ, comme nous l'avons montré précédemment [6] ; compléter sur cette droite le carré

1. Le texte est interpolé ici des mots τοῦ κύβου, du cube (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 146, l. 4).

2. Proposition 50.

3. Le triangle isocèle EΘH, rectangle en Θ, donne : $\overline{EH}^2=\overline{E\Theta}^2+\overline{\Theta H}^2=2\overline{E\Theta}^2=2\overline{H\Gamma}^2$, d'où : $\overline{H\Gamma}^2=\frac{1}{2}\overline{EH}^2$. D'autre part, le triangle rectangle en H donne : $\overline{\Gamma E}^2=\overline{EH}^2+\overline{H\Gamma}^2$, d'où : $\overline{\Gamma E}^2=\overline{EH}^2+\frac{1}{2}\overline{EH}^2$ ou, comme le texte : $\overline{\Gamma E}^2=\frac{3}{2}\overline{EH}^2$.

4. La droite EΓ est donnée comme étant un diamètre de la sphère donnée.

5. Voir proposition 54 et la solution de Commandin que nous avons donnée en note.

6. Voir proposition 43. Le texte présente ici l'interpolation : καθόλου ἴσην τῇ δοθείσῃ, (mener) d'une manière générale une (droite) égale à une (droite) donnée (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 146, l. 23).

ΕΖΗΔ, et obtenir ainsi le cube inscrit. D'ailleurs, on démontrera, conséquemment à l'analyse, que ΒΖΗΓ est un carré, ainsi que les autres choses [1], et l'on démontrera en même temps que le carré du diamètre de la sphère est le triple du carré du côté du cube, et que les mêmes cercles comprennent les angles de la pyramide et du cube ; car, pour la pyramide, le carré du diamètre de la sphère était aussi plus grand de moitié que le carré du diamètre de chacun des cercles [2].

L.

Proposition 56. — Inscrire l'octaèdre dans une sphère donnée.

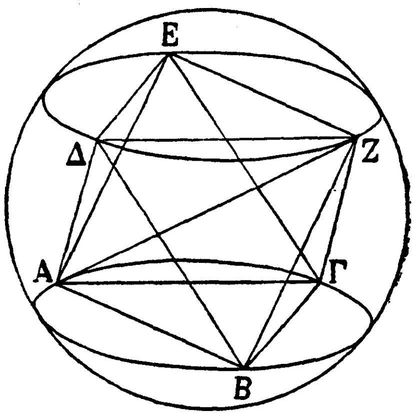
Qu'il soit inscrit ; soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ les points de ses angles dans la surface de la sphère, et étendons par ces points des plans déterminant les cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ. Puisque des droites égales ΔΑ, ΔΒ, ΔΕ, ΔΖ tombent du point Δ jusqu'à la surface de la sphère, les points Α, Ε, Ζ, Β seront dans un seul plan [3]. De

1. Pappus abandonnant au lecteur la construction (synthèse) du cube inscrit dans la sphère d'après l'analyse qu'il vient de faire, Commandin a donné la construction suivante que nous résumons d'après son texte latin (cfr. *loc. cit.*, p. 49) : « Menons les droites ΓΕ, ΕΗ. La droite ΓΕ sera un diamètre de la sphère d'après la proposition 50, et la droite ΕΗ sera un diamètre du cercle d'après la proposition 52. Or, l'angle ΓΗΕ est droit ; car ΓΗ, ΒΖ sont des perpendiculaires aux plans des cercles d'après la proposition 49 ; donc, ces droites sont perpendiculaires à toutes les droites qui les rencontrent dans ces plans. De plus, puisque le carré de ΓΕ est une fois et demie le carré de ΕΗ ; que le carré de ΕΗ est le double du carré de ΖΗ, et que l'angle ΓΗΕ est droit, le carré de ΓΕ sera le triple du carré de ΖΗ. Derechef, puisque le carré de ΓΕ est une fois et demie le carré de ΕΗ, il sera le triple du carré de ΗΓ ; donc, le carré de ΖΗ est égal au carré de ΗΓ, et la droite ΖΗ est égale à la droite ΗΓ. Or, les droites ΖΒ, ΗΓ sont égales entre elles, et les angles ΓΗΖ, ΒΖΗ sont droits ; donc, ΒΖΗΓ sera un carré. On démontrera de même que ΑΕΖΒ, ΑΕΘΔ et ΔΘΗΓ sont des carrés. En conséquence, le cube est établi dans la sphère ; ce qu'il fallait obtenir. »

2. Voir proposition 54.

3. Ces quatre droites sont dans le même plan du cercle dont le pôle est le point Δ, conformément à la définition V du Livre I des *Sphériques* de Théodose : « Le pôle d'un cercle situé dans la sphère est un point de la surface de la sphère d'où toutes les droites qui tombent sur la circonférence de ce cercle sont égales entre elles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 2 et note 1, ou bien éd. précitée du texte grec de Heiberg, p. 3.

Le texte présente ici une interpolation de scoliaste : καὶ γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ'αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι ἴσαι εἰσίν, littéralement : et en effet, les (droites) menées de jonction du centre de la sphère sont égales (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 148, ll. 9-10).



plus, les droites AB, BZ, ZE sont égales entre elles et situées dans un cercle [1] ; donc, AEZB est un carré, et la droite EZ est parallèle à la droite AB. De la même manière, la droite ΔE est aussi parallèle à la droite BΓ et la droite ΔZ à la droite AΓ ; par conséquent, les cercles sont aussi parallèles [2]. De plus, ils sont égaux entre eux, parce que les triangles équilatéraux qui sont dans ces cercles sont égaux. Et puisqu'on a des cercles égaux et parallèles dans une sphère et, dans ceux-ci, les droites AB, EZ égales et parallèles, non situées des mêmes côtés des centres, la droite de jonction AZ sera un diamètre de la sphère [3]. De plus, les droites AE, EZ sont égales ; donc, le carré de la droite AZ est le double du carré de la droite ZE. Or, le carré du diamètre du cercle ΔEZ est une fois et un tiers [4] le carré de la droite EZ ; donc, le carré de la droite AZ est une fois et demie [5] le carré du diamètre du cercle ΔEZ [6]. En conséquence, le diamètre est

---

1. C'est-à-dire dans le cercle déterminé dans la sphère par le plan précité des quatre points A, E, Z, B.

2. Euclide, liv. XI, prop. 15, énoncée p. 106, n. 5.

3. Voir proposition 50. Le texte porte ici le commentaire interpolé inutile : καὶ αἱ ΑΕ, ΖΒ ὀρθὰς μετὰ τῶν ΑΒ, ΕΖ περιέζουσι γωνίας, ὡς προδέδεικται, c'est-à-dire : et les (droites) AE, ZB comprennent des (angles) droits avec les (droites) AB, EZ, comme on l'a démontré précédemment. (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 148, ll. 19-20).

4. ἐπίτριτον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ, c'est-à-dire, d'après le langage des mathématiciens de la Renaissance : « le sesquitierce du carré de la (droite) EZ, ou bien, d'après le néologisme introduit par P. Tannery : « l'épitrite du carré de la (droite) EZ, ou, enfin, en langage courant : « une fois et un tiers le carré de la (droite) EZ. »

5. ἡμιόλιον, sesquialtère, ou une fois et demie.

6. Dans le triangle isocèle AEZ, rectangle en E, on a : $\overline{AZ}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ZE}^2$ d'où, comme le texte : $\overline{AZ}^2 = 2\overline{ZE}^2$ (I). D'autre part, dans le triangle équilatéral inscrit ΔEZ, on a (Euclide, liv. XIII, prop. 12) : $\overline{EZ}^2 = 3 \times$ (carré du rayon). Or, carré du rayon $= \frac{\text{carré du diamètre}}{4}$; donc : $\overline{EZ}^2 = \frac{3}{4}$ (carré du diamètre). d'où, comme le texte : carré du diamètre $= (1 + \frac{1}{3})\ \overline{EZ}^2$ (II). Dès lors, les égalités (I) et (II) donnent : $\overline{AZ}^2 = (1 + \frac{1}{2}) \times$ carré du diamètre du cercle ΔEZ.

donné (1), ainsi que le cercle ; en sorte que le cercle ΑΒΓ est donné aussi, ainsi que les points sur ces cercles (2).

La synthèse se fait conséquemment. En effet, il faut inscrire pareillement (3) dans la sphère deux cercles égaux et parallèles, pour chacun desquels le carré du diamètre de la sphère soit une fois et demie le carré de leur diamètre (4) ; inscrire dans l'un d'eux le triangle équilatéral ΑΒΓ ; mener dans l'autre la droite ΕΖ parallèle et égale à la droite ΑΒ ; inscrire contre cette droite le triangle ΔΕΖ, et obtenir ainsi la construction de l'octaèdre (5). Et il sera démontré en même temps (6) que le carré du diamètre de la sphère est le double du carré du côté de l'octaèdre (7). D'autre part on verra tout à la fois (8) que les mêmes cercles (9) sont assumés pour l'inscription de la pyramide, pour celle du cube et pour celle de l'octaèdre, et que le même cercle contient le carré du cube et le triangle de l'octaèdre.

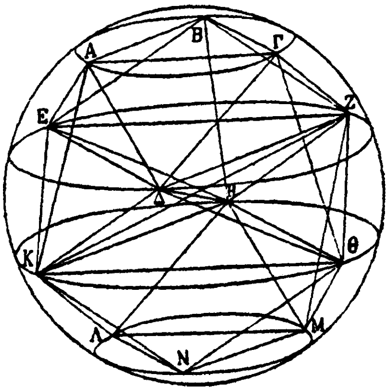
LI.

Proposition 57. — Inscrire l'icosaèdre (10) dans une sphère donnée.

Qu'il soit inscrit, et soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν

1. C'est-à-dire que le diamètre du cercle ΔΕΖ est donné, puisque le diamètre ΑΖ de la sphère donnée est donné.
2. C'est-à-dire les points d'angles des triangles équilatéraux ΔΕΖ, ΑΒΓ.
3. Voir proposition précédente.
4. Voir proposition 54.
5. Commandin a commenté cette proposition en donnant la démonstration de la construction de l'octaèdre régulier inscrit d'après l'analyse de Pappus. Cette démonstration est analogue aux deux autres données à titre de commentaires des propositions 54 et 55, et dont nous avons donné la traduction dans les notes relatives à ces propositions. Commandin démontre donc successivement que les faces triangulaires ΑΒΔ, ΔΑΕ, ΑΓΕ, ΕΓΖ, ΖΒΑ de l'octaèdre inscrit sont équilatérales et égales aux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ. (Cfr. *loc. cit.*, p. 50).
6. C'est-à-dire au cours de la démonstration de la construction de la figure.
7. Par raisonnement au rebours de celui de l'analyse du problème, raisonnement qui a été repris explicitement dans une note précédente.
8. C'est-à-dire simultanément comme conséquences des solutions des trois problèmes 54, 55 et 56.
9. Le texte porte l'interpolation : ὧν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐναρμόζεται τὰ πολύεδρα, (cercles), dont les polyèdres s'ajustent dans la même sphère (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 150, ll. 10-11).
10. εἰκοσάεδρος, l'icosaèdre, ou polyèdre dont la surface est composée de vingt triangles équilatéraux.

les points de ses angles dans la surface (1). Puisque les droites BA, BΓ, BZ, BH, BE qui tombent du point B dans la surface sont égales entre elles, les points A, Γ, Z, H, E sont dans un seul plan (2). De plus, les droites AΓ, ΓZ, ZH, HE, EA sont égales (3) et sont dans un cercle ; par conséquent, le pentagone AEHZΓ est équiangle. Pareillement d'ailleurs, chacun des pentagones KEBΓΔ, ΔΘZBA, et AKΛHB, AKNΘΓ, ΓΘMHB est équilatéral et équiangle [et dans un seul plan] (4). Et la droite de jonction AΓ sera parallèle à la droite de jonction EZ (5), la droite EZ à la droite de jonction KΘ (6)



et la droite KΘ à la droite de jonction ΛM ; car ΛKΔΘM est aussi un pentagone (7). On démontrerait pareillement, d'une part, que les droites de jonction BΓ, EΔ, HΘ, ΛN sont parallèles, et d'autre part, que les droites de jonction BA, ZΔ, HK, MN sont parallèles. De plus, on démontrera pareillement que le cercle

1. Sous-entendu : τῆς σφαίρας, de la sphère.

2. Le texte présente ici un petit commentaire qui fait erreur : καὶ γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ'αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι ἴσαι εἰσίν, littéralement : car les (droites) menées de jonction du centre de la sphère à celle-ci sont égales (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 150, l. 27). La situation des points précités dans un même plan ne résulte, en effet, pas de l'égalité des rayons à l'extrémité desquels ils se trouvent, mais découle de la définition V du livre I des *Sphériques* de Théodose ; définition qui a été reproduite p. 110, n. 3.

3. Par hypothèse de construction.

4. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 152, l. 3).

5. La figure AEHZΓ est un pentagone équiangle ; donc la figure AEZΓ est un trapèze ; donc, la droite AΓ est parallèle à la droite de jonction EZ.

6. La figure AKNΘΓ est un pentagone équiangle ; donc, la figure AKΘΓ est un trapèze ; donc, la droite AΓ est parallèle à la droite de jonction KΘ, d'où, comme le texte, la droite EZ est parallèle à la droite KΘ.

7. La figure ΛKΔΘM est aussi un pentagone, que le texte omet de dire ἰσόπλευρον, équilatéral ; donc, la figure ΛKΘM est un trapèze ; donc, la droite KΘ est parallèle à la droite ΛM.

Commandin a donné une longue démonstration du parallélisme des droites de jonction précitées dans l'icosaèdre dans son ouvrage : *Fed. Commandini Urbinatis liber de centro gravitatis solidorum.* Bononiae, ex officina A. Benacii, 1565, petit in-4°. Voir fol. 2, verso.

entourant les points A, B, Γ est égal et parallèle à celui qui entoure les points Λ, M, N, car les triangles ΑΒΓ et ΛΜΝ situés dans ces cercles sont égaux et semblables (1) ; et que les cercles entourant les points Δ, E, Z et les points K, H, Θ sont égaux et parallèles, car les triangles situés dans ces cercles sont aussi égaux et équilatéraux, parce que leurs côtés respectifs sous-tendent un angle du pentagone (2). Dès lors, puisque les cercles qui, dans la sphère, entourent les points Δ, E, Z et les points K, H, Θ sont égaux, et que, dans ces cercles, les côtés EZ, KΘ de triangles équilatéraux sont parallèles et non situés des mêmes côtés de leurs centres, la droite reliant les points Z, K sera un diamètre de la sphère, et l'angle compris sous les droites ZE, EK sera droit ; car cela a été démontré précédemment (3). Et puisque ΗΕΑΓΖ est un pentagone (4), si la droite EZ est coupée en extrême et moyenne raison (5), le plus grand segment sera la droite ΑΓ (6) ; par conséquent, le rapport de la droite EZ à la droite ΑΓ est celui du côté de l'hexagone au côté du décagone (7). De plus, le carré de la droite ZK équivaut à la somme des carrés de ces deux droites, parce que la droite EK est égale à la droite ΑΓ (8) ; donc, le rapport du diamètre ZK de la sphère à la droite EZ est celui du côté du pentagone au côté de l'hexagone, tandis que son rapport à la

1. Les triangles ΑΒΓ et ΛΜΝ inscrits dans les cercles ΑΒΓ et ΛΜΝ sont égaux et semblables par hypothèse de construction. Or, il a été démontré que les droites ΒΓ, ΛΝ sont parallèles, et que les droites ΒΑ, ΜΝ sont parallèles ; donc (Euclide, liv. XI, prop. 15, énoncée p. 106, n. 3) les cercles ΑΒΓ, ΛΜΝ sont égaux et parallèles.

2. Sous-entendu : dans une même sphère.

3. Voir propositions 50 et 51.

4. Sous-entendu ἰσόπλευρον, équilatéral.

5. Euclide, liv. VI, déf. 3 : « Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit ». Voir trad. Peyrard, vol. I, p. 290.

6. Euclide, liv. XIII, prop. 8 : « Si deux droites sous-tendent deux angles de suite d'un pentagone équilatéral et équiangle, ces droites se couperont en extrême et moyenne raison, et leurs plus grands segments seront égaux aux côtés du pentagone. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 240.

7. Euclide, liv. XIII, prop. 9 : « Si l'on ajoute ensemble le côté de l'hexagone et le côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle, la droite entière sera coupée en extrême et moyenne raison, et son plus grand segment sera le côté de l'hexagone ». Voir trad. de Peyrard ,vol. III, p. 243.

8. Il a été démontré (voir prop. 51) que l'angle ZEK est droit ; donc : $\overline{ZK}^2 = \overline{EZ}^2 + \overline{EK}^2$. Or, EK est le côté du pentagone régulier ΚΕΒΓΔ ; donc, EK = ΑΓ côté du pentagone régulier égal ΑΕΗΖΓ, d'où, comme le texte : $\overline{ZK}^2 = \overline{EZ}^2 + \overline{A\Gamma}^2$.

droite $A\Gamma$ est celui du côté du pentagone au côté du décagone [1]. Or, le diamètre de la sphère est donné ; donc, chacune des droites EZ, $A\Gamma$ est donnée aussi ; de sorte que les rayons [2] des cercles [3], dont les carrés sont la troisième partie des carrés des droites EZ, $A\Gamma$ [4], sont donnés aussi. En conséquence, les cercles eux-mêmes sont donnés, ainsi que ceux qui leur sont égaux et parallèles [5], ainsi que les points des angles du polyèdre situés dans ces cercles [6].

Dès lors, la synthèse est manifeste. Il faudra poser deux droites avec lesquelles le diamètre de la sphère soit respectivement dans le rapport du côté du pentagone au côté de l'hexagone et dans le rapport du côté du pentagone au côté du décagone, et décrire, dans la sphère, deux cercles tels que ΔEZ, $AB\Gamma$, dont les carrés des rayons soient respectivement le tiers des carrés des droites posées ; puis décrire, de l'autre côté du centre de la sphère, deux cercles parallèles $KH\Theta$, ΛMN égaux à ces cercles ; adapter, dans chacun de ces cercles, dans un ordre inverse par rapport à leurs centres, les côtés parallèles $A\Gamma$, EZ, $K\Theta$, ΛM de

---

1. Euclide, liv. XIII, prop. 10 : « Si l'on décrit dans un cercle un pentagone équilatéral, le carré du côté du pentagone sera égal à la somme des carrés du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 245. En conséquence, si l'on identifie la relation : $(\text{côté pentagone})^2 = (\text{côté hexagone})^2 + (\text{côté décagone})^2$ avec l'égalité de la note précédente, on a :

$$\frac{\overline{ZK}^2}{(\text{côté pentagone})^2} = \frac{\overline{EZ}^2 + \overline{A\Gamma}^2}{(\text{côté hexagone})^2 + (\text{côté décagone})^2}, \text{ d'où, par division :}$$

$$\frac{\overline{ZK}^2}{(\text{côté pentagone})^2} = \frac{\overline{EZ}^2}{(\text{côté hexagone})^2} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{(\text{côté décagone})^2}, \text{ d'où, comme le texte:}$$

$$\frac{ZK}{EZ} = \frac{\text{côté pentagone}}{\text{côté hexagone}} \text{ et } \frac{ZK}{A\Gamma} = \frac{\text{côté pentagone}}{\text{côté décagone}}$$

2. αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, littéralement : les (droites) issues des centres des cercles, c'est-à-dire les rayons des cercles.

3. C'est-à-dire les cercles $EZ\Delta$, $A\Gamma B$.

4. Euclide, liv. XIII, prop. 12 : « Si l'on décrit dans un cercle un triangle équilatéral, le carré d'un côté du triangle sera triple du carré du rayon ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 257.

En conséquence, dans le triangle équilatéral $E\Delta Z$ on a : carré du rayon du cercle circonscrit $E\Delta Z = \frac{1}{3}\overline{EZ}^2$, et, dans le triangle équilatéral $AB\Gamma$ on a : carré du rayon du cercle circonscrit $AB\Gamma = \frac{1}{3}\overline{A\Gamma}^2$.

5. C'est-à-dire les deux cercles $KH\Theta$, ΛNM.

6. Un des points, dont tous les autres découlent, étant toutefois pris d'une manière arbitraire dans la surface de la sphère.

triangles équilatéraux, et inscrire en entier les triangles qui constituent les angles du polyèdre. La démonstration découle du reste facilement de l'analyse (1), et l'on verra en même temps que le carré du diamètre de la sphère est triple du carré du côté du pentagone inscrit dans le cercle ΔEZ; car le rapport de la droite KZ à la droite ZE est celui du côté du pentagone au côté de l'hexagone (2) ; tandis que le rapport de la droite EZ au côté de l'hexagone inscrit dans le même cercle est celui du côté du triangle au côté de l'hexagone, et le carré du côté du triangle est triple du carré du côté de l'hexagone (3) ; par conséquent, le carré du diamètre KZ de la sphère est aussi triple du carré du côté du pentagone inscrit dans le cercle ΔEZ (4).

LII.

Proposition 58. — Inscrire le dodécaèdre dans une sphère donnée.

Qu'il soit inscrit, et soient A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, K, Λ, M, N, Ξ, O, Π, P, Σ, T, Υ, Φ les points de ses angles. Dès lors, la droite EΔ est parallèle à la droite qui relie les points Z, Λ et la droite AE parallèle à la droite qui relie les points Z, H (5). Pour les mêmes raisons d'ailleurs, on a les autres choses aussi (6) ; de sorte que le plan passant par les points A, B, Γ, Δ, E est aussi

1. La démonstration de la construction (synthèse) étant abandonnée à la sagacité du lecteur, Commandin la donne dans son commentaire sur cette proposition (Cfr. *loc. cit.*, pp. 52-53). Trop longue pour être reproduite ici en traduction, bornons-nous à mentionner qu'elle suit pas à pas l'analyse de Pappus, et qu'elle est du reste analogue aux démonstrations de la construction des deux polyèdres précédents données par Commandin et que nous avons reproduites dans les notes relatives aux deux propositions qui précèdent.

2. Par construction réalisée d'après les propriétés établies au cours de l'analyse.

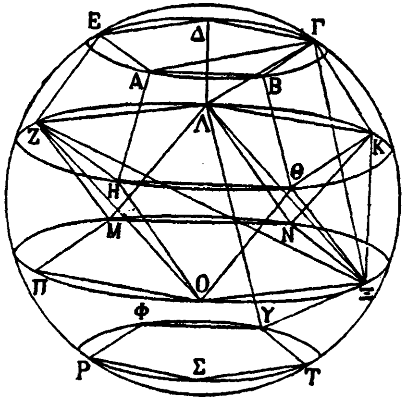
3. Euclide, liv. XIII, prop. 12 (voir p. 115, n. 4), et Euclide, liv. IV, prop. 15 : « Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 229.

4. Considérant le triangle équilatéral et les pentagone et hexagone réguliers inscrits dans le cercle ΔEZ, on a par construction: $\frac{KZ}{EZ} = \frac{\text{côté du pentagone}}{\text{côté de l'hexagone}}$, d'où $\frac{\overline{KZ}^2}{\overline{EZ}^2} = \frac{(\text{côté pentagone})^2}{(\text{côté hexagone})^2}$. Or, (Euclide, liv. XIII, prop. 12) on a : $\overline{EZ}^2 = 3$ (côté hexagone)^2 ; donc, comme le texte : $\overline{KZ}^2 = 3$ (côté pentagone)^2.

5. Même démonstration que celle du début de la proposition précédente relative à l'icosaèdre régulier inscrit.

6. Voir de même le début de la démonstration de la proposition 57.

parallèle à celui qui passe par les points Z, H, Θ, K, Λ. Or, puisque les droites reliant les points O, A et les points Ξ, Γ sont parallèles et égales (chacune d'elles étant parallèle à la droite BΘ) [1], il s'ensuit que les droites reliant les points O, Ξ et les points A, Γ sont aussi parallèles ; de sorte que les droites ΣT, EΔ le sont aussi. Pareillement, les droites ΣP, ΓΔ sont aussi parallèles, ainsi que les autres droites [2] ; par conséquent, les plans passant par ces droites sont aussi parallèles. Imaginons maintenant les cercles parallèles décrits autour de ces droites. Dès lors, le cercle décrit autour des points A, B, Γ, Δ, E sera égal à celui qui est décrit autour des points P, Σ, T, Υ, Φ ; car les pentagones [3] qui y sont inscrits sont égaux, et le cercle décrit autour des points Z, H, Θ, K, Λ est égal au cercle décrit autour des points M, N, Ξ, O, Π ; car les pentagones qui y sont inscrits sont aussi égaux. De plus, la droite reliant les points Γ, Λ est parallèle à la droite reliant les points Ξ, Υ (car chacune d'elles est parallèle à la droite KN) [4] ; donc, les points Λ, Γ, Ξ, Υ seront dans un seul plan [5]. De plus, les droites reliant ces points sont égales, car elles sous-tendent des angles de penta-



1. Par hypothèse, le pentagone BΘΞKΓ est régulier ; donc, la droite ΓΞ qui sous-tend deux angles consécutifs est parallèle à la droite BΘ. Or, dans le pentagone régulier BΘOHA, la droite OA qui sous-tend deux angles consécutifs est aussi parallèle à la droite BΘ ; donc, comme dans le texte, les droites OA, ΞΓ sont parallèles et sont égales comme sous-tendant chacune deux angles de pentagones égaux.

2. C'est-à-dire que sont encore parallèles entre elles : les droites TΥ, EA, les droites ΥΦ, AB et les droites ΦP, BΓ.

3. C'est-à-dire les pentagones réguliers.

4. La droite ΓΛ qui sous-tend deux angles consécutifs du pentagone KNΛΔΓ est parallèle au côté KN. Or, la droite ΞΥ qui sous-tend deux angles consécutifs du pentagone KNΥTΞ est parallèle au côté KN ; donc, comme le texte, les droites ΓΛ, ΞΥ sont parallèles.

5. Euclide, liv. XI, prop. 7 : « Si deux droites sont parallèles, et si l'on prend sur chacune de ces droites des points quelconques, la droite qui joindra ces points sera dans le même plan que les parallèles. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 17.

gones égaux [1]. De plus, elles sont dans un cercle [2] ; donc, ΛΓΞΥ est un carré [3] ; de sorte que le carré de la droite reliant les points Ξ, Λ est double du carré de la droite reliant les points Λ, Γ, c'est-à-dire de la droite reliant les points Ζ, Λ [4]. De plus, l'angle compris sous les droites ΞΛ, ΛΖ est droit, car les droites égales et parallèles ΟΞ, ΖΛ sont situées dans des cercles égaux [5] ; par conséquent, le carré de la droite ΞΖ est triple du carré de la droite ΖΛ [6]. De plus, la droite reliant les points Ζ, Ξ est un diamètre de la sphère en raison de ce qu'on a démontré précédemment [7], et les droites ΟΞ, ΖΛ ne sont pas situées des mêmes parts des centres [8] ; donc, le rapport du diamètre de la sphère à la droite ΖΛ est celui du côté du triangle équilatéral au côté de l'hexagone inscrits dans le cercle ΖΗΘΚΛ [9]. Or, le rapport de la droite ΖΛ au côté du triangle est celui du côté du pentagone au côté du triangle ; donc, par raison d'identité, le rapport du diamètre de la sphère au côté du triangle est celui du côté du pentagone au côté de l'hexagone [10]. Or, puisque le rapport

---

1. La droite ΛΓ qui sous-tend l'angle ΛΔΓ du pentagone ΓΔΛΝΚ est égale à la droite ΓΚΞ qui sous-tend l'angle égal ΞΚΓ du pentagone égal ΞΚΓΒΘ.

2. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 1 : « Lorsqu'une surface sphérique est coupée par un plan, la ligne déterminée dans la surface de la sphère est une circonférence de cercle. » Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 2, ou éd. du texte grec de Heiberg, p. 3.

3. Euclide, liv. IV, prop. 6 : « Décrire un carré dans un cercle donné ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 207.

4. Puisque ΛΓΞΥ est un carré, on a : $\overline{\Xi\Lambda}^2 = \overline{\Lambda\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Xi}^2$, d'où : $\overline{\Xi\Lambda}^2 = 2\overline{\Lambda\Gamma}^2$. Or, la droite ΛΓ qui sous-tend l'angle ΛΔΓ du pentagone ΓΔΛΝΚ est égale à la droite ΛΖ qui sous-tend l'angle ΛΜΖ du pentagone égal ΖΜΛΔΕ ; donc, comme le texte : $\overline{\Xi\Lambda}^2 = 2\overline{\Lambda Z}^2$.

5. Voir proposition 51.

6. $\overline{\Xi Z}^2 = \overline{\Xi\Lambda}^2 + \overline{Z\Lambda}^2$, d'où, en présence de l'égalité de la note 4 ci-dessus, il vient : $\overline{\Xi Z}^2 = 2\overline{Z\Lambda}^2 + \overline{Z\Lambda}^2 = 3\overline{Z\Lambda}^2$.

7. Voir proposition 50.

8. C'est-à-dire des centres des cercles ΟΞΝΜΠ et ΖΛΚΘΗ.

9. On a (Euclide, liv. XIII, prop. 12, énoncée p. 115, n. 4) : carré du côté du triangle équilatéral inscrit = 3 (carré du rayon) = 3 (carré du côté de l'hexagone régulier), d'où par identité avec la dernière relation de la note antépénultième, on a : $\dfrac{\overline{\Xi Z}^2}{(\text{coté triangle équilatéral})^2} = \dfrac{3\ \overline{Z\Lambda}^2}{3\ (\text{côté hexagone})^2}$, d'où, comme dans le texte : $\dfrac{\Xi Z}{Z\Lambda} = \dfrac{\text{côté triangle équilatéral}}{\text{côté hexagone régulier inscrit}}$.

10. ΖΛ étant le côté du pentagone inscrit dans le cercle ΖΗΘΚΛ, on a, comme le texte : $\dfrac{Z\Lambda}{\text{côté triangle équilat. inscrit}} = \dfrac{\text{côté pentagone régulier inscrit,}}{\text{côté triangle équilat. inscrit}}$ d'où, par raison d'identité avec l'égalité de la note précédente, ou par produit membre

de la droite ZΛ à la droite EΔ est aussi celui du côté de l'hexagone au côté du décagone (car, si la droite ZΛ est coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est la droite EΔ, parce que la droite ZΛ sous-tend l'angle du pentagone dont la droite EΔ est le côté) [1] ; et que le côté du triangle inscrit dans le cercle ZHΘKΛ est au côté du triangle inscrit dans le cercle ABΓΔE comme la droite ZΛ est à la droite EΔ, il s'ensuit que le rapport du côté du triangle [2] au côté du triangle [3] est aussi celui du côté de l'hexagone au côté du décagone [4]. Or, le rapport du diamètre de la sphère au côté du triangle inscrit dans le cercle ZHΘKΛ est aussi celui du côté du pentagone au côté de l'hexagone ; donc, le rapport du diamètre au côté du triangle inscrit dans le cercle ABΓΔE est celui du côté du pentagone au côté du décagone [5]. Dès lors, le côté du triangle est donné dans chacun des

---

à membre: $\frac{Z\Lambda}{\text{côté triangle}} \times \frac{\Xi Z}{Z\Lambda} = \frac{\text{côté pentagone}}{\text{côté triangle}} \times \frac{\text{côté triangle}}{\text{côté hexagone}}$, ou, comme le texte: $\frac{\Xi Z}{\text{côté triangle inscrit cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda} = \frac{\text{côté pentagone inscrit cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté hexagone inscrit cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}$.

1. Considérant le pentagone régulier ZMΛΔE, la droite ZΛ en sous-tend deux angles consécutifs ; donc, si la droite ZΛ est coupée en extrême et moyenne raison (Euclide, liv. XIII, prop. 8, énoncée p. 114, n. 6) son plus grand segment sera le côté EΔ de ce pentagone. Or, (Euclide, liv. XIII, prop. 9, énoncée p. 114, n. 7) si la droite ZΛ est coupée en extrême et moyenne raison, la droite entière ZΛ sera le côté de l'hexagone, et son plus petit segment, égal à EΔ, sera le côté du décagone ; ces deux polygones étant inscrits dans le cercle ZHΘKΛ. Dès lors, on peut écrire: $\frac{Z\Lambda}{E\Delta} = \frac{\text{côté hexagone inscrit au cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté décagone inscrit au cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}$.

2. Inscrit dans le cercle ZHΘKΛ.

3. Inscrit dans le cercle ABΓΔE.

4. Considérant que les pentagone régulier et triangle équilatéral inscrits dans le cercle ZHΘKΛ sont respectivement semblables aux pentagone et triangle inscrits dans le cercle ABΓΔE, on a : $\frac{Z\Lambda}{E\Delta} = \frac{\text{côté triangle inscrit au cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté triangle inscrit au cercle AB}\Gamma\Delta\text{E}}$, d'où, en présence de la note antépénultième, on a, comme dans le texte : $\frac{\text{côté triangle équilat. inscrit au cercle ZH}\Theta\text{K}\Delta}{\text{côté triangle équilat. inscrit au cercle AB}\Gamma\Delta\text{E}} = \frac{\text{côté hexag. inscrit au cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté décag. inscrit au cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}$.

5. On a démontré (voir note 10, p. 118) que l'on a : $\frac{\Xi Z}{\text{côté triangle inscrit cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda} = \frac{\text{côté pentagone cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté hexagone cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}$, d'où, par raison d'identité avec la relation de la note précédente, ou par produit membre à membre, il vient : $\frac{\Xi Z}{\text{côté triangle cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda} \times \frac{\text{côté triangle cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté triangle cercle AB}\Gamma\Delta\text{E}} = \frac{\text{côté pentagone cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté hexagone cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda} \times \frac{\text{côté hexagone cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté décagone cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}$, ou, comme le texte : $\frac{\text{diamètre sphère }\Xi Z}{\text{côté triangle cercle AB}\Gamma\Delta\text{E}} = \frac{\text{côté pentagone cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}{\text{côté décagone cercle ZH}\Theta\text{K}\Lambda}$.

cercles [1] ; en sorte que les rayons, dont les carrés sont la troisième partie des carrés des côtés, sont donnés aussi. En conséquence, les cercles et ceux qui leur sont égaux et parallèles sont donnés aussi, ainsi que les points des angles du polyèdre situés dans ces cercles ; ce qu'il fallait démontrer.

Dès lors, dans la synthèse, il faut poser deux droites auxquelles le rapport du diamètre de la sphère soit celui du côté du pentagone au côté de l'hexagone et celui du côté du pentagone au côté du décagone ; droites qui ont déjà été posées pour l'icosaèdre [2] ; décrire, dans la surface de la sphère, d'un même côté du centre, deux cercles parallèles, tels que ΖΗΘΚΛ et ΑΒΓΔΕ, dont les carrés des rayons valent respectivement le tiers des carrés des droites posées ; puis, décrire, de l'autre côté du centre, deux autres cercles tels que ΜΝΞΟΠ, ΡΣΤΥΦ, égaux et parallèles à ces derniers ; puis, y insérer parallèlement les côtés ΕΔ, ΖΛ, ΟΞ, ΣΤ des pentagones et décrire, sur ces côtés, les pentagones au moyen desquels s'établiront les angles du polyèdre [3]. Et il résulte manifestement de la construction que les cercles qui entourent les angles [4] du dodécaèdre sont les mêmes que ceux qui entourent les angles de l'icosaèdre [5], et qu'un même cercle comprend le triangle de l'icosaèdre et le pentagone du dodécaèdre inscrits dans la même sphère [6].

---

1. Le diamètre ΞΖ de la sphère est donné, et, en le divisant en extrême et moyenne raison, on obtient (Euclide, liv. XIII, prop. 9, énoncée p. 114, n. 7) les côtés du pentagone et du décagone inscrits dans le cercle ΖΗΘΚΛ. Donc, la relation de la note précédente donne le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕ, d'où, remontant à la première relation de la note précédente, le côté du triangle équilatéral du cercle ΖΗΘΚΛ est donné aussi. Or (Euclide, liv. XIII, prop. 12, énoncée p. 115, n. 4), le carré du rayon valant le tiers du carré du triangle équilatéral, les rayons des deux cercles sont donc donnés aussi ; donc, les cercles sont donnés ; donc, les cercles ΡΣΤΥΦ et ΜΝΞΟΠ, respectivement égaux et parallèles à ces derniers cercles, sont donnés aussi ; donc, l'un des points d'angle du polyèdre étant donné arbitrairement sur l'un des cercles, les autres points d'angles situés sur les cercles sont donnés aussi.

2. Voir le passage de la proposition 57 relatif à la construction de l'icosaèdre.

3. De même que pour les polyèdres précédents, Pappus ne développe pas la démonstration de la construction du dodécaèdre, et Commandin y supplée dans son commentaire relatif à la présente proposition (Cfr. *loc. cit.*, p. 56).

4. Les angles solides.

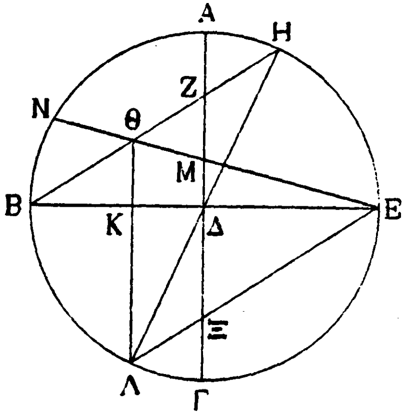
5. Voir proposition 57.

6. Pappus se borne à mentionner une propriété qu'il démontre au livre V, prop. 48, de deux manières différentes. La seconde manière ne fait que reprendre avec plus de développements la démonstration de la proposition II du livre XIV

***

Autre démonstration de la dixième proposition se trouvant dans le troisième livre de la *Collection* de Pappus, et qui comporte la démonstration et la construction instrumentale de la duplication du cube et des deux moyennes proportionnelles (1).

PROPOSITION 59. — Soit le cercle ΑΒΓ autour du centre Δ; soient ΑΔΓ, ΒΔΕ des diamètres de ce cercle perpendiculaires entre eux, et menons transversalement les droites ΕΜΝ, ΒΘΖΗ de telle sorte que la droite ΘΖ soit égale à la droite ΖΗ; je dis que le cube de la droite ΕΔ est au cube de la droite ΔΖ comme la droite ΕΔ est à la droite ΔΜ.



En effet, menons la droite de jonction ΗΔ que nous prolongeons jusqu'au point Λ, et menons les droites de jonction ΛΘ, ΛΕ. La droite ΘΛ est donc parallèle à la droite ΑΔΓ (2) et la droite ΒΗ parallèle à la droite ΛΕ (3). Dès lors, puisque la droite ΛΚ est menée perpendiculairement à la

des *Éléments* d'Euclide, livre attribué à Hypsiclès d'Alexandrie. Cette proposition est énoncée : « Le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 485.

1. Le long passage qui termine le livre III se présente dans l'un des manuscrits (Codex Guelferbytanus graecus 7), où il a probablement été introduit par un auteur postérieur inconnu. Comme l'indique le titre de la proposition, il s'agit d'une variante de la proposition déjà démontrée au chapitre X du livre III, dans laquelle Pappus expose sa propre méthode instrumentale de la détermination des deux moyennes proportionnelles. Ce passage a fait l'objet d'une première publication partielle de la part de G. G. BREDOW et NICKELIUS dans : *Epistolae Parisienses, in quibus de rebus variis, quae ad studium antiquitatis pertinent, agitur (de Pappi collectionibus mathem.)*. Lipsiae, 1812, in 8°, pp. 187-200. Hultsch a admis le passage dans son édition critique, et y a joint une version latine abrégée au moyen de notations modernes (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 164-176).

2. On a par construction : ΘΖ = ΖΗ et ΛΔ = ΔΗ.

3. Car ΒΕ et ΛΗ sont des diamètres.

droite BΔE dans le demi-cercle BΛE, elle est moyenne proportionnelle des droites EK, KB ; par conséquent, la droite EK est à la droite KB comme le carré de la droite EK est au carré de la droite KΛ, c'est-à-dire que la droite ΔZ est à la droite ΔM comme le carré de la droite BΔ est au carré de la droite ΔZ. Dès lors, en associant (1) de part et d'autre le rapport de la droite BΔ à la droite ΔZ, le cube de la droite BΔ sera au cube de la droite ΔZ comme la droite BΔ est à la droite ΔM, c'est-à-dire que le cube de la droite EΔ sera au cube de la droite ΔZ comme la droite EΔ est à la droite ΔM (2).

Au reste, la construction instrumentale se fera de la manière suivante :

Soit un panneau (3) dressé à la règle, au centre duquel un cercle, tel que ABΓ, est dessiné à une distance inférieure à celle que présente le panneau à partir de son centre ; menons par le centre les droites BΔE, AΔΓ perpendiculaires entre elles, et, après avoir pratiqué un trou au point B, faisons-y entrer un petit axe fait au tour ; adaptons cet axe une règle, telle que BΘZH, percée aussi de manière qu'elle puisse circuler aisément autour du centre B, une goupille (4) ayant été fixée sur l'axe pour main-

1. Le mot προσληφθέντος a ici le sens d'une adjonction par multiplication.

2. On a (Euclide, liv. VI, prop. 8, corollaire, énoncé p. 49, n. 1): $\overline{K\Lambda}^2 = EK \times KB$, d'où $EK \times \overline{K\Lambda}^2 = \overline{EK}^2 \times KB$, ou, comme le texte : $\frac{EK}{KB} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{K\Lambda}^2}$. Or, les triangles semblables ZΔB, ΛKE donnent : $\frac{B\Delta}{Z\Delta} = \frac{EK}{K\Lambda}$, d'où : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2} = \frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{K\Lambda}^2}$; donc : $\frac{EK}{KB} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$ (I). Or, les triangles semblables KEΘ, ΔEM donnent : $\frac{EK}{K\Theta} = \frac{E\Delta}{\Delta M}$, et les triangles semblables KBΘ, ΔBZ donnent : $\frac{K\Theta}{KB} = \frac{\Delta Z}{B\Delta} = \frac{\Delta Z}{E\Delta}$, d'où : $\frac{EK}{K\Theta} \times \frac{K\Theta}{KB} = \frac{E\Delta}{\Delta M} \times \frac{\Delta Z}{E\Delta}$ ou : $\frac{EK}{KB} = \frac{\Delta Z}{\Delta M}$, d'où, en présence de la relation (I), il vient comme dans le texte : $\frac{\Delta Z}{\Delta M} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$, d'où : $\frac{\Delta Z}{\Delta M} \times \frac{B\Delta}{\Delta Z} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta Z} \times \frac{B\Delta}{\Delta Z}$, ou, comme intervertit le texte : $\frac{\overline{B\Delta}^3}{\overline{\Delta Z}^3} = \frac{B\Delta}{\Delta M}$, d'où en observant que $E\Delta = B\Delta$, il vient : $\frac{\overline{E\Delta}^3}{\overline{\Delta Z}^3} = \frac{E\Delta}{\Delta M}$.

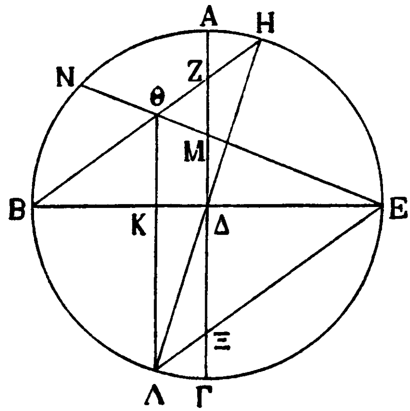
3. Le mot τύμπανον a ici la signification de panneau parfaitement plan, ou de planche à dessiner ; tandis que dans la dernière partie de l'ouvrage, consacrée à la mécanique, le mot aura le sens de tambour, de disque ou de pignon d'engrènement.

4. περόνη, épingle d'attache, désignant ici une petite cheville, ou goupille.

tenir la règle dans sa circonvolution. Les choses étant établies de cette manière, on construira facilement le cube multiple d'un cube suivant un nombre donné.

Proposons donc de construire le cube double.

En effet, prenons la droite ΔE double de la droite ΔM [1] ; menons la droite de jonction EMN, et faisons mouvoir la règle BΘZH autour du centre B jusqu'à ce que la droite comprise entre les points Θ, H soit divisée en deux parties égales par la droite AΔ au point Z ; en sorte que la droite ΘZ soit égale à la droite ZH. La règle ayant pris cette position, on aura déterminé la droite ΔZ, dont on décrira le cube cherché conformément à la démonstration.



Cependant, pour mieux aider la mémoire, composons ce problème de la manière suivante :

Soit le cercle ABΓE décrit autour du centre Δ ; menons les droites AΔΓ, BΔE perpendiculaires entre elles, et que la droite BZH tombe intérieurement du point B sur la circonférence du cercle. Dès lors, la droite BZ est plus grande que la droite ZH.

En effet, puisque la droite BE, qui passe par le centre, est plus grande que la droite BH, la moitié de l'une est aussi plus grande que la moitié de l'autre ; donc, la droite BΔ est plus grande que la moitié de la droite BH. Or, la droite BZ est plus grande que la droite BΔ [2] ; donc, la droite BZ est, à fortiori, plus grande

1. En posant : $\Delta E = 2\Delta M$, l'auteur de la présente proposition introduite dans l'ouvrage de Pappus commet, sinon une erreur, tout au moins une grave négligence. Si ΔE est une donnée inhérente au cercle appareillé comme il a été établi dans ce qui précède, le raisonnement qui va suivre tend à trouver, non pas le cube double d'un cube donné, mais le cube valant la moitié d'un cube donné. Si, au contraire, pour correspondre à la proposition, c'est ΔM qui doit être considéré comme une donnée, le raisonnement doit se rapporter à un autre panneau, agencé avec un autre cercle, dont le rayon est double de cette droite donnée.

2. Parce que BZ est l'hypothénuse du triangle rectangle ZΔB.

que la moitié de la droite BH et, à fortiori, plus grande aussi que la droite ZH (1).

Puisque la droite BZ est plus grande que la droite ZH, posons la droite ΘZ égale à la droite ZH ; je dis que le cube de la droite EΔ est au cube de la droite ΔZ comme la droite EΔ est à la droite ΔM.

En effet, menons la droite de jonction HΔ ; prolongeons-la jusqu'au point Λ et menons la droite de jonction ΛΘ ainsi que la droite de jonction ΛE. Dès lors, la droite ΘΛ est parallèle à la droite AΔΓ et à la droite BH parallèle à la droite ΛE.

En effet, puisque, par hypothèse, ΘZ est égal à ZH et ΛΔ égal à ΔH, parce que l'une et l'autre de ces droites partent du centre du cercle, il s'ensuit que ΛΔ est à ΔH comme ΘZ est à ZH. Si les côtés d'un triangle (2) sont coupés proportionnellement, la droite reliant les points de section est parallèle au côté restant du triangle (3) ; donc, ΘΛ est parallèle à ZΔ. Et puisque les deux droites BΔ, ΔH sont égales aux deux droites ΛΔ, ΔE, et que l'angle compris sous BΔ, ΔH est égal à l'angle compris sous ΛΔ, ΔE, la base BH est égale à la base ΛE, le triangle est égal au triangle, et les angles restants que sous-tendent des côtés égaux sont respectivement égaux (4) ; par conséquent, l'angle compris sous EΛ, ΛH est parallèle à l'angle compris sous ΛH, HB, et l'angle compris sous HB, BE est égal à l'angle compris sous BE, EΛ. Or, ces angles sont alternes ; donc, BH est parallèle à ΛE (5).

Et puisque KΛ est parallèle à ΔΓ, les deux angles compris sous ΛK, KΔ et sous KΔ, ΔΓ sont égaux. Parmi ces angles, celui qui

1. On a : $BE > BH$; donc : $B\Delta > \frac{1}{2} BH$. Or, $BZ > B\Delta$; donc, à fortiori : $BZ > \frac{1}{2} BH$, d'où : $BH - BZ < BH - \frac{1}{2} BH$ ou : $ZH < \frac{1}{2} BH$, d'où, comme le texte : $BZ > ZH$.

2. C'est-à-dire le triangle ΘHΛ.

3. Euclide, liv. VI, prop. 2, énoncée p. 48, n. 1.

4. Cette phrase reproduit à peu près le texte de la proposition 4 du livre I d'Euclide : « Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et un angle égal à un angle, savoir l'angle compris entre les côtés égaux, ces triangles auront leurs bases égales ; ils seront égaux entre eux, et les angles restants, opposés aux côtés égaux seront égaux entre eux. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 11.

5. Euclide, liv. I, prop. 27 : « Si une droite tombant sur deux autres droites fait des angles alternes égaux entre eux, ces deux droites seront parallèles ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 47.

est compris sous KΔ, ΔΓ est droit ; donc, celui qui est compris sous ΛK, KΔ est droit aussi ; donc, KΛ est à angles droits sur BE. Et puisque la droite ΛK est menée à angles droits dans le demi-cercle BΛE, la droite ΛK est moyenne proportionnelle des droites EK, KB (1) ; donc, EK est à KB comme le carré de EK est au carré de KΛ (2). Et puisque BZ est parallèle à ΛE et ΘΛ parallèle à ZΞ, le triangle ΛKE est semblable au triangle BKΘ et le triangle BKΘ semblable au triangle BΔZ ; tandis que le triangle ΘKE est semblable au triangle MΔE et le triangle ΛKE semblable au triangle ΞΔE ; donc, ces triangles sont mutuellement équiangles (3). En conséquence, le carré de KB est au carré de KΘ comme le carré de EK est au carré de KΛ ; tandis que le carré de BΔ est au carré de ΔZ comme le carré de BK est au carré de KΘ (4) ; par conséquent, le carré de BΔ est au carré de ΔZ comme le carré de EK est au carré de KΛ. Mais, EK est à KB comme le carré de EK est au carré de KΛ ; donc, le carré de BΔ est aussi au carré de ΔZ comme EK est à KB. Derechef, puisque le triangle ΛKE est semblable au triangle BKΘ, le triangle ΘKE semblable au triangle MΔE et le triangle ΛKE semblable au triangle ΞΔE, parce que les parallèles rendent ces triangles équiangles, BK est à KΘ comme EK est à KΛ et, par permutation, ΛK est à KΘ comme EK est à KB ; tandis que EΔ est à ΔΞ comme EK est à KΛ et que, par permutation, KΛ est à ΔΞ comme KE est à EΔ. Pareillement aussi, puisque EΔ est à ΔM comme EK est à KΘ et que, par permutation, KΘ est à ΔM comme KE est à EΔ, il s'ensuit que, par raison d'égalité (5), ΘK est à MΔ comme KΛ

1. Euclide, liv. VI, prop. 8, corollaire. Voir énoncé p. 49, n. 1.
2. Euclide, liv. V, déf. 10, énoncée p. 49, n. 2, et Euclide, liv. VI, prop. 20.
3. Euclide, liv. VI, prop. 4, énoncée p. 27, n. 1.
4. Euclide, liv. VI, prop. 22 : « Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, construites semblablement sur ces droites seront proportionnelles ; et si les figures rectilignes semblables et construites semblablement sur ces droites sont proportionnelles, ces droites sont proportionnelles ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 342.
5. Le texte dit ici par erreur : δι' ἴσου, par raison d'égalité ; ce qui est défini comme suit par Euclide (liv. V, déf. 18, trad. de Peyrard, vol. I, p. 238) : « Il y a raison d'égalité lorsqu'ayant plusieurs grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, la première grandeur des premières est à la dernière comme la première grandeur des secondes est à la dernière ; ou bien lorsque l'on compare les grandeurs extrêmes, les moyennes étant retranchées ».

est à ΛΞ et que, par permutation, ΞΔ est à ΔM comme ΛK est à KΘ. Mais, EK est à KB comme ΛK est à KΘ ; donc, ΞΛ est aussi à ΔM comme EK est à KB. Or, ΞΔ est égal à ΔZ ; donc, ZΔ est à ΔM comme EK est à KB. Mais, le carré de BΔ est au carré de ΔZ comme EK est à KB ; donc, ZΔ est aussi à ΔM comme le carré de BΔ est au carré de ΔZ.

Il est clair d'ailleurs que la droite ΞΔ est égale à la droite ΔZ ; car, puisque ΛΞ est parallèle à ZH, le triangle ΛΞΔ est équiangle avec le triangle ZΔH. Et puisqu'on a deux triangles ΛΞΔ, ZΔH ayant deux angles compris sous ΞΔ, ΔΛ et sous ΔΛ, ΛΞ égaux aux deux angles compris sous ZΔ, ΔH et sous ΔH, HZ, ainsi qu'un côté ΛΔ égal à un côté ΔH, il s'ensuit que les côtés restants qui sous-tendent des angles égaux sont respectivement égaux ; donc, la droite ΔΞ est égale à la droite ΔZ.

En conséquence, si on associe de part et d'autre le rapport de BΔ à ΔZ, le cube de BΔ sera au cube de ΔZ comme BΔ est à ΔM, c'est-à-dire que le cube de EΔ sera au cube de ΔZ comme EΔ est à MΔ (1).

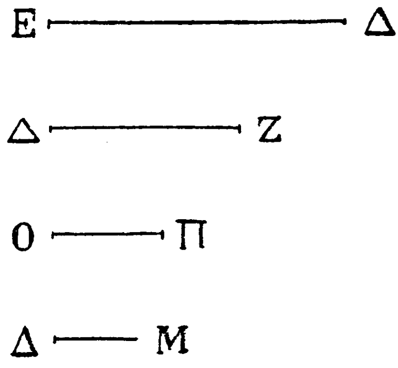
Dès lors, conformément à ce qui précède, les deux droites EΔ, ΔM étant données, prenons deux moyennes proportionnelles en proportion continue.

En effet, posons des droites EΔ, ΔZ, ΔM égales aux droites EΔ, ΔZ, ΔM (2). Dès lors, puisqu'on a démontré que ΔZ est à ΔM

1. Le prolixe passage du scoliaste se résume comme suit : On a $\overline{K\Lambda}^2 = KB \times EK$, d'où $EK \times \overline{K\Lambda}^2 = KB \times \overline{EK}^2$, d'où : $\frac{EK}{KB} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{K\Lambda}^2}$ (I). On a, par similitude de triangles : $\frac{\overline{KB}^2}{\overline{K\Theta}^2} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{K\Lambda}^2}$ et $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta\Theta}^2} = \frac{\overline{KB}^2}{\overline{K\Theta}^2}$ donc : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{K\Lambda}^2}$; d'où, en présence de (I) il vient : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2} = \frac{EK}{KB}$ (II). D'autre part, par similitude de triangles, on a : $\frac{BK}{K\Theta} = \frac{EK}{K\Lambda}$, d'où : $\frac{K\Lambda}{K\Theta} = \frac{EK}{BK}$ et $\frac{E\Delta}{\Delta\Xi} = \frac{EK}{K\Lambda}$, d'où : $\frac{K\Lambda}{\Delta\Xi} = \frac{EK}{E\Delta}$ (III) et, pareillement : $\frac{E\Delta}{\Delta M} = \frac{EK}{K\Theta}$, d'où : $\frac{K\Theta}{\Delta M} = \frac{EK}{E\Delta}$, d'où, en présence de (III) : $\frac{K\Theta}{\Delta M} = \frac{K\Lambda}{\Delta\Xi}$, d'où : $\frac{\Delta\Xi}{\Delta M} = \frac{K\Lambda}{K\Theta}$. Or, on a : $\frac{EK}{KB} = \frac{K\Lambda}{K\Theta}$; donc : $\frac{\Delta\Xi}{\Delta M} = \frac{EK}{KB}$. Or, $\Delta\Xi = \Delta Z$; donc : $\frac{\Delta Z}{\Delta M} = \frac{EK}{KB}$; d'où en présence de (II) il vient : $\frac{\Delta Z}{\Delta M} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2} \times \frac{B\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Delta Z}{\Delta M} \times \frac{B\Delta}{\Delta Z}$, ou : $\frac{\overline{B\Delta}^3}{\overline{\Delta Z}^3} = \frac{B\Delta}{\Delta M}$ ou : $\frac{\overline{E\Delta}^3}{\overline{\Delta Z}^3} = \frac{E\Delta}{\Delta M}$.

2. C'est-à-dire : posons à part les droites EΔ, ΔZ, ΔM empruntées aux droites de mêmes noms de la première figure du début de la proposition.

comme le carré de EΔ est au carré de ΔZ[1], il est évident que la droite ΔM n'est pas la troisième proportionnelle des droites EΔ, ΔZ.



En effet, que la droite ΔM soit, si possible, la troisième proportionnelle des droites EΔ, ΔZ. En conséquence, puisque la droite ΔM est la troisième proportionnelle des droites EΔ, ΔZ, on a ΔZ à ΔM comme EΔ est à ΔZ ; donc, EΔ est aussi à ΔM comme le carré de EΔ est au carré de de ΔZ. Mais, ΔZ est à ΔM comme le carré de EΔ est au carré de ΔZ ; donc, par raison d'égalité [2], ΔZ est à ΔM comme EΔ est à ΔM. En conséquence, chacune des droites EΔ, ΔZ a même rapport avec ΔM; donc, EΔ est égal à ΔZ ; ce qui est impossible (car EΔ est plus grand que ΔZ). Dès lors, la droite ΔM n'est pas la troisième proportionnelle des droites EΔ, ΔZ.

Prenons la troisième proportionnelle OΠ des droites EΔ, ΔZ. Dès lors, puisque la droite OΠ est la troisième proportionnelle des droites EΔ, ΔZ, on a ΔZ à OΠ comme EΔ est à ΔZ ; donc, EΔ est aussi à OΠ comme le carré de ΔE est au carré de ΔZ. Mais, on a ΔZ à ΔM comme le carré de EΔ est au carré de ΔZ ; donc, par raison d'égalité [3], ZΔ est à ΔM comme EΔ est à OΠ et, par permutation, OΠ est à ΔM comme EΔ est à ΔZ. Mais, on a ΔZ à OΠ comme EΔ est à ΔZ ; donc, OΠ est aussi à ΔM comme ΔZ est à OΠ. En conséquence, les quatre droites EΔ, ΔZ, OΠ, ΔM sont en proportion continue et progressive [4] ; donc, les droites ΔZ, OΠ sont les deux moyennes proportionnelles des droites EΔ, ΔM [5].

---

1. On a démontré plus haut (p. 126, n. 1) que l'on a : $\frac{\Delta Z}{\Delta M} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$. Or, $B\Delta = E\Delta$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta Z}{\Delta M} = \frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$.
2. Voir note relative à la même inexactitude rencontrée plus haut.
3. Même inexactitude que plus haut.
4. Le texte dit d'une manière redondante : ἐν τῇ συνεχεῖ καὶ ἐφεξῆς ἀναλογίᾳ (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 174, l. 14).
5. Posons OΠ troisième proportionnelle entre EΔ, ΔZ, c'est-à-dire posons :

Cette démonstration étant obtenue en concordance avec la construction instrumentale du dessin posé au début [1], il est clair, d'une part, qu'étant données deux droites inégales [2], et qu'étant donné le rapport que ces droites ont entre elles, la construction instrumentale fait trouver deux moyennes proportionnelles dont la figure [3] construite sur la première [4] est à celle qui est construite sur la seconde [5] comme la première est à la quatrième [6] et, d'autre part, qu'en posant une certaine droite [7], et qu'en s'en procurant par le tracé des lignes deux autres [8] plus petites que la première, rangées à sa suite et inégales, la démonstration trouve que la seconde est à la plus petite [9] comme le carré de la première est au carré de la seconde ; tandis que, prenant la troisième proportionnelle [10] de ces première et seconde droites, elle fait voir que les deux moyennes proportionnelles doivent être considérées au même titre que dans la construction instrumentale. Leur conséquence est d'ailleurs la même, bien que les principes au moyen desquels elles ont été trouvées ne soient pas identiques. En effet, dans la construction instrumentale, on fait voir la conséquence après avoir donné le rapport de deux droites inégales ; tandis que, dans la démonstration, le rapport des droites n'est pas donné ; et c'est

---

$\frac{\Delta Z}{O\Pi}=\frac{E\Delta}{\Delta Z}$, d'où : $\frac{E\Delta\times\Delta Z}{O\Pi}=\frac{\overline{E\Delta}^2}{\Delta Z}$, d'où, comme le texte : $\frac{E\Delta}{O\Pi}=\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$. Or, on a (voir page 127, note 1) : $\frac{\Delta Z}{\Delta M}=\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$; donc : $\frac{\Delta Z}{\Delta M}=\frac{E\Delta}{O\Pi}$, d'où, en présence de la relation de position, il vient : $\frac{\Delta Z}{O\Pi}=\frac{O\Pi}{\Delta M}$, d'où la progression : $\frac{E\Delta}{\Delta Z}=\frac{\Delta Z}{O\Pi}=\frac{O\Pi}{\Delta M}$.

1. Voir la figure avant-précédente.
2. Les droites EΔ, ΔM.
3. Le mot εἶδος, la figure, avec lequel il convient tout au moins de sous-entendre le mot στερεὸν, solide, est employé ici par négligence au lieu de κύβος, cube.
4. La droite EΔ.
5. La droite ΔZ.
6. La droite ΔM. On a trouvé plus haut : $\frac{\overline{E\Delta}^3}{\overline{\Delta Z}^3}=\frac{E\Delta}{\Delta M}$.
7. La droite EΔ.
8. Les droites ΔZ, ΔM.
9. C'est-à-dire la quatrième, ou ΔM. On a trouvé plus haut : $\frac{\Delta Z}{\Delta M}=\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$.
10. La droite OΠ.

pourquoi il reste à rechercher la manière [de trouver] (1) quatre droites dans un rapport donné (2) ; car, si le rapport de la première droite à la quatrième est donné, il faut que le rapport de la figure (3) construite sur la première droite à celle qui est construite sur la seconde devienne le même.

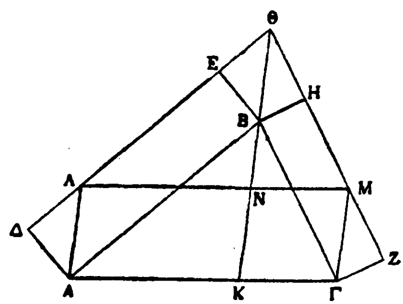
1. Lacune comblée par le mot εὑρίσκονται (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 176, l. 5).
2. C'est-à-dire en progression géométrique.
3. C'est-à-dire du cube. Voir page. 128, n. 3.

LIVRE IV DE LA COLLECTION DE PAPPUS [1]

I.

Proposition 1. — Ayant un triangle ABΓ, si l'on décrit sur les droites AB, BΓ des parallélogrammes quelconques ABΔE, BΓZH ; si les droites ΔE, ZH sont prolongées jusqu'au point Θ, et si l'on mène la droite de jonction ΘB, les parallélogrammes [2] ABΔE, BΓZH deviennent équivalents à celui qui est entouré par les droites AΓ, ΘB dans un angle [3] égal à la somme des angles compris sous les droites BA, AΓ et sous les droites ΔΘ, ΘB.

En effet, prolongeons la droite ΘB jusqu'au point K ; menons par les points A, Γ les droites AΛ, ΓM parallèles à la droite ΘK, et menons la droite de jonction ΛM. Puisque AΛΘB est un parallélogramme, les droites AΛ, ΘB sont égales et parallèles. Les droites MΓ, ΘB sont de même égales et parallèles ; en sorte que les droites ΛA, MΓ sont aussi égales et parallèles ; donc, les droites ΛM, AΓ sont aussi égales et parallèles. En conséquence, AΛMΓ est un parallélogramme constitué dans l'angle compris sous les droites ΛA, AΓ, c'est-à-dire dans l'angle compris sous les droites BA, AΓ augmenté de l'angle compris sous les droites ΔΘ,



1. Le préambule du livre IV est perdu avec les renseignements qu'il donnait probablement sur certains auteurs, ou sur des ouvrages qui ne nous sont pas parvenus, et auxquels Pappus emprunte la plupart des propositions qu'il va reproduire ou commenter.

2. C'est-à-dire la somme des parallélogrammes.

3. ἐν γωνίᾳ, dans l'angle. Pappus désigne généralement le parallélogramme par le plus petit angle dans lequel il est décrit.

ΘΒ ; car, l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΒ est égal à celui qui est compris sous les droites ΛΑ, ΑΒ. Et puisque le parallélogramme ΔΑΒΕ équivaut au parallélogramme ΛΑΒΘ (car il est sur la même base ΑΒ et dans les mêmes parallèles ΑΒ, ΔΘ), et que le parallélogramme ΛΑΒΘ équivaut au parallélogramme ΛΑΚΝ (car il est sur la même base ΛΑ et dans les mêmes parallèles ΛΑ, ΘΚ), il s'ensuit que le parallélogramme ΑΔΕΒ équivaut aussi au parallélogramme ΛΑΚΝ. Pour les mêmes raisons, le parallélogramme ΒΗΖΓ équivaut aussi au parallélogramme ΝΚΓΜ ; donc, les parallélogrammes ΔΑΒΕ, ΒΗΖΓ, valent le parallélogramme ΛΑΓΜ,, c'est-à-dire celui qui est entouré par les droites ΑΓ, ΘΒ dans l'angle compris sous les droites ΛΑ, ΑΓ égal à la somme de ceux qui sont compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ et sous les droites ΒΘ, ΘΔ. Et ceci est beaucoup plus général que ce qui est démontré dans les *Éléments* pour les carrés dans les triangles rectangles [1].

II.

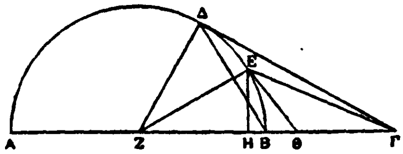
PROPOSITION 2. — Soit un demi-cercle sur la droite ΑΒ qu'il a comme diamètre rationnel [2], et soit une droite ΒΓ égale au rayon, située en prolongement de la droite ΑΒ ; menons la tangente ΓΔ ; coupons l'arc ΒΔ en deux parties égales au point Ε,

1. Cette proposition constitue une généralisation intéressante du théorème sur le carré de l'hypothénuse qu'Euclide démontre au livre I, prop. 47, en l'énonçant : « Dans les triangles rectangles, le carré décrit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 78. La proposition de Pappus s'étendant aux parallélogrammes quelconques, semblables ou non, constitue également, une généralisation de la proposition qu'Euclide démontre au livre VI, prop. 31, et qu'il énonce : « Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui sous-tend l'angle droit est égale aux figures semblables qui sont décrites semblablement sur les côtés qui comprennent l'angle droit. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 368.

2. ῥητός, rationnel. La ligne droite rationnelle (εὐθεῖα ῥητή) considérée dans les *Éléments* d'Euclide est une ligne déterminée, en comparaison de laquelle d'autres droites sont commensurables en longueur et en puissance, soit en puissance seulement ; ou bien, sont incommensurables en longueur et en puissance, soit en longueur seulement. Euclide la définit du reste textuellement comme suit (livre X, *Définitions premières*) : Définition 5 : « Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée » ; et Définition 6 : « On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement ». Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 112.

et menons la droite de jonction ΓE ; je dis que la droite ΓE est l'irrationnelle (1) qu'on appelle mineure (2).

Prenons le Z centre du demi-cercle et menons les droites de jonction ZΔ, ZE. Puisque l'angle compris sous les droites ZΔ, ΔΓ est droit, il est dans le demi-cercle établi sur la droite ZΓ et dont le centre est le point B. De plus, si l'on mène la droite de jonction BΔ, il se constitue le triangle équilatéral BZΔ ; en sorte que l'angle compris sous les droites ΔZ, ZB est les deux tiers de l'angle droit, et que l'angle compris sous les droites EZ, ZB est le tiers de l'angle droit. Menons du point E la perpendiculaire HE sur le diamètre AB ; il s'ensuit que le triangle ΓZΔ est équiangle avec le triangle EZH (3), et que la droite EZ est à la droite ZH comme la droite ZΓ est à la droite ΓΔ (4). Or, le carré de la droite ZΓ vaut les quatre tiers du carré de la droite ΓΔ ; donc, le carré de la droite EZ vaut aussi les quatre tiers du carré de la droite ZH. En conséquence, le rapport du carré de la droite EZ au carré de la droite ZH est celui de 16 à 12 et le rapport du carré de la droite ZΓ au carré de la droite EZ est celui de 64 à 16 ; donc, le rapport du carré de la droite ZΓ au carré de la droite ZH est celui de 64 à 12 (5).



1. ἄλογος, disproportionné, irrationnel. D'après la définition d'Euclide (liv. X, *Définitions premières*, déf. 7. Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 112), les lignes irrationnelles (εὐθεῖαι ἄλογοι) sont celles qui sont incommensurables (ἀσύμμετροι) avec des lignes rationnelles.

2. ἄλογος καλουμένη ἐλάσσων, l'irrationnelle appelée mineure. C'est celle dont le carré équivaut au rectangle délimité sous une droite rationnelle et un apotome (résidu) quatrième. (Euclide, liv. X, prop. 95 : « Si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure. » Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 350). Algébriquement, la droite ΓE est donc la plus petite racine d'une équation de la forme : $x^4 - px^2 + q = o$ dans laquelle q n'est pas un nombre carré.

3. Dans le triangle équilatéral ΔZB, on a : $\widehat{\Delta ZB} = \frac{2}{3}$ angles droit ; donc : $Z\Gamma\Delta = \frac{1}{3}$ angle droit. Or, $\widehat{EZH} = \frac{1}{2}\ \widehat{\Delta ZB} = \frac{1}{3}$ angle droit ; donc : $\widehat{EZH} = \widehat{Z\Gamma\Delta}$.

4. Les triangles équiangles ΓZΔ, EZH donnent (Euclide, liv. VI, prop. 4, énoncée p. 27, n. 1) : $\frac{EZ}{ZH} = \frac{Z\Gamma}{\Gamma\Delta}$.

5. On a par construction : $B\Gamma = Z\Delta$; donc : $Z\Gamma = 2Z\Delta$, d'où : $\overline{Z\Gamma}^2 = 4\overline{Z\Delta}^2$.

Que la droite ZB soit donc quadruple de la droite BΘ. Or, la droite ZΓ est double de la droite BZ ; donc, le rapport de la droite ZΓ à la droite ZΘ est celui de 8 à 5, [et le rapport de la droite ZΘ à la droite ΘΓ est celui de 5 à 3] (1), et le rapport du carré de la droite ZΓ au carré de la droite ZΘ est donc celui de 64 à 25. Or, on a démontré que le rapport du carré de la droite ΓZ au carré de la droite ZH est celui de 64 à 12 ; donc, le rapport du carré de la droite ZΘ au carré de la droite ZH est celui de 25 à 12. En conséquence, les droites rationnelles ΘZ, ZH sont commensurables en puissance seulement (2), et la puissance de la droite ΘZ surpasse la puissance de la droite ZH du carré d'une droite incommensurable avec elle (3). Or, la droite entière ZΘ est commensurable avec la droite rationnelle AB (4) ; donc, la

---

Or, $\overline{Z\Delta}^2=\overline{Z\Gamma}^2-\overline{\Gamma\Delta}^2$; donc : $\overline{Z\Gamma}^2=4(\overline{Z\Gamma}^2-\overline{\Gamma\Delta}^2)$, d'où : $\overline{Z\Gamma}^2=\frac{4}{3}\overline{\Gamma\Delta}^2$. Or, la relation de la note précédente donne : $\frac{\overline{EZ}^2}{\overline{ZH}^2}=\frac{\overline{Z\Gamma}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}$; donc : $\frac{\overline{EZ}^2}{\overline{ZH}^2}=\frac{4}{3}$ ou, comme le texte : $\frac{\overline{EZ}^2}{\overline{ZH}^2}=\frac{16}{12}$. Or, on a par construction : $Z\Gamma=2EZ$, d'où : $\overline{Z\Gamma}^2=4\overline{EZ}^2$ d'où : $\frac{\overline{Z\Gamma}^2}{\overline{EZ}^2}=\frac{4}{1}=\frac{64}{16}$, d'où, par composition avec la relation précédente, on a, comme le texte : $\frac{\overline{Z\Gamma}^2}{\overline{ZH}^2}=\frac{64}{12}$.

1. La phrase que nous plaçons entre crochets exprimant une relation non utilisée dans la suite, nous la considérons comme ayant été interpolée (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 180, l. 9).

2. Posons une droite BΘ telle que l'on ait : $ZB = 4B\Theta$. Dès lors, $Z\Gamma = 2ZB = 8B\Theta$ et $Z\Theta = ZB + B\Theta = 4B\Theta + B\Theta = 5B\Theta$; donc, comme le texte : $\frac{Z\Gamma}{Z\Theta}=\frac{8}{5}$, d'où : $\frac{\overline{Z\Gamma}^2}{\overline{Z\Theta}^2}=\frac{64}{25}$, d'où, comparant avec la relation de la note avant-précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{Z\Theta}^2}{\overline{ZH}^2}=\frac{25}{12}$, d'où $\frac{Z\Theta}{ZH}=\frac{5}{\sqrt{12}}$; donc, les droites ZΘ, ZH ne sont pas commensurables en longueur, mais en puissance seulement.

3. C'est-à-dire incommensurable en longueur avec la droite ΘZ. EUCLIDE, liv. X, prop. 31 : « Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable avec elle. » Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 190. En effet, la relation $\frac{\overline{Z\Theta}^2}{\overline{ZH}^2}=\frac{25}{12}$ de la note précédente donne par conversion : $\frac{\overline{Z\Theta}^2}{\overline{Z\Theta}^2-\overline{ZH}^2}=\frac{25}{13}$, et montre que $\overline{Z\Theta}^2$ surpasse $\overline{ZH}^2$ d'une surface carrée mesurée par 13, dont le côté $\sqrt{13}$ est incommensurable avec la rationnelle ZΘ.

4. Car : $Z\Theta = ZB + B\Theta$. Or, on a posé : $ZB = 4B\Theta$, d'où : $B\Theta = \frac{1}{4}ZB$;

droite ΘH est le quatrième apotome [1]. Or, la droite ZΓ est rationnelle, et son double l'est aussi ; donc, la droite qui est en puissance de deux fois le rectangle compris sous les droites ZΓ, HΘ est l'irrationnelle appelée mineure [2]. Mais, la droite ΓE est en puissance de deux fois le rectangle compris sous les droites ΓZ, HΘ ; donc, la droite ΓE est une mineure.

Au reste, on verra clairement comme suit que la droite ΓE est en puissance de deux fois le rectangle compris sous les droites ΓZ, HΘ.

Menons la droite de jonction EΘ. Puisque le carré de la droite EΓ vaut les carrés des droites EΘ, ΘΓ plus deux fois le rectangle compris sous les droites ΓΘ, ΘH [3], et que les carrés des droites EΘ, ΘZ valent le carré de la droite EZ plus deux fois le rectangle compris sous les droites ZΘ, ΘH [4], [5], il s'ensuit

---

donc : $Z\Theta = ZB + \frac{1}{4} ZB = \frac{5}{4} ZB$. Or, $ZB = \frac{1}{2} AB$; donc : $Z\Theta = \frac{5}{8} AB$; donc : ZΘ et AB sont rationnelles commensurables.

1. ἀποτομή, le résidu ou apotome défini par Euclide, liv. X, *Troisièmes définitions*, déf. 4 : « De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du carré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera quatrième apotome. » Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 320.

2. Euclide, liv. X, prop. 95, énoncée p. 133, n. 2.

3. Euclide, liv. II, prop. 12 : « Dans les triangles obtusangles, le carré du côté qui sous-tend l'angle obtus est plus grand que les carrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, de deux fois le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire et sous la droite prise extérieurement de la perpendiculaire à l'angle obtus. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 111.

4. Euclide, liv. II, prop. 13 : « Dans les triangles acutangles, le carré du côté qui sous-tend un angle aigu est plus petit que les carrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 113.

Cette proposition d'Euclide ne vise en réalité que le triangle ayant les trois angles aigus, et si elle est invoquée ici à propos du triangle ZEΘ, dont l'angle en E est obtus, c'est parce que la proposition reste vraie pour le triangle ayant un angle droit ou obtus. Cette généralisation de la proposition d'Euclide est démontrée par Commandin dans sa version latine commentée d'Euclide (*Euclidis Elementorum libri , una cum scholiis antiquis, a Fed. Commandino in latinum conversi*. Pisauri, 1619, in-folio, p. 35). Elle est démontrée aussi par Chr. Clavius dans son commentaire sur Euclide, qui est resté le plus abondant et le meilleur (*Euclidis Elementorum libri XV. Accessit XVI de solidorum regularium cujuslibet intra quotlibet comparatione, omnes perspicuis demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati. Auctore Christophoro Clavio*. Romae, 1589, 2 vol. in-8°, pp. 298-300).

5. Nous abandonnons ici, comme Hultsch (cfr. *loc. cit.*, p. 180, l. 24-28), une interpolation évidente de cinquante-trois mots qui ne font que reprendre sous une autre forme les relations exprimées dans la phrase précédente.

que les carrés des droites ΓΕ, ΕΘ, ΘΖ valent les carrés des droites ΕΘ, ΘΓ, ΕΖ plus deux fois le rectangle compris sous les droites ΓΘ, ΘΗ conjointement avec deux fois le rectangle compris sous les droites ΖΘ, ΘΗ, c'est-à-dire plus deux fois le rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΗΘ. Retranchons de part et d'autre le carré de la droite ΕΘ ; il s'ensuit que les carrés restants des droites ΕΓ, ΖΘ valent les carrés des droites ΕΖ, ΘΓ plus deux fois le rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΗΘ. Or, parmi ces carrés, celui de la droite ΖΘ équivaut aux carrés des droites ΕΖ, ΘΓ (car le carré de la droite ΖΘ est de 25 unités, celui de la droite ΘΓ de 9 unités et celui de la droite ΕΖ de 16 unités). En conséquence, le carré restant de la droite ΓΕ vaut deux fois le rectangle compris sous les droites ΖΓ, ΗΘ (1).

III.

Proposition 3. — Soit un demi-cercle sur la droite ΑΓ qu'il possède comme diamètre rationnel ; soit une droite ΓΔ égale au rayon (2) ; soit la tangente ΔΒ, et coupons l'angle compris sous les droites ΓΔ, ΔΒ en deux parties égales par la droite ΔΖ ; je dis que la droite ΔΖ est l'excédent dont la droite binôme (3) sur-

---

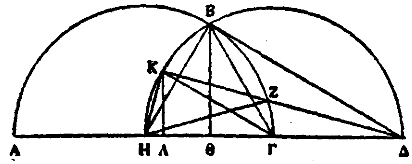
1. Explicitement : le triangle ΕΘΓ donne (Euclide, liv. II, prop. 12) : $\overline{\Gamma E}^2 = \overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta\Gamma}^2 + 2\Gamma\Theta \times \Theta H$ (I) D'autre part, le triangle ΖΕΘ, acutangle. en Θ, donne (Euclide, liv. II, prop. 13) : $\overline{EZ}^2 = \overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta Z}^2 - 2Z\Theta \times \Theta H$ d'où : $\overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta Z}^2 = \overline{EZ}^2 + 2Z\Theta \times \Theta H$ (II). Dès lors, les expressions (I) et (II) ajoutées membre à membre donnent : $\overline{\Gamma E}^2 + \overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta Z}^2 = \overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta\Gamma}^2 + \overline{EZ}^2 + 2\Gamma\Theta \times \Theta H + 2Z\Theta \times \Theta H = \overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta\Gamma}^2 + \overline{EZ}^2 + 2\,(\Gamma\Theta + Z\Theta) \times \Theta H = \overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta\Gamma}^2 + \overline{EZ}^2 + 2Z\Gamma \times \Theta H$, ou, comme le texte : $\overline{\Gamma E}^2 + \overline{\Theta Z}^2 = \overline{\Theta\Gamma}^2 + \overline{EZ}^2 + 2Z\Gamma \times \Theta H$ (III). Or, on a posé : $ZB = 4B\Theta$; donc : $Z\Theta = ZB + B\Theta = 5B\Theta$, d'où : $\overline{Z\Theta}^2 = 25\overline{B\Theta}^2 = 9\overline{B\Theta}^2 + 16\overline{B\Theta}^2$ (IV). Or, $\Theta\Gamma = B\Gamma - B\Theta = ZB - B\Theta = 3B\Theta$, d'où: $\overline{\Theta\Gamma}^2 = 9\overline{B\Theta}^2$, et $EZ = ZB = 4B\Theta$, d'où: $\overline{EZ}^2 = 16\overline{B\Theta}^2$. L'expression (IV) devient donc, comme le texte : $\overline{Z\Theta}^2 = \overline{\Theta\Gamma}^2 + \overline{EZ}^2$, d'où l'expression (III) devient, comme dans le texte : $\overline{\Gamma E}^2 = 2Z\Gamma \times \Theta H$.

2. Sous-entendu : τῇ ΑΓ ἐπ' εὐθείας, c'est-à-dire en prolongement de la droite ΑΓ.

3. ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων, la (droite) de deux noms, ou droite binôme, c'est-à-dire la droite irrationnelle composée de deux segments commensurables en puissance seulement, ou bien composée de deux segments qui représentent ou dénomment deux aires carrées inégales. Les droites dites de deux noms ou binômes considérées par Euclide dans le livre X de ses *Éléments* sont au nombre de six, et sont définies comme suit sous le titre de *Définitions secondes* (voir trad. de Peyrard, vol. II, pp. 227-228) :

I. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant passe la droite qui fait avec une surface rationnelle un ensemble médial (1).

En effet, prenons le centre H du demi-cercle ; menons la droite de jonction BH ; décrivons le demi-cercle HBΔ sur la droite HΔ et prolongeons la droite ΔZ jusqu'au point K. L'arc BK est donc égal à l'arc KH. Menons la perpendiculaire KΛ sur la droite ΛΓ. Dès lors, puisque la droite BH est le côté de l'hexagone (2), et que la droite KΛ est la moitié du côté de l'hexagone (car cette droite prolongée sous-tend le double de l'arc KH), il s'ensuit que la droite BH est le double



de la droite KΛ, c'est-à-dire que la droite ΓK est le double de la droite KΛ. De plus, l'angle compris sous les droites KΛ, ΛΓ est droit ; donc, le carré de la droite KΓ vaut une fois et un tiers le carré de la droite ΓΛ, c'est-à-dire que le carré de la droite ΔΓ vaut une fois et un tiers le carré de la droite ΓΛ. Dès lors, les rationnelles ΔΓ, ΓΛ sont commensurables en puissance seulement (3) ;

divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du carré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

II. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

III. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

IV. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du carré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

V. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

VI. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

1. μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης, qui fait avec (une surface) rationnelle un tout médial. C'est-à-dire un ensemble médial tel qu'il est défini par Euclide (liv. X, prop. 96) : « Si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial ». Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 354.

2. BH = rayon du cercle HBΔ ; donc (Euclide, liv. IV, prop. 15, énoncée p. 116, n. 3), la droite BH est le côté de l'hexagone inscrit dans ce cercle.

3. Il est démontré que l'on a : $BH = \Gamma K = 2K\Lambda$, d'où $K\Lambda = \frac{1}{2}K\Gamma$. Or, le triangle rectangle KΛΓ donne : $\overline{K\Gamma}^2 = \overline{K\Lambda}^2 + \overline{\Gamma\Lambda}^2$; donc : $\overline{K\Gamma}^2 + \frac{1}{4}\overline{K\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Lambda}^2$, d'où $\frac{3}{4}\overline{K\Gamma}^2 = \overline{\Gamma\Lambda}^2$, d'où comme le texte : $\overline{K\Gamma}^2 = \frac{4}{3}\overline{\Gamma\Lambda}^2$. Or, $\Delta\Gamma = K\Gamma$; donc, comme le

la puissance de la droite ΔΓ surpasse la puissance de la droite ΓΛ du carré d'une droite commensurable avec elle [1], et la droite plus grande ΔΓ est commensurable avec la rationnelle ΑΓ ; par conséquent, la droite ΛΔ est la première binôme [2]. Or, la droite ΗΔ est rationnelle [3] ; donc, la droite qui est en puissance de l'aire comprise sous les droites ΗΔ, ΔΛ [4] est l'irrationnelle appelée la droite binôme [5]. Mais, la droite ΔΚ est en puissance de cette aire (car, en raison de ce que le triangle ΗΔΚ est équiangle avec le triangle ΔΛΚ, la droite ΚΔ est à la droite ΔΛ comme la droite ΗΔ est à la droite ΔΚ) ; donc, la droite ΔΚ est la droite binôme [6]. Et puisque l'angle compris sous les droites ΒΗ, ΗΓ est les deux tiers de l'angle droit, et que la droite ΗΒ est égale à la droite ΗΓ, le triangle ΒΗΓ est donc équilatéral [7]. Menons la perpendiculaire ΒΘ. Dès lors, la droite ΗΓ, c'est-à-dire la droite ΔΓ, est double de la droite ΓΘ. De plus, on a démontré

---

texte : $\overline{\Delta\Gamma}^2 = \frac{4}{3}\,\overline{\Gamma\Lambda}^2$, c'est-à-dire que ΔΓ, ΓΛ sont commensurables en puissance et non pas en longueur, car $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\Lambda}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

1. La relation : $\frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{\Gamma\Lambda}^2}=\frac{4}{3}$, donne : $\frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2-\overline{\Gamma\Lambda}^2}=\frac{4}{1}$, et montre que $\overline{\Delta\Gamma}^2$ surpasse $\overline{\Gamma\Lambda}^2$ d'une aire carrée mesurée par 1, dont le côté est commensurable avec la droite rationnelle ΔΓ.

2. La droite ΛΔ répondant donc à la première des *Définitions secondes* du livre X d'Euclide (voir page 136, n. 3), elle est donc première de deux noms ou première binôme.

3. Car elle est égale par construction au diamètre ΑΓ, rationnel par hypothèse.

4. τὸ ὑπὸ τῶν ΗΔΛ χωρίον, l'aire (comprise) sous les (droites) ΗΔ, ΔΛ, au lieu de dire, comme d'habitude : τὸ ὑπὸ τῶν ΗΔΛ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, le rectangle compris sous les (droites) ΗΔ, ΔΛ.

5. Euclide, liv. X, prop. 55 : « Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms ». Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 246.

6. La similitude des triangles ΗΔΚ, ΚΔΛ donne : $\frac{\Delta K}{\Delta\Lambda}=\frac{H\Delta}{\Delta K}$, d'où, comme le texte : $\overline{\Delta K}^2= H\Delta \times \Delta\Lambda$. Or, ΗΔ est la rationnelle de construction, et on a démontré (voir note 2 ci-dessus) que la droite ΔΛ est première binôme ; donc (Euclide, livre X, prop. 55, énoncée en note précédente), la droite ΔΚ est l'irrationnelle binôme.

7. Il a été démontré que ΒΗ est le côté de l'hexagone régulier inscrit ; donc, puisque l'angle au centre que sous-tend le côté de l'hexagone vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit, et que ΗΒ, ΗΓ sont des rayons, le triangle ΒΗΓ est équilatéral. Cette démonstration est inférieure à celle qui vise le même cas dans la proposition précédente.

que le carré de la droite ΔΓ vaut une fois et un tiers le carré de la droite ΓΛ ; donc, le carré de la droite ΛΓ est le triple du carré de la droite ΓΘ (1). En conséquence, les droites rationnelles ΛΓ, ΓΘ sont commensurables en puissance seulement ; la puissance de la droite ΛΓ surpasse la puissance de la droite ΓΘ du carré d'une droite incommensurable avec elle, et la droite de petit nom ΓΘ est commensurable avec la droite rationnelle ΑΓ ; donc, la droite ΛΘ est un cinquième apotome (2). Et puisque le rectangle compris sous ΔΗ, ΗΘ équivaut au carré de ΒΗ en raison de ce que les triangles ΒΗΘ, ΒΗΔ sont équiangles, et que le rectangle compris sous ΔΗ, ΗΛ équivaut au carré de ΚΗ en raison de ce que les triangles ΚΗΛ, ΚΗΔ sont équiangles, il s'ensuit que le rectangle compris sous ΔΗ, ΗΛ est au carré de ΚΗ comme le rectangle compris sous ΔΗ, ΗΘ est au carré de ΒΗ, et que, par permutation, la droite ΘΗ est à la droite ΗΛ comme le rectangle compris sous ΔΗ, ΗΘ est au rectangle compris sous ΔΗ, ΗΛ (3). En conséquence, le carré de la droite ΒΗ, c'est-à-dire le carré de la droite ΖΗ, est aussi au carré de la droite ΗΚ comme la droite ΘΗ est à la droite ΗΛ ; donc, par différence, le carré de la droite ΚΖ est au carré de la droite ΗΚ comme la droite ΘΛ est à la droite ΛΗ. De plus, on a démontré que le rectangle compris sous ΔΗ, ΗΛ équivaut au carré de ΗΚ ; donc, le rectangle compris sous ΔΗ, ΛΘ équivaut aussi au carré de ΚΖ (4). Or, la droite ΛΘ

1. On a : $H\Gamma = \Delta\Gamma = 2\Gamma\Theta$, d'où : $\overline{\Delta\Gamma}^2 = 4\overline{\Gamma\Theta}^2$. Or, on a (voir note 3, p. 137) : $\overline{\Delta\Gamma}^2 = \frac{4}{3}\overline{\Gamma\Lambda}^2$; donc : $4\overline{\Gamma\Theta}^2 = \frac{4}{3}\overline{\Gamma\Lambda}^2$, d'où, comme le texte : $\overline{\Gamma\Lambda}^2 = 3\overline{\Gamma\Theta}^2$.

2. L'expression de la note précédente, sous la forme : $\frac{\overline{\Gamma\Lambda}^2}{\overline{\Gamma\Theta}^2} = \frac{3}{1}$, montre que les droites ΓΛ, ΓΘ sont commensurables en puissance et non pas en longueur. Or, $\frac{\overline{\Gamma\Lambda}^2}{\overline{\Gamma\Lambda}^2 - \overline{\Gamma\Theta}^2} = \frac{3}{2}$; donc, $\overline{\Gamma\Lambda}^2$ dépasse $\overline{\Gamma\Theta}^2$ d'une aire carrée mesurée par 2, dont le côté $\sqrt{2}$ est incommensurable en longueur avec la rationnelle de grand nom ΓΛ. Or, la droite de petit nom ΓΘ est commensurable en longueur avec la droite rationnelle par hypothèse ΑΓ; donc, le reste, c'est-à-dire $\Gamma\Lambda - \Gamma\Theta = \Lambda\Theta$ est un cinquième apotome, conformément à EUCLIDE, liv. X, *Définitions troisièmes*, déf. 5 : « Si la congruente est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste s'appelle un cinquième apotome ». Voir trad. Peyrard, vol. II, p. 320.

3. Le texte présente ici l'interpolation : κοινὸν γὰρ ὕψος τὸ ΔΗ, car la hauteur ΔΗ est commune (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, p. 184, l. 19).

4. La similitude des triangles ΒΗΘ, ΔΗΒ donne : $\frac{\Delta H}{BH} = \frac{BH}{H\Theta}$, d'où :

est un cinquième apotome, et la droite ΔH est rationnelle ; donc, la droite KZ est celle qui forme avec une surface rationnelle un ensemble médial (1). Mais, on a démontré aussi que la droite ΔK est binôme ; donc, la droite restante ΔZ est l'excédent dont cette droite binôme surpasse la droite formant avec une surface rationnelle un ensemble médial (2).

IV.

PROPOSITION 4. — Soit un cercle ΑΒΓ dont le centre est E, le diamètre ΒΓ, et soit une tangente ΑΔ rencontrant la droite ΒΓ au point Δ. Menons transversalement une droite ΔZ ; prolongeons la droite de jonction AE jusqu'au point H, et menons les droites de jonction ZKH, HΛΘ ; je dis que la droite EK est égale à la droite EΛ.

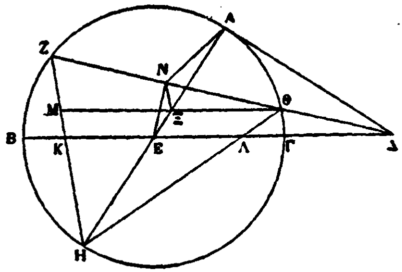
Qu'il en soit ainsi, et menons la droite ΘΞΜ parallèle à la droite KΛ ; la droite ΜΞ est donc égale à la droite ΞΘ. Menons la perpendiculaire EN du point E sur la droite ZΘ ; la droite ZN est donc égale à la droite NΘ (3). Or, la droite ΜΞ est déjà égale

$\Delta H \times H\Theta = \overline{BH}^2$, et la similitude des triangles ΚΗΛ, ΔΗΚ donne : $\frac{\Delta H}{KH} = \frac{KH}{H\Lambda}$, d'où : $\Delta H \times H\Lambda = \overline{KH}^2$. On peut donc écrire : $\frac{\overline{BH}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{\Delta H \times H\Theta}{\Delta H \times H\Lambda} = \frac{H\Theta}{H\Lambda}$, d'où observant que ZH = BH, il vient, comme dans le texte : $\frac{\overline{ZH}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{H\Theta}{H\Lambda}$, d'où : $\frac{\overline{ZH}^2 - \overline{KH}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{H\Theta - H\Lambda}{H\Lambda}$ ou : $\frac{\overline{KZ}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{\Theta\Lambda}{H\Lambda}$, d'où, observant que $\overline{KH}^2 = \Delta H \times H\Lambda$, il vient : $\frac{\overline{KZ}^2}{\Delta H \times H\Lambda} = \frac{\Theta\Lambda}{H\Lambda}$, d'où : $\frac{\overline{KZ}^2}{\Delta H \times H\Lambda} = \frac{\Theta\Lambda \times \Delta H}{H\Lambda \times \Delta H}$, d'où, comme le texte : $\overline{KZ}^2 = \Theta\Lambda \times \Delta H$.

1. On a vu que ΘΛ est un cinquième apotome ou droite congruente commensurable avec la rationnelle ΔH, égale à la rationnelle d'hypothèse ΑΓ. Or, la dernière expression de la note précédente montre que $\overline{KZ}^2$ vaut le rectangle $\Theta\Lambda \times \Delta H$, c'est-à-dire le rectangle ayant comme côtés le cinquième apotome ΘΛ et la rationnelle ΔH ; donc (EUCLIDE, liv. X, prop. 96 énoncée p. 137, n. 1), la droite KZ forme avec une surface rationnelle un ensemble médial.

2. On a démontré (voir note plus haut) que ΔK est l'irrationnelle binôme ; donc : ΔK — KZ, c'est-à-dire ZΔ, est l'excédent dont la droite binôme ΔK dépasse la droite KZ qui constitue, avec la surface rationnelle $\Theta\Lambda \times \Delta H$, un ensemble médial.

3. EUCLIDE, liv. III, prop. 3 : « Si, dans un cercle, une droite qui passe par le centre coupe en deux parties égales une droite qui ne passe pas par le centre, la première droite coupera la seconde à angles droits ; et si la première coupe la seconde à angles droits, elle la coupera en deux parties égales ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 122.



à la droite ΞΘ ; donc, la droite NΞ est parallèle à la droite MZ (1) ; en sorte que l'angle compris sous ΘN, NΞ est égal à l'angle compris sous NZ, ZM, c'est-à-dire à l'angle compris sous ΘA, AΞ (2). Les points Θ, A, N, Ξ sont donc ainsi dans un cercle (3) ; l'angle compris sous AN, NΘ est donc ainsi égal à l'angle compris sous AΞ, ΞΘ, c'est-à-dire à l'angle compris sous AE, EΛ, et les points A, N, E, Δ sont aussi dans un cercle. Or, ils y sont, car chacun des angles compris sous les droites EA, AΔ et sous les droites EN, NΔ est droit (4).

La synthèse se fera donc de la manière suivante : Puisque chacun des angles compris sous EA, AΔ et sous EN, NΔ est droit, les points A, Δ, E, N sont sur une circonférence de cercle ; donc, l'angle compris sous AN, NΔ est égal à l'angle compris sous AE, EΔ. Mais, l'angle compris sous AE, EΔ est égal à l'angle compris sous AΞ, ΞΘ à cause des parallèles EΔ, ΞΘ ; donc, les points A, N, Ξ, Θ sont sur une circonférence de cercle, d'où l'angle compris sous ΘA, AΞ est égal à l'angle compris sous ΘN, NΞ. Mais, l'angle compris sous ΘA, AΞ est égal à l'angle compris sous ΘZ, ZM ; donc, la droite ZM est parallèle à la droite NΞ (5). De plus, la droite ZN est égale à la droite NΘ (6) ; donc, la droite MΞ est aussi égale à la droite ΞΘ. Et la droite ΞM est à la droite EK et la droite ΘΞ à la droite ΛE comme la droite ΞH est à la droite HE ; donc, la droite ΘΞ est à la droite ΛE comme la droite ΞM est à la droite EK, et réciproquement. Enfin, la droite MΞ est égale

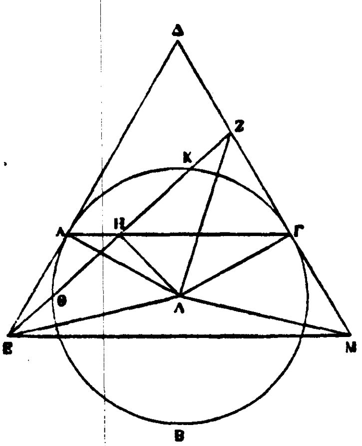
1. Euclide, liv. VI, prop. 2, énoncée p. 48, n. 1.
2. Euclide, liv. III, prop. 21 : « Dans un cercle, les angles placés dans le même segment sont égaux entre eux ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 161.
3. C'est-à-dire sur une circonférence de cercle, en vertu de la réciproque de la proposition d'Euclide mentionnée dans la note précédente.
4. Par construction.
5. Les points A, N, Ξ, Θ étant concycliques, on a : $\widehat{\Theta A \Xi} = \widehat{\Theta N \Xi}$. Or, pour des angles dans le même segment de cercle, on a : $\widehat{\Theta A \Xi} = \widehat{\Theta Z M}$; donc : $\widehat{\Theta Z M} = \widehat{\Theta N \Xi}$, d'où parallélisme des droites ZM, NΞ.
6. Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.

à la droite ΞΘ ; donc, la droite KE est aussi égale à la droite ΛE (1).

V.

PROPOSITION 5. — Soient le cercle ABΓ et les tangentes AΔ, ΔΓ ; menons la droite de jonction AΓ ; menons transversalement une droite EZ, et que la droite EH soit égale à la droite HZ ; je dis que la droite ΘH est aussi égale à la droite HK.

Menons la droite EM parallèlement à la droite AΓ ; prenons le centre Λ du cercle, et menons les droites de jonction ΛA, ΛZ, ΛΓ, ΛM, ΛE, ΛH. Puisque la droite EH est égale à la droite HZ, la droite MΓ est aussi égale à la droite ΓZ. Or, la droite MΓ est à angles droits sur la droite ΓΛ (2) ; donc, la droite ΛZ est égale à la droite ΛM (3). Et puisque la droite AΔ est égale à la droite ΔΓ (4), la droite AE est égale à la droite MΓ. Or, la droite AΛ est aussi égale à la droite ΛΓ, et l'angle droit compris sous les droites EA, AΛ est égal à l'angle droit compris sous les droites MΓ, ΓΛ ; donc, la droite EΛ est aussi égale à la droite ΛM,



1. La similitude de triangles donne : $\frac{\Xi M}{EK}=\frac{\Xi H}{HE}$ et $\frac{\Xi\Theta}{\Lambda E}=\frac{\Xi H}{HE}$; donc : $\frac{\Xi\Theta}{\Lambda E}=\frac{\Xi M}{EK}$. Or, $\Xi M = \Xi\Theta$; donc : $EK = \Lambda E$.

2. EUCLIDE, liv. III, prop. 18 : « Si une droite touche la circonférence d'un cercle, et si du centre on mène une droite aux points de contact, cette dernière droite sera perpendiculaire sur la première. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, prop. 157.

3. EUCLIDE, liv. I, prop. 4, énoncée p. 124, n. 4.

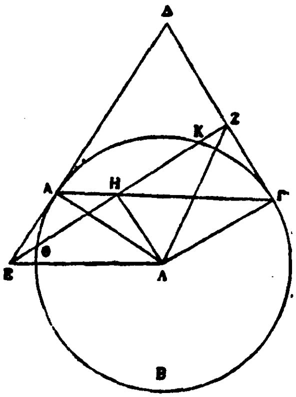
4. L'égalité des deux tangentes issues d'un même point n'est pas démontrée par Euclide ; mais cette propriété devait être admise comme découlant de la proposition 36 du livre III d'Euclide : « Si l'on prend un point quelconque hors du cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe le cercle, et dont l'autre lui soit tangente, le rectangle compris sous la sécante entière et la droite prise extérieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au carré de la tangente ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 189.

c'est-à-dire à la droite ΛZ. Mais, la droite EH est aussi égale à la droite HZ; donc, la droite HΛ est perpendiculaire à la droite ZE. En conséquence, la droite ΘH est égale à la droite HK (1).

VI.

Proposition 6. — Soient un cercle ABΓ et les tangentes AΔ, ΔΓ; menons la droite de jonction AΓ; menons transversalement la droite EZ, et que la droite HΘ soit égale à la droite HK; je dis que la droite EH est aussi égale à la droite HZ.

Prenons le centre Λ du cercle, et menons les droites de jonction EΛ, ΛA, ΛH, ΛZ, ΛΓ. Puisque chacun des angles compris sous les droites EA, AΛ et sous les droites EH, HΛ est droit (2), [les points E, A, H, Λ sont sur une circonférence de cercle] (3) ; donc, l'angle compris sous les droites HA, AΛ est égal à l'angle compris sous les droites HE, EΛ (4). Derechef, puisque chacun des angles compris sous les droites ΛH, HZ et sous les droites ΛΓ, ΓZ est droit les points Λ, H, Z, Γ sont sur une circonférence de cercle ; donc, l'angle compris sous les droites HΓ, ΓΛ, c'est-à-dire l'angle compris sous les droites HA, AΛ, c'est-à-dire l'angle compris sous les droites HE, EΛ, est égal à l'angle compris sous les droites HZ, ZΛ. En conséquence, la droite EΛ est aussi égale à la droite ΛZ. Or, la droite ΛH est perpendiculaire ; donc, la droite EH est égale à la droite HZ.



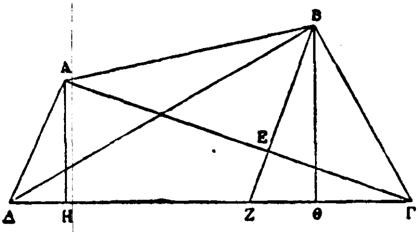
1. Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.
2. Euclide, liv. III, prop. 18, énoncée p. 142, n. 2, et prop. 3 énoncée p. 140, n. 3.
3. Lacune supposée ici d'abord par Commandin qui complète sa version latine par les mots : « erunt puncta E, A, H, Λ in circulo » (cfr. *loc. cit.*, p. 63, l. 6), puis par Hultsch, dont l'édition critique donne : ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ ΕΑΗΛ σημεῖα (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 190, l. 14).
4. Euclide, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2.

VII.

Si l'on a trois cercles donnés de position et de grandeur qui se touchent mutuellement, le cercle qui les enveloppe sera aussi donné de grandeur. Mais exposons au préalable ce qui suit [1] :

PROPOSITION 7. — Soit le quadrilatère ΑΒΓΔ ayant l'angle compris sous les droites AB, BΓ droit et ayant chacune de ses droites AB, BΓ, ΓΔ, ΔA donnée [2]. Il faut démontrer que la droite qui relie les points Δ, B est donnée.

Menons la droite de jonction AΓ, et menons les perpendiculaires AH sur la droite ΓΔ et BE sur la droite AΓ. [Dès lors, puisque chacune] [3] des droites AB, BΓ est donnée [4] ; que l'angle compris sous les droites AB, BΓ est droit, et que la droite BE est perpendiculaire, il s'ensuit que chacune des droites AE, EΓ, AΓ, BE sera donnée (car on obtient aussi comme donné le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE, équivalent au carré de la droite BΓ ; et la droite AΓ est donnée, de sorte que chacune des droites AE, EΓ, BE sera donnée) [5]. Derechef, puisque chacune des droites



1. Ce théorème, annoncé ici comme devant être précédé de quelques propositions auxiliaires, sera démontré à la proposition 10.

2. C'est-à-dire données de grandeur seulement et de position quelconque.

3. Restauration de Scaliger en marge du manuscrit de Leyde, et adoptée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 192, l. 2).

4. Le texte présente ici la petite interpolation : ἢ ἐν ἀριθμοῖς, ce qui signifierait : « c'est-à-dire en nombres », si l'on admet, d'après une note critique de Alfred Eberhard (*Jenaer Literaturzeitung*, 1876, p. 206 et suiv.), que ἢ est employé ici pour ἤγουν. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, *Appendix*, p. 1224). Cette interpolation précise en tout cas que ces droites sont données de grandeur seulement.

5. La phrase mise entre parenthèses, bien que constituant une référence exacte, est suspecte d'interpolation (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 192, ll. 6-10) ; car Pappus a pu considérer comme admise une petite démonstration qui se déroule à peu près comme suit : Les triangles semblables BEΓ, ABΓ donnent : $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{\Gamma E}$, d'où : $A\Gamma \times \Gamma E = \overline{B\Gamma}^2$. Or, la droite BΓ est donnée par hypothèse; donc (EUCLIDE, *Données*, prop. 52, énoncée p. 28, n. 10), $\overline{B\Gamma}^2$ est donnée ; donc,

ΑΓ, ΓΔ, ΔΑ est donnée, et que la droite ΑΗ est perpendiculaire, chacune des droites ΔΗ, ΗΓ, ΑΗ est donnée aussi (car l'excédent du carré de la droite ΑΓ sur le carré de la droite ΔΑ, appliqué suivant la droite ΔΓ, fournit l'excédent donné de la droite ΓΔ sur la droite ΗΔ, comme un lemme l'a établi ; en sorte que les droites ΔΗ, ΗΓ, ΑΗ sont respectivement données) (1). Et puisque le triangle ΑΗΓ est équiangle avec le triangle ΓΕΖ, la droite ΑΓ est à la droite ΓΖ et la droite ΑΗ à la droite ΕΖ comme la droite ΗΓ est à la droite ΓΕ. Or, le rapport de la droite ΗΓ à la droite ΓΕ est donné ; donc, chacune des droites ΓΖ, ΖΕ sera donnée. Mais, chacune des droites ΕΒ, ΒΓ est donnée aussi ; donc, chacune des droites ΖΒ, ΒΓ, ΓΖ est donnée (2). Menons

---

l'aire rectangulaire ΑΓ × ΓΕ est donnée de grandeur. Or, $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2$, et les droites ΑΒ, ΒΓ sont données de grandeur ; donc $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2$ est donné ; donc (Euclide, *Données*, prop. 55 : « Si un espace est donné d'espèce et de grandeur, ses côtés seront donnés de grandeur ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 391), la droite ΑΓ est donnée. Dès lors (Euclide, *Données*, prop. 57 : « Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, dans un angle donné, la largeur de l'application est aussi donnée ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 393), l'espace donné ΑΓ × ΓΕ étant appliqué à la droite ΑΓ donnée, il s'ensuit que la droite ΓΕ est donnée. Or, ΑΓ — ΓΕ = ΑΕ ; donc (Euclide, *Données*, prop. 4, énoncée p. 28, n. 3), la droite ΑΕ est donnée. Enfin, par similitude de triangles on a : $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{\Gamma E}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$. Or (Euclide, *Données*, prop. 1, énoncée p. 28, n. 6), le rapport $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$ est donné ; donc (Euclide, *Données*, prop. 2, énoncée p. 24, n. 1), la droite ΒΕ est donnée.

1. La démonstration du petit lemme invoqué ici ne nous est pas parvenue. Commandin en a donné une fort longue démonstration à la manière des Anciens (cfr. *loc. cit.*, p. 65). Au reste, en notations actuelles, on a (Euclide, liv. II, prop. 13, généralisée, énoncée p. 135, n. 4) : $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overline{\Delta\mathrm{A}}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 - 2\Gamma\Delta \times \Delta\mathrm{H}$, d'où, comme le texte : $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 - \overline{\Delta\mathrm{A}}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 - 2\Gamma\Delta \times \Delta\mathrm{H} = \Gamma\Delta\ (\Gamma\Delta - 2\Delta\mathrm{H})$. Or, on a démontré que ΑΓ est donné, et ΔΑ est donné par hypothèse ; donc, l'aire ΓΔ (ΓΔ — 2ΔΗ) est donnée de grandeur. Or, cette aire rectangulaire est appliquée sur la droite ΓΔ donnée, considérée comme base ; donc, la hauteur ΓΔ — 2ΔΗ est donnée, c'est-à-dire que la différence $\Gamma\Delta - 2\Delta\mathrm{H} = \alpha$ est donnée (Euclide, *Données*, prop. 57 énoncée dans la note précédente), d'où l'on déduit que $\Delta\mathrm{H} = \frac{\Gamma\Delta - \alpha}{2}$ est donné, d'où la différence ainsi fournie $\mathrm{H\Gamma} = \Gamma\Delta - \Delta\mathrm{H}$ est donnée (Euclide, *Données*, prop. 4, énoncée p. 28, n. 3). Enfin, on a : $\overline{\mathrm{AH}}^2 = \overline{\Delta\mathrm{A}}^2 - \overline{\Delta\mathrm{H}}^2$, d'où ΑΗ est donné aussi. En conséquence, comme le texte, les droites ΔΗ, ΗΓ, ΑΗ sont données.

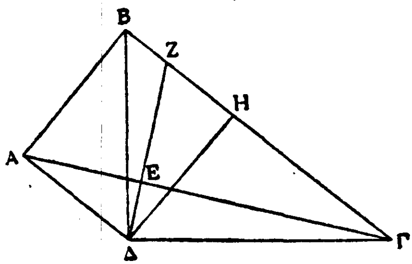
2. Les droites ΑΗ, ΕΖ sont antiparallèles ; donc, les triangles semblables ΑΗΓ, ΖΕΓ donnent : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Gamma\mathrm{Z}}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{EZ}}=\frac{\mathrm{H\Gamma}}{\Gamma\mathrm{E}}$. Or, les droites ΗΓ, ΓΕ sont données ; donc (Euclide, *Données*, prop. 1, énoncée p. 28, n. 6), le rapport $\frac{\mathrm{H\Gamma}}{\Gamma\mathrm{E}}$ est donné. Or, les droites ΑΓ, ΑΗ sont données ; donc (Euclide, *Données*, prop. 2, énoncée

la droite BΘ perpendiculairement sur la droite ΓZ ; il s'ensuit que chacune des droites ZΘ, ΘΓ, BΘ est donnée ; en sorte que chacune des droites ΔΘ, ΘB est donnée. Enfin, l'angle compris sous les droites BΘ, ΘΔ est droit ; donc, la droite BΔ est donnée (1).

VIII.

AUTREMENT.

Menons, sur la droite AΓ, la perpendiculaire ΔE que nous prolongeons jusqu'au point Z (2). Puisque chacune des droites AΔ, ΔΓ, ΓA est donnée (3), et que la droite ΔE est perpendiculaire, chacune des droites AE, EΓ sera donnée aussi (4). Et puisque le triangle ABΓ est équiangle avec le triangle ΓEZ, la droite ΓB est à la droite BA comme la droite ΓE est à la droite EZ. Or, le rapport de la droite ΓB à la droite BA est donné (5) ; donc, le rapport de la droite ΓE à la droite EZ est donné aussi. De plus, la droite ΓE est donnée ; donc, la droite EZ est donnée aussi (6). Mais, la droite ΔE est déjà donnée ; donc, la droite entière



p. 24, n. 1), les droites ΓZ, EZ sont données. Or, on a vu que les droites EB, BΓ sont données ; donc, les côtés ZB, BΓ, ΓZ du triangle ZBΓ sont donnés de grandeur.

1. Si l'on mène la perpendiculaire BΘ, on démontrera, comme plus haut pour la perpendiculaire AH, que les droites ZΘ, ΘΓ, BΘ sont données. Or la droite ΔΓ est donnée par hypothèse ; donc, $\Delta\Gamma - \Theta\Gamma = \Delta\Theta$ est donnée ; donc, les côtés ΔΘ, BΘ du triangle rectangle ΔΘB sont donnés. Dès lors, $\overline{\Delta\Theta}^2 + \overline{B\Theta}^2 = \overline{B\Delta}^2$ est donné, d'où, comme le texte, la droite BΔ est donnée.

2. La démonstration ne traite que le cas où le point Z tombe entre les points B et Γ, et néglige donc les cas où le point Z tombe en B, ou entre les points A et B, et les cas où le point E tombe au point A, ou à l'extérieur du quadrilatère, sur la droite ΓA prolongée. Le commentaire de Commandin traite le cas où le point Z tombe entre les points A et B. (Cfr. *loc. cit.*, p. 65).

3. L'angle en B est droit comme dans la figure précédente ; les droites AΔ, ΔΓ sont données de grandeur par hypothèse, et l'on suppose déjà démontré, comme dans la première démonstration, que la droite ΓA est donnée.

4. C'est-à-dire que les droites AE, EΓ, ainsi que la perpendiculaire ΔE, sont données comme dans la première démonstration (voir notes).

5. EUCLIDE, *Données*, prop. 1, énoncée p. 28, n. 6.

6. EUCLIDE, *Données*, prop. 2, énoncée p. 24, n. 1.

ΔZ sera donnée (1). Chacune des droites BZ, ZΓ sera donnée de la même manière (car la droite ZΓ est à la droite ΓE comme la droite AΓ est à la droite BΓ et le rapport de la droite AΓ à la droite ΓB est donné) (2). Menons donc de nouveau la perpendiculaire ΔH du point Δ ; il s'ensuit que chacune des droites ZH, HΓ sera donnée (3) ; de sorte que chacune des droites BH, HΔ est donnée (4). De plus, l'angle en H est droit ; donc la droite BΔ est donnée aussi (5).

IX.

Proposition 8. — Soient des cercles égaux donnés de position et de grandeur (6) dont les centres sont A, B ; soit donné un point Γ (7), et décrivons par le point Γ le cercle ΓEZ tangent aux cercles dont les centres sont A, B ; je dis que le diamètre de ce cercle est donné.

Menons les droites de jonction EZH, ΓZΘ, ΓMΠ, AB, ΓE, ΠZK, ΘK, ΘH ; la droite HΘ devient donc parallèle à la droite ΓE, parce que les angles au sommet compris sous les droites EZ, ZΓ et sous les droites HZ, ZΘ sont égaux ; que les arcs EΠZ, HKZ sont semblables, et que le triangle EΓZ est équiangle avec le triangle ZHΘ (8). Et, pour les mêmes raisons, la droite ΘK

1. Euclide, *Données*, prop. 3 : « Si tant de grandeurs données qu'on voudra sont réunies, la grandeur composée de ces grandeurs sera donnée ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 306.

2. C'est-à-dire que l'on aura de même : $\frac{Z\Gamma}{\Gamma E}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où, comme le texte : ZΓ sera donnée, ainsi que la droite $BZ = B\Gamma - Z\Gamma$.

3. C'est-à-dire que chacune des droites ZH, HΓ et ΔH sera donnée.

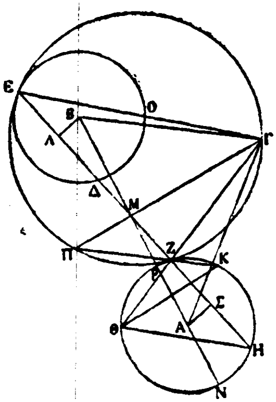
4. Car BH, somme des droites BZ, ZH, est donnée.

5. Les droites BH et HΔ étant données, on a : $\overline{B\Delta}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{H\Delta}^2$; donc, la droite BΔ est donnée.

6. Il faut entendre que les diamètres de ces cercles sont donnés de grandeur.

7. Il faut entendre que les droites ΓB, ΓA, qui relient le point Γ aux centres des cercles donnés, sont données de grandeur.

8. La similitude des arcs EΠZ, HKZ peut se démontrer en complétant la figure au moyen des droites de jonction AZ, AH et des droites reliant le centre (non indiqué sur la figure) du cercle EΠZΓ aux points E, Z. Considérant dès lors que la droite qui relie les centres des deux cercles tangents intérieurement ou extérieurement passe par leur point de contact (Euclide, liv. III, prop. 11 et 12), on aura deux triangles isocèles ayant les angles opposés par le sommet égaux et qui sont donc semblables. En conséquence, les angles égaux aux centres s'appuient sur deux arcs EΠZ, ZKH semblables, et les angles EΓZ, ZΘH, qui



est aussi parallèle à la droite ΠΓ (1). Or, les cercles dont les centres sont A, B, sont égaux (2) ; donc la droite ZH est égale à la droite ΔE (3). Menons les perpendiculaires AΣ, BΛ ; il s'ensuit que la droite AΣ est égale à la droite BΛ (4) ; de sorte que la droite BM est aussi égale à la droite MA, et que la droite ΛM est aussi égale à la droite MΣ (car on a deux triangles BΛM, AΣM ayant les deux angles au sommet égaux et les angles aux points Λ, Σ droits, et ayant aussi un côté BΛ égal à un côté AΣ). Et chacune des droites MΛ, ΛB, MΣ, ΣA est donnée (5) ; donc, chacune des droites BM, MA est donnée (6). Mais, chacune

s'appuient sur ces arcs valent la moitié des angles aux centres (Euclide, liv. III, prop. 20 : « Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence quand ces angles ont pour base le même arc ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 159). Donc, comme dit le texte, les triangles EZΓ, ZHΘ sont équiangles, et leur similitude, ainsi que leur opposition par le sommet, entraînent le parallélisme des droites HΘ, ΓE.

1. On démontrerait de même la similitude des triangles ΠZΓ, ΘZK et, par suite, le parallélisme des droites ΘK, ΠΓ.

2. Par hypothèse.

3. L'égalité des droites ZH, ΔE peut se démontrer de plusieurs manières ; mais, le fait d'avoir démontré au préalable le parallélisme des droites EΓ, ΘH indique que la manière visée est la suivante : Menons la droite reliant les points Δ, O (non indiquée sur la figure du texte). Les cordes ΔO, ZΓ sous-tendent des arcs semblables ; donc, les triangles ΔEO, ZEΓ sont semblables. Or, on a démontré la similitude des triangles ZEΓ, ZHΘ ; donc, les triangles ΔEO, ZHΘ sont semblables, d'où : $\widehat{EO\Delta} = \widehat{Z\Theta H}$. Or, les cercles de centres A, B sont égaux ; donc (Euclide, liv. III, prop. 26 : « Dans les cercles égaux, les angles égaux s'appuient sur des arcs égaux, soit qu'ils soient placés aux centres, ou bien aux circonférences ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 168) : arc EΔ = arc ZH. Par conséquent (Euclide, liv. III, prop. 28 : « Dans les cercles égaux, les droites égales sous-tendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand et le plus petit égal au plus petit » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 171) : ZH = EΔ.

4. Euclide, liv. III, prop. 14 : « Dans un cercle, les droites égales sont également éloignées du centre, et les droites également éloignées du centre sont égales entre elles. » Voir trad. de Peyrard, vol. I. p. 147.

5. Le texte présente ici l'interpolation : οὕτως καὶ ἡ ZH, ΔE καὶ BΛ, ΛΣ, c'est-à-dire : de même aussi les (droites) ZH, ΔE et les (droites) BΛ, ΛΣ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 196, l. 19).

6. Euclide, *Données*, prop. 88 : « Si dans un cercle donné de grandeur on mène une ligne droite qui retranche un segment comprenant un angle donné, la droite menée sera donnée de grandeur ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 465.

Dès lors, les droites ΔE, EZ, ZH sont données de grandeur ; donc, la droite des droites ΑΓ, ΓΒ est donnée (car les points Α, Β, Γ sont donnés) [1] ; donc, le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce [2], et la droite ΓΜ sera donc donnée [3]. Et puisque le diamètre ΝΡ du cercle ΗΘΚ est donné, mais que la droite ΜΑ est donnée aussi, il s'ensuit que la droite restante ΜΡ est donnée aussi [4]. Et puisque le rectangle compris sous les droites ΝΜ, ΜΡ est donné, le rectangle compris sous les droites ΗΜ, ΜΖ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΕΜ, ΜΖ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΓΜ, ΜΠ est donné aussi [5]. Or, la droite ΓΜ est donnée;

ΕΗ ($= \mathrm{E\Delta} + \Delta\mathrm{Z} + \mathrm{ZH}$) est aussi donnée de grandeur. Or, les droites ΕΛ ($= \frac{1}{2}\mathrm{E\Delta}$) et ΗΣ ($= \frac{1}{2}\mathrm{HZ}$) sont données ; donc, la droite ΛΣ ($= \mathrm{EH} - \mathrm{E\Lambda} - \mathrm{H\Sigma}$) est donnée; donc (EUCLIDE, *Données*, prop. 7, énoncée p. 28, n. 4), les droites ΛΜ, ΜΣ sont données. D'autre part, les rayons ΕΒ, ΛΗ (non indiqués sur la figure) sont donnés comme étant moitiés des diamètres donnés ; donc, ΛΒ est donné, car $\overline{\Lambda B}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{E\Lambda}^2$; et ΛΣ est donné, car $\overline{\Lambda\Sigma}^2 = \overline{\Lambda H}^2 - \overline{\Sigma H}^2$. Dès lors, comme le texte, la droite ΒΜ est donnée, car $\overline{BM}^2 = \overline{\Lambda M}^2 + \overline{\Lambda B}^2$; et la droite ΜΑ est donnée, car $\overline{MA}^2 = \overline{M\Sigma}^2 + \overline{A\Sigma}^2$.

1. C'est-à-dire que les droites ΑΓ, ΓΒ sont données de position et de grandeur. EUCLIDE, *Données*, prop. 26 : « Si les extrémités d'une ligne droite sont données de position, cette droite est donnée de position et de grandeur ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 340.

2. EUCLIDE, *Données*, prop. 39 : « Si chacun des côtés d'un triangle est donné de grandeur, le triangle est donné d'espèce ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 363.

3. Le texte présente ici le petit commentaire interpolé : καθέτου ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ, si l'on mène du point Γ la perpendiculaire sur ΑΒ. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 196, l. 25).

Le triangle ΜΒΓ est donné d'espèce (EUCLIDE, *Données*, prop. 41, énoncée p. 28, n. 10). Ce triangle est aussi donné de grandeur (EUCLIDE, *Données*, prop. 52, énoncée p. 24, n. 10) ; donc, la droite ΓΜ est donnée de grandeur (EUCLIDE, *Données*, prop. 55, énoncée p. 144, n. 5). Ou bien, si l'on suit l'interpolateur qui indique de mener de Γ une perpendiculaire sur ΑΒ, on démontrerait de même, par considération du carré de l'hypothénuse, que la droite ΓΜ est donnée de grandeur.

4. Le diamètre ΝΡ du cercle donné ΗΘΚ est donné ; donc : ΡΑ ($= \frac{1}{2}\mathrm{NP}$) est donné. Or, on a démontré que la droite ΜΑ est donnée ; donc, la droite ΜΡ ($= \mathrm{MA} - \mathrm{PA}$) est donnée aussi.

5. Puisque les droites ΝΡ et ΜΡ sont données, la droite ΝΜ ($= \mathrm{MP} + \mathrm{NP}$) est donnée aussi ; donc, le rectangle $\mathrm{NM} \times \mathrm{MP}$ est donné. Or (EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4), on a : $\mathrm{NM} \times \mathrm{MP}$ = carré de la tangente menée du point Μ au cercle ΘΗΚ, et $\mathrm{HM} \times \mathrm{MZ}$ = carré de la tangente menée du point Μ au cercle ΘΗΚ ; donc, comme le texte : $\mathrm{NM} \times \mathrm{MP} = \mathrm{HM} \times \mathrm{MZ}$. Or, $\mathrm{EM} = \mathrm{HM}$; donc, comme le texte : $\mathrm{HM} \times \mathrm{MZ} = \mathrm{EM} \times \mathrm{MZ}$. Or (EUCLIDE, liv. III, prop. 35 : « Si dans un cercle, deux droites se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segments de l'une est égal au rectangle compris sous les segments de l'autre ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 187), considérant les cordes ΓΠ, ΕΖ du cercle ΕΠΖΓ, on a : $\mathrm{EM} \times \mathrm{MZ} = \Gamma\mathrm{M} \times \mathrm{M\Pi}$; donc : $\mathrm{NM} \times \mathrm{MP} = \Gamma\mathrm{M} \times \mathrm{M\Pi}$; donc, le rectangle $\Gamma\mathrm{M} \times \mathrm{M\Pi}$ est donné aussi.

donc, la droite ΓΠ est donnée aussi [1]. Dès lors, puisque le cercle dont le centre est A est donné de position et de grandeur ; que la droite ΠΓ est aussi donnée de position et de grandeur, et que les droites ΠΖΚ, ΓΖΘ sont menées de manière à avoir la droite ΚΘ parallèle à la droite ΓΠ, le diamètre du cercle décrit autour du triangle ΓΖΠ, c'est-à-dire celui du cercle ΓΕΖ, est donné [2].

---

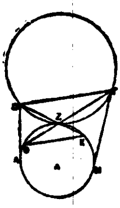
1. Le rectangle ΓΜ × ΜΠ est donné, et on a vu plus haut que la droite ΓΜ est donnée ; donc (EUCLIDE, *Données*, prop. 57 énoncée p. 144, n. 5), la droite ΜΠ est donnée aussi ; d'où, comme le texte, la droite ΓΠ (= ΓΜ + ΜΠ) est donnée aussi.

2. Cette conclusion ne se justifie qu'en admettant un ou plusieurs lemmes connus à l'époque de Pappus, mais qui ne nous seraient pas parvenus. En effet, la dernière droite démontrée comme étant donnée est celle qui relie les deux points Γ et Π démontrés comme étant donnés, et il reste à déterminer le point Ζ pour pouvoir décrire le cercle autour du triangle ΓΖΠ. Comme l'a fait remarquer Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, *Appendix*, p. 1225), il semble résulter du texte même que le point Ζ doit être déterminé sur la circonférence du cercle de centre A par l'intersection de deux droites issues des points Γ, Π donnés, et prolongées jusqu'aux points d'intersection Θ, Κ avec la circonférence de ce même cercle, de manière que la droite reliant les points Θ, Κ soit parallèle à la droite ΓΠ donnée de position et de grandeur. Dès lors, le triangle ΠΓΖ étant donné d'espèce et de grandeur, le cercle cherché peut lui être circonscrit conformément aux propositions d'Euclide. D'ailleurs, ce problème une fois résolu, on peut démontrer que la droite ΘΚ est donnée, et que le diamètre du cercle ΠΖΓ est donné en raison de ce que le rapport du diamètre du cercle donné A au diamètre du cercle ΠΖΓ est le même que celui de la droite ΘΚ à la droite ΠΓ. La détermination du point Ζ, revenant à trouver un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné, est donc un problème qui doit avoir été résolu par les anciens géomètres d'une manière qui ne nous a pas été rapportée.

Une solution moderne de ce problème a été donnée par G. Amthor dans une note manuscrite adressée à Hultsch, qui l'a publiée dans l'appendice de son édition critique (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1226). La solution de Amthor est la suivante, d'après son texte allemand que nous traduisons :

Pour construire un cercle passant par deux points Π, Γ, et tangent à un cercle donné A, on peut procéder ainsi :

Soit Ζ le point de contact du cercle cherché avec le cercle donné ; soient, en outre, Κ et Θ les points d'intersection des droites ΠΖ, ΓΖ avec le cercle donné.

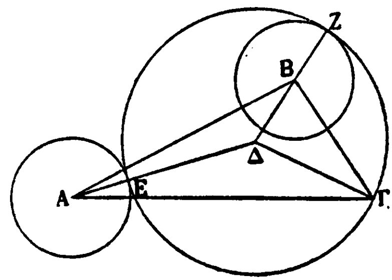


Dès lors, comme on peut le voir facilement, les droites ΠΓ, ΘΚ sont parallèles ; par conséquent, on a : $\frac{\Pi Z}{ZK}=\frac{\Gamma Z}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{\Pi Z}{\Pi Z + ZK}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma Z + Z\Theta}$ ou : $\frac{\Pi Z}{\Pi K}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma\Theta}$. Si on multiplie cette proportion par $\frac{\Pi Z}{\Pi Z}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma Z}$, il s'ensuit que l'on a : $\frac{\overline{\Pi Z}^2}{\Pi Z\times\Pi K}=\frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\Gamma Z\times\Gamma\Theta}$. Soient, en outre, Λ, Μ les points de contact des tangentes menées des points Π, Γ au cercle donné. On a ainsi, d'après les propositions de la puissance des points par rapport au cercle : $\Pi Z \times \Pi K = \overline{\Pi\Lambda}^2$ et $\Gamma Z \times \Gamma\Theta = \overline{\Gamma M}^2$, d'où la dernière proportion devient : $\frac{\overline{\Pi Z}^2}{\overline{\Pi\Lambda}^2}=\frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\overline{\Gamma M}^2}$, d'où : $\frac{\Pi Z}{\Gamma Z}=\frac{\Pi\Lambda}{\Gamma M}$. Le rapport

X.

Proposition 9. — Soit un triangle ABΓ dont chacun des côtés est donné, et soit un point intérieur Δ. Que l'excédent de la droite ΓΔ sur la droite ΔB soit le même que l'excédent de la droite AΔ sur la droite ΓΔ, et que cet excédent soit donné ; je dis que les droites AΔ, ΔΓ, ΔB sont respectivement données.

Puisque l'excédent des droites AΔ, ΔΓ est donné, que chacune des droites AE, BZ soit égale à cet excédent (1) ; donc, les trois droites EΔ, ΔΓ, ΔZ sont égales entre elles. Décrivons le cercle ΓEZ autour du centre Δ. Dès lors, en vertu de ce qui a été exposé antérieurement, la droite ΔZ est donnée (2). Or, sur cette droite, la droite BZ est donnée ; donc, la droite restante BΔ est donnée. Mais, chacune des droites AΔ, ΔΓ [est donnée ; donc, chacune des droites AΔ, ΔΓ] (3), ΔB est donnée (4).



XI.

Proposition 10. — Tels sont donc les lemmes, et voici la proposition originelle (5).

---

des distances ΠZ, ΓZ est ainsi connu, c'est-à-dire égal au rapport des tangentes menées des points Π, Γ au cercle donné. Par conséquent, le point Z est situé sur le cercle, lequel a comme points opposés ceux qui divisent intérieurement et extérieurement la droite ΠΓ dans le rapport de ΠΛ à ΓM.

1. La position des points E, Z dans la figure relative à cette proposition sera expliquée par les constructions de la figure relative à la proposition 10 suivante.

2. Voir proposition 8.

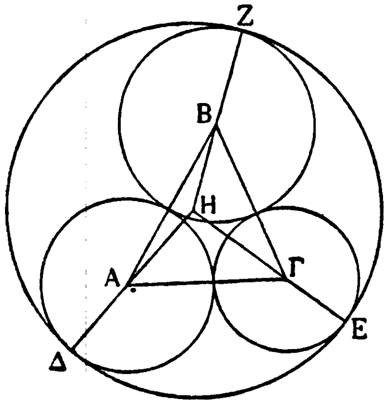
3. Reconstitution faite par Hultsch d'une lacune qui paraît exister en cet endroit. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 200, l. 3).

4. La droite BZ (= AΔ — ΔΓ = ΔΓ — ΔB) est donnée par hypothèse ; donc, en vertu de la proposition 8 qui précède, la droite ΔZ est donnée, d'où la droite ΔB (= ΔZ — BZ) est donnée. Or, la droite AΔ (= BZ + BZ + ΔB = BZ + ΔZ) est donnée, et la droite ΔΓ (= BZ + ΔB = ΔZ) est donnée ; donc, comme le texte, les trois droites AΔ, ΔΓ, ΔB sont données.

5. C'est-à-dire la proposition qui a été énoncée provisoirement avant la série des lemmes (propositions 7, 8 et 9) auxiliaires.

Soient trois cercles inégaux, tangents entre eux, dont les diamètres sont donnés et dont les centres sont A, B, Γ. Décrivons autour de ces cercles le cercle tangent ΔEZ dont il faut trouver le diamètre [1].

Soit H le centre de ce cercle ; menons les droites AB, AΓ, ΓB qui relient les centres A, B, Γ, et menons les droites de jonction HAΔ, HBZ, HΓE [2]. Dès lors, puisque les diamètres des cercles, dont les centres sont A, B, Γ, sont donnés, les droites AB, BΓ, ΓA sont respectivement données aussi [3]. Et les différences des droites AH, HΓ, HB sont données [4] ; donc, en raison de ce qui a été exposé plus haut, la droite AH est donnée [5]. Mais, la droite



1. D'après le premier énoncé de cette proposition donnée en tête du lemme auxiliaire 7, il eût fallu dire qu'il s'agit de démontrer que le diamètre du cercle circonscrit est donné de grandeur.

2. C'est-à-dire : menons les droites de jonction HA, HB, HΓ que nous prolongeons jusqu'aux points d'intersection Δ, Z, E avec la circonférence du cercle de centre H.

3. EUCLIDE, liv. III, prop. 12 : « Si deux cercles se touchent extérieurement, la droite qui joint leurs centres passera par le contact ». Voir trad. de Peyrard vol. I, p. 144.

4. On a : $HB + BZ = H\Gamma + \Gamma E$, d'où : $HB - H\Gamma = \Gamma E - BZ$. Or, les droites ΓE, BZ sont données ; donc, la différence $HB - H\Gamma$ est donnée. De même, on a : $H\Gamma + \Gamma E = HA + A\Delta$, d'où : $H\Gamma - HA = A\Delta - \Gamma E$. Or, les droites AΔ, ΓE sont données, donc $(H\Gamma - HA)$ est donné. Enfin, on a : $HB + BZ = HA + A\Delta$, d'où : $HB - HA = A\Delta - BZ$. Or, les droites AΔ, BZ: sont données ; donc, $(HB - HA)$ est donné.

5. Cette conclusion qui, d'après le texte, semble devoir découler du lemme qui précède immédiatement (prop. 9), n'est pas évidente. La démonstration fait voir que les différences $HB - H\Gamma$, $H\Gamma - HA$ et $HB - HA$ sont données de grandeur, mais elles ne sont pas égales ; condition exigée cependant dans la proposition 9. Cette dernière proposition serait directement applicable, et on pourrait conclure que la droite AH est donnée, si on avait : $HB - H\Gamma = H\Gamma - HA$ ou, ce qui revient au même, si on avait : $2\Gamma E = A\Delta + BZ$; relation d'hypothèse entre les cercles donnés qu'il y aurait alors lieu de supposer perdue dans une lacune, ou omise par négligence, dans l'énoncé de la proposition 10.

Cependant, comme l'a suggéré Hultsch (*loc. cit.*, vol. I, p. 201 en note), il est possible d'invoquer indirectement la proposition 9, si on réalise l'égalité de deux des différences données en ajoutant à la plus petite droite HA une grandeur donnée AΘ (non indiquée sur la figure du texte), de telle sorte que l'on ait : $HB - H\Gamma = H\Gamma - (HA + A\Theta) = H\Gamma - H\Theta$. Dès lors, en supposant qu'il ait

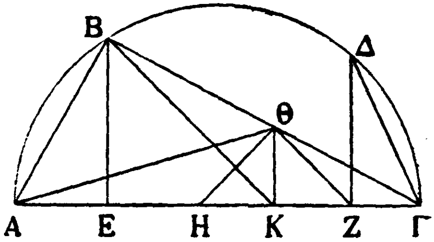
ΑΔ est donnée aussi ; en sorte que le diamètre du cercle ΔΕΖ est donné (1). Ce sujet se termine ici pour nous, et nous allons maintenant exposer d'autres choses.

XII.

Proposition 11. — Soit le demi-cercle ΑΒΓ ; brisons (2) une droite ΓΒΑ ; menons transversalement une droite ΓΔ, telle que [la droite ΓΒ soit égale] (3) à la somme [des droites ΑΒ, ΔΓ] (4), et menons les perpendiculaires [ΒΕ, ΔΖ sur la droite ΑΓ ; je dis que la droite ΑΖ] (5) est double de la droite ΒΕ.

En effet, posons la droite ΕΗ égale à la droite ΑΕ et la droite ΒΘ égale à la droite ΑΒ ; menons les droites de jonction ΑΘ, ΘΗ, ΘΖ, et menons la perpendiculaire ΘΚ et la droite de jonction ΒΚ.

Puisque la droite ΓΒ est égale à la somme des droites ΒΑ, ΔΓ, droites chez lesquelles la droite ΒΘ est égale à la droite ΑΒ, il s'ensuit que la droite restante ΘΓ est égale à la droite ΓΔ et que le carré de la droite ΓΔ est égal au carré de la droite ΓΘ. Or, le carré de la droite ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΖ (5) ;



donc, le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΖ équivaut au

---

été démontré d'une certaine manière par Pappus que les trois côtés du nouveau triangle ΘΒΓ sont donnés, la droite ΗΘ sera donnée en vertu de la proposition 9. En conséquence, la droite ΑΘ étant donnée, la droite ΑΗ (= ΗΘ — ΑΘ) sera donnée aussi.

1. La droite ΑΗ étant donnée, le diamètre ΗΔ (= ΑΗ + ΑΔ) du cercle ΔΕΖ est donné.

2. κεκλάσθω ἡ ΓΒΑ, brisons la droite ΓΒΑ ; expression que Héron d'Alexandrie définit dans les termes que nous traduisons : « On dit qu'une ligne est brisée lorsqu'en la prolongeant elle ne retombe pas sur elle-même ». (*Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae, etc. edidit Frid. Hultsch*. Berolini, 1864, in 8°. Voir : *Heronis definitiones*, p. 11, l. 20).

3, 4, 5. Passages lacuneux facilement reconstitués d'après le texte de la démonstration, d'abord par Scaliger en marge du manuscrit de Leyde, puis par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 69), et, enfin, par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 202, ll. 2-3).

4. Euclide, liv. VI, proposition 8, corollaire énoncé, p. 49, n. 1.

carré de la droite ΓΘ. En conséquence, l'angle compris sous les droites ΖΘ, ΘΓ est égal à l'angle compris sous les droites ΘΑ, ΑΗ.

Derechef, puisque le rectangle compris sous les droites ΓΑ, ΑΕ équivaut au carré de la droite ΑΒ, et que deux rectangles compris sous les droites ΓΑ, ΑΕ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΓΑ, ΑΗ, valent donc deux carrés de la droite ΑΒ, c'est-à-dire le carré de la droite ΑΘ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΑΘ, ΘΗ est égal à l'angle compris sous les droites ΘΓ, ΓΖ. Or, l'angle compris sous ΘΑ, ΑΗ est aussi égal à l'angle compris sous ΖΘ, ΘΓ ; donc, l'angle restant compris sous ΑΗ, ΗΘ est égal à l'angle compris sous ΘΖ, ΖΓ, et l'angle compris sous ΘΗ, ΗΖ est donc égal à l'angle compris sous ΘΖ, ΖΗ. De plus, la droite ΘΚ est menée perpendiculairement ; donc, la droite ΖΚ est égale à la droite ΚΗ. Et puisque chacun des angles compris sous les droites ΑΒ, ΒΘ et sous les droites ΑΚ, ΚΘ est droit, le quadrilatère ΑΒΘΚ est dans un cercle ; donc, l'angle compris sous ΒΘ, ΘΑ est égal à l'angle compris sous ΒΚ, ΚΑ (1). Mais, l'angle compris sous ΒΘ, ΘΑ est la moitié de l'angle droit ; donc, l'angle compris sous ΒΚ, ΚΑ est aussi la moitié de l'angle droit. Or, l'angle compris sous ΒΕ, ΕΚ est droit ; donc, la droite ΒΕ est égale à la droite ΕΚ. Mais, la droite ΑΖ est le double de la droite ΕΚ (parce que la droite ΑΕ est égale à la droite ΕΗ et que la droite ΖΚ est égale à la droite ΚΗ) ; donc, la droite ΑΖ est aussi le double de la droite ΒΕ ; ce qu'il fallait démontrer (2).

---

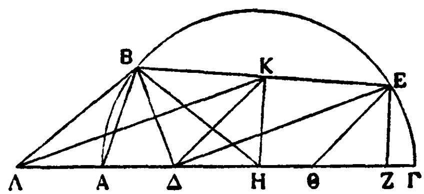
1. EUCLIDE, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2.

2. Résumons en notations usuelles : On a par hypothèse : $\Gamma B = AB + \Delta\Gamma$ et par construction : $B\Theta = AB$; donc : $\Gamma B - B\Theta = AB + \Delta\Gamma - AB$ ou, comme le texte : $\Theta\Gamma = \Delta\Gamma$, d'où : $\overline{\Theta\Gamma}^2 = \overline{\Delta\Gamma}^2$ Or, $\overline{\Delta\Gamma}^2 = A\Gamma \times \Gamma Z$; donc : $\overline{\Theta\Gamma}^2 = A\Gamma \times \Gamma Z$, d'où: $\frac{\Theta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Gamma Z}{\Theta\Gamma}$. Dès lors, les triangles $\Theta A\Gamma$, $\Theta\Gamma Z$, ayant même angle en Γ et les côtés proportionnels, sont semblables, d'où, comme le texte : $\widehat{Z\Theta\Gamma} = \widehat{\Theta AH}$ (I). D'autre part : $\overline{AB}^2 = \Gamma A \times AE$, d'où : $2\overline{AB}^2 = 2\Gamma A \times AE$ (II). Or, par construction, on a : $B\Theta = AB$; donc : $\overline{A\Theta}^2 = 2\overline{AB}^2$, et, considérant que $AH = 2AE$, la relation (II) devient, comme le texte : $\overline{A\Theta}^2 = \Gamma A \times AH$, d'où : $\frac{A\Theta}{\Gamma A} = \frac{AH}{A\Theta}$. Les triangles $\Theta A\Gamma$, $HA\Theta$, ayant l'angle en A commun et les côtés proportionnels, sont donc semblables, d'où, comme le texte : $\widehat{A\Theta H} = \widehat{\Theta\Gamma Z}$, d'où, considérant la relation (I), les triangles $\Theta\Gamma Z$, $A\Theta H$ sont semblables, d'où : $\widehat{AH\Theta} = \widehat{\Theta Z\Gamma}$, d'où, considérant les angles supplémentaires : $\widehat{\Theta HZ} = \widehat{\Theta ZH}$, d'où : $ZK = KH$. Or, les angles $AB\Gamma$, $AK\Theta$ sont droits ;

XIII.

Proposition 12. — Soit le demi-cercle ΑΒΓ ; brisons-y une droite ΑΒΔ, et que la droite ΑΒ soit égale à la droite ΒΔ. Menons la droite ΔΕ perpendiculaire à la droite ΒΔ ; menons la droite de jonction ΒΕ, à laquelle nous menons à angles droits la droite ΕΖ ; prenons le centre Η ; que la droite ΔΘ soit à la droite ΘΖ comme la droite ΑΗ est à la droite ΗΔ (1), et menons la droite de jonction ΘΕ ; je dis que l'angle compris sous les droites ΒΕ, ΕΔ est égal à l'angle compris sous les droites ΔΕ, ΕΘ.

Menons du point Η la perpendiculaire ΗΚ sur la droite ΒΕ ; il s'ensuit que la droite ΒΚ est égale à la droite ΚΕ (2). Et l'angle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ est droit ; donc, les trois droites ΒΚ, ΚΔ, ΚΕ sont égales entre elles (3). De plus, la droite ΗΚ est parallèle à la droite ΕΖ ; et puisque l'angle compris sous les droites ΚΕ, ΕΔ est cherché comme devant être égal à l'angle compris sous les droites ΔΕ, ΕΘ, et que la droite ΔΚ est égale à la droite ΚΕ, je dis que l'angle compris sous ΚΕ, ΕΔ est donc égal à l'angle compris sous ΚΔ, ΔΕ ; que l'angle compris sous ΚΔ, ΔΕ est donc égal à l'angle



donc, le quadrilatère ABΘK s'inscrit dans un cercle dans le même segment duquel on a : $\widehat{B\Theta A} = \widehat{BKA}$. Or, considérant le triangle rectangle ABΘ, on a : $\widehat{B\Theta A} = \frac{1}{2}$ droit, d'où : $\widehat{BKA} = \frac{1}{2}$ droit. Or, $\widehat{BEK} = 1$ droit ; donc : $\widehat{EBK} = \frac{1}{2}$ droit ; donc, le triangle BEK est isocèle, d'où, comme le texte : BE = EK. Or, par construction : AE = EH, et, par démonstration : ZK = KH ; donc : AZ = AE + EH + ZK + KH = 2 (EH + HK) = 2EK ; donc, comme le texte : AZ = 2BE.

1. C'est-à-dire : divisons la droite ΔZ au point Θ dans le rapport $\frac{AH}{H\Delta}$.

2. Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.

3. Euclide, liv. III, prop. 31 : « Dans un cercle, l'angle placé dans le demi-cercle est droit, l'angle placé dans un segment plus grand est plus petit qu'un droit ; l'angle placé dans un segment plus petit est plus grand qu'un droit ; l'angle du plus grand segment est plus grand qu'un droit, et l'angle du plus petit segment est plus petit qu'un droit ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 175.

compris sous ΔE, EΘ et que la droite ΔK est donc parallèle à la droite EΘ ([1]).

Menons encore la droite KΛ parallèle à la droite ΔE ; prolongeons la droite ΓΔ jusqu'au point Λ, et menons la droite de jonction BΛ. Dès lors, puisque la droite KΛ est parallèle à la droite ΔE, tandis que la droite KH est parallèle à la droite EZ et que la droite KΔ est aussi cherchée comme devant être parallèle à la droite EΘ, je dis donc, en raison de ce que le triangle KΛH est ainsi équiangle avec le triangle EΔZ et le triangle ΔKH équiangle avec le triangle EΘZ, que la droite ΔZ est à la droite ZE comme la droite ΛH est à la droite HK, et que la droite EZ est à la droite ZΘ comme la droite KH est à la droite HΔ ; que, par raison d'égalité, la droite ΔZ est donc aussi à la droite ZΘ comme la droite ΛH est à la droite HΔ, et que, par division, la droite ΔΘ est donc à la droite ΘZ comme la droite ΛΔ est à la droite ΔH. Or, comme on a supposé que la droite AH est à la droite HΔ comme la droite ΔΘ est à la droite ΘZ, je dis donc que la droite ΔΘ est à la droite ΘZ, c'est-à-dire la droite AH à la droite HΔ, comme la droite ΛΔ est à la droite ΔH ; que la droite ΛΔ est donc égale à la droite AH et que la droite ΛA est donc égale à la droite ΔH. Mais, comme la droite AB est aussi égale à la droite BΔ, je dis donc que la droite ΛB est aussi égale à la droite BH. Mais, comme la droite BH est égale à chacune des droites ΛΔ, AH, je dis donc que la droite BΛ est égale à la droite ΛΔ.

Or, il en est ainsi ; car, puisque la droite KΛ est parallèle à la droite ΔE, et que la droite ΔK est égale à la droite KE, l'angle compris sous BK, KΛ est aussi égal à l'angle compris sous ΛK, KΔ. Dès lors, puisque la droite BK est égale à la droite KΔ, et que l'angle compris sous BK, KΛ est égal à l'angle compris sous ΔK, KΛ, il s'ensuit que la droite BΛ est aussi égale à la droite ΛΔ ([2]).

---

1. Cette première partie de la démonstration emprunte la voie analytique en supposant déjà l'égalité des angles KΔE, ΔEΘ.

2. La partie analytique de la démonstration supposant avoir déjà : $\widehat{K\Delta E} = \widehat{\Delta E\Theta}$, elle considère les rayons du cercle circonscrit au triangle rectangle par construction BΔE, et, dès lors, $\Delta K = KE$; donc, le triangle ΔKE sera isocèle ; donc : $\widehat{K\Delta E} = \widehat{\Delta EK}$, d'où ΔK est parallèle à EΘ. Or, par construction, KΛ est

Et la synthèse se fera d'après cette analyse.

En effet, puisque la droite ΔK est égale à la droite KE, l'angle compris sous KΔ, ΔE est aussi égal à l'angle compris sous KE, EΔ. Mais, à cause des parallèles KΛ, EΔ, l'angle compris sous KΔ, ΔE est égal à l'angle compris sous ΔK, KΛ et l'angle compris sous KE, EΔ égal à l'angle compris sous BK, KΛ ; donc, l'angle compris sous BK, KΛ est aussi égal à l'angle compris sous ΔK, KΛ. Or, la droite BK est aussi égale à la droite KΔ ; donc, la base BΛ est égale à la base ΛΔ ; de sorte que l'angle compris sous ΛB, BΔ est aussi égal à l'angle compris sous BΔ, ΔΛ, c'est-à-dire à l'angle compris sous ΔA, AB, c'est-à-dire à l'angle compris sous AB, BH. Retranchons de part et d'autre l'angle compris sous AB, BΔ ; il s'ensuit que l'angle restant compris sous ΛB, BA est égal à l'angle restant compris sous ΔB, BH. Mais, l'angle compris sous BΔ, ΔH est aussi égal à l'angle compris sous BA, AΛ ; par conséquent, on a deux triangles BΔH, BAΛ ayant deux angles égaux à deux angles et un côté AB égal à un côté BΔ ; donc, la droite BH est égale à la droite BΛ et la droite ΔH égale à la droite ΛA ; en sorte que la droite ΛΔ est aussi égale à la droite AH. Dès lors, puisque, par hypothèse, la droite ΔΘ est à la droite ΘZ comme la droite AH est à la droite HΔ, et que la droite AH est égale à la droite ΛΔ, il s'ensuit que la droite ΔΘ est à la droite ΘZ comme la droite ΛΔ est à la droite ΔH ; donc, par composition, la droite ΔZ est à la droite ZΘ comme la droite ΛH est à la droite HΔ. Or, la droite ΔZ est aussi à la droite ZE comme la

---

parallèle à ΔE et KH parallèle à EZ ; donc, par similitude des triangles KΛH, EΔZ, on aura : $\frac{\Delta Z}{ZE}=\frac{\Lambda H}{HK}$ et, par similitude des triangles ΔKH, ΘEZ, on aura : $\frac{EZ}{Z\Theta}=\frac{HK}{H\Delta}$ Ces deux dernières relations donnent par raison d'égalité : $\frac{\Delta Z}{Z\Theta}=\frac{\Lambda H}{H\Delta}$, d'où, par division : $\frac{\Delta Z - Z\Theta}{Z\Theta}=\frac{\Lambda H - H\Delta}{H\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{\Delta\Theta}{Z\Theta}=\frac{\Lambda\Delta}{H\Delta}$ Or, par hypothèse, on a : $\frac{\Delta\Theta}{Z\Theta}=\frac{AH}{H\Delta}$; donc : $\frac{AH}{H\Delta}=\frac{\Lambda\Delta}{H\Delta}$, d'où, comme le texte : $\Lambda\Delta = AH$, d'où : $\Lambda A = \Delta H$, d'où, considérant que, par hypothèse, $AB = B\Delta$, on aura : $\Lambda B = BH$. Or, H étant le centre du cercle, on a : $BH = AH$, et l'on vient d'avoir $\Lambda\Delta = AH$, d'où : $BH = \Lambda\Delta$; donc, on aura $\Lambda B = \Lambda\Delta$. Or, il en sera ainsi ; car KΛ, ΔE sont parallèles par construction, et on a démontré que $\Delta K = KE$; donc : $\widehat{BK\Lambda} = \widehat{BE\Delta} = \widehat{K\Delta E} = \widehat{\Delta K\Lambda}$. Or, on a démontré que $BK = K\Delta$; donc, le triangle BΛΔ est isocèle ou, comme le texte : $B\Lambda = \Lambda\Delta$.

droite ΛH est à la droite HK; [donc, par raison d'égalité] (1), la droite EZ est à la droite ZΘ comme la droite KH est à la droite HΔ. De plus, l'angle compris sous EZ, ZΘ est égal à l'angle compris sous KH, HΔ, en raison de ce que les droites EZ, KH sont parallèles ; donc, l'angle compris sous EΘ, ΘZ est aussi égal à l'angle compris sous KΔ, ΔH (2). Dès lors, la droite KΔ est parallèle à la droite EΘ ; donc, l'angle compris sous les droites KΔ, ΔE, c'est-à-dire l'angle compris sous les droites KE, EΔ, est égal à l'angle compris sous les droites ΔE, EΘ (3).

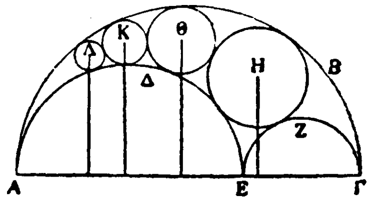
XIV.

La proposition suivante est rapportée dans certains ouvrages anciens.

Supposons trois demi-cercles ABΓ, AΔE, EZΓ tangents entre

1. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 208, l. 4).
2. EUCLIDE, liv. VI, prop. 6 : « Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles seront équiangles, et les angles sous-tendus par des côtés homologues seront égaux ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 303.
3. La partie synthétique de la démonstration se déroule explicitement comme suit : On a démontré que $\Delta K = KE$; donc : $\widehat{K\Delta E} = \widehat{KE\Delta}$. Or, ΛK, ΔE sont parallèles par construction ; donc : $\widehat{K\Delta E} = \widehat{\Delta K\Lambda}$ et $\widehat{KE\Delta} = \widehat{BK\Lambda}$; donc: $\widehat{BK\Lambda} = \widehat{\Delta K\Lambda}$. Or, $BK = K\Delta$; donc, les triangles $BK\Lambda$, $\Delta K\Lambda$ ont angle égal, le côté ΛK commun et les côtés BK, $K\Delta$ égaux, et donnent, comme le texte : $B\Lambda = \Lambda\Delta$; donc : $\widehat{\Lambda B\Delta} = \widehat{B\Delta\Lambda}$. Or, $\widehat{B\Delta\Lambda} = \widehat{BA\Delta}$ et $\widehat{BA\Delta} = \widehat{ABH}$; donc, comme le texte : $\widehat{\Lambda B\Delta} = \widehat{ABH}$, d'où : $\widehat{\Lambda B\Delta} - \widehat{AB\Delta} = \widehat{ABH} - \widehat{AB\Delta}$ ou, comme le texte : $\widehat{\Lambda BA} = \widehat{\Delta BH}$. Mais, par hypothèse, $AB = B\Delta$; donc : $\widehat{B\Delta H} = \widehat{BA\Lambda}$. Donc les triangles $B\Delta H$, $BA\Lambda$, ayant deux angles égaux et les bases AB, $B\Delta$ égales, sont égaux, d'où : $BH = B\Lambda$ et $\Delta H = \Lambda A$, d'où : $A\Delta + \Delta H = \Lambda A + A\Delta$ ou, comme le texte : $AH = \Lambda\Delta$. Or, on a par hypothèse : $\frac{\Delta\Theta}{\Theta Z} = \frac{AH}{H\Delta}$; donc : $\frac{\Delta\Theta}{\Theta Z} = \frac{\Lambda\Delta}{H\Delta}$, d'où : $\frac{\Delta\Theta + \Theta Z}{\Theta Z} = \frac{\Lambda\Delta + H\Delta}{H\Delta}$ ou : $\frac{\Delta Z}{\Theta Z} = \frac{\Lambda H}{H\Delta}$. Or, les triangles semblables ΔEZ, ΛKH donnent : $\frac{\Delta Z}{ZE} = \frac{\Lambda H}{HK}$; donc, par raison d'identité, on a, comme le texte : $\frac{ZE}{\Theta Z} = \frac{HK}{H\Delta}$. De plus, le parallélisme des droites EZ, KH donne : $\widehat{EZ\Theta} = \widehat{KH\Delta}$; donc (EUCLIDE, liv. VI, prop. 6), les triangles $E\Theta Z$, $K\Delta H$ sont équiangles et $\widehat{E\Theta Z} = \widehat{K\Delta H}$; donc, $K\Delta$, $E\Theta$ sont parallèles. En conséquence, $\widehat{K\Delta E} = \widehat{\Delta E\Theta}$. Or, $\widehat{K\Delta E} = \widehat{KE\Delta}$; donc, comme le texte : $\widehat{KE\Delta} = \widehat{\Delta E\Theta}$.

eux, et inscrivons, dans l'espace compris entre leurs arcs, qu'on appelle l'*Arbelon* (1), tant de cercles qu'on voudra, tangents aux demi-cercles et tangents entre eux, tels que ceux qui sont décrits autour des centres H, Θ, K, Λ. On démontrera que la perpendiculaire menée du centre H sur la droite ΑΓ est égale au diamètre du cercle décrit autour de H ; que la perpendiculaire menée du point Θ est le double du diamètre du cercle décrit autour de Θ ; que la perpendiculaire menée du point K est le triple (2), et que l'inscription de cercles étant faite à l'infini, les perpendiculaires successives seront des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent continuellement d'une unité. Mais nous allons démontrer d'abord les choses qui seront admises pour cela (3).



XV.

Proposition 13. — Soient deux cercles ZB, BM décrits autour des centres Γ, A, tangents entre eux au point B, et que le cercle BM soit le plus grand. Qu'un autre cercle ΚΛ, décrit autour du centre H, leur soit tangent aux points K, Λ, et menons les

1. ἄρβηλος, tranchet de cordonnier ; expression que Commandin conserve en grec dans sa version latine (cfr. *loc. cit.*, p. 71, l. 16), et que nous conservons dans le mot Arbelon pour désigner l'espace curviligne, en forme de griffe de félin, compris entre trois arcs de demi-cercles tangents entre eux. Cette figure particulière fait l'objet de trois propositions (prop. 4, 5 et 6) du livre des *Lemmes* d'Archimède, dont la première démontre que l'aire de cette figure équivaut au cercle ayant comme diamètre la perpendiculaire élevée sur le diamètre ΑΓ, au point de contact E des deux petits arcs, jusqu'au point de rencontre avec le demi-cercle extérieur B (Voir : *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 526-531).

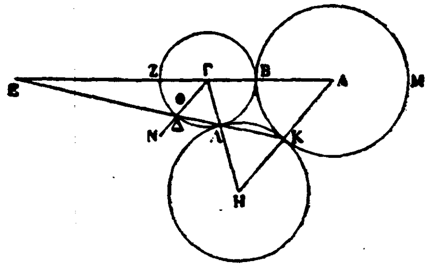
On pourra consulter au sujet de la proposition de l'*Arbelon* le petit ouvrage de F. Buchner : *De Arbelo Archimedis*, Elbing, 1824, in-4°, et on trouvera une solution moderne et élégante de cette proposition dans l'ouvrage de E. Catalan : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, Paris, 3e édition, 1858, p. 185.

2. Sous-entendu : τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ K κύκλον, du diamètre du cercle (décrit) autour du (point) K.

3. τὰ λαμβανόμενα, les choses qui seront admises comme démontrées en vue de la démonstration de la proposition en question, c'est-à-dire certains lemmes auxiliaires.

droites de jonction ΓΗ, ΑΗ (qui passeront donc par les points Κ, Λ) (1). De plus, la droite reliant les points Κ, Λ étant prolongée, elle coupera le cercle ΖΒ et rencontrera la droite prolongée qui passe par les centres Α, Γ, parce que le côté ΑΚ est plus grand que le côté ΓΔ du trapèze ΑΚΔΓ (2). Qu'elle la rencontre donc au point Ε en coupant le cercle au point Δ. On démontrera que la droite ΑΕ est à la droite ΕΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ.

Or, cela est manifeste (3). En effet, les triangles ΓΔΛ, ΛΚΗ, qui ont les angles au sommet égaux (4) et les côtés autour des angles Γ, Η proportionnels, sont équiangles (5) ; en sorte que les angles égaux compris sous les droites ΔΓ, ΓΗ et sous les droites ΓΗ, ΗΑ sont alternes ; que la droite ΓΔ est parallèle à la droite ΑΗ, et que la droite ΑΕ est à la droite ΕΓ comme la droite ΑΚ est à la droite ΓΔ, c'est-à-dire comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ (6).



Et la réciproque est manifeste aussi ; car, si la droite ΑΕ est à la droite ΕΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ, la droite ΚΔ est dans le prolongement de la droite ΔΕ.

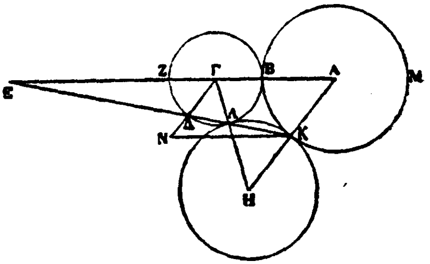
En effet, la droite ΑΚ est parallèle à la droite ΓΔ (7), et la droite ΑΚ est à la droite ΓΔ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ,

---

1. Euclide, liv. III, prop. 12 énoncée p. 152, n. 3.
2. Le parallélisme des droites ΑΚ, ΓΔ sera reconnu au cours de la démonstration.
3. Le texte ajoute ici : « la droite de jonction ΓΔ étant menée » ; ce qui constitue une interpolation manifeste ; car la mention qui vient d'être faite du trapèze ΑΚΔΓ suppose déjà que cette droite a été menée (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 210, l. 8).
4. Le texte présente ici l'interpolation : πρὸς τῷ Λ, au point Λ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 210, l. 10).
5. Euclide, liv. VI, prop. 7 : « Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restants sont en même temps ou plus petits ou non plus petits qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 306.
6. Car : ΑΚ = ΑΒ et ΓΔ = ΒΓ.
7. Par similitude des triangles ΛΔΓ, ΛΚΗ.

c'est-à-dire comme la droite AE est à la droite EΓ [1] ; donc, la droite KΔ est dans le prolongement de la droite ΔE. Car, si la droite menée par les points K, E ne passe pas par le point Δ, mais par un point Θ, il se fera que la droite AK est à la droite ΓΘ comme la droite AE est à la droite EΓ ; ce qui est impossible [2]. Pareillement, cette droite ne coupe pas la droite ΓΔ prolongée au delà du point Δ, par exemple au point N ; car, la droite AK sera de nouveau à la droite ΓN comme la droite AE est à la droite EΓ ; ce qui est impossible, puisque la droite AK est dans ce rapport avec la droite ΓΔ [3].

Ou bien comme suit [4] : Menons par le point K la droite KN parallèle à la droite AE, et l'on obtient le parallélogramme AΓNK et la droite AK égale à la droite ΓN. Et puisque la droite AK, c'est-à-dire la droite ΓN, est à la droite ΓΔ comme la droite AE est à la droite EΓ, par division, la droite NΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AΓ est à la droite ΓE, et, par permutation, la droite EΓ est



à la droite ΓΔ comme la droite AΓ, c'est-à-dire comme la droite KN est à la droite NΔ. De plus, les côtés situés autour des angles égaux aux points N, Γ sont proportionnels ; par conséquent, le triangle EΔΓ est semblable au triangle ΔNK ; donc, l'angle compris

1. Les deux égalités de la note avant-précédente donnent : $\frac{AK}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{\Gamma B}$. Or, par hypothèse, on a : $\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{AB}{B\Gamma}$; donc, comme le texte : $\frac{AK}{\Gamma\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}$; d'où les deux manières qui vont suivre de démontrer que les points K, Δ, E sont sur une même ligne droite.

2. Si la droite de jonction KE passe par Θ, on aura : $\frac{AK}{\Gamma\Theta}=\frac{AE}{E\Gamma}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente, il vient : $\Gamma\Theta = \Gamma\Delta$; ce qui est impossible, car : $\Gamma\Theta < \Gamma\Delta$.

3. Si la droite de jonction KE passe par le point N, on aura : $\frac{AK}{\Gamma N}=\frac{AE}{E\Gamma}$, d'où, en présence de la relation de la note avant-précédente, il vient : $\Gamma N = \Gamma\Delta$; ce qui est impossible, car $\Gamma N > \Gamma\Delta$.

4. C'est-à-dire autre manière de démontrer que les points K, Δ, E sont en ligne droite.

sous les droites EΔ, ΔΓ est égal à l'angle compris sous les droites NΔ, ΔK. Or, ΓN est une droite ; donc, KΔE est aussi une droite [1].

Je dis, en outre, que le rectangle compris sous les droites KE, EΛ équivaut au carré de la droite EB.

En effet, puisque la droite AE est à la droite EΓ comme la droite AB est à la droite BΓ, c'est-à-dire à la droite ΓZ, la droite restante BE sera à la droite restante EZ comme la droite AE est à la droite EΓ, c'est-à-dire comme la droite KE est à la droite EΔ. Mais, le rectangle compris sous les droites KE, EΛ est au rectangle compris sous les droites ΛE, EΔ comme la droite KE est à la droite EΔ ; tandis que le carré de la droite BE est au rectangle compris sous les droites BE, EZ comme la droite BE est à la droite EZ, et le rectangle compris sous les droites ΛE, EΔ équivaut au rectangle compris sous les droites BE, EZ [2] ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites KE, EΛ équivaut au carré de la droite EB [3].

---

1. Puisque AK = ΓN, la relation : $\frac{AK}{\Gamma\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}$ devient : $\frac{\Gamma N}{\Gamma\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{\Gamma N-\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{AE-E\Gamma}{E\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{N\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{A\Gamma}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{E\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{A\Gamma}{N\Delta}$. Or, AΓ = KN ; donc, comme le texte : $\frac{E\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{KN}{N\Delta}$. Or, les angles alternes en Γ et N sont égaux, d'où similitude des triangles EΔΓ, ΔNK, d'où, comme le texte : $\widehat{E\Delta\Gamma}=\widehat{N\Delta K}$. Or, par construction, les points Γ, Δ, N sont sur une droite ; donc : $\widehat{\Gamma\Delta K}+\widehat{K\Delta N}=2$ angles droits. Mais, $\widehat{K\Delta N}=\widehat{E\Delta\Gamma}$; donc : $\widehat{\Gamma\Delta K}+\widehat{E\Delta\Gamma}=2$ angles droits. Dès lors, les points K, Δ, E sont sur une même droite.

Cette démonstration à l'aide du parallélogramme auxiliaire sera invoquée plusieurs fois dans la suite, notamment dans les propositions 64, 118, 128 et 130 du livre VII.

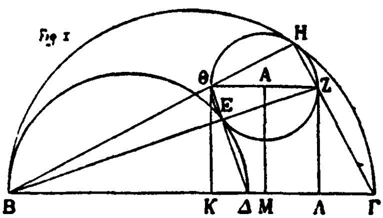
2. EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4.

3. On a démontré : $\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{AB}{B\Gamma}$. Or, ΓZ = BΓ ; donc : $\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{AB}{\Gamma Z}$, d'où : $\frac{AE-AB}{E\Gamma-\Gamma Z}=\frac{AE}{E\Gamma}$ ou : $\frac{BE}{EZ}=\frac{AE}{E\Gamma}$. Or, $\frac{KE}{E\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}$; donc, comme le texte : $\frac{BE}{EZ}=\frac{KE}{E\Delta}$. Or, on peut écrire : $\frac{KE}{E\Delta}=\frac{KE\times E\Lambda}{E\Delta\times E\Lambda}$ et $\frac{BE}{EZ}=\frac{\overline{BE}^2}{EZ\times BE}$; donc : $\frac{\overline{BE}^2}{EZ\times BE}=\frac{KE\times E\Lambda}{E\Delta\times E\Lambda}$. Or, les sécantes du cercle Γ, issues du point E, donnent (EUCLIDE, liv. III, prop. 36) : EΔ × EΛ = EZ × BE ; donc, comme le texte : $KE\times E\Lambda=\overline{BE}^2$.

XVI.

Proposition 14. — Soient deux demi-cercles ΒΗΓ, ΒΕΔ ; que le cercle ΕΖΗΘ leur soit tangent, et menons de son centre A la perpendiculaire AM sur la base ΒΓ des demi-cercles [1]. Je dis que, dans la première figure, la somme des droites ΓΒ, ΒΔ est à leur excédent, c'est-à-dire à la droite ΓΔ, et que, dans les deuxième et troisième figures, l'excédent des droites ΓΒ, ΒΔ est à la somme des droites ΓΒ, ΒΔ [c'est-à-dire à la droite ΓΔ] [2], comme la droite MB est au rayon du cercle ΕΖΗΘ.

Menons par le point A la droite ΘΖ parallèle à la droite ΒΓ. Dès lors, puisque les deux cercles ΒΗΓ, ΕΖΗΘ sont tangents entre eux au point H et que, dans ces cercles, les diamètres ΒΓ, ΖΘ sont parallèles, la ligne qui passe par les points H, Θ, B sera droite, et celle qui passe par les points H, Z, Γ le sera aussi [3].



Derechef, puisque les cercles ΒΕΔ, ΕΖΗΘ sont tangents entre eux au point E, et que, dans ces cercles, les diamètres ΘΖ, ΒΔ sont parallèles, la ligne qui passe par les points Z, E, B sera droite, ainsi que celle qui passe par les points Θ, E, Δ.

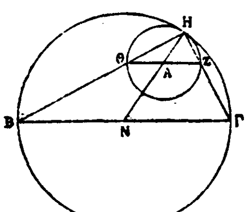
Menons, en outre, des points Θ, Z, les perpendiculaires ΘΚ, ΖΛ ; il s'ensuit que, par similitude des triangles ΒΗΓ, ΒΘΚ,

---

1. Le cours de la démonstration et les trois figures qui accompagnent le texte montrent que les deux demi-cercles sont tangents au point B.

2. La phrase placée entre crochets est une restauration proposée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 214, l. 4).

3. Si, dans la première figure, nous menons la droite de jonction HA, son prolongement passera par le centre N du cercle ΒΗΓ. Dès lors, si l'on mène les droites de jonction BH, ΘH, considérant que les droites BN, ΘA sont parallèles et que l'on a : AH = ΘA et NH = BN, d'où : $\frac{AH}{NH} = \frac{\Theta A}{BN}$, la proposition 13 démontre que les droites BH, ΘH sont dans le prolongement l'une de l'autre, c'est-à-dire que les points H, Θ, B sont sur une même droite, et qu'il en est de même pour les points H, Z, Γ. La même chose se démontre pour les deux autres figures.

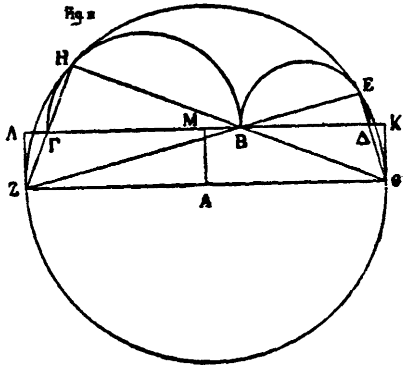


la droite BΘ sera à la droite BK comme la droite BΓ est à la droite BH, et que l'aire (1) comprise sous les droites ΓB, BK équivaut à celle qui est comprise sous les droites HB, BΘ ; tandis que, par similitude des triangles BZΛ, BEΔ, la droite BZ est à la droite BΛ comme la droite ΔB est à la droite BE, et que le rectangle compris sous les droites ΔB, BΛ équivaut au rectangle compris sous les droites ZB, BE. Or, le rectangle compris sous les droites HB, BΘ équivaut au rectangle compris sous les droites ZB, BE (2) ; donc, le rectangle compris sous les droites ΓB, BK équivaut aussi au rectangle compris sous les droites ΔB, BΛ, ou, si la perpendiculaire menée du point Z tombe au point Δ, équivaut au carré de la droite BΔ. Dès lors, dans la première figure, la droite ΛB est à la droite BK comme la droite ΓB est à la droite BΔ ; de sorte que [la somme des droites ΛB, BK est aussi à leur excédent] (3), c'est-à-dire à la droite KΛ, comme la somme des droites ΓB, BΔ est à leur excédent, c'est-à-dire à la droite ΓΔ. Or, la droite BM est la moitié de la somme des droites ΛB, BK (parce que la droite MΛ est égale à la droite KM), et la droite MK est la moitié de la droite ΛK ; par conséquent, la droite BM est à la droite MK, c'est-à-dire au rayon du cercle EZHΘ, comme la somme des droites ΓB, BΔ est à la droite ΓΔ (4).

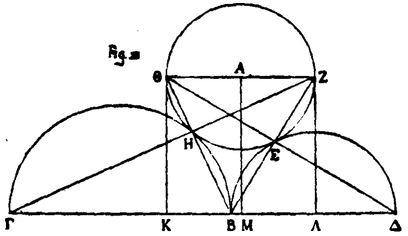
---

1. C'est-à-dire l'aire rectangulaire.
2. EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4.
3. Lacune comblée d'abord par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 75), puis par Hultsch comme nous avons traduit (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 216, l. 4).
4. La similitude des triangles BHΓ, BΘK donne : $\frac{B\Theta}{BK}=\frac{B\Gamma}{BH}$, d'où, comme le texte : $B\Theta \times BH = B\Gamma \times BK$. D'autre part, la similitude des triangles BΛZ, BEΔ donne : $\frac{BZ}{B\Lambda}=\frac{\Delta B}{BE}$, d'où, comme le texte : $BZ \times BE = \Delta B \times B\Lambda$. Or, les sécantes du cercle A issues du point B donnent (EUCLIDE, liv. III, prop. 36) : $B\Theta \times BH = BZ \times BE$, d'où, en présence des deux égalités précédentes, il vient : $B\Gamma \times BK = \Delta B \times B\Lambda$ (ou bien : $B\Gamma \times BK = \overline{B\Delta}^2$, si le pied de la perpendiculaire abaissée de Z tombe en Δ comme le fait remarquer inutilement une phrase probablement interpolée). Dès lors, cette relation donne : $\frac{B\Lambda}{BK}=\frac{B\Gamma}{B\Delta}$, d'où : $\frac{B\Lambda + BK}{B\Lambda - BK}=\frac{B\Gamma + B\Delta}{B\Gamma - B\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{B\Lambda + BK}{K\Lambda}=\frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta}$. Or, on a : $2\,BM = B\Lambda + BK + KM - M\Lambda$ et $KM = M\Lambda$, d'où, comme le texte : $BM = \frac{1}{2}(B\Lambda + BK)$ et $MK = \frac{1}{2}\Lambda K$; donc : $\frac{BM}{MK}=\frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{BM}{AZ}=\frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta}$.

D'autre part, dans les deuxième et troisième figures, puisqu'il a été démontré [1] que le rectangle compris sous les droites ΓB, BK équivaut au rectangle compris sous les droites ΔB, BΛ, il s'ensuit que la droite ΛB est à la droite BK comme la droite ΓB est à la droite BΔ, et, par composition, que la droite KΛ est à la droite KB comme la droite ΓΔ est à la droite ΔB ; de sorte que la droite KΛ est aussi à l'excédent des droites ΛB, BK comme la droite ΓΔ est à l'excédent des droites ΓB, BΔ. Or, le rayon du cercle



EZHΘ [2] est la moitié de la droite KΛ, tandis que la droite BM est la moitié de l'excédent des droites ΛB, BK, parce que la droite ΛM est égale à la droite MK; en sorte que, dans la première figure, la somme des droites ΓB, BΔ est à leur excédent, la droite ΓΔ, tandis que dans les seconde et troisième figures, l'excédent des droites ΓB, BΔ est à la somme des droites ΓB, BΔ, c'est-à-dire la droite ΓΔ, comme la droite MB est au rayon du cercle EZHΘ [3] [4].



1. L'édition de Hultsch abandonne ici l'interpolation καὶ κοινῶς, d'une manière commune, c'est-à-dire d'une manière qui s'applique aux trois figures (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 216, l. 11).

2. Le texte présente ici l'interpolation : ἀντὶ τῆς ΑΜ, c'est-à-dire : en échange de la (droite) ΑΜ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 216, l. 16).

3. Les mots ἀνάπαλιν γάρ interpolés à cet endroit veulent indiquer que le rapport précédent est présenté d'une manière inverse (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 216, l. 23).

4. La relation ΓB × BK = ΔB × BΛ démontrée plus haut pour la première figure, et qui reste vraie pour les deux autres, donne : $\frac{B\Lambda}{BK}=\frac{\Gamma B}{B\Delta}$ (I), d'où : $\frac{B\Lambda+BK}{BK}=\frac{\Gamma B+B\Delta}{B\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{K\Lambda}{BK}=\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$. Or, la relation (I) donne aussi : $\frac{B\Lambda-BK}{BK}=\frac{\Gamma B-B\Delta}{B\Delta}$, d'où, par raison d'identité avec la relation pré-

On démontre en même temps que le rectangle compris sous les droites ΒΚ, ΛΓ équivaut au carré de la droite ΑΜ.

En effet, par similitude des triangles ΒΘΚ, ΖΛΓ, la droite ΖΛ est à la droite ΛΓ comme la droite ΒΚ est à la droite ΚΘ, et le rectangle compris sous les droites ΒΚ, ΛΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΘΚ, ΖΛ, c'est-à-dire au carré de la droite ΑΜ (1).

D'ailleurs, en raison de ce que la droite ΒΛ est à la droite ΚΛ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΔ, il se fait que le rectangle compris sous la droite ΒΓ et la droite ΚΛ, c'est-à-dire le diamètre du cercle, équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΛ, ΔΓ ; tandis que, en raison de ce que la droite ΒΚ est à la droite ΚΛ comme la droite ΒΔ est à la droite ΓΔ, le rectangle compris sous la droite ΒΔ et la droite ΚΛ, c'est-à-dire le diamètre du cercle, équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΚ, ΔΓ (2).

XVII.

Proposition 15. — Les mêmes choses étant posées (3), décrivons le cercle ΘΡΤ tangent aux demi-cercles initiaux et au

---

cédente, on a, comme le texte : $\frac{K\Lambda}{B\Lambda - BK} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B - B\Delta}$. Or, $AZ = \frac{1}{2}K\Lambda$ et $2\,BM = BM + \Lambda M - (MK - BM) = B\Lambda - BK$, d'où : $BM = \frac{1}{2}(B\Lambda - BK)$; donc, comme le texte : $\frac{BM}{AZ} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{B\Gamma + B\Delta}$; tandis que dans la première figure on a eu : $\frac{BM}{AZ} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{B\Gamma - B\Delta}$.

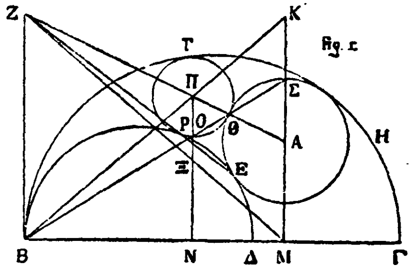
1. Les triangles ΒΚΘ, ΖΛΓ, tous deux semblables au triangle ΒΗΓ, sont semblables entre eux ; donc : $\frac{Z\Lambda}{\Lambda\Gamma} = \frac{BK}{K\Theta}$, d'où : $BK \times \Lambda\Gamma = K\Theta \times Z\Lambda$. Or, $K\Theta = \Lambda Z = AM$; donc, comme le texte : $BK \times \Lambda\Gamma = \overline{AM}^2$.

2. On a démontré plus haut que l'on a : $\frac{B\Lambda}{BK} = \frac{\Gamma B}{B\Delta}$, d'où : $\frac{B\Lambda}{B\Lambda - BK} = \frac{\Gamma B}{\Gamma B - B\Delta}$ ou : $\frac{B\Lambda}{K\Lambda} = \frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta}$, d'où, comme le texte : $B\Lambda \times \Gamma\Delta = \Gamma B \times K\Lambda$ ou : $B\Lambda \times \Gamma\Delta = \Gamma B \times \Theta Z$. D'autre part, la relation : $\frac{B\Lambda}{K\Lambda} = \frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta}$ donne : $\frac{B\Lambda - K\Lambda}{K\Lambda} = \frac{\Gamma B - \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}$ ou : $\frac{BK}{K\Lambda} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$, d'où, comme le texte : $BK \times \Gamma\Delta = B\Delta \times K\Lambda$ ou : $BK \times \Gamma\Delta = B\Delta \times \Theta Z$.

3. C'est-à-dire les deux demi-cercles tangents en Β et le cercle Α tangent à ces deux demi-cercles.

cercle ΕΗΘ aux points Θ, Ρ, Τ, et menons, des centres Α, Π, les perpendiculaires ΑΜ, ΠΝ sur la base ΒΓ. Je dis que la droite ΠΝ est au diamètre du cercle ΘΡΤ comme la droite ΑΜ, conjointement avec le diamètre du cercle ΕΗ, est au diamètre de ce cercle (1).

Menons la droite ΒΖ à angles droits sur la droite ΒΔ ; elle sera donc tangente au demi-cercle ΒΗΓ, et prolongeons la droite de jonction ΑΠ jusqu'au point Ζ.



Puisque, en raison de ce qui a été démontré précédemment (2), la droite ΒΜ est [au rayon du cercle ΕΗΘ] (3), dans la première figure, comme la somme des droites ΓΒ, ΒΔ est à leur excédent, c'est-à-dire à la droite ΓΔ ; tandis que, dans les seconde [et troisième] (4) figures, la droite ΜΒ est au rayon du cercle ΕΗΘ comme l'excédent de ces mêmes droites est à leur somme, c'est-à-dire comme l'excédent des droites ΓΒ, ΒΔ est à la droite ΓΔ, et que la droite ΒΝ sera ainsi aussi au rayon du cercle ΘΡΤ, il s'ensuit que, par permutation, la droite ΑΘ, rayon du cercle ΕΗΘ, sera aussi à la droite ΘΠ, rayon du cercle ΘΡΤ, comme la droite ΜΒ est à la droite ΒΝ (5). Mais, la droite ΑΖ est à la droite ΖΠ

1. On doit donc démontrer la relation : $\frac{\Pi N}{\text{diam. cercle } \Theta P T} = \frac{AM + \text{diam. cercle } A}{\text{diam. cercle } A}$.

2. Voir proposition 14.

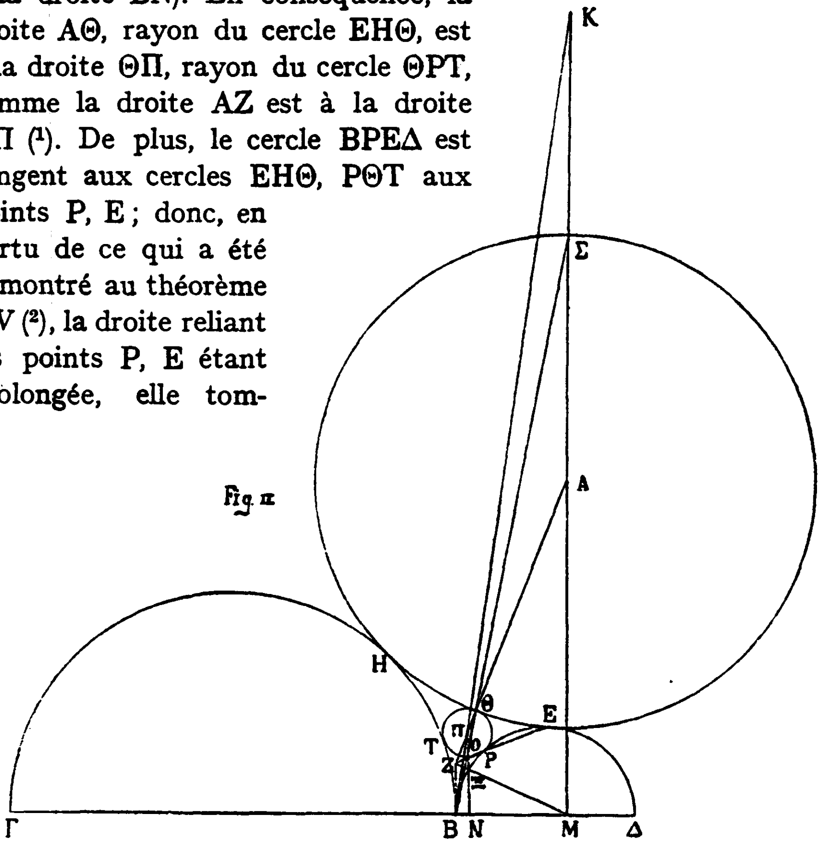
3. Lacune comblée facilement par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 77) d'après la même phrase qui se représente plus loin (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 220, ll. 2-3).

4. Lacune comblée par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 77).

5. La proposition 14 a démontré que, pour le cercle Α, on a, dans la première figure : $\frac{BM}{\text{rayon } A\Theta \text{ du cercle } EH\Theta} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{B\Gamma - B\Delta} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta}$ et, dans les seconde et troisième figures : $\frac{BM}{\text{rayon } A\Theta \text{ du cercle } EH\Theta} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{B\Gamma + B\Delta} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{\Gamma\Delta}$. Or, ces relations restent vraies pour le cercle Π, dont la situation est la même que celle du cercle Α par rapport aux deux demi-cercles tangents en Β ; donc on aura, dans la première figure : $\frac{BN}{\text{rayon } \Pi\Theta \text{ du cercle } \Theta P T} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta}$ et, dans les deux autres figures : $\frac{BN}{\text{rayon } \Pi\Theta \text{ du cercle } \Theta P T} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{\Gamma\Delta}$. Dès lors, on a : $\frac{BN}{\Pi\Theta} = \frac{BM}{A\Theta}$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Theta}{\Pi\Theta} = \frac{MB}{BN}$.

comme la droite MB est à la droite BN (car la droite ZM étant prolongée, la droite MZ sera à la droite ZΞ comme la droite MB est à la droite BN). En conséquence, la droite AΘ, rayon du cercle EHΘ, est à la droite ΘΠ, rayon du cercle ΘPT, comme la droite AZ est à la droite ZΠ (1). De plus, le cercle BPEΔ est tangent aux cercles EHΘ, PΘT aux points P, E ; donc, en vertu de ce qui a été démontré au théorème XV (2), la droite reliant les points P, E étant prolongée, elle tom-

Fig. II



bera au point Z (3), et le rectangle compris sous les droites EZ, ZP équivaut au carré de la droite ΘZ (4). Mais, le rectangle

1. Les triangles semblables MZA, ΞZΠ donnent : $\frac{AZ}{Z\Pi} = \frac{MZ}{Z\Xi}$, et les triangles semblables ZMB, ΞMN donnent : $\frac{MZ}{Z\Xi} = \frac{BM}{BN}$; donc, comme le texte : $\frac{AZ}{Z\Pi} = \frac{BM}{BN}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente, on a : $\frac{A\Theta}{\Theta\Pi} = \frac{AZ}{Z\Pi}$.

2. C'est-à-dire à la proposition 13.

3. La droite de jonction EP prolongée tombera en un point Z tel que l'on ait, en vertu de la proposition 13 : $\frac{AZ}{Z\Pi} = \frac{A\Theta}{\Theta\Pi}$.

4. La proposition 13 a démontré, en outre, comme corollaire (voir note), que l'on a : $EZ \times ZP = \overline{\Theta Z}^2$.

compris sous les droites EZ, ZP équivaut aussi au carré de la droite ZB ; donc, le carré de la droite ZB est aussi égal au carré de la droite ZΘ, et la droite BZ est donc égale à la droite ZΘ (1).

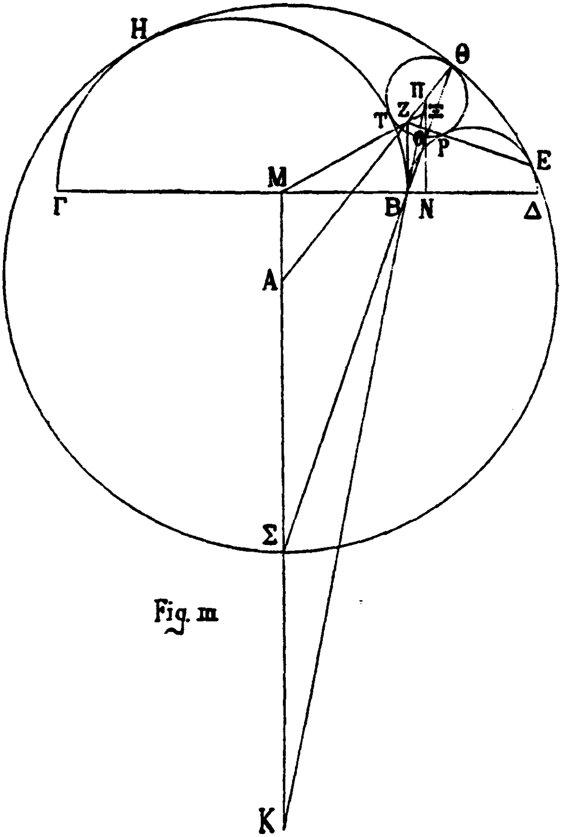


Fig. III

D'autre part, puisque la droite MA prolongée coupe la circonférence du cercle EHΘ au point Σ, et que la droite ΠN coupe la circonférence du cercle ΘPT au point O, la droite AΘ est donc égale à la droite AΣ, la droite ΠO égale à la droite ΠΘ, et la droite reliant les points O, Σ passe par le point Θ ; car, l'angle compris sous les droites ΘA, AΣ est égal à l'angle alterne compris sous les droites ΘΠ, ΠO ; le triangle AΘZ est équiangle avec le triangle ΠΘO et AΘΠ est une ligne droite ; donc, la ligne menée par les points Σ, Θ, O est droite aussi (2). Or, cette droite passe aussi par le point B ; car ΘOB est une droite en raison de ce que la droite OΠ est à la droite ΠΘ comme la droite BZ est à la droite ZΘ, les angles compris sous BZ, ZΘ et sous

---

1. EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4. La droite ZPE étant considérée comme sécante du cercle BPEΔ, on a : $EZ \times ZP = \overline{ZB}^2$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : $\overline{ZB}^2 = \overline{\Theta Z}^2$, d'où, comme le texte : $ZB = \Theta Z$.

2. Les droites ΠO, ΣM étant parallèles, les angles alternes ΘAΣ, ΘΠO sont égaux. De plus : $\frac{\Theta\Pi}{\Pi O} = \frac{A\Theta}{A\Sigma}$; donc (EUCLIDE, liv. VI, prop. 7, énoncée p. 160, n. 5), les triangles AΘΣ, ΠΘO sont semblables, d'où $\widehat{\Pi\Theta O} = \widehat{\Sigma\Theta A}$. Or, AΘΠ

ΟΠ, ΠΘ étant égaux dans les parallèles ΒΖ, ΟΠ, ainsi que cela a été démontré à la proposition XV [1].

Prolongeons encore la droite de jonction ΒΠ, et qu'elle rencontre au point Κ la droite ΜΑ prolongée. Dès lors, puisque la droite ΑΖ est à la droite ΖΠ, et la droite ΑΘ à la droite ΘΠ, comme la droite ΜΒ est à la droite ΒΝ, c'est-à-dire comme la droite ΚΒ est à la droite ΒΠ, la droite ΑΣ sera à la droite ΠΟ, et la droite ΣΚ à la droite ΠΟ, comme la droite ΚΒ est à la droite ΒΠ ; [donc, la droite ΑΣ est égale à la droite ΣΚ] [2]. En conséquence, puisque la droite entière ΑΚ est égale au diamètre entier du cercle ΕΗΘ, et que la droite ΝΠ est à la droite ΟΠ comme la droite ΚΜ est à la droite ΚΣ, il s'ensuit que la droite ΝΠ sera aussi au diamètre du cercle ΘΡΤ comme la droite ΜΚ est à la droite ΚΑ, c'est-à-dire comme la droite ΜΑ, conjointement avec le diamètre du cercle ΕΗΘ, est à ce diamètre [3] ; ce qu'il fallait démontrer [4].

étant une droite, on a : $\widehat{\Sigma\Theta A} + \widehat{\Sigma\Theta\Pi} = 2$ droits ; donc : $\widehat{\Pi\Theta O} + \widehat{\Sigma\Theta\Pi} = 2$ droits ; donc, comme le texte, ΣΘΟ est une ligne droite.

1. Les droites ΒΖ, ΟΠ étant parallèles, on a : $\widehat{BZ\Theta} = \widehat{O\Pi\Theta}$, et les triangles ΒΖΘ, ΟΠΘ sont semblables, d'où : $\frac{O\Pi}{\Pi\Theta} = \frac{BZ}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{BZ}{O\Pi} = \frac{Z\Theta}{\Pi\Theta}$; ce qui correspond à la relation : $\frac{AK}{\Gamma\Delta} = \frac{EA}{E\Gamma}$ de la proposition 13 (que le texte désigne d'après le chap. XV), où l'on démontre, dans les mêmes conditions, que les points Κ, Δ, Ε sont sur une même ligne droite (voir note relative à cette proposition). Dès lors, la relation : $\frac{BZ}{\Pi O} = \frac{Z\Theta}{\Pi\Theta}$ permet de déduire de la même manière que les points Θ, Ο, Β sont en ligne droite.

2. Restauration de Hultsch d'après une note de Scaliger (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 224, l. 6).

3. On a par similitude de triangles : $\frac{AZ}{Z\Pi} = \frac{BM}{BN} = \frac{BK}{B\Pi}$. Or, on a démontré plus haut que l'on a : $\frac{A\Theta}{\Theta\Pi} = \frac{AZ}{Z\Pi}$; donc : $\frac{A\Theta}{\Theta\Pi} = \frac{BK}{B\Pi}$. Or, $\frac{A\Sigma}{\Pi O} = \frac{A\Theta}{\Theta\Pi}$; donc : $\frac{A\Sigma}{\Pi O} = \frac{BK}{B\Pi}$. Or, $\frac{K\Sigma}{\Pi O} = \frac{BK}{B\Pi}$; donc : $\frac{A\Sigma}{\Pi O} = \frac{K\Sigma}{\Pi O}$, d'où, comme le texte : $A\Sigma = K\Sigma$. Or, le parallélisme des droites ΚΜ, ΠΝ donne : $\frac{\Pi N}{\Pi O} = \frac{KM}{K\Sigma}$, d'où : $\frac{\Pi N}{2\Pi O} = \frac{KM}{2K\Sigma}$. Or, $2K\Sigma = 2A\Sigma = A\Sigma + K\Sigma = AK =$ diam. cercle ΕΗΘ ; donc : $\frac{\Pi N}{2\Pi O} = \frac{KM}{AK}$ ou : $\frac{\Pi N}{2\Pi O} = \frac{MA + AK}{AK}$ ou, comme le texte : $\frac{\Pi N}{\text{diam. cercle } \Theta P T} = \frac{MA + \text{diam cercle } EH\Theta}{\text{diam. cercle } EH\Theta}$.

4. Outre les trois figures qui accompagnent le texte de cette proposition, les manuscrits en présentent une quatrième relative au cas particulier du cercle

XVIII.

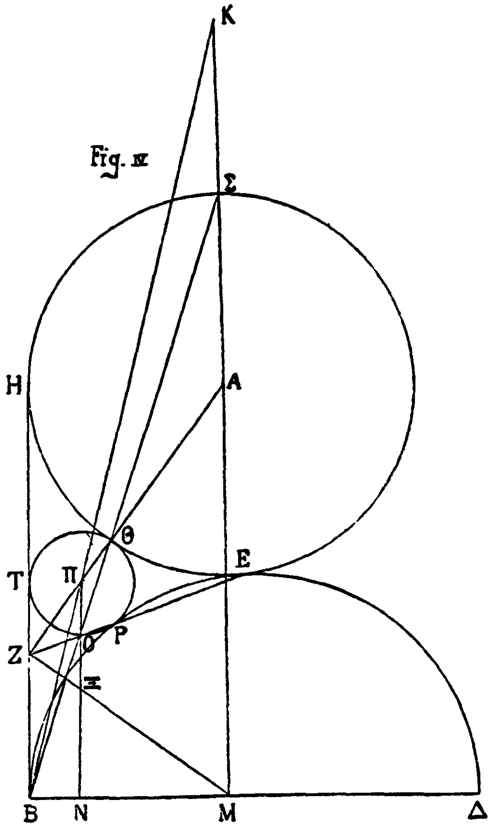
PROPOSITION 16. — Ces choses étant démontrées au préalable, posons le demi-cercle ΒΗΓ ; prenons un point quelconque Δ sur sa base ; décrivons les demi-cercles ΒΕΔ, ΔΥΓ sur les droites ΒΔ, ΔΓ ; inscrivons, dans l'espace situé entre les trois arcs appelé l'*Arbelon*, des cercles tant qu'on voudra, tangents aux demi-cercles et tangents entre eux, tels que ceux décrits autour des

ΒΗΓ remplacé par une ligne droite, mais sans qu'elle soit accompagnée d'une démonstration qui s'est ou perdue ou que Pappus a abandonnée à la sagacité du lecteur. Commandin a néanmoins reconstitué cette démonstration, dont nous donnons la traduction d'après son texte latin (cfr. *loc. cit.*, p. 87).

Soit, au lieu de la circonférence ΒΗΓ, la droite ΒΗ perpendiculaire à la droite ΒΔ, tangente toutefois aux cercles qui ont été dits.

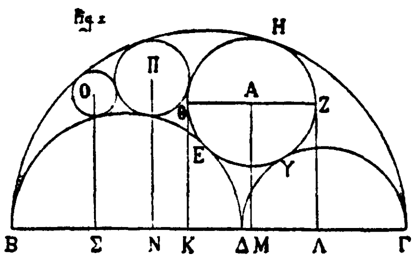
Décrivons, autour du centre Α, le cercle ΕΘΗ tangent à la circonférence ΒΕΔ et à la droite ΒΗ aux points Ε, Η. Si l'on décrit autour du centre Π un autre cercle ΘΡΤ, tangent au cercle ΕΘΗ, à la circonférence ΒΕΔ et à la droite, aux points Θ, Ρ, Τ, et si, des centres Α, Π, on mène les perpendiculaires ΑΜ, ΠΝ, on obtient toutes les choses qui ont été dites, comme cela est manifeste dans la quatrième figure. Dès lors, puisque la perpendiculaire ΒΗ est tangente aux cercles ΕΘΗ, ΘΡΤ, et qu'elle est parallèle aux droites ΑΜ, ΠΝ, la droite ΒΜ sera égale au rayon du cercle ΕΘΗ et la droite ΒΝ égale au rayon du cercle ΘΡΤ ; par conséquent, la droite ΑΘ, rayon du cercle ΕΘΗ, est à la droite ΠΘ, rayon du cercle ΘΡΤ, comme la droite ΜΒ est à la droite ΒΝ et, pareillement à ce qui se présente dans les figures précédentes, on démontrera que la droite ΝΠ est au diamètre du cercle ΘΡΤ comme la droite ΜΑ, conjointement avec le diamètre du cercle ΕΘΗ, est à ce même diamètre.

Fig. IV



centres A, Π, O, et menons, de leurs centres, perpendiculairement sur la droite ΒΓ, les droites ΑΜ, ΠΝ, ΟΣ. Je dis que la droite ΑΜ est égale au diamètre du cercle décrit autour du point A; que la droite ΠΝ est le double du diamètre du cercle décrit autour du point Π; que la droite ΟΣ est le triple du diamètre du cercle décrit autour du point O, et que les perpendiculaires suivantes sont des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent continuellement d'une unité.

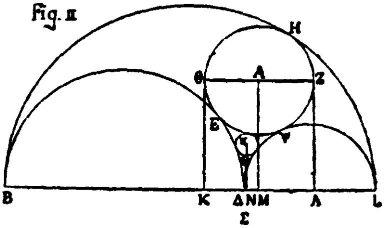
Menons le diamètre ΘΖ parallèle à la droite ΒΓ et les perpendiculaires ΘΚ, ΖΛ. Dès lors, en vertu de ce qui a été démontré antérieurement, le rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΒΚ équivaut au rectangle compris sous les droites ΛΒ, ΒΔ, et le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΛ équivaut au rectangle compris sous les droites ΚΓ, ΓΔ (1). Par conséquent, la droite ΚΛ est à la droite ΛΓ comme la droite ΒΚ est à la droite ΚΛ; car l'un et l'autre rapport sont les mêmes que celui de la droite ΒΔ à la droite ΔΓ. (En effet, puisque le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΚ équivaut au rectangle compris sous ΛΒ, ΒΔ, il s'ensuit que ΔΒ est à ΒΚ comme ΓΒ est à ΒΛ; que, par permutation, ΛΒ est à ΒΚ comme ΓΒ est à ΒΔ; que, par division, ΛΚ est à ΚΒ comme ΓΔ est à ΔΒ, et que, inversement, ΒΚ est à ΚΛ comme ΒΔ est à ΔΓ. Derechef, puisque le rectangle compris sous ΒΓ, ΓΛ équivaut au rectangle compris sous ΚΓ, ΓΔ, il s'ensuit que ΓΔ est à ΓΛ comme ΒΓ est à ΓΚ; que, par permutation, ΚΓ est à ΓΛ comme ΒΓ est à ΓΔ; que, par division, ΚΛ est donc à ΛΓ comme ΒΔ est à ΔΓ. Or, ΒΚ est aussi à ΚΛ comme ΒΔ est à ΓΔ; donc ΚΛ est à ΛΓ comme ΒΚ est à ΚΛ) (2). En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΒΚ, ΓΛ équivaut au carré de la droite



1. Le début de la proposition 14 (voir page 164, n. 4) a démontré qu'on a : $B\Gamma \times BK = B\Delta \times B\Lambda$ et $B\Gamma \times \Gamma\Lambda = \Gamma K \times \Gamma\Delta$.
2. La phrase incidente entre parenthèses paraît avoir été interpolée par un scoliaste.

$K\Lambda$ [1]. Or, on a démontré précédemment [2] que le rectangle compris sous les droites BK, $\Lambda\Gamma$ équivaut aussi au carré de la droite AM ; donc, la droite AM est égale à la droite $K\Lambda$, c'est-à-dire au diamètre $Z\Theta$ du cercle décrit autour du point A. Et puisqu'il a été démontré précédemment aussi que la droite ΠN est au diamètre du cercle décrit autour du point Π comme la droite AM, conjointement avec la droite $Z\Theta$, est à la droite $Z\Theta$ [3], et puisque la droite AM, conjointement avec la droite $Z\Theta$, est le double de la droite $Z\Theta$,

Fig. II



il s'ensuit que la droite ΠN sera aussi le double du diamètre du cercle décrit autour du point Π. En conséquence, la droite ΠN, conjointement avec le diamètre du cercle décrit autour du point Π, est le triple de ce diamètre. De plus, la droite $O\Sigma$ est dans ce même rapport avec le diamètre du cercle décrit autour du point O ; par conséquent, la droite $O\Sigma$ est aussi le triple du diamètre du cercle décrit autour du point O [4]. Et pareillement, la perpendicu-

1. La première relation de la note 1, p. 172 donne : $\frac{B\Delta}{BK}=\frac{B\Gamma}{B\Lambda}$, d'où : $\frac{B\Lambda}{BK}=\frac{B\Gamma}{B\Delta}$, d'où : $\frac{B\Lambda - BK}{BK}=\frac{B\Gamma - B\Delta}{B\Delta}$ ou : $\frac{K\Lambda}{BK}=\frac{\Delta\Gamma}{B\Delta}$, d'où : $\frac{BK}{K\Lambda}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ (I). D'autre part, la seconde relation de la note 1, p. 172 donne : $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\Lambda}=\frac{B\Gamma}{\Gamma K}$, d'où: $\frac{\Gamma K}{\Gamma\Lambda}=\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{\Gamma K - \Gamma\Lambda}{\Gamma\Lambda}=\frac{B\Gamma - \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{K\Lambda}{\Gamma\Lambda}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où, en présence de la relation (I), il, vient, comme dans le texte : $\frac{K\Lambda}{\Gamma\Lambda}=\frac{BK}{K\Lambda}$, d'où : $BK \times \Gamma\Lambda = \overline{K\Lambda}^2$.

2. Voir proposition 14.

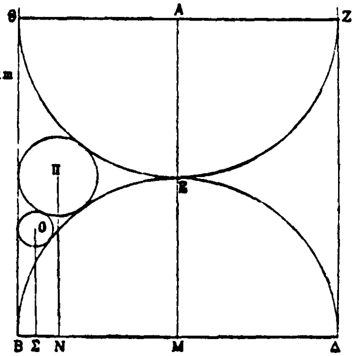
3. Voir proposition 15.

4. Reprenant ce passage en notations usuelles on a (prop. 14, corollaire, voir p. 166, n. 1) : $BK \times \Gamma\Lambda = \overline{AM}^2$, d'où, en présence de la dernière relation de la note antépénultième, il vient : $\overline{AM}^2 = \overline{K\Lambda}^2$, d'où : $AM = K\Lambda =$ diam. $Z\Theta$ du cercle A, d'où : $AM + Z\Theta = 2Z\Theta$. Or, on a démontré (prop. 15) que l'on a : $\frac{\Pi N}{\text{diam. cercle } \Pi}=\frac{AM + Z\Theta}{Z\Theta}$; donc : $\frac{\Pi N}{\text{diam. cercle } \Pi}=\frac{2\ Z\Theta}{Z\Theta}$, d'où, comme le texte : $\Pi N = 2$ diam. cercle Π, d'où, comme le texte : $\Pi N +$ diam. cercle $\Pi =$ 3 diam. cercle Π, d'où : $\frac{\Pi N + \text{diam. cercle } \Pi}{\text{diam. cercle } \Pi} = 3$. Or, le cercle O étant placé dans les mêmes conditions que le cercle A par rapport aux deux demi-cercles tangents en B, la proposition 15 donne de même : $\frac{O\Sigma}{\text{diam. cercle O}} =$

laire relative au cercle suivant est le quadruple de son diamètre; les perpendiculaires suivantes seront trouvées des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent successivement l'un l'autre d'une unité, et l'on démontrera que cela se présente ainsi à l'infini.

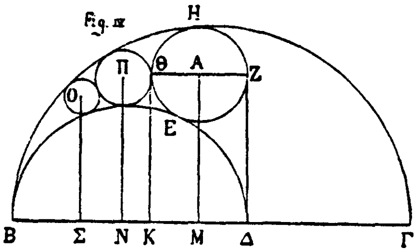
D'ailleurs, si, au lieu des circonférences ΒΗΓ, ΔΥΓ, on a des droites perpendiculaires à la droite ΒΔ, comme dans la troisième figure, les mêmes choses se présenteront en ce qui concerne les cercles inscrits; car la perpendiculaire menée du centre A sur la droite ΒΔ devient aussitôt égale au diamètre du cercle A [1].

Fig. III



D'autre part, conservant les circonférences ΒΗΓ, ΒΕΔ, et supposant, au lieu de la circonférence ΔΥΓ, la droite ΔZ perpendiculaire à la droite ΒΓ, comme dans la quatrième figure, si la droite ΒΓ est à la droite ΓΔ dans un rapport numérique carré, la perpendiculaire menée du point A sera commensurable avec le diamètre du cercle décrit autour du point A; si non, elle sera incommensurable; car le rapport du carré de la droite ΔZ au carré du diamètre du cercle décrit autour du point A est généralement le même que celui de la droite ΒΓ à la droite ΓΔ, ainsi qu'on le démontrera dans la

Fig. IV



$\frac{\Pi N + \text{diam. cercle } \Pi}{\text{diam. cercle } \Pi}$; donc : $\frac{O\Sigma}{\text{diam. cercle } O} = 3$, d'où, comme le texte: $O\Sigma =$ 3 diam. cercle O.

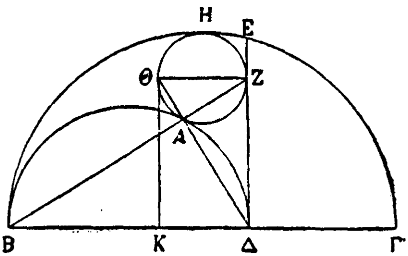
1. Le cercle ΘEZ devenant tangent au cercle ΒΕΔ au point E et tangent aux perpendiculaires ΒΘ, ΔZ aux points Θ, Z, il en résulte que le diamètre ΘZ devient parallèle et égal à la droite ΒΔ; donc, la perpendiculaire AM devient égale au diamètre du cercle A, et tout se passera pour les cercles successifs Π, O, etc., comme dans la première figure.

suite (1). [Ainsi, lorsque la droite ΒΓ est quadruple en longueur de la droite ΓΔ, la droite ΔΖ, c'est-à-dire la perpendiculaire menée du point Α, devient double en longueur du diamètre du cercle décrit autour du point Α ; celle menée du point Π devient triple (2); celle menée du point Ο devient quadruple (3), et ainsi continuellement dans la mesure de la suite des nombres.] (4)

XIX.

Proposition 17. — Voici le lemme qui a été différé (5). Soient les demi-cercles ΒΗΓ, ΒΑΔ, la perpendiculaire ΔΕ et le cercle tangent ΘΗΖΑ (6) ; je dis que, en puissance la droite ΔΖ est au diamètre du cercle ΘΗΖΑ comme, en longueur, la droite ΒΓ est à la droite ΓΔ (7).

Menons le diamètre ΘΖ (8) ; donc, ΖΑΒ, ΘΑΔ sont des lignes droites (9). Menons la perpendiculaire ΘΚ. Dès lors, le rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΒΚ sera équivalent au carré de la droite ΒΔ, en raison de ce qui a été démontré précédemment (10); donc, la droite ΒΔ est à la droite ΔΚ, c'est-à-dire à la droite ΘΖ, comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΔ. Or, la droite ΔΑ est à la droite ΘΑ comme la



1. Voir le lemme suivant qui constituera la proposition 17.
2. Sous-entendu : τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου, c'est-à-dire : du diamètre du cercle (décrit) autour du (point) Π.
3. Sous-entendu : du diamètre du cercle décrit autour du point Ο.
4. Toute la dernière phrase que nous avons placée entre crochets nous paraît avoir été interpolée par un scoliaste commentateur.
5. C'est-à-dire le lemme qui a été invoqué à la fin de la proposition 16 sous réserve d'une démonstration ultérieure.
6. C'est-à-dire le cercle ΘΗΖΑ tangent aux deux demi-cercles et à la perpendiculaire, respectivement aux points Α, Η, Ζ.
7. C'est-à-dire que l'on aura : $\dfrac{\overline{\Delta Z}^2}{\text{carré diam. cercle } \Theta HZA} = \dfrac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$.
8. Menons le diamètre ΘΖ parallèle à la base ΒΓ des deux demi-cercles tangents en Β.
9. Voir proposition 14 et notes.
10. Voir proposition 14 et notes.

droite BΔ est à la droite ΘZ, et le carré de la droite ZΔ est au carré de la droite ΘZ comme la droite ΔA est à la droite AΘ (car le triangle ΘZΔ est rectangle et la droite ZA est perpendiculaire sur l'hypothénuse) ; par conséquent, le carré de la droite ZΔ est au carré du diamètre du cercle ΘHZA comme la droite BΓ est à la droite ΓΔ (1).

XX.

Proposition 18. — La question suivante se traite aussi au moyen des lemmes qui viennent d'être exposés.

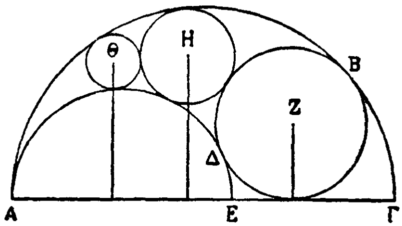
Soient les demi-cercles ABΓ, AΔE, et décrivons tangentiellement à leurs arcs les cercles décrits autour des centres Z, H, Θ, ainsi que les cercles qui s'enchaînent à ces derniers jusqu'au point A (2). Il est dès lors manifeste que la perpendiculaire amenée du point Z sur la droite AΓ est égale au rayon du cercle décrit autour du point Z, et je dis, en outre, que la perpendiculaire amenée du point H est le triple du rayon du cercle décrit autour du point H ; que celle qui est amenée du point Θ est le quintuple, et que les perpendiculaires suivantes sont des multiples des rayons dans la mesure des nombres impairs successifs.

En effet, puisqu'il a été démontré précédemment que la perpendiculaire amenée du point H est au diamètre qui lui correspond comme la perpendiculaire amenée du point Z, conjointement avec le diamètre correspondant, est à ce diamètre, et que la perpendi-

---

1. En notations usuelles, on a démontré (prop. 14) qu'on a : $\overline{B\Delta}^2 = B\Gamma \times BK$, d'où : $\frac{B\Delta}{BK} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$, d'où : $\frac{B\Delta}{B\Delta - BK} = \frac{B\Gamma}{B\Gamma - B\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{B\Delta}{\Delta K} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ ou : $\frac{B\Delta}{\Theta Z} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$. Or, la similitude des triangles BAΔ, ZAΘ donne: $\frac{\Delta A}{\Theta A} = \frac{B\Delta}{\Theta Z}$; donc : $\frac{\Delta A}{\Theta A} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$. D'autre part, considérant le triangle rectangle ΘZΔ et la perpendiculaire ZA, on a : $\Delta A \times \Theta A = \overline{AZ}^2$, d'où : $\overline{\Delta A}^2 \times \Theta A = \Delta A \times \overline{AZ}^2$, d'où : $\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{AZ}^2} = \frac{\Delta A}{\Theta A}$. Or, la similitude des triangles ΔZΘ, ZAΔ donne : $\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{Z\Theta}^2} = \frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{AZ}^2}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{Z\Theta}^2} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$.

2. Il faut sous-entendre que le premier cercle Z, tangent aux deux demi-cercles ABΓ, AΔE, tangents en A, est aussi tangent à la base AΓ commune aux deux demi-cercles.



culaire amenée du point Z, conjointement avec ce diamètre, vaut une fois et demie ce diamètre, il s'ensuit que la perpendiculaire amenée du point H sera le triple du rayon (1). Derechef, puisque la perpendiculaire amenée du point Θ est au diamètre comme la perpendiculaire amenée du point H, conjointement avec le diamètre, est à ce diamètre, et que le rapport de la perpendiculaire amenée du point H, conjointement avec le diamètre, à ce diamètre est celui de 5 à 2, la perpendiculaire amenée du point Θ aura ce même rapport avec le diamètre ; par conséquent, la perpendiculaire amenée du point Θ sera le quintuple du rayon (2). On démontrera pareillement que les perpendiculaires suivantes seront des multiples des rayons dans la mesure des nombres impairs successifs.

XXI.

La théorie de l'hélice décrite dans le plan (3) a été mise en question par le géomètre Conon de Samos, et c'est Archimède qui l'a établie en faisant usage d'un procédé admirable (4).

---

1. On a (prop. 15) : $\dfrac{\text{perpendicul. cercle H}}{\text{diam. cercle H}} = \dfrac{\text{perpendicul. cercle Z} + \text{diam. cercle Z.}}{\text{diam. cercle Z}}$
Or, perpendiculaire cercle Z + diam. cercle Z $= \frac{3}{2}$ diam. cercle Z ; donc : $\dfrac{\text{perpend. cercle H}}{\text{diam. cercle H}} = \dfrac{3}{2}$, d'où : perpend. cercle H $= \frac{3}{2}$ diam. cercle H, ou, comme le texte : perpend. cercle H = 3 rayons cercle H.

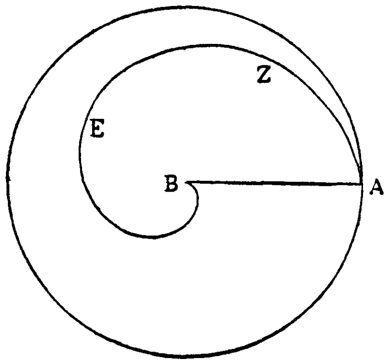
2. On a de même (prop. 15) : $\dfrac{\text{perpend. cercle }\Theta}{\text{diam. cercle }\Theta} = \dfrac{\text{perpend. cercle H} + \text{diam. cercle H.}}{\text{diam. cercle H}}$
Or, on a (note précédente) : perpend. cercle H $= \frac{3}{2}$ diam. cercle H ; donc, on a : $\dfrac{\text{perpendiculaire cercle }\Theta}{\text{diam. cercle }\Theta} = \dfrac{\frac{3}{2}\text{ diam. cercle H} + \text{diam. cercle H}}{\text{diam. cercle H}} = \dfrac{5}{2}$, d'où, comme le texte : perpendiculaire cercle $\Theta = \frac{5}{2}$ diam. cercle Θ = 5 rayons cercle Θ.

3. ἕλιξ ἐν ἐπιπέδῳ γραφομένη, l'hélice décrite dans le plan, c'est-à-dire l'hélice plane ou spirale.

4. Archimède, *Des Spirales*. Voir *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 239-299, ou éd. du texte grec précitée de Heiberg, vol. II, pp. 3-121.

La génération de cette ligne est la suivante :

Soit un cercle dont le centre est le point B et le rayon la droite BA. Faisons mouvoir la droite BA de telle sorte que le point B reste fixe et que le point A soit emporté d'une manière uniforme suivant la circonférence du cercle ; qu'un point initial soit emporté d'une manière uniforme à partir du point B jusque sur le point A, et que le point partant du point B parcoure la droite BA et le point A la circonférence du cercle dans un même temps. Le point qui se meut suivant la droite BA décrira, dans la révolution de cette droite, une ligne telle que BEZA (1) ; son origine sera le point B, (2) la position initiale de révolution sera la droite BA, (3) et cette ligne sera appelée la spirale.



PROPOSITION 19. — Sa propriété (4) principale est la suivante : Si on lui mène transversalement une droite telle que BZ, et qu'on la prolonge, la droite AB est à la droite BZ comme la circonférence entière du cercle est à l'arc AΔΓ (5).

1. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, Définition 1 : « Si une ligne droite est menée dans un plan, et si, l'une de ses extrémités restant fixe, elle tourne un nombre quelconque de fois d'un mouvement uniforme, reprenant la position d'où elle est partie, tandis que, sur la ligne en rotation, un point se meut uniformément comme elle à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 261, ou éd. de Heiberg, vol. II, p. 45.

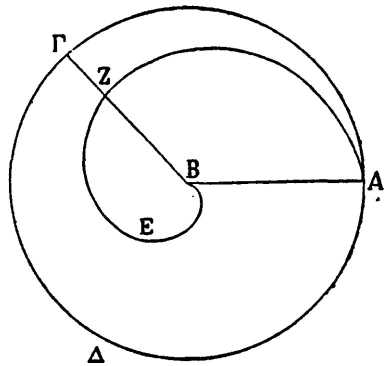
2. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, Définition 2 : « Appelons origine de la spirale, l'extrémité de la droite qui reste fixe pendant que la droite tourne ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 261, ou éd. de Heiberg, vol. II, p. 45.

3. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, Définition 3 : « Appelons position initiale de révolution, celle à partir de laquelle la droite a commencé de tourner ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 261, ou éd. Heiberg, vol. II, p. 45.

4. σύμπτωμα, ce qui arrive à quelque chose, le symptôme, c'est-à-dire la propriété de la spirale.

5. Proposition démontrée par Archimède dans son traité *Des Spirales*, dont elle constitue la proposition XIV, et où elle est énoncée de la manière plus complète : « Si du point d'origine de la spirale on mène deux droites à une spirale décrite dans une première révolution, et si celles-ci sont prolongées jusqu'à la circonférence du premier cercle, les droites menées à la spirale auront entre elles le même rapport que les arcs de cercle situés entre l'extrémité de la spirale

Cela se voit aisément en raison même de la génération ; car, le point partant du point B parcourt la droite BA dans le même temps que le point A parcourt la circonférence entière du cercle, et le point partant du point B parcourt la droite BZ dans le même temps que le point A parcourt l'arc ΑΔΓ. Et les mouvements des points sont d'égale vitesse ; en sorte qu'il y aura aussi proportionnalité (1).



Proposition 20. — Et il apparaît encore manifestement que, si l'on mène transversalement du point B à la ligne (2) des droites qui comprennent des angles égaux, ces droites se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur (3).

XXII.

Proposition 21. — Démontrons que la figure comprise sous la spirale et la droite initiale de révolution est la troisième partie du cercle qui entoure la spirale (4).

et les extrémités des droites prolongées aboutissant à la circonférence ; ces arcs étant pris de l'extrémité de la spirale vers l'avant ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 263, ou éd. du texte grec de Heiberg, vol. II, p. 51.

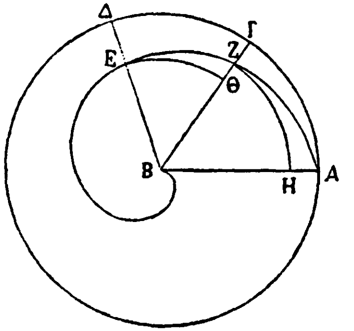
1. La démonstration de la proportionnalité des lignes droites et courbes en question n'est pas poursuivie par Pappus, qui s'en rapporte donc à la proposition II du traité *Des Spirales* d'Archimède, laquelle est énoncée : « Si deux points se déplacent d'un mouvement uniforme, chacun suivant une ligne, et si sur chacune de ces lignes on prend deux lignes dont les premières et les secondes sont parcourues par les points dans des temps égaux, les lignes ainsi prises ont même rapport entre elles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 244, ou éd. Heiberg, vol. II, p. 14.

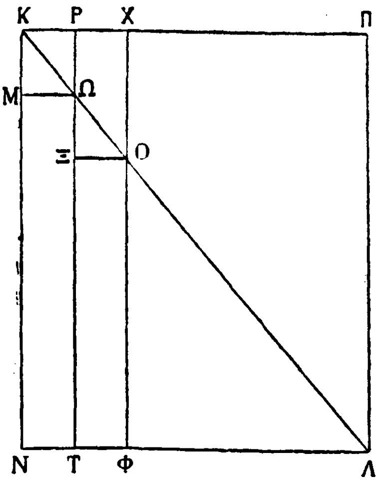
2. Sous-entendu : spirale.

3. Proposition démontrée par Archimède dans le traité *Des Spirales* où elle constitue la proposition XII, et est énoncée : « Si des droites, en nombre quelconque, menées de l'origine de la spirale décrite dans une révolution quelconque, forment des angles égaux entre eux, ces droites se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 262, ou éd. de Heiberg, vol. II, p. 46.

4. Proposition démontrée d'une manière différente par Archimède dans son traité *Des Spirales*, où elle constitue la proposition XXIV, et est énoncée : « L'aire comprise entre la spirale décrite en première révolution et la première des droites en position initiale de révolution est équivalente au tiers du premier cercle ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 282, ou éd. Heiberg, vol. II, p. 86.

En effet, soient un cercle et la ligne que nous venons de dire [1] ; posons un parallélogramme rectangulaire ΚΝΛΠ ; découpons d'une part un arc ΑΓ, partie de la circonférence du cercle ; d'autre part une droite ΚΡ, même partie de la droite ΚΠ, et menons les droites de jonction ΓΒ, ΒΑ. Menons la droite ΡΤ parallèle à la droite ΚΝ, la droite ΩΜ parallèle à la droite ΚΠ, et décrivons l'arc ΖΗ autour du centre Β. Dès lors, puisque la circonférence entière est à l'arc ΓΑ comme la droite ΑΒ est à la droite ΑΗ, c'est-à-dire la droite ΒΓ à la droite ΓΖ [2] (car cela est la propriété principale de la spirale) ; que la droite ΠΚ est à la droite ΚΡ comme la circonférence du cercle est à l'arc ΓΑ, et que la droite ΛΚ est à la droite ΚΩ, c'est-à-dire la droite ΡΤ à la droite ΡΩ, comme la droite ΠΚ est à la droite ΚΡ, il s'ensuit que la droite ΤΡ est aussi à la droite ΡΩ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΖ, et que, par conversion, le carré de la droite ΡΤ est aussi au carré de la droite ΤΩ comme le carré de la droite ΒΓ est au carré de la droite ΒΖ [3]. Mais, le secteur ΑΒΓ est au secteur ΖΒΗ





1. C'est-à-dire : soit un cercle dont le rayon est la droite génératrice de la spirale de première révolution qu'il entoure.

2. La proposition 19 a démontré la relation : $\frac{\text{circonférence de rayon BA}}{\text{arc A}\Delta\Gamma} = \frac{AB}{BZ} = \frac{AB}{BH}$, d'où : $\frac{\text{circonférence de rayon BA}}{\text{circonf. de rayon BA} - \text{arc A}\Delta\Gamma} = \frac{AB}{AB - BH} = \frac{AB}{HA}$ ou, comme le texte : $\frac{\text{circonf. de rayon BA}}{\text{arc A}\Gamma} = \frac{AB}{HA} = \frac{B\Gamma}{Z\Gamma}$.

3. On a par construction : $\frac{\Pi K}{KP} = \frac{\text{circonf. rayon BA}}{\text{arc A}\Gamma}$, d'où, en présence de

comme le carré de la droite ΒΓ est au carré de la droite ΒΖ [1]; tandis que le cylindre engendré par le parallélogramme ΚΤ autour de l'axe ΝΤ, est au cylindre engendré par le parallélogramme ΜΤ autour du même axe, comme le carré de la droite ΡΤ est au carré de la droite ΤΩ [2]; par conséquent, le cylindre engendré par le parallélogramme ΚΤ autour de l'axe ΝΤ est au cylindre engendré par le parallélogramme ΜΤ autour du même axe comme le secteur ΓΒΑ est au secteur ΖΒΗ [3]. Pareillement d'ailleurs, si nous posons l'arc ΓΔ égal à l'arc ΑΓ, la droite ΡΧ égale à la droite ΚΡ, et si nous faisons les mêmes constructions, le cylindre engendré par le parallélogramme ΡΦ autour de l'axe ΤΦ sera au cylindre engendré par le parallélogramme ΞΦ autour du même axe comme le secteur ΔΒΓ est au secteur ΕΒΘ [4]. En cheminant [5]

---

la relation de la note précédente, on a: $\frac{\Pi K}{KP}=\frac{B\Gamma}{Z\Gamma}$ (I). D'autre part, on a aussi par construction : $\frac{\Lambda K}{K\Omega}=\frac{N\Lambda}{M\Omega}=\frac{\Pi K}{KP}$. Or, $\frac{\Lambda K}{K\Omega}=\frac{\Pi\Lambda}{P\Omega}=\frac{PT}{P\Omega}$, d'où, comme le texte : $\frac{PT}{P\Omega}=\frac{\Pi K}{KP}$, d'où, en présence de la relation (I), il vient, comme le texte: $\frac{PT}{P\Omega}=\frac{B\Gamma}{Z\Gamma}$, d'où : $\frac{PT}{PT-P\Omega}=\frac{B\Gamma}{B\Gamma-Z\Gamma}$ ou : $\frac{PT}{T\Omega}=\frac{B\Gamma}{BZ}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Omega}^2}=\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{BZ}^2}$.

1. La relation $\frac{\text{secteur } AB\Gamma}{\text{secteur } ZBH}=\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{BZ}^2}$, exprimant que le rapport des aires de deux secteurs semblables, c'est-à-dire terminés par des arcs semblables, est égal au rapport des carrés de leurs rayons, n'est pas démontrée directement dans les *Éléments* d'Euclide, mais elle se déduit des deux propositions suivantes :

Euclide, liv. VI, prop. 33 : « Dans les cercles égaux, les angles ont la même raison que les arcs qu'ils comprennent, soit que les angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences. Il en est de même des secteurs qui sont construits aux centres ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 373.

Euclide, liv. XII, prop. 2 : « Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 118.

2. Euclide, liv. XII, prop. 2, et liv. XII, prop. 11 : « Les cônes et les cylindres qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 164.

3. Les relations des notes 1 ci-dessus et 3, page 180, donnent : $\frac{\text{secteur } AB\Gamma}{\text{secteur } ZBH}=\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Omega}^2}$. Or, on a (Euclide, liv. XII, prop. 2 et 11) : $\frac{\text{cylindre de base } \pi\times\overline{PT}^2 \text{ et de hauteur } NT}{\text{cylindre de base } \pi\times\overline{T\Omega}^2 \text{ et de hauteur } NT}=\frac{\pi\times\overline{PT}^2}{\pi\times\overline{T\Omega}^2}=\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Omega}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{cylindre de base } \pi\times\overline{PT}^2 \text{ et de hauteur } NT}{\text{cylindre de base } \pi\times\overline{T\Omega}^2 \text{ et de hauteur } NT}=\frac{\text{secteur } AB\Gamma}{\text{secteur } ZBH}$.

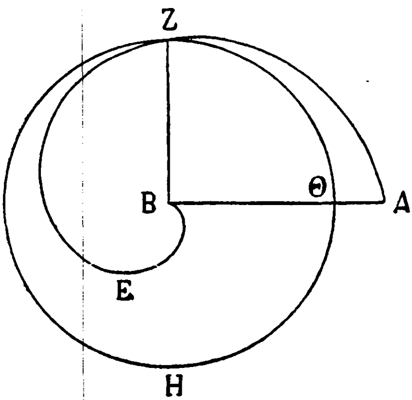
4. Si l'on pose : arc $\Gamma\Delta$ = arc $A\Gamma$ et $PX = KP$, on aura, comme dans la note précédente : $\frac{\text{cylindre de base } \pi\times\overline{\Phi X}^2 \text{ et de hauteur } T\Phi}{\text{cylindre de base } \pi\times\overline{\Phi O}^2 \text{ et de hauteur } T\Phi}=\frac{\text{secteur } \Delta B\Gamma}{\text{secteur } EB\Theta}$.

5. ἐφοδεύσαντες, expression employée une seule fois par Pappus.

de la même manière, on démontrera que le cylindre engendré par le parallélogramme NΠ autour de l'axe NΛ est à toutes les figures, constituées par des cylindres, inscrites dans le cône engendré par le triangle KNΛ autour de l'axe ΛN, comme le cercle entier est à toutes les figures, constituées par des secteurs, inscrites dans la spirale, et, derechef, que le cylindre sera à toutes les figures constituées par des cylindres, circonscrites à ce même cône, comme le cercle entier est à toutes les figures, constituées par des secteurs, circonscrites à la spirale ; d'où il suit manifestement que le cylindre est au cône comme le cercle est à la figure comprise entre la spirale et la droite AB. Or, le cylindre est le triple du cône (1) ; par conséquent, le cercle est aussi le triple de la figure que nous venons de dire (2).

XXIII.

On démontrera de la même manière que, si l'on mène transversalement une droite, telle que BZ, à une spirale AZEB, et si l'on décrit autour du centre B un cercle passant par le point Z, la figure comprise sous la spirale ZEB et la droite ZB est la troisième partie de la figure comprise sous l'arc ZHΘ du cercle et sous les droites ZB, BΘ.



Que la démonstration se fasse donc de cette manière, et faisons maintenant suivre l'exposé d'un théorème concernant cette même ligne qu'il est digne de faire connaître.

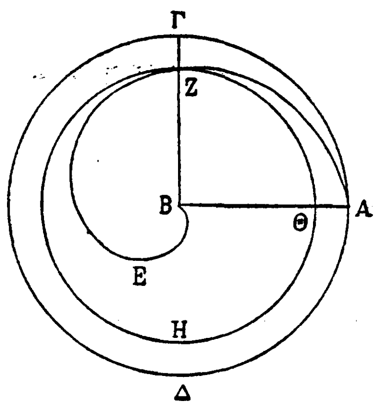
1. Euclide, liv. XII, prop. 10 : « Le cône est la troisième partie d'un cylindre qui a la même base et une hauteur égale ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 157.

2. La démonstration de Pappus, basée sur la considération de corps solides, est donc différente de celle d'Archimède qui considère des différences de longueurs et de surfaces. Elle emprunte cependant manifestement à Archimède sa méthode d'exhaustion.

XXIV.

PROPOSITION 22. — Soient le cercle de génération précédemment dit (1) et la même spirale AZEB ; je dis que, si l'on mène transversalement une droite telle que BZ, le cube de la droite AB est au cube de la droite BZ comme la figure comprise sous la spirale entière et la droite AB est à celle qui est comprise sous la spirale ZEB et la droite BZ (2).

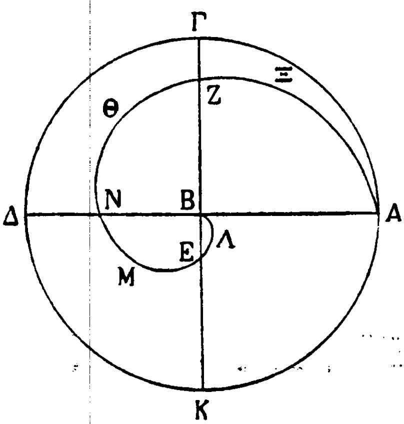
En effet, décrivons autour du centre B le cercle ZHΘ passant par le point Z. Dès lors, puisque le cercle ΑΓΔ est à la figure comprise sous l'arc ZHΘ et les droites ZB, BΘ comme la figure comprise sous la ligne AZEB et la droite AB est à la figure comprise sous la ligne ZEB et la droite ZB (car on a démontré que ces figures sont la troisième partie l'une de l'autre) (3) ; que le rapport du cercle ΑΓΔ à l'aire découpée sous les droites ZB, BΘ et l'arc ZHΘ est le rapport composé de celui du cercle ΑΓΔ au cercle ZHΘ et de celui du cercle ZHΘ à l'aire découpée sous les droites ZB, BΘ et l'arc ZHΘ ; mais, que le carré de la droite AB est au carré de la droite BZ comme le cercle ΑΓΔ est au cercle ZHΘ ; tandis que la circonférence entière de ce cercle est à l'arc ZHΘ, c'est-à-dire la circonférence du cercle ΑΓΔ à l'arc ΓΔΑ, c'est-à-dire, en raison de la propriété de la ligne, la droite AB à la droite BZ (4), comme le cercle ZHΘ est à l'aire que nous venons de dire (5), il s'ensuit que le rapport de la figure comprise entre la spirale et la droite AB à la figure comprise entre



1. C'est-à-dire le premier cercle dont le centre est le point d'origine de la spirale et le rayon la droite que parcourt le point mobile pendant la première révolution.
2. Cette proposition s'exprime donc en d'autres termes : L'aire engendrée par un rayon vecteur de la spirale est proportionnelle au cube de ce rayon.
3. Voir proposition 21.
4. Voir proposition 19.
5. EUCLIDE, liv. VI, prop. 33, énoncée p. 181, n. 1.

la spirale et la droite BZ se compose du rapport du carré de la droite AB au carré de la droite BZ et du rapport de la droite AB à la droite BZ. Or, ce rapport est celui du cube de la droite AB au cube de la droite BZ (1).

XXV.



Il résulte donc manifestement de ce qui précède, qu'une spirale et le cercle qui l'entoure étant posés, si on prolonge la droite AB jusqu'au point Δ (2) ; si on lui mène la droite ΓZEK à angles droits et si l'on considère l'aire comprise entre la ligne BΛE et la droite BE comme étant l'unité, l'aire comprise entre la ligne NME et les droites NB, BE sera 7 de

1. Explicitement on a (prop. 21, coroll.) :
Aire sous spirale AZEB et droite $BA = \frac{1}{3}$ cercle AΓΔ de rayon BA et aire sous spirale ZEB et droite $BZ = \frac{1}{3}$ secteur sous arc ZHΘ et droites BZ, BΘ. Dès lors, on a, comme le texte : $\frac{\text{cercle } A\Gamma\Delta \text{ de rayon } BA}{\text{secteur sous arc } ZH\Theta \text{ et droites } BZ,\ B\Theta} = \frac{\text{aire sous spirale } AZEB \text{ et droite } BA}{\text{aire sous spirale } ZEB \text{ et droite } BZ}$.
Or, on peut écrire :
$\frac{\text{cercle } A\Gamma\Delta \text{ de rayon } BA}{\text{secteur sous arc } ZH\Theta \text{ et droites } BZ,\ B\Theta} = \frac{\text{cercle } A\Gamma\Delta \text{ de rayon } BA}{\text{cercle } \Theta ZH \text{ de rayon } B\Theta} \times \frac{\text{cercle } \Theta ZH \text{ de rayon } B\Theta}{\text{secteur sous arc } ZH\Theta \text{ et droites } BZ,\ B\Theta}$. Mais on a, d'une part : $\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BZ}^2} = \frac{\text{cercle } A\Gamma\Delta \text{ de rayon } BA}{\text{cercle } \Theta ZH \text{ de rayon } B\Theta}$, et, les secteurs étant proportionnels aux arcs, on a (Euclide, liv. VI, prop. 33) d'autre part : $\frac{\text{circonférence } \Theta ZH}{\text{arc } ZH\Theta} = \frac{\text{cercle } \Theta ZH \text{ de rayon } B\Theta}{\text{secteur sous arc } ZH\Theta \text{ et droites } BZ,\ B\Theta}$. De plus, on a : $\frac{\text{circonférence } A\Gamma\Delta}{\text{arc } \Gamma\Delta A} = \frac{\text{circonférence } \Theta ZH}{\text{arc } ZH\Theta}$, et la proposition 19 a démontré que l'on a : $\frac{\text{circonférence } A\Gamma\Delta}{\text{arc } \Gamma\Delta A} = \frac{B\Gamma}{BZ} = \frac{BA}{BZ}$. Donc par substitutions successives de ces rapports il vient, comme dans le texte : $\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BZ}^2} \times \frac{BA}{BZ} = \frac{\overline{BA}^3}{\overline{BZ}^3} = \frac{\text{aire sous spirale et droite } BA}{\text{aire sous spirale et droite } BZ}$.

2. C'est-à-dire jusqu'au point d'intersection Δ avec la circonférence du cercle de première révolution de la spirale.

ces unités; celle comprise entre la ligne ZΘN et les droites ZB, BN sera 19 unités ; celle comprise entre la ligne AΞZ et les droites AB, BZ sera 37 unités (car ces choses résultent manifestement du théorème précédemment démontré) (1). Et si l'on considère, en outre, que la droite AB est 4, la droite ZB sera 3, la droite BN sera 2 et la droite BE sera 1 ; car cela résulte aussi manifestement de la propriété de la ligne (2) et de ce que les arcs AΓ, ΓΔ, ΔK, ZA sont égaux (3).

XXVI.

Une certaine ligne a été préconisée par Nicomède pour la duplication du cube, et voici sa génération (4) :

---

1. Voir proposition 22.
2. Voir proposition 19.
3. Si, pour suivre le texte d'une manière plus explicite, nous considérons d'abord que la proposition 22 a démontré que l'aire engendrée par le rayon vecteur de la spirale est proportionnelle au cube de ce rayon, on a :

$$\frac{\text{aire délimitée par arc de spirale BΛE et droite BE}}{\text{BE}^3} = \frac{\text{aire délimitée par arc NMEΛB et droite BN}}{\text{BN}^3} = \frac{\text{aire délimitée par arc ZΘNMEΛB et droite BZ}}{\text{BZ}^3} = \frac{\text{aire délimitée par arc AZNEB et droite BA}}{\text{BA}^3}.$$

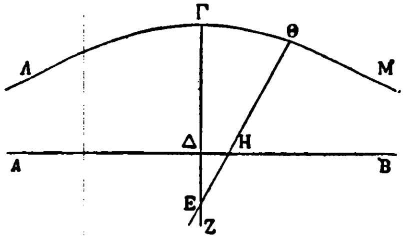
Or, il résulte de la proposition 19 que si l'on considère les quadrants du cercle de première révolution de la spirale, on a : $\frac{BE}{1} = \frac{BN}{2} = \frac{BZ}{3} = \frac{BA}{4}$; donc, les égalités précédentes deviennent par raison d'identité :

$$\frac{\text{aire délimitée par arc BΛE et droite BE}}{1} = \frac{\text{aire délimitée par arc NMEΛB et droite BN}}{8} = \frac{\text{aire délimitée par arc ZΘNMEΛB et droite BZ}}{27} = \frac{\text{aire délimitée par arc AZNEB et droite BA}}{64}.$$

Dès lors, comme le texte : aire sous arc NME et droites NB, BE = (8 — 1 = 7) aire sous arc BΛE et droite BE ; puis : aire sous arc ZΘN et droites BZ, BN = (27 — 8 = 19) aire sous arc BΛE et droite BE ; et enfin : aire sous arc AΞZ et droites BA, BZ = (64 — 27 = 37) aire sous arc BΛE et droite BE.

4. Le commentaire d'Eutocius sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède expose d'une manière plus étendue la génération de la cochloïde ou conchoïde de Nicomède, ainsi que l'instrument propre à la tracer. Voir éd. précitée de Heiberg, vol. III, pp. 98-106.

Exposons une droite AB et la droite ΓΔZ qui lui est menée à angles droits. Prenons un point E donné sur la droite ΓΔZ et, ce point restant fixe, conduisons, suivant la droite AΔB, la droite ΓΔEZ guidée par le point E de telle sorte que le point Δ se meuve toujours sur la droite AB sans abandonner la droite ΓΔEZ guidée par le point E. Dès lors, si ce mouvement s'effectue de part et d'autre, il est clair que le point Γ décrit une ligne telle que ΛΓM, et que sa propriété est la suivante : lorsqu'une droite tombe du point E sur cette ligne, la partie qui en est découpée entre la droite AB et la ligne ΛΓM est égale à la droite ΓΔ ; car la droite AB restant en place et le point E restant fixe, lorsque le point Δ arrive au point H, la droite ΓΔ s'ajuste à la droite HΘ et le point Γ [tombera](1) au point Θ ; donc, la droite ΓΔ est égale à la droite HΘ. Pareillement, si une autre droite tombe du point E sur la ligne, la droite découpée par la ligne et par la droite AB devient égale à la droite ΓΔ. Que la droite AB, dit-il (2), soit appelée la règle (3), le point appelé le pôle (4) et la droite ΓΔ appelée l'intervalle (5) puisque les droites projetées vers la ligne ΛΓM sont égales à cette dernière, et que cette ligne ΛΓM même soit appelée première cochloïde (parce qu'il s'en établit encore une seconde, une troisième et une quatrième, qui sont utiles pour d'autres théorèmes) (6).



1. Lacune comblée par Hultsch au moyen de πεσεῖται (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 244, l. 11).

2. C'est-à-dire Nicomède, dans l'ouvrage perdu où il avait décrit l'instrument propre à tracer la conchoïde.

3. κανών, la règle fixe ou directrice, laquelle est asymptote à la courbe.

4. πόλος, le pôle, c'est-à-dire le point fixe E.

5. διάστημα, l'intervalle, c'est-à-dire la longueur de la droite ΓΔ qui est constante, dans la direction du pôle, entre la courbe et son asymptote AB.

6. La cochloïde ou conchoïde dite première est la courbe supérieure qui règne au-dessus de sa directrice AB par rapport à son pôle E, et pour laquelle la distance constante $\Delta\Gamma = a$ est positive dans l'équation polaire $\rho = a + \frac{b}{\cos \varphi}$. La simple allusion que fait Pappus à trois autres conchoïdes permet de supposer que les Anciens ont connu les trois conchoïdes inférieures qui règnent entre le pôle et la directrice, et qui, suivant que la distance constante est plus

XXVII.

C'est Nicomède qui a montré que l'on peut décrire cette ligne d'une manière instrumentale ; qu'elle accompagne la règle à une distance qui devient continuellement plus petite, c'est-à-dire que la perpendiculaire ΓΔ est la plus grande de toutes celles qui sont amenées de points de la ligne ΛΓΘ sur la droite AB, et que la perpendiculaire amenée plus proche de la droite ΓΔ est continuellement plus grande que celle qui en est plus éloignée [1] ; enfin, que, si l'on a une droite dans l'espace qui règne entre la règle et la cochloïde, son prolongement sera coupé par la cochloïde ; mais, c'est nous qui avons utilisé la ligne en question dans notre écrit sur l'*Analemme* de Diodore [2], lorsque nous avons voulu découper l'angle en trois parties égales [3].

Proposition 23. — D'après ce que nous venons de dire, il est donc manifeste que, si l'on donne un angle tel que celui qui est compris sous les droites HA, AB et un point Γ situé en dehors de cet angle, il est possible de mener une droite ΓH, et de faire en sorte que la droite KH, située entre la ligne et la droite AB, soit égale à une droite donnée [4].

petite, égale ou plus grande que la distance du pôle à la directrice, sont respectivement la première conchoïde inférieure, la conchoïde à point de rebroussement et la conchoïde nouée.

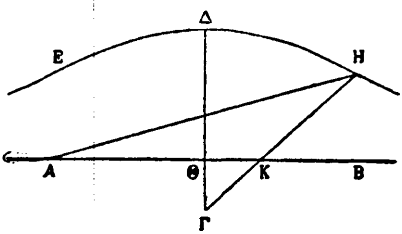
1. C'est-à-dire que la ligne AB est l'asymptote de la conchoïde ΛΓΜ.

2. Diodore n'est connu que par trois mentions : La première, celle que Pappus fait ici ; la seconde est celle d'Achilles Tatius qui l'appelle Diodore d'Alexandrie le mathématicien, dans son commentaire sur les *Phénomènes* d'Aratus, publiés avec d'autres commentaires sur Aratus par Pierre Vettorio, à Florence, 1567 (voir p. 82). La troisième mention est celle que fait Marinus dans son commentaire sur les *Données* d'Euclide (*Euclides data, Cl. Hardy gr. nunc primum lat. vertit, scholiisque illustravit; adjectus est Marini commentarius gr. et lat.* Parisiis, 1625, in-4°, p. 2). Quant au sujet de l'ouvrage de Diodore intitulé l'*Analemme*, il avait probablement trait à la description ou tracé des cercles de la sphère céleste dans le plan (projection orthographique), ce qui constitue l'analemme de Claude Ptolémée; et, comme ce dernier est amené, dans la construction de son analemme, à diviser certaines portions du demi-cercle du tropique en six parties égales, il est plausible d'admettre que c'est dans son commentaire sur l'ouvrage de Diodore que Pappus a publié d'abord sa solution de la trisection de l'angle ou de l'arc.

3. C'est-à-dire résoudre le problème de la trisection de l'angle au moyen de la conchoïde.

4. La démonstration de cette proposition par Nicomède est rapportée aussi par Eutocius dans son commentaire précité. Voir éd. de Heiberg, vol. III, pp. 102-104.

Menons, du point Γ sur la droite AB, la perpendiculaire ΓΘ que nous prolongeons ; que la droite ΔΘ soit égale à la droite donnée, et décrivons la ligne première cochloïde ΕΔΗ, dont le pôle est le point Γ, dont l'intervalle est donné, c'est-à-dire la droite ΔΘ, et dont la règle est la droite AB. Cette ligne rencontrera donc la droite AH en raison de ce que nous avons dit précédemment. Qu'elle la rencontre au point H, et menons la droite de jonction ΓΗ. En conséquence, la droite KH est égale à la droite donnée.



XXVIII.

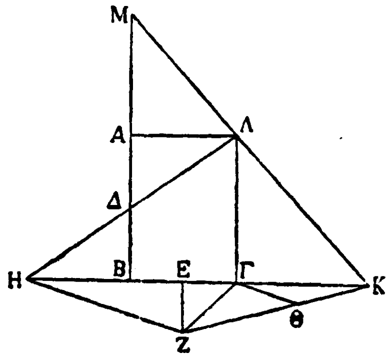
En pratique [1] cependant, d'aucuns appliquent au point Γ une règle qu'ils font mouvoir jusqu'à ce que la droite découpée par tâtonnement entre la droite AB et la ligne ΕΔΗ devienne égale à la droite donnée, et, cela une fois obtenu, on démontre ce qui a été proposé au début [2] (c'est-à-dire trouver le cube double d'un cube). Mais, prenons d'abord les deux moyennes en proportion continue de deux droites données ; ce dont Nicomède n'a exposé que la construction ; tandis que nous-même avons, en outre, fait cadrer de la manière suivante une démonstration avec cette construction.

Proposition 24. — En effet, soient données deux droites ΓΛ, ΛΑ à angles droits entre elles, dont il faut trouver les deux moyennes en proportion continue [3].

Complétons le parallélogramme ΑΒΓΛ ; divisons chacune des

1. τῆς χρήσεως ἕνεκα, littéralement : pour l'usage.
2. Voir chap. XXVI, premier alinéa.
3. Cette proposition, empruntée à l'ouvrage perdu de Nicomède sur les lignes cochloïdes, a déjà été donnée au livre III (prop. 5) ; mais elle est reprise ici dans des termes un peu différents et plus explicites, avec la même figure dans laquelle toutes les lignes ne sont cependant pas indiquées par les mêmes lettres. Cette proposition est textuellement reproduite dans le commentaire précité d'Eutocius (cfr. éd. Heiberg, vol. III, pp. 104-107).

droites AB, ΒΓ en deux parties égales aux points Δ, E ; prolongeons la droite de jonction ΔΛ, et qu'elle rencontre au point H la droite ΓΒ prolongée. Menons d'autre part la droite EZ à angles droits sur la droite ΒΓ ; faisons-y tomber la droite ΓΖ égale à la droite ΑΔ, et menons la droite de jonction ZH à laquelle nous menons la parallèle ΓΘ. Enfin, ayant l'angle compris sous les droites ΚΓ, ΓΘ (1), menons du point donné Z la droite ΖΘΚ, faisant en sorte que la droite ΘΚ soit égale à la droite ΑΔ, c'est-à-dire égale à la droite ΓΖ (car on a démontré que cela peut se faire au moyen de la ligne cochloïde) (2) ; prolongeons la droite de jonction ΚΛ, et qu'elle rencontre au point M la droite AB prolongée. Je dis que la droite ΚΓ est à la droite MA et la droite MA à la droite ΑΛ comme la droite ΛΓ est à la droite ΚΓ.



Puisque la droite ΒΓ est coupée en deux parties égales au point E, et qu'une droite ΚΓ lui est ajoutée, il s'ensuit que le rectangle compris sous BK, ΚΓ, conjointement avec le carré de ΓΕ, équivaut au carré de EK (3). Ajoutons de part et d'autre le carré de la droite EZ ; par conséquent, le rectangle compris sous BK, ΚΓ, conjointement avec les carrés de ΓΕ, EZ, c'est-à-dire avec le carré de ΓΖ, équivaut aux carrés de KE, EZ, c'est-à-dire au carré de la droite KZ (4). Et puisque ΜΛ est à ΛΚ comme MA est à AB, et que ΒΓ est à ΓΚ comme ΜΛ est

1. Les droites ΚΓ, ΓΘ sont données de position, mais non de grandeur, car le point K doit encore être déterminé. Or, l'angle ΚΓΘ est donné, car les côtés ΛΓ, ΛΑ du parallélogramme rectangle ΑΛΓΒ sont donnés de grandeur et de position, et $A\Delta = \frac{1}{2}$ AB ; donc, les triangles ΗΒΔ, ΛΑΔ sont égaux et semblables par construction, d'où, ΛΔΗ étant une ligne droite, le point H est donné. Or, (Euclide, *Données*, prop. 43, énoncée p. 42, n. 4), le triangle ΕΖΓ est donné d'espèce, et, comme les droites ΕΓ, ΓΖ sont données de grandeur, le point Z est donné. Dès lors, (Euclide, *Données*, prop, 41, énoncée p. 28, n. 10), l'angle EHZ est donné ; donc, l'angle ΚΓΘ, qui lui est égal, est donné aussi.
2. Voir proposition 23.
3. Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3.
4. Euclide, liv. I, prop. 47, énoncée p. 132, n. 1.

à ΛΚ, il s'ensuit que ΒΓ est aussi à ΓΚ comme ΜΑ est à ΑΒ. Or, la droite ΑΔ est la moitié de la droite ΑΒ et la droite ΓΗ est le double de la droite ΒΓ ; donc, ΗΓ sera à ΚΓ comme ΜΑ est à ΑΔ. Mais, en raison des parallèles ΗΖ, ΓΘ, on a ΖΘ à ΘΚ comme ΗΓ est à ΓΚ ; donc, par composition (1), ΖΚ est à ΚΘ comme ΜΔ est à ΔΑ. Or, on a supposé que la droite ΑΔ est égale à la la droite ΘΚ (parce que la droite ΑΔ est aussi égale à la droite ΓΖ) ; donc, la droite ΜΔ est aussi égale à la droite ΖΚ, et le carré de la droite ΜΔ est donc égal au carré de la droite ΖΚ. D'autre part, le rectangle compris sous ΒΜ, ΜΑ, conjointement avec le carré de ΔΑ, équivaut au carré de ΜΔ, et on a démontré que le carré de ΖΚ équivaut au rectangle compris sous ΒΚ, ΚΓ, conjointement avec le carré de ΖΓ ; carrés chez lesquels le carré de ΑΔ est égal au carré de ΓΖ (car on a supposé que la droite ΑΔ est égale à la droite ΓΖ) ; par conséquent, le rectangle compris sous ΒΜ, ΜΑ équivaut au rectangle compris sous ΒΚ, ΚΓ, et ΓΚ est donc à ΜΑ comme ΜΒ est à ΒΚ. Mais ΛΓ est à ΓΚ comme ΒΜ est à ΒΚ ; donc, ΓΚ est à ΑΜ comme ΛΓ est à ΓΚ. Or, ΜΑ est aussi à ΑΛ comme ΜΒ est à ΒΚ ; donc ΓΚ est à ΑΜ et ΑΜ à ΑΛ comme ΛΓ est à ΓΚ (2).

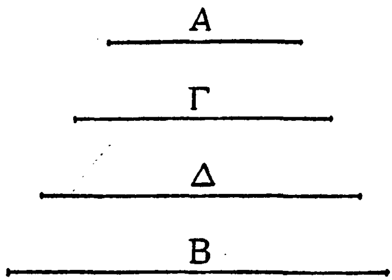
---

1. Euclide, liv. V, prop. 18 : « Si des grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 274.

2. La démonstration se déroule explicitement comme suit : La droite ΒΓ étant divisée en deux parties égales en Ε et prolongée en Κ, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, c'est-à-dire l'identité : $(a+b)\,b+\frac{a^2}{4}=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$) : $\mathrm{BK}\times\mathrm{K\Gamma}+\overline{\mathrm{\Gamma E}}^2=\overline{\mathrm{EK}}^2$, d'où : $\mathrm{BK}\times\mathrm{K\Gamma}+\overline{\mathrm{\Gamma E}}^2+\overline{\mathrm{EZ}}^2=\overline{\mathrm{EK}}^2+\overline{\mathrm{EZ}}^2$ ou, comme le texte : $\mathrm{BK}\times\mathrm{K\Gamma}+\overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2=\overline{\mathrm{KZ}}^2$ (I). Or, les triangles semblables ΜΑΛ, ΛΓΚ donnent : $\frac{\mathrm{M\Lambda}}{\mathrm{\Lambda K}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AB}}$ et $\frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{\Gamma K}}=\frac{\mathrm{M\Lambda}}{\mathrm{\Lambda K}}$ ou : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma K}}=\frac{\mathrm{M\Lambda}}{\mathrm{\Lambda K}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma K}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AB}}$ (II). Or, $\mathrm{A\Delta}=\frac{1}{2}\,\mathrm{AB}$ et $\mathrm{BH}=\mathrm{A\Lambda}=\mathrm{B\Gamma}$, d'où : $\mathrm{\Gamma H}=2\mathrm{B\Gamma}$, d'où la relation (II) devient : $\frac{\frac{1}{2}\mathrm{\Gamma H}}{\mathrm{\Gamma K}}=\frac{\mathrm{MA}}{2\mathrm{A\Delta}}$ ou, comme le texte : $\frac{\mathrm{\Gamma H}}{\mathrm{\Gamma K}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{A\Delta}}$ (III). Or, le parallélisme des droites ΗΖ, ΓΘ donne : $\frac{\mathrm{Z\Theta}}{\mathrm{\Theta K}}=\frac{\mathrm{H\Gamma}}{\mathrm{\Gamma K}}$, d'où, comparant avec la relation (III) il vient : $\frac{\mathrm{Z\Theta}}{\mathrm{\Theta K}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{A\Delta}}$, d'où : $\frac{\mathrm{Z\Theta}+\mathrm{\Theta K}}{\mathrm{\Theta K}}=\frac{\mathrm{MA}+\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Delta}}$ ou, comme le texte : $\frac{\mathrm{ZK}}{\mathrm{\Theta K}}=\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{A\Delta}}$. Or, on suppose avoir construit $\mathrm{\Theta K}=\mathrm{\Gamma Z}=\mathrm{A\Delta}$ à l'intervention de la conchoïde de Nicomède ; donc : $\mathrm{ZK}=\mathrm{M\Delta}$, d'où : $\overline{\mathrm{ZK}}^2=\overline{\mathrm{M\Delta}}^2$ (IV). D'autre part, considérant la droite ΑΒ divisée en deux parties égales en Δ et la droite en prolongation ΜΑ, on a (Euclide, liv. II, prop. 6), par analogie avec l'expression (I)

XXIX.

Proposition 25. — Cela étant démontré, on voit clairement comment, étant donné un cube, il faut trouver un autre cube suivant un rapport donné.



En effet, que le rapport donné soit celui de la droite A à la droite B, et prenons les deux moyennes en proportion continue Γ, Δ des droites A, B. Dès lors, le cube de la droite A sera au cube de la droite Γ comme la droite A est à la droite B ; car cela résulte manifestement des *Éléments* (1).

XXX.

Une ligne qui tire sa dénomination de sa propriété même a été adoptée par Dinostrate, Nicomède et certains autres auteurs

---

$BM \times MA + \overline{A\Delta}^2 = \overline{M\Delta}^2$, d'où, en présence de la relation (IV) on a : $BM \times MA + \overline{A\Delta}^2 = \overline{ZK}^2$, d'où en présence de la relation (I) on a: $BM \times MA + \overline{A\Delta}^2 = BK \times K\Gamma + \overline{\Gamma Z}^2$. Or, on a par hypothèse : $\Gamma Z = A\Delta$, donc, comme le texte : $BM \times MA = BK \times K\Gamma$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 16 énoncée p. 44, n. 3) : $\frac{K\Gamma}{MA} = \frac{BM}{BK}$ (V). Or, le parallélisme des droites BM, ΛΓ donne : $\frac{\Lambda\Gamma}{\Gamma K} = \frac{BM}{BK}$; donc : $\frac{K\Gamma}{MA} = \frac{\Lambda\Gamma}{\Gamma K}$. Or, le parallélisme des droites BK, AΛ donne : $\frac{MA}{A\Lambda} = \frac{BM}{BK}$. Dès lors, on a la progression : $\frac{\Lambda\Gamma}{\Gamma K} = \frac{\Gamma K}{MA} = \frac{MA}{A\Lambda}$, et les droites ΓK, MA sont les deux moyennes proportionnelles des droites ΛΓ, AΛ.

1. C'est-à-dire que si on détermine de la manière exposée dans la proposition précédente les deux moyennes proportionnelles Γ, Δ entre les droites A, B, en sorte que l'on ait : $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{B}$, il s'ensuit qu'on a algébriquement : $\frac{A^3}{\Gamma^3} = \frac{A \times \Gamma \times \Delta}{\Gamma \times \Delta \times B} = \frac{A}{B}$; mais cette relation s'établit géométriquement d'après les propositions suivantes des *Éléments* d'Euclide :

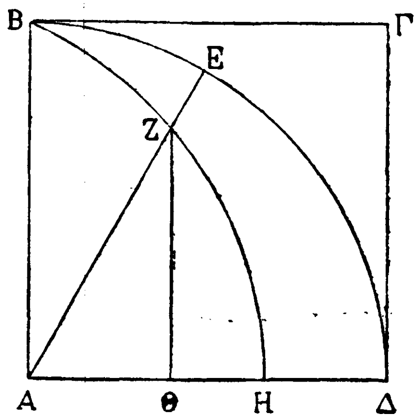
Livre V, définition 11, énoncée p. 41, n. 1.

Livre VIII, prop. 12 : « Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionnels, et le cube a avec le cube une raison triple de celle que le côté a avec le côté. » Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 25.

Livre XI, prop. 33 : « Les parallélépipèdes semblables sont entre eux en raison triplée de leurs côtés homologues ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 85.

récents pour effectuer la quadrature du cercle ; ils l'ont appelée la quadratrice (1), et voici sa génération.

Posons un carré ΑΒΓΔ et décrivons l'arc ΒΕΔ autour du centre Α. Faisons mouvoir la droite ΑΒ de telle sorte que, le point Α restant fixe, le point Β se déplace suivant l'arc ΒΕΔ, et que la droite ΒΓ, se maintenant toujours parallèle à la droite ΑΔ, accompagne le point Β qui se déplace suivant la droite ΑΒ. De plus, que la droite ΑΒ, se mouvant d'une manière uniforme, parcoure l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΔ, c'est-à-dire que le point Β parcoure l'arc ΒΕΔ dans le même temps que la droite ΒΓ se déplace le long de la droite ΒΑ, c'est-à-dire que le point Β se déplace suivant la droite ΒΑ. Il se fera évidemment que les droites ΑΒ et ΒΓ coïncideront simultanément l'une et l'autre avec la droite ΑΔ. En conséquence, un tel mouvement ayant lieu, les droites ΑΒ, ΒΓ se couperont mutuellement en un point qui est continuellement transporté avec elles, lequel décrira une ligne concave d'un même côté, telle que ΒΖΗ, dans l'espace compris entre les droites ΒΑ, ΑΔ et l'arc ΒΕΔ ; ligne qui paraît commode pour trouver un carré équivalent à un cercle donné. Du reste, sa propriété principale est telle que, si une droite quelconque ΑΖΕ est menée transversalement à l'arc, la droite ΒΑ sera à la droite ΖΘ comme l'arc entier est à l'arc ΕΔ ; car cela résulte manifestement de la génération de la ligne (2).



1. τετραγωνίζουσα γραμμή, la ligne tétragonisante ou quadratrice.

2. Le texte exprime d'une manière un peu confuse que, si une droite ΒΓ se meut uniformément et parallèlement à elle-même le long du rayon ΑΒ et, qu'en même temps qu'elle part du point Β, le rayon ΒΑ tourne uniformément autour du centre Α, vers le point Δ, de manière qu'il se confonde avec ΑΔ au moment où la droite ΒΓ s'y confondra aussi, on aura, par l'intersection continuelle de ces deux lignes, une courbe ΒΖΗ, appelée quadratrice de Dinostrate, mais dont l'invention remonte probablement au sophiste Hippias d'Elis qui vécut dans la seconde moitié du cinquième siècle avant J.-C. L'équation cartésienne de

XXXI.

C'est à juste titre cependant, que Sporos (1) n'a pas agréé cette ligne, parce qu'on y assume d'abord comme hypothèse ce à quoi elle semble pouvoir être utilisée (2).

En effet, si deux points commencent à se mouvoir à partir du point B, comment pourront-ils se stabiliser en même temps, l'un au point A suivant une droite, l'autre au point Δ suivant un arc, sans connaître au préalable le rapport de la droite AB à l'arc BEΔ ? (3) Car, il faut nécessairement que les vitesses des mouvements soient dans le même rapport. Dès qu'on use de vitesses non ordonnées, comment ces points se stabiliseront-ils ainsi simultanément, à moins que cela n'arrive par hasard ? Or, cela n'est-il pas déraisonnable ? Ensuite, l'extrémité de la ligne dont certains se servent pour la quadrature du cercle, c'est-à-dire le point où la ligne coupe la droite AΔ, n'est nullement trouvée. Représentons-nous d'ailleurs les choses que nous avons dites sur la délinéation proposée : Lorsque les droites ΓB, BA mises en mouvement seront stabilisées simultanément (4), elles s'appliqueront sur la droite AΔ et ne feront plus de section entre elles ; car,

---

cette courbe est: $x = \dfrac{y}{\text{tang.}\, \frac{\pi}{2} \frac{y}{r}}$; mais son équation polaire: $\rho \sin \varphi = R \dfrac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi}$ est l'expression la plus simple qui corresponde à la définition qui en est donnée par Pappus.

1. Sporos de Nicée est mentionné comme commentateur (Σπόρος ὁ ὑπομνηματιστής) par quelques auteurs, notamment dans le petit traité : *Sur la Sphère d'Aratus*, dû au mécanicien Léontius, au sixième siècle après J.-C. Paul Tannery a cherché à établir l'existence d'une compilation intitulée : *Le Rucher Aristotélique* (Ἀριστοτελικὰ κηρία) qui aurait été composée par Sporos vers la fin du troisième siècle après J.-C., laquelle contenait des extraits mathématiques sur la quadrature du cercle et sur la duplication du cube, et a pu être utilisée par Pappus. Voir : PAUL TANNEY, *Sur Sporos de Nicée*, dans *Archives de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, nº 3, 1882, t. IV, pp. 257-267, ou bien : *Mémoires scientifiques de Paul Tannery*, vol. I, pp. 178-184.

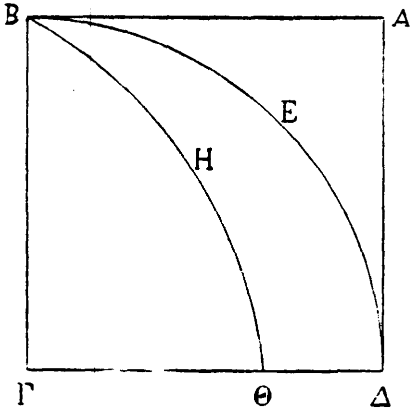
2. Si l'on pose : $y = 0$ dans l'équation cartésienne de la note avant-précédente, on a : $x = \text{AH} = \frac{2\text{AB}}{\pi}$, d'où : $\pi = \frac{2\text{AB}}{\text{AH}}$. La critique de Sporos vise la difficulté de calculer π au moyen d'un rapport en l'absence d'un procédé mécanique permettant de tracer la courbe d'un mouvement continu, et de déterminer par conséquent le point H.

3. C'est-à-dire sans connaître le rapport de la circonférence au rayon.

4. C'est-à-dire lorsque les droites ΓB, BA seront arrivées en fin de course.

la section cesse avant l'application sur la droite ΑΔ ; section qui deviendrait, au contraire (1), l'extrémité de la ligne où celle-ci rencontrerait la droite ΑΔ ; à moins qu'on ne dise d'imaginer la ligne comme étant prolongée jusqu'à la droite ΔΑ de la manière dont nous établissons les lignes droites (2). Or, cela ne répond pas à ce qui a été supposé au début, notamment que le point Η soit pris en ayant pris au préalable le rapport de l'arc à la droite. D'ailleurs, à moins que ce rapport ne soit donné, il ne convient pas que, se confiant à la réputation des hommes qui l'ont inventée, l'on admette une ligne qui soit en quelque sorte trop mécanique [et utile aux mécaniciens pour beaucoup de problèmes] (3). Mais, exposons d'abord le problème qui se démontre au moyen de cette ligne (4).

Proposition 26. — Ayant un carré ΑΒΓΔ, l'arc ΒΕΔ décrit autour du centre Γ et la quadratrice ΒΗΘ étant obtenue comme nous l'avons dit précédemment, il faut démontrer que la droite ΒΓ est à la droite ΓΘ comme l'arc ΔΕΒ est à la droite ΒΓ.

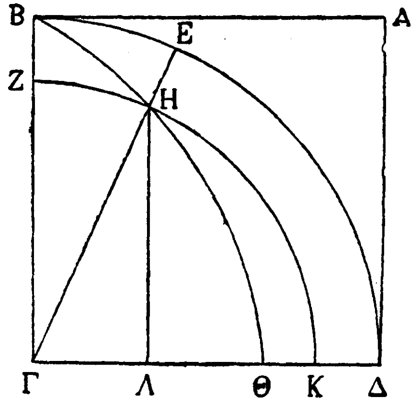


En effet, s'il n'en est pas ainsi, la droite ΒΓ sera à une droite plus grande ou plus petite que la droite ΓΘ (5).

Qu'elle soit d'abord, si possible, à une droite plus grande ΓΚ. Décrivons, autour du centre Γ, l'arc ΖΗΚ qui coupe la ligne (6) au point Η ; menons la perpen-

1. C'est-à-dire d'après les protagonistes de la quadratrice.
2. C'est-à-dire à moins de considérer la ligne courbe comme étant prolongée à partir du dernier point de section de la même manière que l'on prolonge une ligne droite.
3. Hultsch considère ce membre de phrase comme ayant été interpolé (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 254, l. 24). S'il s'agit cependant d'une interpolation très ancienne, la phrase peut avoir été puisée dans l'ouvrage de Sporus, et indiquer que des équerres en forme de quadratrices étaient utilisées dans la pratique.
4. Voir le problème dont il est question au début du chap. XXX.
5. Sous-entendu : comme l'arc ΔΕΒ est à la droite ΒΓ.
6. C'est-à-dire la quadratrice ΒΗΘ.

diculaire HΛ et prolongeons la droite de jonction ΓH jusqu'au point E. Dès lors, puisque la droite BΓ, c'est-à-dire la droite ΓΔ, est à la droite ΓK comme l'arc ΔEB est à la droite BΓ (1), et que l'arc BEΔ est à l'arc ZHK comme la droite ΓΔ est à la droite ΓK (car une circonférence de cercle est à une circonférence comme le diamètre de ce cercle est au diamètre) (2), il est clair que l'arc ZHK est égal à la droite BΓ. Et puisque, en raison de la propriété de la ligne, la droite BΓ est à la droite HΛ comme l'arc BEΔ est à l'arc EΔ, il s'ensuit que la droite BΓ est aussi à la droite HΛ comme l'arc ZHK est à l'arc HK. Or, on a démontré que l'arc ZHK est égal à la droite BΓ ; donc, l'arc HK est aussi égal à la droite HΛ ; ce qui est absurde. En conséquence, la droite BΓ n'est pas à une droite plus grande que la droite ΓΘ comme l'arc BEΔ est à la droite BΓ (3).

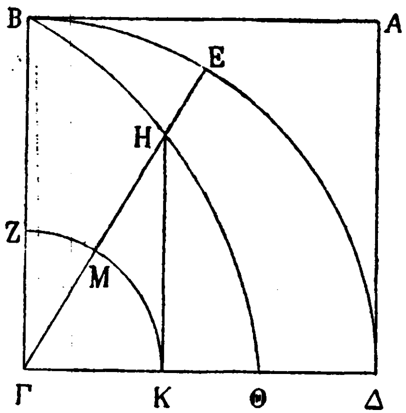


XXXII.

Mais, je dis qu'elle n'est pas non plus à une droite plus petite (4).

1. Par hypothèse.
2. Théorème démontré par Euclide, dont Pappus donnera deux démonstrations à sa manière, l'une à la proposition 11 du livre V, l'autre à la proposition 22 du livre VIII ; et il admet donc ici tacitement que les arcs qui mesurent des angles égaux sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils appartiennent.
3. Cette démonstration apagogique se déroule comme suit. On a, par hypothèse : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma K > \Gamma\Theta}} = \frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{\Gamma K}} = \frac{\text{arc } \mathrm{\Delta EB}}{\mathrm{B\Gamma}}$. Or, $\frac{\text{arc } \mathrm{\Delta EB}}{\text{arc } \mathrm{ZHK}} = \frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{\Gamma K}}$; donc : $\frac{\text{arc } \mathrm{\Delta EB}}{\text{arc } \mathrm{ZHK}} = \frac{\text{arc } \mathrm{\Delta EB}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où : arc ZHK = droite BΓ. Or, la propriété de la quadratrice (voir chap. XXX, *in fine*) donne : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{H\Lambda}} = \frac{\text{arc } \mathrm{BE\Delta}}{\text{arc } \mathrm{E\Delta}}$, tandis que l'on a : $\frac{\text{arc } \mathrm{BE\Delta}}{\text{arc } \mathrm{E\Delta}} = \frac{\text{arc } \mathrm{ZHK}}{\text{arc } \mathrm{HK}}$; donc : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{H\Lambda}} = \frac{\text{arc } \mathrm{ZHK}}{\text{arc } \mathrm{HK}}$; d'où en présence de l'égalité : arc ZHK = BΓ, il vient : arc HK = droite HΛ ; ce qui est impossible.
4. C'est-à-dire que l'on n'a pas non plus : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{K\Gamma < \Gamma\Theta}} = \frac{\text{arc } \mathrm{BE\Delta}}{\text{droite } \mathrm{B\Gamma}}$.

En effet, qu'elle soit, si possible, à une droite ΚΓ. Décrivons l'arc ΖΜΚ autour du centre Γ; menons, à angles droits sur la droite ΓΔ, la droite ΚΗ qui coupe la quadratrice au point H, et prolongeons la droite de jonction ΓΗ jusqu'au point E. Dès lors, pareillement à ce que nous avons écrit précédemment, nous démontrerons que l'arc ΖΜΚ est égal à la droite ΒΓ, et que la droite ΒΓ est à la droite ΗΚ comme l'arc ΒΕΔ est à l'arc ΕΔ, c'est-à-dire comme l'arc ΖΜΚ est à l'arc ΜΚ. D'après cela, il est clair que l'arc ΜΚ sera égal à la droite ΚΗ; ce qui est absurde. En conséquence, la droite ΒΓ ne sera pas à une droite plus petite que la droite ΓΘ comme l'arc ΒΕΔ est à la droite ΒΓ [1]. Or, on a démontré qu'elle n'est pas à une droite plus grande ; donc, elle est à la droite ΓΘ même.



Et il est clair aussi que la droite prise comme troisième proportionnelle des droites ΘΓ, ΓΒ sera égale à l'arc ΒΕΔ, et que le quadruple de cette droite sera égal à la circonférence du cercle entier.

Proposition 27. — Or, la droite égale à la circonférence du cercle étant trouvée, on voit clairement que l'on construira facilement le carré équivalent au cercle.

En effet, le rectangle compris sous le périmètre du cercle et le rayon est le double du cercle, comme Archimède l'a démontré [2].

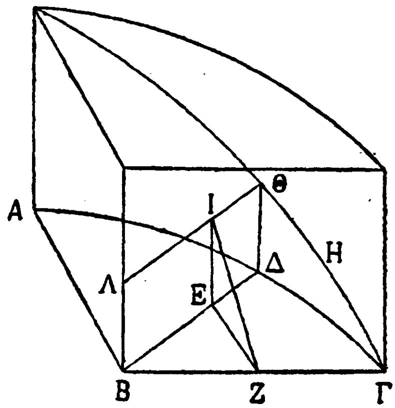
1. Cette démonstration apagogique se déroule comme dans la note avant-précédente.

2. Pappus énonce en d'autres termes la proposition I du traité *De la Mesure du Cercle* d'Archimède : « Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base ». Voir *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, p. 127.

XXXIII.

Proposition 28. — La génération de la ligne [1] est trop mécanique [2], comme nous l'avons dit ; mais elle peut cependant être analysée géométriquement comme suit, au moyen des lieux en surfaces [3].

Soit le quadrant de cercle ΑΒΓ donné de position ; menons transversalement une droite ΒΔ quelconque [4], et menons, perpendiculairement sur la droite ΒΓ [5], la droite ΕΖ ayant un rapport donné avec l'arc ΔΓ ; je dis que le point Ε est dans une ligne [6].



En effet, imaginons la surface de cylindre droit engendré par l'arc ΑΔΓ [7], et l'hélice ΓΗΘ, donnée de position, décrite dans cette surface [8]. Soit ΘΔ un côté [9] du

1. La quadratrice de Dinostrate.
2. Voir chap. XXI, p. 194, l. 10.
3. διὰ τῶν πρὸς ἐπιφανείας τόπων, au moyen des lieux en surfaces, c'est-à-dire au moyen des lieux géométriques constitués par des surfaces de cône, de cylindre, de sphère et d'autres surfaces du second degré ; lieux sur lesquels Euclide avait écrit deux livres qui ne nous sont pas parvenus, mais que Pappus, qui les avait probablement encore à sa disposition, mentionne au début de son livre VII.
4. C'est-à-dire : menons un rayon quelconque dans le plan du quadrant.
5. C'est-à-dire parallèlement à la droite ΑΒ qui est perpendiculaire à la droite ΒΓ dans la figure stéréographique qui accompagne le texte.
6. C'est-à-dire que, d'une manière générale d'abord, le point Ε sera sur une ligne courbe caractérisée par le rapport constant donné : $\frac{\text{ΕΖ}}{\text{arc ΔΓ}}$; courbe qui deviendra la quadratrice de Dinostrate dans le cas particulier où ce rapport donné sera égal au rapport : $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{arc ΑΔΓ}}$.
7. ἀπὸ τῆς ΑΔΓ περιφερείας ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια, la surface de cylindre droit (engendrée) par l'arc ΑΔΓ, c'est-à-dire la surface cylindrique de révolution ayant comme base le quadrant ΑΒΓ.
8. ἕλιξ, l'hélice cylindrique définie par Héron d'Alexandrie, c'est-à-dire la courbe ΓΗΘ ayant comme origine le point Γ, et dont l'ordonnée ΘΔ d'un point quelconque Θ est proportionnelle à l'abscisse curviligne ΓΔ de ce point.
9. πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου, le côté ou génératrice du cylindre.

cylindre ; menons les droites EI, BΛ perpendiculaires au plan du cercle [1], et menons par le point Θ la droite ΘΛ parallèle à la droite BΔ. Puisque le rapport de la droite EI à l'arc ΔΓ est donné en raison de l'hélice, et que le rapport de la droite EZ à l'arc ΔΓ est donné, le rapport de la droite EZ à la droite EI sera donné aussi [2]. De plus, les droites ZE, EI sont de juxtaposition [3] ; donc, la droite de jonction ZI est donnée aussi de position [4]. Or, cette droite est perpendiculaire sur la droite BΓ ; donc, la droite ZI est dans un plan sécant [5] ; en sorte que le point I y est aussi. Or, ce point est aussi dans une [surface cylindrique] [6]

1. Le texte porte à cet endroit l'interpolation : ἀνεστεμέναι ὀρθαί, érigées perpendiculaires (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 260, l. 6).

2. Euclide, *Données*, prop. 8 : « Les grandeurs qui ont une raison donnée avec une même grandeur auront entre elles une raison donnée ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 311.

Le quadrant ABΓ et l'hélice cylindrique ΓHΘ étant donnés de position par hypothèse, le rapport constant $\frac{\Theta\Delta}{\text{arc } \Delta\Gamma}$, qui caractérise cette hélice, est donc donné. Or, on a par construction : EI = ΘΔ ; donc, le rapport $\frac{EI}{\text{arc } \Delta\Gamma}$ est donné. Mais, par hypothèse, le rapport $\frac{EZ}{\text{arc } \Delta\Gamma}$ est donné ; donc, comme le texte, le rapport $\frac{EZ}{EI}$ est donné aussi.

3. εἰσὶν παρὰ θέσει, sont de juxtaposition ; expression signifiant que les droites ZE, EI, menées par des points donnés, respectivement parallèles aux droites données de position AB, ΘΔ, sont aussi données de position ; ce qui découle des *Données* d'Euclide, définition 15 : « Une droite est dite de juxtaposition, lorsqu'elle est menée par un point donné parallèlement à une droite donnée de position ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 303.

4. Considérons d'abord : Euclide, *Données*, prop. 41 : « Si un triangle a un angle donné, et si les côtés autour de l'angle donné ont entre eux une raison donnée, le triangle est donné d'espèce. » (Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 366). En conséquence, le triangle IEZ, dont l'angle en E est droit, c'est-à-dire donné, et dont on a démontré (voir note 2 ci-dessus) que le rapport $\frac{EZ}{EI}$ des côtés est donné, est donc donné d'espèce.

Considérons ensuite : Euclide, *Données*, prop. 29 : « Si d'un point donné d'une droite donnée, on mène à cette droite une ligne droite faisant un angle donné, la droite menée est donnée de position. » (Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 343). En conséquence, le triangle IEZ étant donné d'espèce, l'angle IZE est donné, et la droite ZI, menée du point donné Z, est donc donnée de position.

5. ἐν τέμνοντι ἄρα ἐπιπέδῳ, dans un plan qui coupe donc (le cylindre).

6. Les manuscrits présentant ici deux mots illisibles (κ........ φανείαι), c'est à tort, croyons-nous, que Hultsch a proposé de les reconstituer par les mots κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ, surface cylindrique (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 260, l. 15). En effet, comme le montre clairement le contexte, il s'agit d'une surface hélicoïde, cas particulier des surfaces que nous appelons maintenant conoïdes,

(car la droite ΘΛ se meut entre l'hélice ΘΗΓ et la droite ΛΒ donnée elle-même de position tout en restant continuellement parallèle au plan sous-jacent) (1) ; donc, le point I est dans une ligne (2) ; en sorte que le point E est aussi dans une ligne (3).

La chose est donc ainsi analysée d'une manière générale, et si le rapport de la droite EZ à l'arc ΔΓ est le même que celui de la droite BA à l'arc ΑΔΓ, on obtient la ligne quadratrice que nous avons dite plus haut (4).

XXXIV

Proposition 29. — Cette analyse peut cependant se faire aussi d'une manière semblable au moyen de l'hélice décrite dans le plan (5).

---

c'est-à-dire celles qui sont engendrées par une droite mobile assujettie à rester parallèle à un plan donné et à s'appuyer constamment sur une droite et sur une courbe quelconque. On ne peut cependant pas reconstituer les mots lacuneux par les mots ἑλικοειδεῖ ἐπιφανείᾳ, parce que cette expression ne se rencontre nulle part chez les géomètres grecs ; mais on peut vraisemblablement reconstituer au moyen des mots πλεκτοειδεῖ ἐπιφανείᾳ, surface plectoïde, expression par laquelle Pappus désigne précisément la surface de vis dans la proposition qui va suivre. Le mot plectoïde dérivant de πλεκειν (tresser), il devait désigner d'une manière générale toutes les surfaces réglées en raison de l'entrelacement des lignes droites qui sont à leur surface, et ce mot a d'ailleurs été utilisé parfois chez les modernes pour désigner en général toutes les surfaces engendrées par une droite (Voir : *Flauti Geometria di sito sul piano e nello spazio*. Naples, 1821).

1. C'est-à-dire que la droite ΘΛ se meut de manière à engendrer une surface hélicoïde rampante, ou surface de vis à filet carré.

2. C'est-à-dire que le point I appartient à une ligne courbe déterminée par l'intersection de la surface hélicoïde rampante et d'un plan passant par la génératrice ΛΘ de cette surface.

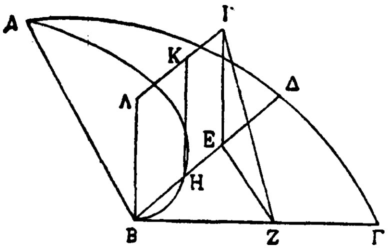
3. C'est-à-dire que le point E, projection orthogonale du point I sur le plan horizontal du quadrant, sera aussi sur une courbe, laquelle sera la projection orthogonale de la courbe au point I.

4. En exposant ce premier mode de construction géométrique de la quadratrice au moyen des *Lieux à la Surface*, la proposition démontre donc, sans l'énoncer explicitement, une propriété remarquable de la surface de la vis à filet carré à axe vertical, à savoir que, si l'on coupe une surface hélicoïde rampante ($y = x$ tang. $2\pi\frac{z}{h}$) par un plan passant par une de ses génératrices rectilignes ($z = my$), et si l'on projette orthogonalement, sur un plan perpendiculaire à l'axe de cette surface, la courbe déterminée comme section, on obtient une quadatrice de Dinostrate. Cette proposition a du reste fait reconnaître à Michel Chasles (*Aperçu historique*, p. 30) que, si le plan sécant, au lieu de passer par une génératrice de la surface hélicoïde, est mené arbitrairement, la projection est une quadratrice allongée ou raccourcie, c'est-à-dire une conchoïde de la quadratrice de Dinostrate.

5. En d'autres termes, on peut aussi décrire géométriquement la quadratrice de Dinostrate par l'intersection de lieux en surfaces au moyen de l'hélice plane ou spirale d'Archimède.

La figure stéréographique qui accompagne le texte grec de l'édition critique

En effet, que le rapport de la droite EZ à l'arc ΔΓ soit le même que celui de la droite AB à l'arc ΑΔΓ et, pendant que la droite AB, mobile autour du point B, parcourt l'arc ΑΔΓ, qu'un point de celle-ci, partant du point A, parvienne au point B quand la droite AB a pris la position de la droite BΓ, et que ce point produise la spirale BHA. [1] Dès lors, l'arc ΓΔΑ est à l'arc ΓΔ comme la droite AB est à la droite BH, et permutons. Mais, la droite EZ se présente ainsi aussi par rapport à l'arc ΔΓ ; donc, la droite BH est égale à la droite ZE [2].



Menons, perpendiculairement au plan [3], la droite KH égale à la droite BH ; il s'ensuit que le point K est dans une surface cylindroïde qui part de la spirale [4]. Mais, ce point est aussi dans une surface conique (car la droite de jonction BK est dans une surface conique inclinée sous un demi-angle droit sur le plan sous-jacent et menée par le point donné B) [5]. En consé-

de Hultsch est celle qui fut reconstituée par Joseph Torelli, par analogie avec la figure de la proposition précédente, dans son ouvrage de géométrie où il donne, après Commandin, les propositions 26, 27, 28 et 29 du livre IV de Pappus. (*Josephi Torelli Veronensii geometrica.* Veronae, 1769, pp. 89-96). Cette figure est moins chargée que celle de la version de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 91).

1. Il y a lieu de remarquer que, la courbe AHB constituant le premier quadrant d'une spirale d'Archimède, le rayon AB correspond au quart du rayon du cercle générateur, et que, si l'arc de spirale est considéré ici comme partant du point A, contrairement à ce qui se présente dans la proposition 19, où il part du point d'origine B, c'est probablement parce que cette considération répond mieux à la génération de la quadratrice partant du point A.

2. On a, par propriété de la spirale : $\frac{\text{arc } \Gamma\Delta\mathrm{A}}{\text{arc } \Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BH}}$, d'où, par permutation : $\frac{\mathrm{BH}}{\text{arc } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\text{arc } \mathrm{A}\Delta\Gamma}$. Or, on a par hypothèse : $\frac{\mathrm{EZ}}{\text{arc } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\text{arc } \mathrm{A}\Delta\Gamma}$; donc $\frac{\mathrm{BH}}{\text{arc } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{EZ},}{\text{arc } \Delta\Gamma}$, d'où, comme le texte : BH = EZ.

3. C'est-à-dire au plan du quadrant ABΓ.

4. C'est-à-dire dans la surface cylindroïde à génératrices verticales et ayant pour trace horizontale la spirale BHA.

5. On a par construction : KH = BH, et l'angle ABH est droit ; donc, ABHK est un carré, et la diagonale BK est inclinée sous un demi-angle droit sur le plan ABΓ. Donc, BK est une arête du cône de révolution ayant pour sommet le point B, origine de la spirale, et pour axe l'arête BA du cylindroïde à base de spirale BHA.

quence, le point K est sur une ligne [1]. Menons par le point K la droite ΛKI parallèle à la droite EB, et menons les droites BΛ, EI perpendiculaires au plan ; il s'ensuit que la droite ΛKI est dans une surface plectoïde [2] (car elle se meut suivant la droite BΛ donnée de position et suivant la ligne, donnée de position, sur laquelle se trouve le point K). En conséquence, le point I est aussi dans cette surface. Mais, il est aussi dans un plan (car la droite ZE est égale à la droite EI, parce qu'elle est aussi égale à la droite BH, et la droite ZI, perpendiculaire sur la droite BΓ, est donnée de position) ; par conséquent, le point I est sur une ligne et, par suite, le point E aussi [3]. Et il est manifeste que, du moment que l'angle compris sous les droites AB, BΓ est droit, on obtient la ligne quadratrice que nous avons dite précédemment [4].

XXXV.

Proposition 30. — De même que l'on conçoit une hélice naissant dans un plan quand un point se meut sur une droite

1. Le point K est donc sur la ligne à double courbure, c'est-à-dire sur l'hélice conique déterminée par l'intersection du cône ($z^2 = x^2 + y^2$) et de la surface cylindroïde $\left(\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{2\pi} \text{ arc. tang. } \frac{y}{z}\right)$.

2. ἐν πλεκτοειδεῖ ἐπιφανείᾳ, dans une surface plectoïde (voir note relative à cette expression dans la proposition précédente). C'est-à-dire que la droite ΛKI est dans la surface hélicoïde qu'elle engendre en se déplaçant parallèlement au plan du quadrant, avec son point K circulant le long de l'hélice conique déterminée plus haut et son point Λ circulant le long de la droite BΛ.

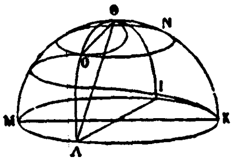
3. On a démontré que : BH = ZE. Or, on a posé : KH = BH ; d'où : EI = BH ; donc, comme le texte : ZE = EI. D'autre part, EZ est perpendiculaire sur BΓ ; donc, IZ est dans un plan perpendiculaire sur BΓ; donc, le point I, situé dans le plan passant par la droite ZI et par la génératrice ΛI de la surface hélicoïde, est à l'intersection de ce plan avec cette surface ; il est donc sur une ligne à double courbure et, par suite, le point E, qui est sa projection orthogonale, est sur une courbe plane, projection orthogonale de la courbe du point I.

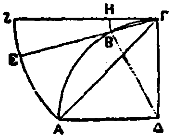
4. C'est-à-dire que, si ABΓ est un quadrant, le point E sera situé, comme dans la proposition précédente, sur une quadratrice constituant la projection orthogonale de la courbe du point I.

Cette proposition doit être considérée sous un double aspect : d'abord elle démontre, sans l'énoncer, une autre propriété de la surface hélicoïde rampante, à savoir, que son intersection avec un cône de révolution de même axe est une ligne à double courbure dont la projection sur le plan perpendiculaire à l'axe est une spirale d'Archimède ; et ensuite, elle résout le problème de construire géométriquement la spirale par les « lieux à la surface » de la même manière que le problème a été résolu pour la quadratrice par la proposition précédente.

qui décrit un cercle [1], et naissant sur des [solides] [2] quand un point se meut sur un côté [3] qui décrit quelque surface, on conçoit conséquemment qu'une hélice soit tracée aussi sur une sphère ; et ce, de la manière suivante [4] :

Soit, dans une sphère, le cercle le plus grand ΚΛΜ décrit autour du point Θ comme pôle ; décrivons, du point Θ, la quatrième partie ΘΝΚ d'un cercle le plus grand, et que l'arc ΘΝΚ, mu autour du point fixe Θ, sur la surface et vers le partie ΛΜ, s'établisse de nouveau en place, tandis qu'un point mobile sur cet arc s'avance du point Θ au point Κ. Ce point décrit donc dans la surface une hélice ΘΟΙΚ [5], telle que, si l'on décrit du point Θ une circonférence quelconque de cercle le plus grand [6], celle-ci possède avec l'arc ΚΛ le même rapport que celui de l'arc ΛΘ avec l'arc ΘΟ. Dès lors, je dis





que si, la décrivant autour d'un centre Δ, on pose la quatrième partie ΑΒΓ d'un cercle le plus grand de la sphère, et si l'on mène la droite de jonction ΑΓ, il s'établit que le secteur ΑΒΓΔ est au segment ΑΒΓ comme la surface de l'hémisphère est à la surface découpée entre l'hélice ΘΟΙΚ et l'arc ΚΝΘ.

En effet, menons la droite ΓΖ tangente à l'arc, et décrivons autour du centre Γ l'arc ΑΕΖ passant par le point Α. En conséquence, le secteur ΑΒΓΔ équivaut au secteur ΑΕΖΓ (car l'angle

1. Voir chap. XXI.
2. Lacune comblée par le mot στερεῶν (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I. p. 264, l. 5).
3. κατὰ μιᾶς πλευρᾶς, sur un côté, c'est-à-dire sur une arête ou génératrice d'une surface cylindrique, comme dans la proposition 28, ou d'une surface conique, comme cela est obtenu subsidiairement dans la proposition 29 par l'intersection d'un cône et d'une surface plectoïde (hélicoïde).
4. La propriété caractéristique de l'hélice sphérique d'être une développante de petit cercle a été démontrée par Paul Serret dans le chapitre III, intitulé : *Éléments de Géométrie sphérique infinitésimale* de son ouvrage : *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure.*
5. L'hélice sphérique, dont l'équation polaire est $d = \frac{1}{4} l$, dans laquelle d est la distance polaire et l la longitude.
6. Grand cercle qui coupe l'hélice d'abord au point O et le cercle équateur d'abord au point Λ.

au point Δ est double de l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΖ, tandis que le carré de la droite ΑΔ est la moitié du carré de la droite ΑΓ) (1). Dès lors, je dis que le secteur ΑΕΖΓ est au segment ΑΒΓ comme les surfaces que nous avons dites sont entre elles.

Que l'arc ΚΛ soit une partie de la circonférence entière du cercle, l'arc ΖΕ la même partie de l'arc ΖΑ, et menons la droite de jonction ΕΓ. Il s'ensuit que l'arc ΒΓ sera aussi la même partie de l'arc ΑΒΓ (2). Mais, l'arc ΚΛ est une partie de la circonférence entière, l'arc ΘΟ est la même partie de l'arc ΘΟΛ, et l'arc ΘΟΛ est égal à l'arc ΑΒΓ; donc, l'arc ΘΟ est aussi égal à l'arc ΒΓ (3). Décrivons, autour du pôle Θ, la circonférence ΟΝ, passant par le point Ο et, autour du centre Γ, l'arc ΒΗ passant par le point Β. Dès lors, puisque la surface entière de l'hémisphère est

1. On a : cercle de rayon ΑΔ = 4 secteurs ΑΒΓΔ. Or, angle ΖΓΑ = $\frac{1}{2}$ angle ΑΔΓ = $\frac{1}{2}$ angle droit ; donc : cercle de rayon ΑΓ = 8 secteurs ΑΕΖΓ. D'autre part, on a : $\frac{\text{cercle de rayon } \mathrm{A\Delta}}{\text{cercle de rayon } \mathrm{A\Gamma}} = \frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}$, d'où : $\frac{4 \text{ secteurs } \mathrm{AB\Gamma\Delta}}{8 \text{ secteurs } \mathrm{AEZ\Gamma}} = \frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}$. Or, $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 = 2\overline{\mathrm{A\Delta}}^2$; donc : $\frac{4 \text{ secteurs } \mathrm{AB\Gamma\Delta}}{8 \text{ secteurs } \mathrm{AEZ\Gamma}} = \frac{1}{2}$, d'où, comme le texte : secteur ΑΒΓΔ = secteur ΑΕΖΓ.

2. Posons : $\frac{\text{arc } \mathrm{ZE}}{\text{arc } \mathrm{ZA}} = \frac{\text{arc } \mathrm{K\Lambda}}{\text{circonf. } \mathrm{K\Lambda M}}$. Or, $\frac{\text{arc } \mathrm{ZE}}{\text{arc } \mathrm{ZA}} = \frac{\text{angle } \mathrm{Z\Gamma E}}{\text{angle } \mathrm{Z\Gamma A}}$; donc : $\frac{\text{arc } \mathrm{K\Lambda}}{\text{circonf. } \mathrm{K\Lambda M}} = \frac{\text{angle } \mathrm{Z\Gamma E}}{\text{angle } \mathrm{Z\Gamma A}}$. Or (Euclide, liv. III, prop. 32 : « Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une droite qui coupe ce cercle, les angles que cette droite fait avec la tangente seront égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 179), l'angle ΖΓΕ est égal à l'angle qui s'appuie sur l'arc ΒΓ et dont le sommet est sur la droite ΓΔ prolongée, au point symétrique du point Γ par rapport au centre Δ ; donc (Euclide, liv. III, prop. 20 : « Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 159) : angle ΖΓΕ = $\frac{1}{2}$ angle ΒΔΓ. Or, on a (voir note précédente) : angle ΖΓΑ = $\frac{1}{2}$ angle ΑΔΓ ; donc : $\frac{\text{arc } \mathrm{K\Lambda}}{\text{circonf. } \mathrm{K\Lambda M}} = \frac{\text{angle } \mathrm{B\Delta\Gamma}}{\text{angle } \mathrm{A\Delta\Gamma}} = \frac{\text{arc } \mathrm{B\Gamma}}{\text{arc } \mathrm{AB\Gamma}}$.

3. On a, par propriété de l'hélice sur la sphère : $\frac{\text{arc } \mathrm{K\Lambda}}{\text{circonf. } \mathrm{K\Lambda M}} = \frac{\text{arc } \Theta\mathrm{O}}{\text{arc } \Theta\mathrm{O\Lambda}}$. Or, on a, par construction auxiliaire : arc ΘΟΛ = arc ΑΒΓ ; donc : $\frac{\text{arc } \mathrm{K\Lambda}}{\text{circonf. } \mathrm{K\Lambda M}} = \frac{\text{arc } \Theta\mathrm{O}}{\text{arc } \mathrm{AB\Gamma}}$; d'où, en présence de l'expression de la note précédente, il vient : $\frac{\text{arc } \Theta\mathrm{O}}{\text{arc } \mathrm{AB\Gamma}} = \frac{\text{arc } \mathrm{B\Gamma}}{\text{arc } \mathrm{AB\Gamma}}$, d'où, comme dans le texte : arc ΘΟ = arc ΒΓ.

à la surface du segment [1] dont l'arc issu du pôle est ΘO [2], comme la surface sphérique ΛKΘ est à la surface sphérique OΘN, et que le carré de la droite reliant les points Θ, Λ est au carré de la droite reliant les points Θ, O, ou le carré de la droite EΓ au carré de la droite BΓ, comme la surface de l'hémisphère est à la surface du segment, il s'ensuit que le secteur EZΓ sera au secteur BHΓ comme le secteur KΛΘ qui est dans la surface [3] est au secteur OΘN [4]. On démontre pareillement que tous les

1. C'est-à-dire à la surface de la calotte sphérique ayant comme base le cercle ON

2. ἡ ἐκ τοῦ πόλου, (l'arc) issu du pôle, ou rayon sphérique ΘO.

3. ὁ ΚΛΘ τομεὺς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ, le secteur ΚΛΘ dans la surface (sous-entendu τοῦ σφαιρίου, de la sphère) ; expression qui désigne une surface sphérique, par analogie avec le secteur dans le plan, contrairement à l'acception actuelle, d'après laquelle le secteur sphérique est un volume.

4. Un même angle s'appuie sur les arcs ΛK, ON ; donc : $\frac{\text{circonf. M}\Lambda\text{K}}{\text{arc }\Lambda\text{K}} = \frac{\text{circonf. ON}}{\text{arc ON}}$. Considérant la surface sphérique comme remplie de cercles parallèles ayant même rapport avec les arcs qui y sont découpés entre les quadrants ΘΛ, ΘK, à la manière inaugurée par Archimède dans son traité *De la Méthode relative aux théorèmes mécaniques* (voir : *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 478-519), et reprise plus tard par Cavalieri dans sa méthode des indivisibles, Pappus procède par composition de rapports pour conclure que l'on a : $\frac{\text{surface hémisphère}}{\text{surface secteur sphérique }\Lambda\Theta\text{K}} = \frac{\text{surface calotte sphérique }\Theta\text{ON}}{\text{surface secteur sphérique O}\Theta\text{N}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{surface hémisphère}}{\text{surface calotte sphérique }\Theta\text{ON}} = \frac{\text{surface secteur sphérique }\Lambda\Theta\text{K}}{\text{surface secteur sphérique O}\Theta\text{N}}$ (I). Dès lors, en vertu de deux propositions d'Archimède (*Traité de la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 42 : « L'aire de tout segment de sphère plus petit que l'hémisphère est équivalente au cercle dont le rayon est égal à la droite amenée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment de la sphère », et prop. 43 : « Lors même que le segment est plus grand que l'hémisphère, son aire est pareillement équivalente au cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet à la circonférence du cercle de base du segment ». Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 82-84), on a : $\pi \times \overline{\text{corde }\Theta\Lambda}^2$ = surface hémisphère, et $\pi \times \overline{\text{corde }\Theta\text{O}}^2$ = surface calotte sphérique ΘON ; donc, comme le texte : $\frac{\overline{\Theta\Lambda}^2}{\overline{\Theta\text{O}}^2} = \frac{\text{surface hémisphère}}{\text{surface calotte sphérique }\Theta\text{ON}}$ (II). Or, on a par construction : arc ΘΛ = arc ΑΓ, et on a démontré qu'on a : arc ΘO = arc BΓ ; donc : $\frac{\text{arc }\Theta\Lambda}{\text{arc }\Theta\text{O}} = \frac{\text{arc A}\Gamma}{\text{arc B}\Gamma}$, d'où : $\frac{\text{corde }\Theta\Lambda}{\text{corde }\Theta\text{O}} = \frac{\text{corde A}\Gamma}{\text{corde B}\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{\Theta\Lambda}^2}{\overline{\Theta\text{O}}^2} = \frac{\overline{\text{A}\Gamma}^2}{\overline{\text{B}\Gamma}^2} = \frac{\overline{\text{E}\Gamma}^2}{\overline{\text{B}\Gamma}^2}$, d'où la relation (II) devient : $\frac{\overline{\text{E}\Gamma}^2}{\overline{\text{B}\Gamma}^2} = \frac{\text{surface hémisphère}}{\text{surface calotte sphérique }\Theta\text{ON}}$. Or, la similitude de secteurs donne : $\frac{\text{secteur plan EZ}\Gamma}{\text{secteur plan BH}\Gamma} = \frac{\overline{\text{E}\Gamma}^2}{\overline{\text{B}\Gamma}^2}$; donc : $\frac{\text{secteur plan EZ}\Gamma}{\text{secteur plan BH}\Gamma} = \frac{\text{surface hémisphère}}{\text{surface calotte sphérique }\Theta\text{ON}}$, d'où la relation (I) devient, comme dans le texte : $\frac{\text{secteur plan EZ}\Gamma}{\text{secteur plan BH}\Gamma} = \frac{\text{surface secteur sphérique }\Lambda\Theta\text{K}}{\text{surface secteur sphérique O}\Theta\text{N}}$.

secteurs égaux au secteur ΕΖΓ contenus dans le secteur ΑΖΓ, c'est-à-dire le secteur entier ΑΖΓ [1], sont aux secteurs circonscrits au segment ΑΒΓ, qui correspondent au secteur ΓΒΗ [2], comme tous les secteurs égaux au secteur ΛΚΘ contenus dans l'hémisphère, qui constituent la surface entière de l'hémisphère [3], sont aux secteurs circonscrits à l'hélice qui correspondent au secteur ΟΘΝ [4]. Et l'on démontrera de la même manière que le secteur ΑΖΓ est aux secteurs inscrits dans le segment ΑΒΓ [5] comme [la surface] [6] de l'hémisphère est aux secteurs inscrits à l'hélice [7] ; de sorte que le secteur ΑΖΓ, c'est-à-dire le quadrant ΑΒΓΔ, sera aussi au segment ΑΒΓ comme la surface de l'hémisphère est à la surface découpée par l'hélice [8] [9]. On

1. C'est-à-dire la somme des petits secteurs élémentaires ΕΖΓ contenus un nombre entier de fois dans le secteur entier ΑΖΓ.

2. C'est-à-dire la somme des petits secteurs élémentaires analogues à ΓΒΗ qui remplissent la surface du segment ΑΒΓ, avec des excédents circonscrits à ce segment, constitués par des triangles mixtilignes ayant pour côtés les parties de l'arc ΑΒΓ, les arcs ΒΗ et les droites ΗΓ.

3. C'est-à-dire la somme des petites surfaces élémentaires sphériques ΛΚΘ contenues un nombre entier de fois dans la surface de l'hémisphère.

4. C'est-à-dire la somme des petits surfaces élémentaires sphériques analogues à ΟΘΝ qui rempliront la surface sphérique découpée entre l'hélice et l'arc ΘΝΚ, avec de petits excédents circonscrits par rapport à l'hélice.

5. C'est-à-dire la somme des petits secteurs élémentaires qui remplissent la surface du segment ΑΒΓ, à moins de petits triangles mixtilignes, et qui sont donc inscrits dans le segment ΑΒΓ.

6. Lacune comblée par Hultsch par le mot ἐπιφανεία (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 268, l. 10).

7. C'est-à-dire la somme des petites surfaces sphériques élémentaires analogues à ΟΘΝ qui rempliront la surface sphérique découpée entre l'hélice et l'arc ΘΝΚ, à moins de petites surfaces triangulaires curvilignes ; surfaces élémentaires qui sont donc inscrites par rapport à l'hélice.

8. C'est-à-dire la surface de l'hémisphère découpée entre l'hélice et l'arc ΘΝΚ.

9. L'expression demontrée plus haut : $\frac{\text{secteur plan } \mathrm{EZ\Gamma}}{\text{secteur plan } \mathrm{BH\Gamma}} = \frac{\text{surface secteur sphérique } \Lambda\Theta\mathrm{K}}{\text{surface secteur sphérique } \mathrm{O}\Theta\mathrm{N}}$ devient par sommation, dans le cas des secteurs ΒΗΓ circonscrits au segment ΑΒΓ et des surfaces sphériques ΟΘΝ circonscrites par rapport à l'hélice : $\frac{\text{secteur } \mathrm{AZ\Gamma}}{\sum(\text{secteurs plans } \mathrm{BH\Gamma} + \text{excédents})} = \frac{\text{surface hémisphère}}{\sum(\text{surfaces secteurs sphériques } \mathrm{O}\Theta\mathrm{N} + \text{excédents})}$, et devient, dans le cas des secteurs ΒΗΓ inscrits dans le segment ΑΒΓ et des surfaces sphériques ΟΘΝ inscrites par rapport à l'hélice : $\frac{\text{secteur } \mathrm{AZ\Gamma}}{\sum(\text{secteurs plans } \mathrm{BH\Gamma} - \text{surfaces défaillantes})} = \frac{\text{surface hémisphère}}{\sum(\text{surfaces secteurs sphériques } \mathrm{O}\Theta\mathrm{N} - \text{surfaces défaillantes})}$; donc, par exhaustion, c'est-à-dire en considérant, à la manière d'Archimède, que la figure

conclut de là que la surface découpée par l'hélice devant l'arc ΘNK est l'octuple du segment ΑΒΓ (puisque la surface de l'hémisphère est aussi l'octuple du secteur ΑΒΓΔ) (1), et que la surface comprise entre l'hélice et la base de l'hémisphère est l'octuple du triangle ΑΓΔ, ce qui équivaut au carré du diamètre de la sphère (2).

XXXVI.

Lorsque les anciens géomètres ont voulu partager un angle rectiligne donné en trois angles égaux, ils ont été embarrassés au sujet de ceci : Nous avons dit qu'il y a trois genres de problèmes en géométrie, et que nous les appelons plans, solides et

---

circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que toute grandeur donnée, on a, à la limite, comme dans le texte :

$$\frac{\text{secteur } AZ\Gamma}{\text{segment } AB\Gamma} = \frac{\text{surface hémisphère}}{\text{surface sphérique comprise entre l'hélice et l'arc } \Theta NK}.\ \text{Or,}$$

on a démontré plus haut qu'on a : secteur ou quadrant ΑΒΓΔ = secteur ΑΖΓ ; donc, comme le texte :

$$\frac{\text{quadrant } AB\Gamma\Delta}{\text{segment } AB\Gamma} = \frac{\text{surface de l'hémisphère}}{\text{surface sphérique comprise entre l'hélice et l'arc } \Theta NK}.$$

1. On a (ARCHIMÈDE, *Traité de la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 33 : « L'aire de toute sphère est quadruple du plus grand de ses cercles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 63) : Surface de la sphère = 4 cercles de diamètre MK = 4 cercles de rayon ΑΔ = 16 quadrants ΑΒΓΔ ; donc : surface hémisphère = 8 quadrants ΑΒΓΔ. Dès lors, la dernière expression de la note précédente devient :

$$\frac{\text{quadrant } AB\Gamma\Delta}{\text{segment } AB\Gamma} = \frac{8 \text{ quadrants } AB\Gamma\Delta}{\text{surface sphérique entre hélice et arc } \Theta NK},\ \text{d'où, comme le}$$

texte : surface sphérique découpée entre l'hélice et l'arc ΘNK = 8 segments ΑΒΓ.

2. La dernière expression de la note 9, page 205 donne par différence :

$$\frac{\text{quadrant } AB\Gamma\Delta}{\text{quadrant } AB\Gamma\Delta - \text{segment } AB\Gamma} = \frac{\text{surface hémisphère}}{\text{surface hémisphère} - \text{surface sphérique entre hélice et arc } \Theta NK},$$

ou : $$\frac{\text{quadrant } AB\Gamma\Delta}{\text{triangle } A\Gamma\Delta} = \frac{\text{surface hémisphère ou 8 quadrants } AB\Gamma\Delta}{\text{surface comprise entre hélice et cercle de base de l'hémisphère}},$$

d'où, comme le texte : surface comprise entre l'hélice et le cercle de base de l'hémisphère = 8 triangles $A\Gamma\Delta = 4\overline{A\Delta}^2 = (2A\Delta)^2 = \overline{MK}^2$; relation donnant le premier exemple de quadrature d'une surface courbe partielle de la sphère chez les géomètres grecs, et il y a lieu de remarquer que cette surface équivaut précisément à celle de la voûte carrable de Viviani. Cette belle proposition de Pappus peut être restreinte à une révolution incomplète du quart de grand cercle, et on démontre que, dans ce cas, l'aire sphérique comprise entre le quart de grand cercle dans sa position initiale, l'arc correspondant sur le cercle de base de l'hémisphère et l'hélice sphérique est au carré du rayon comme l'arc de la base est au quart du grand cercle.

grammiques (1). C'est donc à juste titre que ceux qui peuvent être résolus au moyen de droites et de la circonférence de cercle sont dits plans, parce que les lignes au moyen desquelles on résout ces problèmes ont leur origine dans le plan, et que les problèmes qu'on résout en assumant pour leur solution une des sections du cône, ou plusieurs de ces sections, sont appelés solides, parce qu'il faut faire usage de surfaces de figures solides pour leur construction, notamment de surfaces coniques. Reste enfin le troisième genre de problèmes qu'on appelle grammiques, parce qu'on emploie pour leur construction d'autres lignes que celles dont nous venons de parler, lesquelles ont une génération plus variée et plus forcée, dérivant de surfaces moins régulières et de mouvements plus compliqués. Telles sont les lignes que l'on rencontre dans ce qu'on appelle les *Lieux en Surfaces* (2), et d'autres encore plus diversifiées trouvées en grand nombre par Démétrios d'Alexandrie dans ses *Considérations sur les Lignes* (3), et par Philon de Tyane (4) au moyen de l'entrelacement de surfaces plectoïdes (5) et autres de toute sorte ; lignes qui présentent nombre de propriétés admirables. Quelques-unes de ces lignes ont été trouvées dignes d'une étude plus développée, et l'une d'entre elles a même été dénommée « ligne paradoxale » (6) par

1. Pappus a déjà traité ce sujet avec moins de développements au livre III, chap. VII. Voir p. 38.

2. τόποι πρὸς ἐπιφανείας, les lieux en surfaces, et ailleurs, τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ, les lieux à la surface, titre d'un ouvrage composé par Euclide, en deux livres qui ne nous sont pas parvenus, contenant des propositions de lieux géométriques constitués par des surfaces de cônes, de sphères et de cylindres, ou même par d'autres surfaces de degré supérieur.

3. ἐν ταῖς γραμμικαῖς ἐπιστάσεσι, dans les *Considérations linéaires*, titre d'un ouvrage sur des courbes transcendantes qui ne nous est pas parvenu, écrit par Démétrios d'Alexandrie, qui doit avoir vécu avant l'ère chrétienne, puisque Pappus mentionne comme auteur plus récent que lui (νεώτερος) Ménélaüs, qui vécut vers la fin du premier siècle après J.-C. Tannery, en mentionnant cet ouvrage, lui conserve le titre grec *Épistases grammiques* dans une étude intitulée : *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'Antiquité*. (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, 1883, t. VII, pp. 278-291, ou bien : *Mémoires scientifiques de Paul Tannery publiés par J.-L. Heiberg et H.-G. Zeuthen*. Paris, 1912, vol. II, pp. 1-47).

4. On ne possède pas plus de renseignements sur Philon de Tyane que sur Démétrios d'Alexandrie, auquel Pappus l'associe dans l'étude des courbes de degrés supérieurs ; il a probablement vécu au deuxième siècle avant notre ère.

5. Voir proposition 29 (en note) au sujet de cette expression.

6. παράδοξος γραμμή, ligne contraire à l'opinion reçue ou ligne paradoxale. On ne possède pas de renseignements sur cette courbe, dont l'invention est

Ménélaüs [1]. D'autres lignes, telles que les spirales, les quadratrices, les cochloïdes et les cissoïdes sont toutefois de la même famille [2].

Au reste, il semble qu'il n'y a pas faute légère chez les géomètres quand ils trouvent un problème plan au moyen des coniques ou des grammiques et, d'une manière générale, quand ils le résolvent au moyen d'un genre [3] non approprié, comme le cas se présente pour le problème de la parabole dans le cinquième livre des *Coniques* d'Apollonius [4], et pour celui du

---

attribuée à Ménélaüs ; mais on suppose qu'elle avait la propriété de mener, comme l'hélice sphérique, à la quadrature de quelque surface courbe. Tannery, qui conserve à cette courbe le nom grec de *ligne paradoxos*, a proposé de l'identifier avec celle de la voûte carrable de Viviani, intersection d'une sphère et d'un cylindre circulaire droit tangent intérieurement, dont le diamètre de la section, droite est égal au rayon de la sphère ; cette courbe déterminant en dehors d'elle une surface de l'hémisphère qui équivaut au carré du diamètre de la sphère. (P. TANNERY : voir étude mentionnée dans une note ci-dessus. *Mémoires scientifiques*, vol. II, p. 17).

1. Ménélaüs d'Alexandrie, astronome grec qui vécut à la fin du premier siècle de notre ère. Il a écrit un ouvrage intitulé *Les Sphériques* dont le texte grec est perdu, et qui nous a été conservé dans une version arabe. Il traite uniquement des triangles sphériques sans enseigner encore à les résoudre et à les calculer. Le seul théorème d'usage pratique qu'il contienne est celui qui figure en tête du troisième et dernier livre, et que les Arabes ont nommé *la règle d'intersection*, parce qu'il exprime la relation entre six segments déterminés sur les trois côtés d'un triangle sphérique par un arc de grand cercle quelconque.

2. C'est-à-dire que ces courbes sont de la famille de celles qui sont engendrées par des mouvements divers, contrairement aux précédentes qui sont engendrées par la section plane de solides géométriques, ou par des intersections de surfaces courbes.

3. Sous-entendre : de lignes.

4. La question de savoir quelle est la proposition des *Coniques* d'Apollonius à laquelle se rapporte cette critique est controversée. Hultsch n'a pas discerné la proposition du livre V d'Apollonius à laquelle peut s'appliquer le passage de Pappus et a proposé, en conséquence, de lire premier (πρώτῳ) au lieu de cinquième (πέμπτῳ) livre, d'où il infère qu'il s'agit de la proposition 52 du livre I (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 273, en note), c'est-à-dire le problème de la construction de la parabole (Voir : *Les Coniques d'Apollonius de Perge, œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke*. Bruges, 1923, gr. in-8°, p. 97 ; ou bien, pour ce qui concerne le texte grec : *Apollonii Pergaei quae exstant, cum commentariis antiquis, edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg*. Lipsiae, 1891-1893, 2 vol. in-8°, vol. II, p. 158). L'hypothèse de Hultsch n'a pas été admise par Tannery, qui a fait remarquer que, si la proposition 52 du livre I fait intervenir une surface de solide dans la démonstration, il n'y a cependant pas intervention de problème *solide* constitué par un tracé de coniques, mais bien d'un problème *plan* constitué par l'intersection de chacune des génératrices d'un cône par un plan. Admettant, au contraire, l'intégrité du texte quant à l'indication du cinquième livre, il a montré que le passage de Pappus peut s'appliquer à la proposition 8 de ce livre, où il s'agit de mener une normale à la parabole par un point pris sur l'axe (voir trad. pré-

livre *Des Spirales* où Archimède assume une inclinaison solide dans le cercle (1) ; car on peut trouver le théorème qu'il a publié sans faire usage d'un problème solide (2), c'est-à-dire démontrer que la circonférence du cercle décrit en première révolution est égale à la droite qui, menée à angles droits sur la droite issue de l'origine, s'étend jusqu'à la tangente (3) à la spirale (4).

Ce qui différencie les problèmes étant donc tel, les premiers géomètres ont été incapables de trouver le problème prémentionné relatif à l'angle (5), lequel est de nature solide, en le cherchant au moyen de plans (6), car les sections de cône ne leur étaient

citée, p. 396) ; mais que la critique de Pappus est trop rigoureuse et vise plutôt la forme que le fond de la proposition (Paul TANNERY, *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède*, dans : *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2e série, 1883, t. V, pp. 49-61, ou bien dans : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. I, p. 303). Une explication de la critique de Pappus sur certaines propositions d'Apollonius avait déjà été donnée par Christian Huygens (*Œuvres*, III, p. 61) ; explication reproduite par Zeuthen (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, p. 286).

1. στερεὰ νεῦσις ἐπὶ κύκλον, inclinaison solide dans le cercle, c'est-à-dire le problème de nature solide de la sécante issue d'un point donné, inclinée ou dirigée vers un point donné, et interceptée sur une longueur donnée, ou dans un rapport donné avec une autre droite donnée, entre une droite et une circonférence de cercle. C'est à tort que Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 272, l. 3) a corrigé les manuscrits en proposant la leçon στερεοῦ νεῦσις, c'est-à-dire : inclinaison de solide ; expression dépourvue ici de sens acceptable.

2. C'est-à-dire sans faire usage d'un problème exigeant l'intervention de sections de solides géométriques.

3. C'est-à-dire jusqu'au point de rencontre avec la tangente à la spirale.

4. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, proposition 18 : « Si une ligne droite est tangente à l'extrémité d'une spirale décrite en première révolution, et si du point d'origine de la spirale on élève une perpendiculaire sur la droite initiale de révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente ; tandis que la droite située entre la tangente et l'origine de la spirale sera égale à la circonférence du premier cercle. » (*Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, p. 269).

La critique que Pappus fait de la démonstration de cette proposition vise donc l'emploi subsidiaire du problème solide de la sécante de cercle interceptée sur une longueur donnée dans une direction donnée. Il y a lieu de remarquer cependant qu'Archimède ne se préoccupe pas du moyen de résoudre le problème de la sécante, et qu'il se borne à établir la possibilité de construire cette sécante, en faisant légitimement appel au principe de continuité. Sa démonstration reste donc plane en fait, et cache en quelque sorte le problème solide dont Pappus critique l'intervention. Tannery a toutefois fait voir que la critique de Pappus se justifie jusqu'à un certain point par la possibilité de démontrer la proposition 18 d'Archimède sur la spirale, sans faire appel au principe de continuité, par les questions dites planes par les Anciens (P. TANNERY, *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède. Mémoires scientifiques*, vol. I, pp. 309-316).

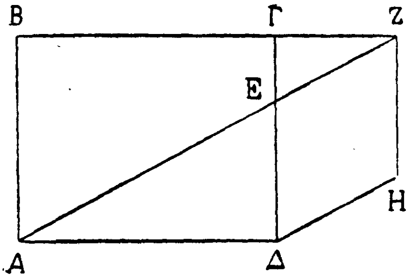
5. C'est-à-dire le problème de la trisection de l'angle non droit.

6. C'est-à-dire en faisant intervenir des problèmes plans, n'utilisant donc que des intersections de droites et de cercles.

pas encore familières et c'est à cause de cela qu'ils sont restés en suspens. Ils ont cependant opéré la trisection de l'angle plus tard, après avoir eu recours, pour trouver celle-ci, à l'inclinaison (1) que nous exposons ci-dessous.

PROPOSITION 31. — Étant donné un parallélogramme rectangulaire ΑΒΓΔ, et la droite ΒΓ étant prolongée, il faut qu'en menant transversalement la droite ΑΕ, il soit fait en sorte que la droite ΕΖ soit égale à une droite donnée.

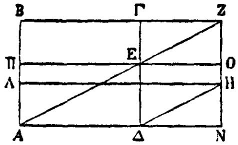
Que la chose soit obtenue et menons les droites ΔΗ, ΗΖ parallèles aux droites ΕΖ, ΕΔ. Dès lors, puisque la droite ΖΕ est donnée et qu'elle est égale à la droite ΔΗ, la droite ΔΗ est donc donnée aussi. De plus, le point Δ est donné ; donc, le point Η est sur la circonférence d'un cercle donné de position (2). Et puisque le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΔΓ est donné et équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΖ, ΕΔ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΒΖ, ΕΔ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΒΖ, ΖΗ, est donné aussi (3). En conséquence, le point Η est sur une hyperbole (4).



1. C'est-à-dire le problème solide de la droite inclinée (dirigée) vers un point donné et interceptée sur une longueur donnée entre deux lignes données.

2. EUCLIDE, *Données*, prop. 6 : « Un cercle, dont le centre est donné de position, et le rayon de grandeur, est dit donné de position et de grandeur ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 302.

3. On a (EUCLIDE, liv. I, prop. 43 : « Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entre eux ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 71) : parallélogramme $(\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E})$ = parallélogramme $(\mathrm{E\Delta} \times \mathrm{EO})$, d'où : $\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E} + \mathrm{\Pi E} \times \mathrm{E\Delta} = \mathrm{E\Delta} \times \mathrm{EO} + \mathrm{\Pi E} \times \mathrm{E\Delta}$, ou, comme le texte : $\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{\Pi O} \times \mathrm{E\Delta} = \mathrm{BZ} \times \mathrm{E\Delta} = \mathrm{BZ} \times \mathrm{ZH}$.



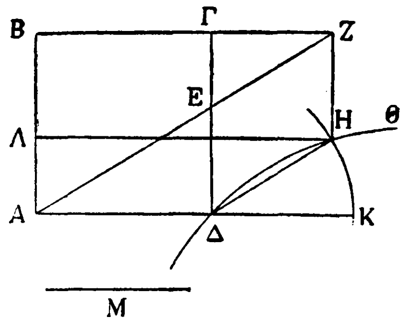
4. En effet, supposons que, dans la figure de la note précédente, les points Δ et Η soient sur une branche de l'hyperbole dont les asymptotes sont les droites ΒΖ, ΒΑ, et considérons que les droites ΗΖ et ΗΛ sont menées sur les asymptotes respectivement parallèles aux droites ΔΓ, ΑΔ menées sous angles quelconques sur ces asymptotes. Dès lors (APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. 12 : « Si

Or, il est aussi sur une circonférence de cercle donnée ; donc, le point H est donné.

XXXVII.

Le problème se synthétisera donc de la manière suivante :

Soient ΑΒΓΔ le parallélogramme donné, M la droite donnée de grandeur, et que la droite ΔΚ (1) lui soit égale. Décrivons par le point Δ l'hyperbole ΔΗΘ à l'égard (2) des asymptotes ΑΒ, ΒΓ (ce qui sera montré dans la suite) (3), et décrivons par le point K, autour du centre Δ, l'arc du cercle ΚΗ coupant l'hyperbole au point H ; enfin, ayant mené la droite ΗΖ parallèle à la droite ΔΓ, menons la droite de jonction ΖΑ(4) ; je dis que la droite ΕΖ est égale à la droite M.



En effet, menons la droite de jonction ΗΔ et menons la droite ΗΛ parallèle à la droite ΚΑ. Dès lors, le rectangle compris sous les droites ΖΗ, ΗΛ, c'est-à-dire celui qui est compris sous les droites ΒΖ, ΖΗ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΑ, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ (5). En

d'un point d'une section, l'on mène deux droites sous des angles quelconques sur les asymptotes, et si, d'un point de la section, l'on mène des parallèles à ces droites, le rectangle délimité sous ces parallèles sera équivalent au rectangle délimité sous les droites auxquelles les parallèles ont été menées ». Voir trad. précitée de P. Ver Eecke, p. 129), on a : $\mathrm{A\Delta} \times \Gamma\Delta = \Lambda\mathrm{H} \times \mathrm{ZH}$ ou : $\mathrm{B}\Gamma \times \Gamma\Delta = \mathrm{BZ} \times \mathrm{ZH}$. Or, cette expression vient d'être démontrée (voir note précédente) ; donc, réciproquement, le point H sera sur une branche d'hyperbole ayant comme asymptotes les droites AB, BZ.

1. Sous-entendu : découpée sur la droite ΑΔ prolongée.

2. Le texte emploie περὶ avec l'accusatif pour signifier « relativement à » ou « à l'égard de », et non pour signifier « circa » (autour) comme dans les versions latines de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 274, l. 6) et de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 96, l. 17).

3. Le problème sera résolu à la proposition 33.

4. Sous-entendu : coupant la droite ΔΓ au point E.

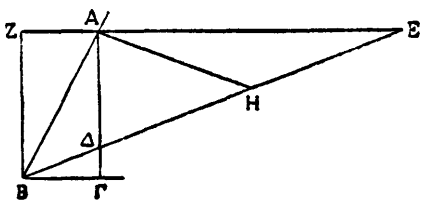
5. Si l'on considère les droites ΖΗ, ΗΛ menées du point H de l'hyperbole aux asymptotes et les droites ΓΔ, ΔΑ menées du point Δ de l'hyperbole, respectivement parallèles aux droites précédentes, on a (APOLLONIUS, liv. II, prop. 12, énoncée p. 210, n. 4) : $\mathrm{ZH} \times \mathrm{H}\Lambda = \Gamma\Delta \times \Delta\mathrm{A}$, d'où, à cause des parallèles, comme dans le texte : $\mathrm{ZH} \times \mathrm{BZ} = \Gamma\Delta \times \mathrm{B}\Gamma$.

conséquence, la droite ΓΔ est à la droite ZH comme la droite ZB est à la droite BΓ, c'est-à-dire comme la droite ΓΔ est à la droite ΔE ; donc, la droite EΔ est égale à la droite ZH ; donc, ΔEZH est un parallélogramme ; donc, la droite EZ est égale à la droite ΔH, c'est-à-dire à la droite ΔK, c'est-à-dire à la droite M (1).

XXXVIII.

Proposition 32. — Cela étant donc démontré, la tripartition d'un angle rectiligne donné se fera de la manière suivante :

En effet, que l'angle compris sous les droites AB, BΓ soit d'abord aigu ; menons, d'un point quelconque (2), la perpendiculaire AΓ et, complétant le parallélogramme ΓZ, prolongeons la droite ZA jusqu'au point E. De plus, le parallélogramme ΓZ étant rectangle, posons, entre les droites EA, AΓ, la droite EΔ inclinée sur le point B, égale au double de la droite AB (3) (car on a exposé plus haut comment cela peut être obtenu) (4). Dès lors, je dis que l'angle compris sous les droites EB, BΓ est la troisième partie de l'angle donné, compris sous les droites AB, BΓ.



En effet, coupons la droite EΔ en deux parties égales au point H et menons la droite de jonction AH. Dès lors, les trois droites ΔH, HA, HE sont égales (5) ; par conséquent, la droite ΔE

1. La dernière relation de la note précédente donne : $\frac{\Gamma\Delta}{ZH} = \frac{BZ}{B\Gamma}$. Or, $\frac{BZ}{\Gamma Z} = \frac{AB}{\Gamma E} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$, d'où : $\frac{BZ}{BZ - \Gamma Z} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta - \Gamma E}$ ou : $\frac{BZ}{B\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$, d'où, comme le texte : $\Delta E = ZH$. Or, les droites ΔE, ZH sont parallèles par construction ; donc, ΔEZH est un parallélogramme ; donc, $EZ = \Delta H =$ rayon $\Delta K = M$.

2. D'un point quelconque pris sur la droite AB.

3. Ce passage marque soit une négligence, soit une altération ; car il eût été plus correct de dire : « prolongeons la droite ZA jusqu'au point E pris tel que, si l'on mène la droite de jonction BE, son segment découpé entre les droites EA, AΓ soit égal au double de la droite donnée AB (car le parallélogramme ΓZ étant rectangle, on a démontré plus haut comment cela peut s'obtenir) ».

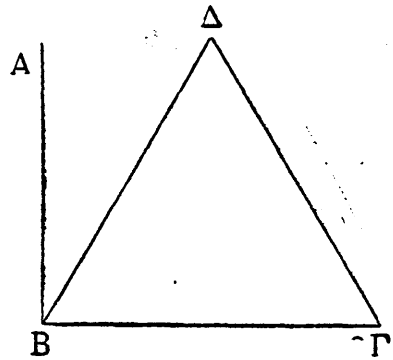
4. Voir proposition 31 et la synthèse qui y fait suite.

5. L'angle ΔAE est droit par construction ; donc, les droites ΔH, HA, HE sont égales comme étant des rayons d'un cercle de centre H et de diamètre ΔE.

est double de la droite AH. Mais, elle est aussi double de la droite AB ; donc, la droite BA est égale à la droite AH et l'angle compris sous les droites AB, BΔ est égal à celui qui est compris sous les droites AH, HΔ. Or, l'angle compris sous les droites AH, HΔ est double de celui qui est compris sous les droites AE, EΔ, c'est-à-dire de celui qui est compris sous les droites ΔB, BΓ ; donc, l'angle compris sous les droites AB, BΔ est aussi double de celui qui est compris sous les droites ΔB, BΓ ; et si nous coupons l'angle compris sous les droites AB, BΔ en deux parties égales, l'angle compris sous les droites AB, BΓ sera coupé en trois parties égales (1).

XXXIX.

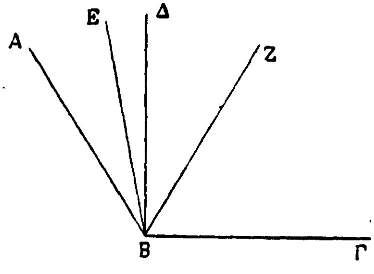
Mais, si l'angle donné est droit, prenons une droite BΓ sur laquelle nous décrivons le triangle équilatéral BΔΓ et, divisant l'angle compris sous les droites ΔB, BΓ en deux parties égales, nous aurons l'angle compris sous les droites AB, BΓ divisé en trois parties égales.



XL.

Mais, que l'angle soit obtus ; que la droite BΔ soit à angles droits sur la droite ΓB ; enlevons d'une part l'angle compris sous les droites ΔB, BZ, troisième partie de l'angle compris sous les droites ΔB, BΓ, et, d'autre part, l'angle compris sous les droites EB, BΔ, troisième partie de l'angle compris sous les droites AB,

1. La fin de la démonstration se déroule comme suit : On a donc : $\Delta E = 2AH$. Or, on a, par construction : $\Delta E = 2AB$; donc : $AB = AH$, d'où : $\widehat{AB\Delta} = \widehat{AH\Delta}$. Or, considérant les angles au centre et à la circonférence s'appuyant sur le même arc, on a : $\widehat{AH\Delta} = 2\widehat{AE\Delta} = 2\widehat{\Delta B\Gamma}$; donc : $\widehat{AB\Delta} = 2\widehat{\Delta B\Gamma}$. Or, l'angle $AB\Delta$ pouvant être partagé en deux parties égales à l'angle $\Delta B\Gamma$ par la règle et le compas, l'angle $AB\Gamma$ aura été partagé en trois parties égales.



BΔ (car nous avons montré cela précédemment) (1). En conséquence, l'angle compris sous les droites EB, BZ est la troisième partie de l'angle entier compris sous les droites AB, BΓ ; et, si nous établissons contre chacune des droites AB, BΓ un angle égal [à celui qui est compris sous les droites EB, BZ] (2), nous couperons l'angle donné en trois parties égales.

XLI.

Proposition 33. — Résolvons maintenant le problème qui a été différé (3).

Deux droites AB, BΓ étant données de position, et un point Δ étant donné, décrire par le point Δ une hyperbole à l'égard des asymptotes AB, BΓ.

Que ce soit chose faite, et soit décrite l'hyperbole EΔZ. Menons-lui, du point Δ (4), la tangente AΔΓ, et menons le diamètre HBΔ et la droite ΔΘ parallèle à la droite BΓ. Dès lors, les droites HΔ, ΔΘ sont données de position (5) et le point Θ est donné (6). Et puisque les droites AB, BΓ sont les asymptotes de l'hyperbole, et que la droite AΓ est tangente, il s'ensuit que la droite

1. Voir : § XXXIX et § XXXVIII.

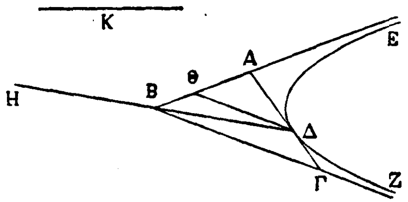
2. Lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 276, l. 28).

3. Voir : § XXXVII relatif à la synthèse de la proposition 31. Le problème de la description de l'hyperbole passant par un point donné dans l'angle de deux asymptotes données est résolu d'une manière plus simple par Apollonius dans la proposition 4 du livre II des *Coniques* : « Étant données deux droites embrassant un angle et un point placé à l'intérieur de cet angle, décrire, par ce point, une section de cône appelée hyperbole, telle que les droites données soient ses asymptotes ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 121.

4. Le texte porte ἀπὸ τοῦ Δ, du (point) Δ, au lieu de διὰ (par), probablement pour marquer que la tangente est menée de part et d'autre du point Δ.

5. Euclide, *Données*, prop. 26 : « Si les extrémités d'une ligne droite sont données de position, cette droite est donnée de position et de grandeur », et prop. 28 : « Si, par un point donné, une ligne droite est menée parallèlement à une droite donnée de position, la droite menée est donnée de position ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, pp. 340-343.

6. Euclide, *ibidem*, prop. 25 : « Si deux lignes données de position se coupent, le point où elles se coupent est donné de position ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 339.



ΑΔ est égale à la droite ΔΓ, et le carré de chacune de ces droites équivaut au quart de la figure appliquée sur la droite ΗΔ (1) (car ces choses sont démontrées dans le deuxième livre des *Coniques*) (2). Dès lors, puisque la droite ΓΔ est égale à la droite ΔΑ, la droite ΒΘ est aussi égale à la droite ΘΑ (3). Or, la droite ΒΘ est donnée (4) ; donc, la droite ΘΑ est donnée aussi (5). Et le point Θ est donné ; donc, le point Α est donné aussi (6). En conséquence, la droite ΑΔΓ est donnée de position. De plus, la droite ΑΓ est donnée de grandeur (7) ; de sorte que le carré de la droite ΑΓ est donné aussi (8). Or, celui-ci équivaut à la figure appliquée à la droite ΗΔ (9) ; donc, la figure appliquée à la droite ΗΔ est donnée aussi. Or, la droite ΗΔ est donnée (car elle est double de la droite ΒΔ donnée de grandeur en raison de ce que les points Β, Δ sont donnés l'un et l'autre) (10) ; donc, le côté droit de la figure (11) est donné aussi (12). Dès lors, le problème se présente comme suit : deux droites étant données de position et de grandeur : la droite ΗΔ et le côté droit (13), décrire autour du diamètre ΗΔ une hyperbole, où l'autre droite sera celle suivant

---

1. C'est-à-dire le quart de la figure rectangulaire ΗΔ × Κ ayant comme base le diamètre ΗΔ et comme hauteur le paramètre Κ correspondant aux ordonnées abaissées de la courbe sur ce diamètre.
2. Apollonius, *Les Coniques*, liv. II, prop. 3 : « Lorsqu'une droite est tangente à une hyperbole, elle rencontrera chacune des asymptotes ; elle sera coupée en deux parties égales au point de contact, et le carré de chacun de ses segments sera équivalent au quart de la figure obtenue sur le diamètre mené par le point de contact ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 120.
3. Parce que ΔΘ est parallèle à ΒΓ par construction.
4. Euclide, *Données*, prop. 26 (voir p. 214, n. 5).
5. Euclide, *ibidem*, prop. 2, énoncée p. 24, note 1.
6. Euclide, *ibidem*, prop. 27, énoncée p. 24, note 2.
7. Euclide, *Données*, prop. 26 (voir p. 214, n. 5). ΑΔ est donné de grandeur, donc : $A\Gamma = 2A\Delta$ est donné de grandeur.
8. Euclide, *Données*, prop. 52, énoncée p. 28, note 10.
9. On a (Apollonius, liv. II, prop. 3, énoncée en note plus haut) : $\overline{A\Delta}^2 = \frac{1}{4} H\Delta \times K$, d'où : $4\overline{A\Delta}^2 = \overline{A\Gamma}^2 = H\Delta \times K$.
10. Euclide, *Données*, prop. 26 (voir p. 214, n. 5).
11. ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά, le côté droit de lafigure, ou côté perpendiculaire de la figure rectangulaire ΗΔ × Κ ; expression qui désigne donc le paramère.
12. Euclide, *Données*, prop. 57, énoncée p. 144, note 5.
13. C'est-à-dire le diamètre ΗΔ et le paramètre Κ.

laquelle se rapportent les puissances (1), et où les droites menées d'une manière ordonnée sur le diamètre ΗΔ seront parallèles à une droite ΑΓ donnée de position. Cela est d'ailleurs résolu dans le premier livre des *Coniques* (2).

XLII.

La synthèse se fera de la manière suivante (3) :

Soient ΑΒ, ΒΓ les droites données de position et Δ le point donné. Menons la droite ΔΘ parallèle à la droite ΒΓ ; posons la droite ΘΑ égale à la droite ΒΘ, et prolongeons la droite de jonction ΑΔ jusqu'au point Γ. Prolongeons aussi la droite de jonction ΒΔ, et posons la droite ΒΗ égale à la droite ΒΔ. Enfin, que le carré de la droite ΑΓ soit équivalent au rectangle compris sous la droite ΗΔ et une autre droite Κ, et décrivons l'hyper-

---

1. παρ' ἣν δύνανται, suivant laquelle on a les puissances (sous-entendu : des ordonnées menées sur le diamètre), abréviation de l'expression habituelle complète : παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, littéralement : « la (droite) suivant laquelle sont en puissance les (droites) menées d'une manière ordonnée sur le diamètre », c'est-à-dire la droite suivant laquelle s'applique une aire rectangulaire équivalente à la puissance (au carré) des droites menées d'une manière ordonnée sur le diamètre. C'est l'expression par laquelle Apollonius et ses prédécesseurs, notamment Archimède, désignent la droite qui est la hauteur constante d'un rectangle ayant comme base l'abscisse d'un point de la conique, et dont l'aire dans la parabole, ou l'aire accrue d'une autre aire déterminée dans l'hyperbole, ou l'aire décrue d'une aire déterminée dans l'ellipse, équivaut au carré de l'ordonnée de ce même point ; droite caractéristique que nous appelons maintenant le paramètre, et qui est mise en évidence par l'équation cartésienne de la parabole : $y^2 = 2px$, par l'équation de l'hyperbole : $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$, et par celle de l'ellipse : $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$.

2. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, proposition 54, énoncée comme suit : « Etant données deux droites finies, perpendiculaires entre elles, dont l'une est prolongée du côté de l'angle droit, trouver, sur cette droite prolongée, une section de cône appelée hyperbole, située dans le plan de ces droites, de telle sorte que la droite prolongée soit le diamètre de la section, que le point situé à l'angle soit le sommet, et que le carré de toute droite abaissée de la section sur le diamètre, en faisant un angle égal à un angle donné, soit équivalent au rectangle qui, appliqué suivant l'autre droite, a comme largeur la droite découpée, à partir du sommet, par la droite abaissée, et est augmenté d'une figure semblable à celle qui est délimitée sous les droites originales et semblablement placée ». Cette proposition, considérant d'abord la construction de l'hyperbole dans un angle d'asymptotes droit, est suivie d'une proposition (55) relative à la construction de la courbe dans un angle d'asymptotes obtus ou aigu. Voir trad. de Paul Ver Eecke, pp. 101-106.

3. Voir la figure qui accompagne la partie analytique de la proposition.

bole ΕΔΖ de diamètre ΗΔ et de côté droit Κ [1] ; en sorte que les droites amenées [2] sur le diamètre ΗΔ soient parallèles à la droite ΑΓ. Dès lors, la droite ΑΓ est tangente à la section [3]. De plus, la droite ΑΔ est égale à la droite ΔΓ (puisque la droite ΒΘ est aussi égale à la droite ΘΑ) [4], et il est clair que le carré de chacune des droites ΑΔ, ΔΓ est le quart de la figure appliquée à la droite ΗΔ [5] ; par conséquent, les droites ΑΒ, ΒΓ sont les asymptotes de l'hyperbole ΕΔΖ [6]. Dès lors, une hyperbole est décrite par le point Δ à l'égard des droites asymptotes données.

XLIII.

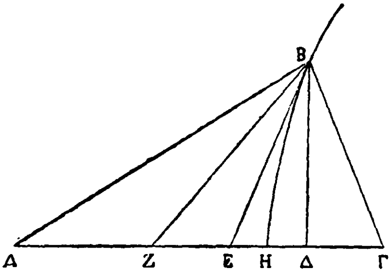
Proposition 34. — Fors l'inclinaison, la troisième partie d'un arc donné se retranche encore d'une autre manière, au moyen d'un lieu solide tel que celui-ci [7] :

Qu'une droite passant par des points Α, Γ soit donnée de position et, des points Α, Γ donnés sur cette droite, brisons une droite ΑΒΓ de manière que l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ

1. C'est-à-dire : de paramètre Κ.
2. Sous-entendu τεταγμένως, d'une manière ordonnée.
3. Apollonius, *Les Coniques*, liv. I, prop. 32 : « Si, par le sommet d'une section de cône, on mène une droite parallèle à une droite menée de manière ordonnée, elle sera tangente à la section, et nulle autre droite ne tombera dans l'espace situé entre la section de cône et cette droite ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 58.
4. Les droites ΔΘ, ΓΒ sont parallèles par construction et ΘΑ = ΒΘ ; donc : ΑΔ = ΔΓ.
5. On a par construction : $\mathrm{A\Delta} = \Delta\Gamma = \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}$, d'où : $\overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = \overline{\Delta\Gamma}^2 = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2$. Or, on a aussi par construction : $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \mathrm{H\Delta} \times \mathrm{K}$; d'où, comme le texte : $\overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = \overline{\Delta\Gamma}^2 = \frac{1}{4}\mathrm{H\Delta} \times \mathrm{K} = \frac{1}{4}$ figure rectangulaire appliquée sur le diamètre transverse ΗΔ comme base et ayant le paramètre Κ comme hauteur.
6. Apollonius, *Les Coniques*, liv. II, prop. 1 : « Si une droite est tangente au sommet d'une hyperbole, et si l'on sépare de cette droite, de part et d'autre du diamètre, une droite égale à celle dont le carré équivaut au quart de la figure, les droites qui vont du centre de la section aux extrémités ainsi déterminées de la tangente ne rencontreront pas la section ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 117.
7. C'est-à-dire que l'on peut aussi faire la trisection de l'angle ou de l'arc au moyen de l'intersection d'une droite et d'une section conique sans faire intervenir le problème de la droite inclinée dans une direction donnée et interceptée sur une longueur donnée.

soit le double de l'angle compris sous les droites ΓΑ, ΑΒ (1) ; je dis que le point Β appartient à une hyperbole (2).

Menons la perpendiculaire ΒΔ, et retranchons une droite ΔΕ égale à la droite ΓΔ. Dès lors, la droite de jonction ΒΕ sera égale à la droite ΑΕ (3). Posons aussi la droite ΕΖ égale à la droite ΔΕ ; il s'ensuit que la droite ΓΖ est le triple de la droite ΓΔ. Que la droite ΑΓ soit également le triple de la droite ΓΗ (4) ; il s'ensuit que le point Η est donné (5) et que la droite restante ΑΖ est le triple de la droite ΗΔ (6). Et puisque [le carré de la droite ΒΔ] (7) est l'excédent des carrés des droites ΒΕ, ΕΖ, le rectangle compris sous les droites ΔΑ, ΑΖ est aussi l'excédent de ces mêmes carrés ; donc, le rectangle compris sous les droites ΔΑ, ΑΖ, c'est-à-dire le triple du rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΗ, équivaut au carré de la droite ΒΔ (8).



1. En d'autres termes : prenons, en dehors d'une droite donnée, un point tel que l'on obtienne un triangle dans lequel les angles à la base sont l'un double de l'autre.

2. C'est-à-dire que tous les points pris de la même manière que le point Β par rapport à la droite ΑΓ appartiendront à une même hyperbole.

3. On a par construction : $E\Delta = \Delta\Gamma$, d'où : $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{B\Gamma A}$. Or, $\widehat{B\Gamma A} = 2\widehat{BA\Gamma}$. donc : $\widehat{BE\Gamma} = 2\widehat{BA\Gamma}$. Or, $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{BA\Gamma} + \widehat{ABE}$; donc : $\widehat{BA\Gamma} + \widehat{ABE} = 2\widehat{BA\Gamma}$ ou : $\widehat{ABE} = \widehat{BA\Gamma}$, d'où, comme le texte : $BE = AE$.

4. Euclide, liv. VI, prop. 9 : « D'une droite donnée retrancher une partie demandée ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 312.

5. Euclide, *Données*, prop. 27, énoncée p. 24, n. 2.

6. Posons : $A\Gamma = 3\Gamma H$. Or, on a : $\Gamma Z = 3\Gamma\Delta$; donc : $A\Gamma - \Gamma Z = 3\ (\Gamma H - \Gamma\Delta)$ ou : AZ (= partie restante de ΑΓ) $= 3H\Delta$.

7. Texte restauré par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 100, en note, l. 42) par les mots τὸ ἀπὸ ΒΔ, lesquels ont été repris dans l'édition critique de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 282, l. 14).

8. On a : $\overline{B\Delta}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{E\Delta}^2$. Or, on a posé : $EZ = E\Delta$; donc : $\overline{B\Delta}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{EZ}^2$. Considérant la droite ΖΔ divisée en deux parties égales en Ε et la droite ajoutée ΑΖ, la prop. 6 du liv. II d'Euclide (voir l'énoncé p. 43, note 3) qui démontre l'identité : $(a + b)\ b + \frac{a^2}{4} = (\frac{a}{2} + b)^2$, donne : $\Delta A \times AZ + \overline{EZ}^2 = \overline{AE}^2$, d'où : $\Delta A \times AZ = \overline{AE}^2 - \overline{EZ}^2$. Or, on a démontré que : $BE = AE$; donc : $\Delta A \times AZ = \overline{BE}^2 - \overline{EZ}^2$; d'où, comme le texte : $\Delta A \times AZ = \overline{B\Delta}^2$. Or (voir note pénultième), on a : $AZ = 3H\Delta$; donc : $3\Delta A \times H\Delta = \overline{B\Delta}^2$.

En conséquence, le point B est sur l'hyperbole dont le côté transverse de la figure (1) appliquée suivant l'axe est la droite AH et dont le côté droit (2) est le triple de la droite AH (3). Et il est clair que le point Γ découpe, contre le sommet H de la section (4), la droite ΓH qui est la moitié du côté transverse AH de la figure (5) (6).

Dès lors, la synthèse est manifeste. En effet, il faut couper la droite AΓ de manière que la droite AH soit le double de la

---

1. πλαγία (sous-entendu πλευρὰ) τοῦ εἴδους, le (côté) transverse de la figure, c'est-à-dire la longueur (ou base) de la figure rectangulaire caractéristique de l'hyperbole.

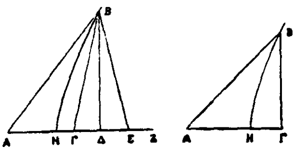
2. ὀρθία (sous-entendu πλευρά), le côté droit, c'est-à-dire la largeur (ou hauteur) de la figure rectangulaire caractéristique de l'hyperbole ; expression désignant donc le paramètre.

3. La relation de la note 8, page 218, donne : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta A \times H\Delta} = \frac{3}{1}$. Or (Apollonius, *Les Coniques*, liv. I, prop. 21 : « Si, dans l'hyperbole, dans l'ellipse, ou dans la circonférence de cercle, l'on mène des droites d'une manière ordonnée sur le diamètre, leurs carrés seront aux aires, délimitées sous les droites qu'elles découpent à partir des extrémités du côté transverse de la figure, comme le côté droit de la figure est au côté tranverse ; et ils seront entre eux comme les aires qui sont délimitées sous les droites découpées comme nous venons de le dire ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 43), on a : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta A \times H\Delta} = \frac{\text{côté droit (paramètre)}}{\text{côté transverse AH}}$; donc : $\frac{\text{côté droit (paramètre)}}{\text{côté transverse AH}} = \frac{3}{1}$, d'où, comme le texte : côté droit (paramètre) $= 3$ côtés transverses AH.

4. Sous-entendu : conique.

5. On a par construction : $A\Gamma = 3H\Gamma$ ou $AH + H\Gamma = 3H\Gamma$, d'où : $H\Gamma = \frac{1}{2}AH$.

6. La démonstration se rapportant visiblement au cas de l'angle AΓB aigu, elle a été reprise par Commandin pour les deux cas des angles obtus et droit (cfr. *loc. cit.*, p. 100), et le texte de Commandin a été reproduit librement par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, *Appendix*, p. 1230), dont nous traduisons ici le texte latin pour mémoire.



Que l'angle AΓB soit obtus. Dès lors, $\overset{\frown}{B\Gamma E} = \overset{\frown}{\Gamma EB}$ donc, $\overset{\frown}{BEZ} = \overset{\frown}{B\Gamma A} = 2\overset{\frown}{BA\Gamma}$ (par hypothèse). Mais on a aussi : $\overset{\frown}{BEZ} = \overset{\frown}{BA\Gamma} + \overset{\frown}{ABE}$; donc, $\overset{\frown}{BA\Gamma} = \overset{\frown}{ABE}$, d'où : $BE = AE$. Enfin, posant les mêmes choses que l'auteur grec, on a : $\Gamma H + \Gamma\Delta = \frac{1}{3}(A\Gamma + \Gamma Z)$ ou : $H\Delta = \frac{1}{3}AZ$, et le reste se poursuit comme dans le premier cas.

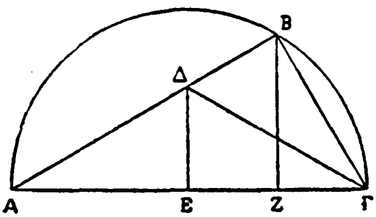
D'autre part, si l'angle AΓB est droit, et si l'on obtient de nouveau $\Gamma H = \frac{1}{3}A\Gamma$, on aura : $A\Gamma \times \Gamma H = \frac{1}{3}\overline{A\Gamma}^2 = \frac{1}{3}\overline{B\Gamma}^2$; donc, le point B est sur une hyperbole, etc.

droite $H\Gamma$ et décrire, autour de la droite AH comme axe, par le point H, l'hyperbole dont le côté droit de figure soit le triple de la droite AH ; puis démontrer qu'elle réalise le rapport du double des angles que nous avons dit. Et l'on verra aisément que l'hyperbole décrite de cette manière découpe un arc donné de cercle en trois parties si l'on suppose que les points A, Γ sont les extrémités de cet arc (1).

XLIV.

D'aucuns ont exposé la solution de la trisection de l'angle ou de l'arc d'une autre manière sans l'inclinaison, et nous allons faire le raisonnement sur l'arc, vu qu'il ne diffère en rien de découper un angle ou un arc.

Que la chose soit donc obtenue ; que la troisième partie $B\Gamma$ de l'arc $AB\Gamma$ soit découpée, et menons les droites de jonction AB, $B\Gamma$, ΓA. Dès lors, l'angle compris sous les droites $A\Gamma$, ΓB est double de l'angle compris sous les droites BA, $A\Gamma$. Coupons l'angle compris sous les droites $A\Gamma$, ΓB en deux parties égales par la droite $\Gamma\Delta$, et menons les perpendiculaires ΔE, ZB. Dès lors, la droite $A\Delta$ est égale à la droite $\Delta\Gamma$; de sorte que la droite AE est aussi égale à la droite $E\Gamma$ (2). En conséquence, le point E est donné (3). Et puisque la droite $A\Delta$ est à la droite ΔB, c'est-à-dire la droite AE à la droite EZ, comme la droite $A\Gamma$ est à la droite ΓB (4), il



1. L'achèvement du problème étant abandonné à la sagacité du lecteur, Commandin a donné la trisection de l'arc au moyen de l'hyperbole en question en note de sa version latine à laquelle nous renvoyons (Cfr. *loc. cit.*, p. 101).

2. Les angles $BA\Gamma$, $\Delta\Gamma A$ sont égaux ; l'un étant sous-tendu par un tiers de l'arc $AB\Gamma$, et l'autre étant la moitié de l'angle sous-tendu par deux tiers de l'arc $AB\Gamma$. Or, les angles en E sont droits; donc, les triangles ΔAE, $\Delta\Gamma E$ sont égaux.

3. Euclide, *Données*, prop. 7, énoncée p. 28, n. 4, et prop. 27, énoncée p. 24, n. 2.

4. Euclide, *Éléments*, liv. VI, prop. 3 : « Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle. et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 296.

s'ensuit que, par permutation, la droite BΓ est à la droite EZ comme la droite ΓA est à la droite AE. Or, la droite AΓ est le double de la droite AE ; donc, la droite BΓ est aussi le double de la droite EZ. En conséquence, le carré de la droite BΓ, c'est-à-dire la somme des carrés des droites BZ, ZΓ, est le quadruple du carré de la droite EZ (1). Dès lors, puisque deux points E, Γ sont donnés ; que la droite BZ est perpendiculaire, et que l'on a le rapport du carré de la droite EZ à la somme des carrés des droites BZ, ZΓ (2), il s'ensuit que le point B est sur une hyperbole (3). Mais, il est aussi sur un arc donné de position ; donc, le point B est donné, et la synthèse est manifeste (4).

---

1. On a (Euclide, liv. VI, prop. 3) : $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$. Or, $\frac{AE}{EZ} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$; donc : $\frac{AE}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$, d'où : $\frac{\Gamma B}{EZ} = \frac{A\Gamma}{AE}$. Or, $A\Gamma = 2AE$; donc : $\Gamma B = 2EZ$, d'où : $\overline{\Gamma B}^2 = 4\overline{EZ}^2$. Or, $\overline{\Gamma B}^2 = \overline{BZ}^2 + \overline{Z\Gamma}^2$; donc : $4\overline{EZ}^2 = \overline{BZ}^2 + \overline{Z\Gamma}^2$.

2. C'est-à-dire que le rapport $\frac{1}{4}$ résultant de l'expression de la note précédente est donné.

3. La conclusion est tirée sans démonstration. Pappus démontrera cependant au livre VII, propositions 236 et 237, que le point B sera sur une parabole, une ellipse ou une hyperbole, suivant que le rapport $\frac{\overline{EZ}^2}{\overline{BZ}^2 + \overline{Z\Gamma}^2}$ sera égal à l'unité, plus grand ou plus petit que l'unité.

D'ailleurs, ayant ici $\frac{\overline{EZ}^2}{\overline{BZ}^2 + \overline{Z\Gamma}^2} = \frac{1}{4}$, si l'on prend un point Θ (non indiqué sur la figure du texte) tel que l'on ait : $\Theta Z = \frac{1}{2} Z\Gamma$, on a : $\frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{Z\Gamma}^2} = \frac{1}{4}$; donc : $\frac{\overline{EZ}^2}{\overline{BZ}^2 + \overline{Z\Gamma}^2} = \frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{Z\Gamma}^2} = \frac{1}{4}$, d'où : $\frac{\overline{EZ}^2 - \overline{\Theta Z}^2}{\overline{BZ}^2} = \frac{1}{4}$. Dès lors, en procédant comme dans la proposition précédente (prop. 34) on déterminera sur la droite AΓ deux points dont les distances a et b du point Z sont telles que l'on ait : $a \times b = \overline{EZ}^2 - \overline{\Theta Z}^2$. En conséquence, on aura l'expression : $\frac{a \times b}{\overline{BZ}^2} = \frac{1}{4}$ qui, en vertu de la proposition 21 du livre I des *Coniques* d'Apollonius (énoncée p. 219, n. 3), caractérise une hyperbole passant par le point B, dont l'axe transverse sera $(a - b)$, et dont le paramètre sera : $4\,(a - b)$.

4. La synthèse (construction) du problème manque. Commandin l'a donnée avec des développements trop longs à résumer ici (Cfr. *loc. cit.*, pp. 103-104).

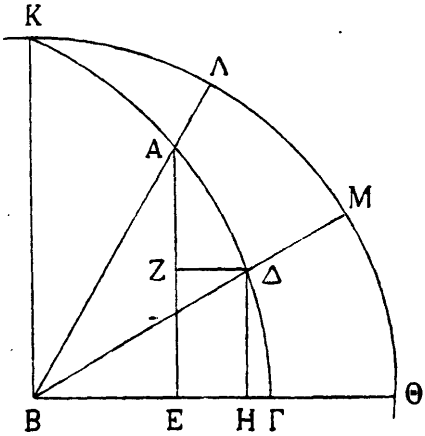
Un curieux petit ouvrage du commencement du XVIIe siècle traite de la trisection de l'angle sous le titre : *De Anguli rectilinei divisione in tres aequales demonstratio geometrica, seu expedita methodus lineandi trientem cujusque anguli rectilinei, venandi ejus numeratim sinum, tangentem et secantem, inscribendi quoque in circulo hennagonum regularem atque heptagonum accurate. Cui accessit consummata explicatio et demonstratio indivisibilium in continuo. Authore et inventore Ant. Rivano, Carpentoractense Doctore Medico.* Parisiis, excudebat Dionysius Langois, 1623, in-8°. (Exemplaire à la bibliothèque communale de Bruges, cat. n° 1965).

XLV.

Proposition 35. — Découper un angle ou un arc donné en trois parties égales est un problème solide, comme nous l'avons démontré plus haut, tandis que découper un angle ou un arc donné dans un rapport donné est un problème grammique (1) ; ce qui a d'ailleurs été démontré par les auteurs récents ; mais nous l'exposerons nous-même aussi de deux manières.

En effet, soit l'arc ΛΘ du cercle ΚΛΘ, et qu'il faille découper cet arc dans un rapport donné.

Menons les droites ΛΒ, ΒΘ sur le centre et la droite ΒΚ à angles droits sur la droite ΒΘ. Décrivons la ligne quadratrice ΚΑΔΓ par le point Κ (2), et coupons au point Ζ la droite ΑΕ menée perpendiculairement, de manière que le rapport de la droite ΑΖ à la droite ΖΕ soit le rapport donné dans lequel nous voulons partager l'angle. Menons la droite ΖΔ parallèle à la droite ΒΓ ; menons la droite de jonction ΒΔ (3) et la perpendiculaire ΔΗ. Dès lors, en raison de la propriété de la ligne (4), l'angle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ est à l'angle compris sous les droites ΔΒ, ΒΓ comme la droite ΑΕ est à la droite ΔΗ, c'est-à-dire à la droite ΖΕ (5) ; donc, par division, l'angle compris



1. C'est-à-dire exigeant l'emploi de courbes plus complexes que les coniques.
2. Quadratrice coupant la droite ΒΛ au point Α ; ce qui suppose que l'arc donné est plus petit qu'un quadrant.
3. Sous-entendu : que nous prolongeons jusqu'à l'arc, au point Μ.
4. C'est-à-dire : de la ligne quadratrice.
5. La propriété de la quadratrice (voir § XXX, p. 191) donne : $\frac{\text{arc } \Lambda\Theta}{\text{arc } \mathrm{M}\Theta} = \frac{\mathrm{AE}}{\Delta\mathrm{H}}$.

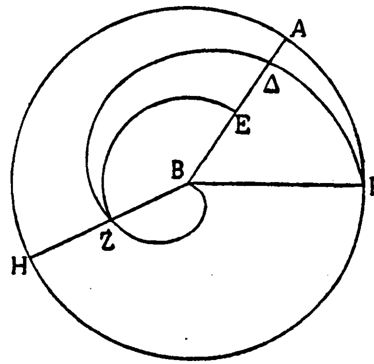
Or (Euclide, liv. VI, prop. 33, énoncée p. 181, note 1), on a : $\frac{\text{angle } \Lambda\mathrm{B}\Theta}{\text{angle } \mathrm{MB}\Theta} = \frac{\text{arc } \Lambda\Theta}{\text{arc } \mathrm{M}\Theta}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{angle } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{angle } \Delta\mathrm{B}\Gamma} = \frac{\mathrm{AE}}{\Delta\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ZE}}$.

sous les droites AB, BΔ est à l'angle compris sous les droites ΔB, BΓ, c'est-à-dire que l'arc ΛM est à l'arc MΘ, comme la droite AZ est à la droite ZE, c'est-à-dire dans le rapport donné (1).

XLVI.

On découpe d'ailleurs l'arc AΓ [du cercle] (2) AHΓ de cette autre manière-ci :

Menons pareillement les droites AB, BΓ au centre, et décrivons du point B (3) la spirale BZΔΓ dont la droite BΓ est la génératrice (4). Que le rapport de la droite ΔE à la droite EB soit le même que celui qui est donné ; décrivons par le point E, autour du point B comme centre, l'arc de cercle EZ coupant la spirale au point Z, et prolongeons la droite de jonction BZ jusqu'au point H. Dès lors, en vertu de la spirale, l'arc AHΓ est à l'arc ΓH comme la droite ΔB est à la droite BZ (5), c'est-à-dire à la droite BE, et, par division, l'arc AH est à l'arc HΓ comme la droite ΔE est à la droite EB. Or, le rapport de la droite ΔE à la droite EB est



1. L'expression de la note précédente donne : $\frac{\text{angle AB}\Gamma - \text{angle }\Delta\text{B}\Gamma}{\text{angle }\Delta\text{B}\Gamma} = \frac{\text{AE} - \text{ZE}}{\text{ZE}}$ ou : $\frac{\text{angle AB}\Delta}{\text{angle }\Delta\text{B}\Gamma} = \frac{\text{AZ}}{\text{ZE}}$. Or, $\frac{\text{angle AB}\Delta}{\text{angle }\Delta\text{B}\Gamma} = \frac{\text{arc }\Lambda\text{M}}{\text{arc M}\Theta}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{arc }\Lambda\text{M}}{\text{arc M}\Theta} = \frac{\text{AZ}}{\text{ZE}}$.

2. Lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 286, l. 19).

3. C'est-à-dire du point d'origine B.

4. τὴν ἐν τῇ γενέσει, littéralement : la (droite) qui est dans la génération ; droite qu'Archimède définit par l'expression ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, la (droite) initiale de révolution.

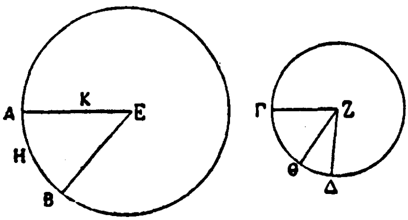
5. ARCHIMÈDE, traité *Des Spirales*, prop. 14 : « Si du point d'origine de la spirale on mène deux droites à une spirale décrite dans une première révolution, et si celles-ci sont prolongées jusqu'à la circonférence du premier cercle, les droites menées à la spirale auront entre elles le même rapport que les arcs de cercle situés entre l'extrémité de la spirale et les extrémités des droites prolongées aboutissant à la circonférence ; ces arcs étant pris de l'extrémité de la spirale vers l'avant ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 263.

le même que celui qui est donné ; donc, le rapport de l'arc AH à l'arc HΓ est aussi le même que celui qui est donné [1]. En conséquence, on a découpé l'arc, etc. [2].

XLVII.

Proposition 36. — D'après ce qui précède, il est clair qu'il est possible de retrancher des arcs égaux de deux cercles inégaux.

Que la chose soit obtenue ; soient AHB, ΓΘΔ les deux arcs égaux retranchés, et que le grand cercle soit celui qui est décrit autour du centre E. L'arc qui y est semblable à l'arc ΓΘΔ est donc plus grand que l'arc AHB. Dès lors, soit ΓΘ l'arc semblable à l'arc AHB ; il s'ensuit que le rapport de l'arc AHB à l'arc ΓΘ est donné, car il est le même que celui des circonférences entières des cercles ou des diamètres des cercles [3]. Mais, l'arc AHB est égal à l'arc ΓΘΔ ; donc, le rapport de l'arc ΓΘΔ à l'arc ΓΘ est donné aussi et, par division, aussi [4].



1. On a, en vertu de la proposition d'Archimède rappelée dans la note précédente : $\frac{\text{arc } \Gamma H A}{\text{arc } \Gamma H} = \frac{B\Delta}{BZ} = \frac{B\Delta}{BE}$, d'où : $\frac{\text{arc } \Gamma H A - \text{arc } \Gamma H}{\text{arc } \Gamma H} = \frac{B\Delta - BE}{BE}$, ou : $\frac{\text{arc } HA}{\text{arc } \Gamma H} = \frac{\Delta E}{BE}$.

2. C'est-à-dire découpé dans le rapport donné.

3. Les arcs AHB, ΓΘ, semblables par construction, donnent : angle AEB = angle ΓZΘ ; donc (Euclide, liv. V, prop 7) : $\frac{\text{angle } AEB}{4 \text{ angles droits}} = \frac{\text{angle } \Gamma Z \Theta}{4 \text{ angles droits}}$. Or, $\frac{\text{angle } AEB}{4 \text{ angles droits}} = \frac{\text{arc } AHB}{\text{circonf. cercle } E}$ et $\frac{\text{angle } \Gamma Z\Theta}{4 \text{ angles droits}} = \frac{\text{arc } \Gamma\Theta}{\text{circonf. cercle } Z}$; donc : $\frac{\text{arc } AHB}{\text{circonf. cercle } E} = \frac{\text{arc } \Gamma\Theta}{\text{circonf. cercle } Z}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{arc } AHB}{\text{arc } \Gamma\Theta} = \frac{\text{circonf. cercle } E}{\text{circonf. cercle } Z} = \frac{2AE}{2\Gamma Z}$ (= rapport donné).

Cette dernière expression suppose que la constance du rapport de la circonférence au diamètre est démontrée. Pappus donnera cependant plus loin deux démonstrations de ce théorème, l'une au livre V, prop. 11, l'autre au livre VIII, relatif à la mécanique, prop. 22.

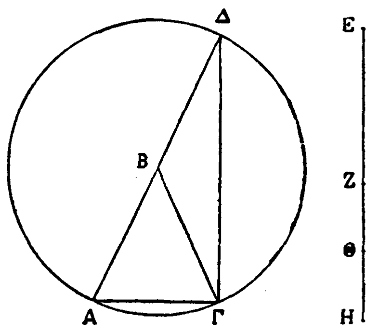
4. On a : $\frac{\text{arc } AHB}{\text{arc } \Gamma\Theta} = \frac{AE}{\Gamma Z}$, et on a par hypothèse : arc AHB = arc ΓΘΔ ; donc : $\frac{\text{arc } \Gamma\Theta\Delta}{\text{arc } \Gamma\Theta} = \frac{AE}{\Gamma Z}$, d'où : $\frac{\text{arc } \Gamma\Theta\Delta - \text{arc } \Gamma\Theta}{\text{arc } \Gamma\Theta} = \frac{\text{arc } \Theta\Delta}{\text{arc } \Gamma\Theta} = \frac{AE - \Gamma Z}{\Gamma Z}$ (= rapport donné).

En conséquence, nous avons à découper l'arc ΓΘΔ dans un rapport donné en un point Θ (1) ; chose qui a été exposée précédemment (2).

XLVIII.

Proposition 37. — Qu'il faille établir un triangle isocèle dont chacun des angles à la base ait un rapport donné avec l'angle restant.

Que la chose soit obtenue et soit ΑΒΓ le triangle ainsi établi. Décrivons, autour du point Β comme centre, le cercle ΑΓΔ passant par les points Α, Γ ; prolongeons la droite ΑΒ jusqu'au point Δ, et menons la droite de jonction ΔΓ. Dès lors, puisque le rapport de l'angle compris sous les droites ΓΑ, ΑΒ à l'angle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ est donné, et que l'angle au point Δ est la moitié de l'angle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ, il s'ensuit que le rapport de l'angle compris sous les droites ΓΑ, ΑΔ à l'angle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ est donné aussi ; en sorte que le rapport de l'arc ΔΓ à l'arc ΑΓ est donné aussi (3). En conséquence, puisque l'arc de demi-cercle ΑΓΔ est coupé dans un rapport donné, [le point Γ est donné] (4) et le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce (5).



1. Voir les deux manières de découper l'arc dans un rapport donné exposées dans la prop. 35.

2. Commandin a donné la construction (synthèse) de ce problème (cfr. *loc. cit.*, p. 106), et Hultsch l'a reprise et résumée dans une note de son édition critique (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 289). Nous traduisons cette note latine comme suit : La composition sera la suivante : Soit Ζ le centre du petit cercle, et posons ΑΚ = ΓΖ. Il faut découper, dans le cercle ΑΗΒ, un arc égal à ΓΘΔ. Coupons l'arc ΔΘΓ dans le rapport $\frac{ΑΞ - ΓΖ}{ΓΖ}$, c'est-à-dire dans le rapport $\frac{ΕΚ}{ΚΑ}$, et découpons un arc ΑΗΒ semblable à l'arc ΓΘ, lequel sera donc égal à l'arc ΓΘΔ.

3. Euclide, liv. VI, prop. 33, énoncée p. 181, note 1.

4. Le passage que nous avons mis entre crochets est suspect d'interpolation.

5. Le demi-cercle ΑΓΔ étant coupé dans un rapport donné au point Γ, les angles au centre ΑΒΓ, ΓΒΔ sont dans le même rapport ; donc (Euclide, *Données*,

La synthèse se fera de la manière suivante : Que le rapport que doit avoir chacun des angles à la base avec l'angle restant soit celui d'une droite EZ à une droite ZH ; coupons la droite ZH en deux parties égales au point Θ, et posons le cercle ΑΔΓ autour du point B comme centre et de la droite ΑΔ comme diamètre. Coupons l'arc ΑΓΔ au point Γ de manière que l'arc ΔΓ soit à l'arc ΓΑ comme la droite EZ est à la droite ZΘ (car cela a été exposé précédemment) [1] et menons les droites de jonction ΒΓ, ΓΑ, ΓΔ. Dès lors, puisque l'arc ΔΓ est à l'arc ΓΑ, c'est-à-dire que l'angle compris sous les droites ΔΑ, ΑΓ est à l'angle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ, comme la droite EZ est à la droite ZΘ et, considérant les doubles des conséquents, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΓΑ, ΑΒ est à l'angle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ comme la droite EZ est à la droite ZH [2]. En conséquence, on a établi le triangle isocèle ΑΒΓ dont chacun des angles à la base a un rapport donné avec l'angle restant.

IL.

Proposition 38. — Cela étant démontré, il est clair que l'on peut inscrire dans un cercle un polygone équilatéral et équiangle ayant autant de côtés qu'on lui assignera.

Proposition 39. — Au reste, il est facile de voir comment on trouve un cercle dont la circonférence est égale à une droite donnée.

En effet, que la circonférence du cercle A soit trouvée égale

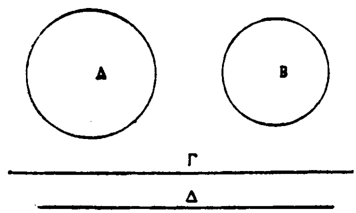
---

prop. 7, énoncée p. 28, note 4), ces angles sont donnés. Or, chacun des angles à la base du triangle ΑΒΓ vaut la moitié de l'angle donné ΓΒΔ ; donc, le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce, car la droite ΒΓ est donnée de position.

1. Voir proposition 35. Le texte présente ici la phrase probablement interpolée : καὶ κάθολου πῶς ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς δοθέντα λόγον τέμνεται ; et, d'une manière générale, comment un arc donné est coupé dans un rapport donné (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 290, l. 15).

2. On obtient, d'après la proposition 35 : $\frac{\text{arc } \Delta\Gamma}{\text{arc } \Gamma A} = \frac{EZ}{Z\Theta}$. Or, $\frac{\text{angle } \Delta A\Gamma}{\text{angle } A\Delta\Gamma} = \frac{\text{arc } \Delta\Gamma}{\text{arc } A\Gamma}$; donc : $\frac{\text{angle } \Delta A\Gamma}{\text{angle } A\Delta\Gamma} = \frac{EZ}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{\text{angle } \Delta A\Gamma}{2 \text{ angles } A\Delta\Gamma} = \frac{EZ}{2Z\Theta}$ ou : $\frac{\text{angle } \Delta A\Gamma = \text{angle } \Gamma AB}{\text{angle } AB\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$.

à une droite Γ ; posons un cercle quelconque B, et trouvons, au moyen de la quadratrice, la droite Δ qui est égale à sa circonférence (1). Dès lors, le rayon du cercle A est au rayon du cercle B comme la droite Γ est à la droite Δ (2). Or, on a le rapport de la droite Γ à la droite Δ ; donc, on a aussi le rapport des rayons entre eux. Et le rayon du cercle B est donné ; donc, le rayon du cercle A est donné aussi (3) ; en sorte que le cercle A lui-même est donné aussi (4) ; et la synthèse est manifeste.

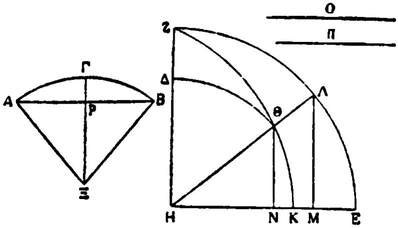


L.

Proposition 40. — Une droite AB étant donnée de position et de grandeur, décrire par les points A, B un arc de cercle ayant un rapport donné avec la droite AB.

Que l'arc AΓB soit décrit ; posons un quadrant de cercle ZHE donné de position (5) ; décrivons la quadratrice ZΘK ; établissons pour l'arc ZE un angle compris sous les droites EH, HΛ égal à l'angle qui s'appuie sur l'arc AΓ (6), et menons les perpendiculaires ΛM, ΘN. Dès lors, en vertu de la propriété de la ligne (7), l'arc ΛE sera à la droite ΘN comme l'arc EΛZ est à la droite ZH, c'est-à-dire comme la droite ΛH est à la droite HK. Mais, la droite ΘN est aussi à la droite ΛM comme la droite ΘH est à la droite HΛ ; donc, l'arc EΛ est aussi à la droite ΛM comme la

1. Voir proposition 26.
2. Voir page 224, note 3, *in fine*.
3. Euclide, *Données*, prop. 2, énoncée p. 24, note 1.
4. Euclide, *ibidem*, définition 5 : « Un cercle dont le rayon est donné de grandeur, est donné de grandeur ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 302.
5. Le texte nous paraît avoir perdu à cet endroit, ou bien l'auteur aura négligé d'ajouter, les mots καὶ τῷ μεγέθει, c'est-à-dire : et de grandeur ; puisque le cours de la démonstration amènera à reconnaître qu'une droite du quadrant considéré est donnée, non seulement de position, mais encore de grandeur.
6. C'est-à-dire un angle ayant son sommet au centre du cercle auquel appartient l'arc AΓB.
7. C'est-à-dire de la ligne quadratrice. Voir p. 191.



droite ΘH est à la droite HK (1). Prenons le centre Ξ de l'arc ΑΓΒ, et menons la perpendiculaire ΞΡΓ sur la droite AB ; l'angle compris sous les droites ΓΞ, ΞΑ est donc égal à l'angle compris sous les droites EH, HΛ (2). Et les points Ξ, H sont des centres ; donc, [l'arc ΑΓΒ est à la droite AB] (3) comme l'arc ΑΓ est à la droite ΑΡ, c'est-à-dire comme la droite ΘH est à la droite HK (4). Et on a le rapport de l'arc ΑΓΒ à la droite AB (5) ; donc, on a aussi le rapport de la droite ΘH à la droite HK. Or, la droite HK est donnée (6) ; donc, la droite HΘ est donnée aussi (7) ; donc le point Θ est sur une circonférence (8). Mais, il est aussi sur la ligne ZΘK (9) ; donc, le point Θ est

1. On a, par propriété de la quadratrice : $\frac{\text{arc } \Lambda E}{\Theta N} = \frac{\text{arc } Z\Lambda E}{ZH}$. Or, la proposition 26 (voir p. 194) a démontré que l'on a : $\frac{\text{arc } Z\Lambda E}{ZH} = \frac{ZH}{HK} = \frac{\Lambda H}{HK}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{arc } \Lambda E}{\Theta N} = \frac{\Lambda H}{HK}$. Or, $\frac{\Theta N}{\Lambda M} = \frac{\Theta H}{\Lambda H}$; donc, par raison d'égalité en proportion troublée (EUCLIDE, liv. V, prop. 23 : « Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières ; si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et si leur proportion est troublée, ces grandeurs auront la même raison par égalité ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 283), ou bien encore, par produit, on aura : $\frac{\text{arc } \Lambda E}{\Theta N} \times \frac{\Theta N}{\Lambda M} = \frac{\Lambda H}{HK} \times \frac{\Theta H}{\Lambda H}$, ou, comme le texte : $\frac{\text{arc } \Lambda E}{\Lambda M} = \frac{\Theta H}{HK}$.
2. Par construction.
3. Lacune comblée par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 110).
4. On a : $\frac{\text{arc } A\Gamma B}{AB} = \frac{\text{arc } A\Gamma}{AP}$. Or, les arcs ΛE, ΑΓ qui sous-tendent des angles égaux dans des cercles différents donnent : $\frac{\text{arc } E\Lambda}{\text{arc } A\Gamma} = \frac{H\Lambda}{A\Xi}$, et les triangles semblables ΛHM, ΑΞΡ donnent : $\frac{\Lambda M}{AP} = \frac{H\Lambda}{A\Xi}$; donc : $\frac{\text{arc } E\Lambda}{\text{arc } A\Gamma} = \frac{\Lambda M}{AP}$, d'où : $\frac{\text{arc } E\Lambda}{\Lambda M} = \frac{\text{arc } A\Gamma}{AP}$, d'où, en présence de la relation : $\frac{\text{arc } \Lambda E}{\Lambda M} = \frac{\Theta H}{HK}$, démontrée plus haut, il vient : $\frac{\text{arc } A\Gamma}{AP} = \frac{\Theta H}{HK}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{arc } A\Gamma B}{AB} = \frac{\Theta H}{HK}$.
5. Par hypothèse.
6. Le quadrant étant donné de position et de grandeur, la droite HE est donnée de grandeur ; donc, la droite HK qui, en vertu de la quadratrice, est dans un rapport donné avec la droite HE, est donnée aussi.
7. EUCLIDE, *Données*, prop. 2, énoncée p. 24, note 1.
8. Sur une circonférence donnée de centre H et de rayon HΘ.
9. Par hypothèse.

donné ; donc, la droite HΘΛ est donnée de position (1). En conséquence, l'angle compris sous les droites EH, HΛ est donné (2). Or, cet angle est égal à celui qui est compris sous les droites ΓΞ, ΞA ; la droite ΓΞ est donnée de position et le point A est donné ; donc, la droite AΞ est donnée de position ; en sorte que l'arc AΓB est donné aussi (3).

Et la synthèse est manifeste. En effet, il faut faire en sorte que le rapport d'une droite ΔH à la droite HK soit le même qu'un rapport donné (4) ; puis, décrire autour du centre H un arc passant par le point Δ ; prendre le point Θ où cet arc coupe la quadratrice, et mener la droite de jonction ΘH. Enfin, coupant la droite AB en deux parties égales, et élevant la perpendiculaire PΞ, il faut mener la droite AΞ comprenant avec la droite ΞP un angle égal à celui qui est compris sous les droites KH, HΘ, et décrire, autour du centre Ξ, par le point A, l'arc de cercle AΓB dont le rapport avec la base AB sera le même que le rapport donné.

LI.

Proposition 41. — Il n'est pas invraisemblable qu'on puisse trouver (5) des angles incommensurables ; car, en vertu de ce qui

---

1. Euclide, *Données*, prop. 26, énoncée p. 214, note 5.

2. Euclide, *ibidem*, prop. 30 : « Si d'un point donné, on mène à une droite donnée une ligne droite faisant un angle donné, la droite menée est donnée de position ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 344. Cette proposition est toutefois invoquée ici dans sa réciproque.

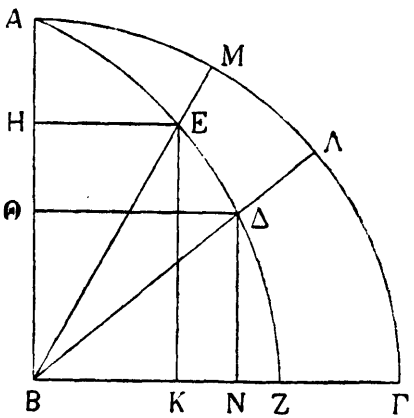
3. Le point A est donné ; l'angle AΞΓ est donné ; donc, son double, l'angle AΞB est donné, d'où (Euclide, *Données*, prop. 90 : « Si dans la circonférence d'un cercle donné de position l'on prend un point donné, et si de ce point on mène une droite qui, étant brisée à la circonférence, fasse un angle donné, l'autre extrémité de la ligne brisée sera donnée ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 467) le point B est donné ; donc (Euclide, *Données*, prop. 26, énoncée p. 214, n. 5), la droite AB est donnée de position et de grandeur ; d'où (Euclide, *Données*, définition 8 : « Des segments sont dits donnés de position et de grandeur, quand les angles qu'ils comprennent sont donnés de grandeur, et que les bases des segments sont données de position et de grandeur ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 302), l'arc AΓB est donné.

4. C'est-à-dire que la droite HK étant donnée par la quadratrice, on doit déterminer une droite ΔH telle que l'on ait : $\frac{\Delta H}{HK} = \frac{O}{\Pi}$, les deux droites O, Π étant simplement tracées dans la figure, mais non mentionnées dans le texte.

5. C'est-à-dire au moyen de la quadratrice.

précède, des arcs incommensurables d'un même cercle sont pris aussi, et si l'on suppose qu'un seul angle ou arc est rationnel, le restant (1) deviendra irrationnel.

Exposons un quadrant ΑΒΓ et, dans celui-ci, la quadratrice ΑΕΔΖ. Menons transversalement une droite ΒΕ ; menons la droite ΕΗ parallèle à la droite ΒΓ, et découpons une droite ΒΘ incommensurable en longueur avec la droite ΒΗ. Enfin, menons la parallèle ΔΘ (2) et la droite de jonction ΔΒ ; je dis que l'angle compris sous les droites ΕΒ, ΒΖ est incommensurable avec l'angle compris sous les droites ΔΒ, ΒΖ.



Menons la perpendiculaire ΔΝ. Dès lors, en vertu de la ligne (3), l'angle compris sous les droites ΕΒ, ΒΖ est à celui qui est compris sous les droites ΔΒ, ΒΖ comme la droite ΕΚ est à la droite ΔΝ (4). Or, la droite ΕΚ est incommensurable avec la droite ΔΝ (car la droite ΗΒ est aussi incommensurable avec la droite ΒΘ) ; donc, l'angle sera aussi incommensurable avec l'angle. Et si nous supposons que l'angle compris sous les droites ΕΒ, ΒΖ est rationnel (5), l'angle compris sous les droites ΔΒ, ΒΖ sera irrationnel.

1. C'est-à-dire l'angle ou l'arc restant.
2. Sous-entendu : à la droite ΕΗ.
3. En vertu de la propriété de la quadratrice ΑΕΔΖ décrite dans le quadrant ΑΒΓ.
4. On a, par propriété de la quadratrice (voir § XXX, p. 191) : $\frac{\text{arc } M\Gamma}{\text{arc } \Lambda\Gamma}=\frac{EK}{\Delta N}$. Or (Euclide, liv. VI, prop. 33, énoncée p. 181), on a : $\frac{\text{angle } MB\Gamma}{\text{angle } \Lambda B\Gamma}=\frac{\text{arc } M\Gamma}{\text{arc } \Lambda\Gamma}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{angle } EBZ}{\text{angle } \Delta BZ}=\frac{EK}{\Delta N}$; donc (Euclide, liv. X, prop. 10 : « Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième ; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième ». Voir trad. de Peyrard, vol. II, p. 140) : les angles ΕΒΖ, ΔΒΖ sont incommensurables entre eux.
5. Le texte présente ici la petite interpolation : κἂν ἡμίσειαν ὀρθῆς, et si (l'angle) est la moitié d'un (angle) droit (Cfr. Hultsch, vol. I, p. 298, l. 1).

LII.

PROPOSITION 42. — Je t'ai exposé la solution de l'inclinaison [1] qui a été assumée par Archimède dans son livre sur *Les Spirales* [2], afin que tu ne sois pas embarrassé en parcourant ce livre. On assume d'ailleurs pour cette solution les lieux exposés ci-après, qui sont encore utiles pour beaucoup d'autres problèmes solides.

Soit une droite AB donnée de position, et qu'une droite ΓΔ tombe d'un point Γ sur elle. Menons la droite ΔE à angles droits sur la droite AB, et que l'on ait le rapport de la droite ΓΔ à la droite ΔE ; je dis que le point E est sur une hyperbole [3].

Menons par le point Γ la droite ΓZ parallèle à la perpendiculaire ; il s'ensuit que le point Z est donné [4]. Menons la droite EH parallèle à la droite AB [5], et que le rapport de la droite ΓZ à chacune des droites ZΘ, ZK soit le même que celui de la droite ΓΔ à la droite ΔE [6] ; il s'ensuit que chacun des points Θ et K est donné [7]. Dès lors, puisque le carré de la droite ΓΔ est [au carré de la droite ΔE] [8] comme le carré de

1. C'est-à-dire la résolution du problème de la droite inclinée (ou dirigée vers un point donné et interceptée sur une longueur donnée entre deux lignes (droites ou cercles). Voir plus haut ce qui précède la proposition 31.

2. ARCHIMÈDE, *Les Spirales*. Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 239-299.

3. L'hyperbole ne désignant chez les géomètres grecs que l'une des deux branches de la section conique, le théorème ne détermine donc le lieu du point E que du côté de la droite AB où est située la perpendiculaire ΔE. Le lieu complet se compose effectivement des deux branches de l'hyperbole qu'Apollonius appelle les opposées.

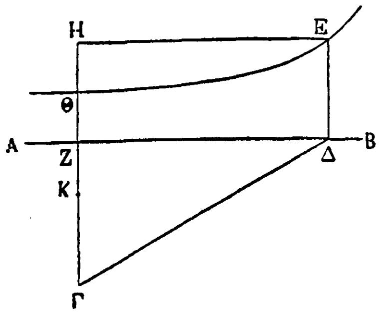
4. EUCLIDE, *Données*, prop. 28 : « Si, par un point donné, une ligne droite est menée parallèlement à une droite donnée de position, la droite menée est donnée de position ». (Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 342), et EUCLIDE, *Données*, prop. 25, énoncée p. 214, n. 6.

5. Sous-entendu : rencontrant au point H la droite ΓZ prolongée.

6. Les points Γ, Z étant donnés, la droite ΓZ est donnée de grandeur (EUCLIDE, *Données*, prop. 26, énoncée p. 214, n. 5) ; donc, on peut découper sur la droite ΓZ, prolongée de part et d'autre de la droite AB, deux droites égales ZΘ, ZK données de grandeur égale à $\Gamma Z \times \frac{\Delta E}{\Gamma\Delta}$ (EUCLIDE, *Données*, prop. 2, énoncée p. 24, n. 1). Or, ces droites sont aussi données de position (EUCLIDE, *Données*, prop. 28, énoncée dans la note avant-précédente).

7. EUCLIDE, *Données*, prop. 27, énoncée p. 24, n. 2.

8. Lacune comblée par Commandin dans sa version latine (*loc. cit.*, p. 111), et restauration par Hultsch au moyen des mots πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔE (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 298, l. 22).



la droite ΓZ est au carré de la droite ZΘ (1) ; il s'ensuit que le rapport du carré restant de la droite ZΔ, c'est-à-dire du carré de la droite EH, au rectangle restant compris sous les droites KH, HΘ est donné (2). Or, les points K, Θ sont donnés ; donc, le point E est sur l'hyperbole qui passe par les points Θ, E (3).

LIII.

PROPOSITION 43. — Soit une droite AB donnée de position et de grandeur ; menons la droite ΔΓ à angles droits, et que le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB soit équivalent à celui

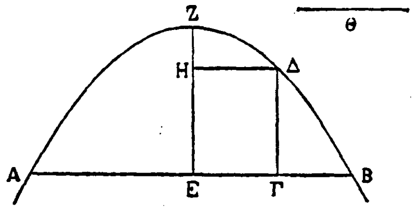
1. EUCLIDE, *Données*, prop. 50 : « Si deux droites ont entre elles une raison donnée, les figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites, auront une raison donnée ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 383.

2. Ce passage un peu concis s'explique par l'emploi de l'expression « carré restant ». En effet, on a par hypothèse : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}=\frac{\Gamma Z}{Z\Theta}=\frac{\Gamma Z}{ZK}$ (= rapport donné). Donc, on a : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2}=\frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\overline{Z\Theta}^2}$ (= rapport donné), d'où : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2-\overline{\Gamma Z}^2}{\overline{\Delta E}^2-\overline{Z\Theta}^2}=\frac{\overline{Z\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2-\overline{Z\Theta}^2}$ (= rapport donné) (I). Or (EUCLIDE, liv. II, prop. 4 : « Si une droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 88), si nous considérons l'identité $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, on a : $\overline{\Delta E}^2=\overline{ZH}^2=\overline{Z\Theta}^2+\overline{\Theta H}^2+2Z\Theta\times\Theta H$. Or, $2Z\Theta\times\Theta H=K\Theta\times\Theta H$; donc : $\overline{\Delta E}^2=\overline{Z\Theta}^2+\overline{\Theta H}^2+K\Theta\times\Theta H$; d'où : $\overline{\Delta E}^2-\overline{Z\Theta}^2=\overline{\Theta H}^2+K\Theta\times\Theta H$. Or (EUCLIDE, liv. II, prop. 3 : « Si une ligne droite est coupée à volonté, le rectangle contenu sous la droite entière et l'un des segments est égal au rectangle contenu sous les segments et au carré du segment premièrement dit ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 86), si nous considérons l'identité $(a+b)\,b=ab+b^2$ appliquée à la droite KH divisée en deux parties inégales au point Θ, on a : $KH\times\Theta H=\overline{\Theta H}^2+K\Theta\times\Theta H$; donc : $\overline{\Delta E}^2-\overline{Z\Theta}^2=KH\times\Theta H$; d'où substituant dans l'expression (I), il vient, comme dans le texte : $\frac{\overline{Z\Delta}^2}{KH\times\Theta H}=\frac{\overline{EH}^2}{KH\times\Theta H}=\frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\overline{Z\Theta}^2}$ (= rapport donné).

3. Les points Θ, E seront donc sur l'hyperbole dont le côté transverse, ou diamètre, est la droite ΘK. Or (APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. 21, énoncée p. 219, n. 2), on a : $\frac{\text{paramètre}}{\text{diamètre } \Theta K}=\frac{\overline{EH}^2}{KH\times\Theta H}$, d'où : paramètre $=\Theta K\times\frac{\overline{EH}^2}{KH\times\Theta H}$.

qui est compris sous une droite donnée et la droite ΓΔ ; je dis que le point Δ appartient à une parabole donnée de position (1).

En effet, coupons la droite AB en deux parties égales au point E ; menons la droite EZ à angles droits, et que le rectangle compris sous la droite donnée et la droite EZ soit équivalent au carré de la droite EB. Dès lors, le point Z est donné (2). De plus, menons la droite ΔH parallèle à la droite AB ; il s'ensuit que le carré restant de la droite EΓ, c'est-à-dire le carré



de la droite HΔ, équivaut au rectangle compris sous la droite donnée et la droite ZH (3). Or, le point Z est donné ; donc, le point Δ appartient à la parabole qui passe par les point A, Z, B, dont l'axe est la droite EZ (4).

1. C'est-à-dire que, si la perpendiculaire ΔΓ est de grandeur telle que l'expression $\frac{A\Gamma \times \Gamma B}{\Delta\Gamma} = \Theta$ soit donnée, le point Δ sera sur une parabole.

2. En effet, la droite EZ est donnée de longueur (EUCLIDE, *Données*, prop. 57, énoncée p. 144, n. 5), et elle est donnée aussi de position (EUCLIDE, *Données*, prop. 30, énoncée p. 229, n. 2) ; donc, le point Z est donné (EUCLIDE, *Données*, prop. 27, énoncée p. 24, n. 2).

3. On a par construction : $\overline{EB}^2 = \Theta \times EZ$. Or (EUCLIDE, liv. II, prop. 5 : « Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière, avec le carré de la droite placée entre les sections, est égal au carré de la moitié de la droite entière ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 93), si nous appliquons l'identité $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ à la droite AB, divisée en parties égales en E et en parties inégales en Γ on a : $A\Gamma \times \Gamma B + \overline{E\Gamma}^2 = \overline{EB}^2$; donc : $A\Gamma \times \Gamma B + \overline{E\Gamma}^2 = \Theta \times EZ$. Or, on a par hypothèse : $A\Gamma \times \Gamma B = \Theta \times \Gamma\Delta$; donc : $\Theta \times \Gamma\Delta + \overline{E\Gamma}^2 = \Theta \times EZ$; d'où : $\overline{E\Gamma}^2 = \Theta\,(EZ - \Gamma\Delta) = \Theta(EZ - HE) = \Theta \times ZH$; d'où, comme le texte : $\overline{H\Delta}^2 = \Theta \times ZH$.

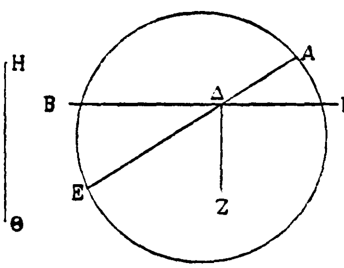
4. Les première et dernière expressions de la note précédente donnent : $\frac{\overline{EB}^2}{\overline{H\Delta}^2} = \frac{\Theta \times EZ}{\Theta \times ZH} = \frac{EZ}{ZH}$; donc (APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. 20 : Si, dans la parabole, l'on amène deux droites d'une manière ordonnée de la section sur le diamètre, les droites qu'elles découpent sur ce diamètre, du côté du sommet, seront entre elles comme les carrés des premières droites ». Voir traduction de P. Ver Eecke, p. 42), le point Δ est sur la parabole dont l'axe est la droite EZ et dont le paramètre sera la droite donnée Θ.

LIV.

Proposition 44. — Ces choses étant démontrées au préalable [on démontre la solution] (1) proposée plus haut (2) en adoptant la manière suivante :

Un cercle ΑΒΓ étant donné de position ; une droite ΒΓ étant donnée de position (3) dans ce cercle et un point Α étant donné sur la circonférence, il faut établir, entre la droite ΒΓ et l'arc ΒΕΓ, une droite égale à une droite donnée ΗΘ et inclinée vers le point Α (4).

Que la chose soit obtenue ; posons une droite égale à la droite ΕΔ (5), et menons, perpendiculairement à la droite ΒΓ, la droite ΔΖ égale à la droite ΑΔ. Dès lors, puisque, du point donné Α, on a jeté une droite ΑΔ sur la droite ΒΓ donnée de position et, qu'à partir du point Δ, cette droite est égale à celle qui a été établie à angles droits (6),



1. Lacune comblée conjecturalement par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, *appendix*, p. 1232, l. 31).

2. C'est-à-dire la solution du problème d'inclinaison dont il est question au début de la proposition 42.

3. La droite ΒΓ pouvant aussi être extérieure au cercle, la solution ne visera donc qu'un cas particulier du problème d'inclinaison.

4. Le texte de cette proposition est malheureusement effacé presque complètement dans le manuscrit archétype (Vaticanus graecus, 218), et il se présente avec de si nombreuses lacunes dans les manuscrits subséquents, que Commandin a vu ici un « locus desperatus » et a abandonné cette proposition dans sa version latine (cfr. *loc. cit.*, p. 112). D'autre part, Hultsch avait donné d'abord dans son édition critique un texte lacuneux tout à fait incompréhensible, accompagné d'une figure conjecturale inacceptable (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 303), lorsque Richard Baltzer, en 1877, lui communiqua une note critique dans laquelle il reconstituait une figure, telle qu'elle devait avoir rationnellement accompagné le texte dont il proposait de reconstituer certaines lacunes de la manière la plus heureuse. Cette note a été publiée par Hultsch en annexe de son édition, avec un texte reconstitué que nous avons suivi dans notre traduction (Cfr. *loc. cit.*, vol. III, *appendix*, pp. 1231-1233).

5. C'est-à-dire posons la droite ΗΘ qui sera donnée aux fins de la synthèse (construction) de la proposition.

6. C'est-à-dire que le rapport de ΔΑ à ΔΖ, égal à l'unité, est donné pour répondre à l'une des conditions de la proposition 42.

[il s'ensuit que le point Z est] (1) sur une hyperbole (2). Derechef, puisque le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites ZΔ, ΔE, et que la droite ΔE est donnée, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous une droite donnée et la droite ΔZ. En conséquence, le point Z est sur une parabole (3) ; donc, le point Z est donné (4).

C'est d'un problème analogue à celui-ci qu'Archimède a fait usage pour démontrer que la circonférence du cercle est égale à une certaine droite (5), et d'aucuns lui ont reproché d'avoir employé un problème solide autrement qu'il convenait de le faire (6) .... (7) ; ils montrent que l'on peut également trouver une droite égale à la circonférence du cercle au moyen des plans (8), en utilisant les théorèmes que nous avons donnés sur la spirale.

---

1. Lacune comblée conjecturalement par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1233, l. 6).
2. En vertu de la proposition 42, le point Z sera donc sur l'hyperbole dont l'axe transverse sera le double de la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite BΓ, et dont le paramètre sera déterminé par l'expression donnée p. 232, n. 2.
3. Les sécantes BΓ, EA du cercle donnent : $B\Delta \times \Delta\Gamma = A\Delta \times \Delta E$. Or, on a posé : $\Delta Z = \Delta A$; donc, comme le texte : $B\Delta \times \Delta\Gamma = \Delta Z \times \Delta E$. Or, la droite ΔE est donnée ; donc, la droite ΔZ est de grandeur déterminée par l'expression donnée : $\frac{B\Delta \times \Delta\Gamma}{\Delta E}$. Or, la proposition 43 a démontré que, dans ces conditions, le point Z est sur une parabole.
4. Le point Z est donc l'une des intersections d'une hyperbole et d'une parabole données de position ; donc, le point Z est donné. Dès lors, la construction de la droite inclinée sur le point A, interceptée sur la longueur donnée HΘ, se réduit à abaisser la perpendiculaire ZΔ du point Z donné et à prolonger la droite de jonction AΔ jusqu'au point E.
5. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, proposition 18, énoncée p. 200, n. 4.
6. C'est-à-dire d'avoir employé subsidiairement dans les propositions 5, 6, 7, 8 et 9 du traité *Des Spirales*, le problème de la sécante interceptée sur une longueur donnée dans une direction donnée, en faisant simplement appel à l'intuition et au principe de continuité. Voir *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 246-253.
7. Lacune irrémédiable affectant une vingtaine de caractères.
8. C'est-à-dire au moyen de problèmes utilisant des lignes (droites ou circonférences de cercle) qui trouveront leur origine dans le plan.

LIVRE V DE LA COLLECTION DE PAPPUS D'ALEXANDRIE

IL CONTIENT LES COMPARAISONS DES FIGURES PLANES AYANT MÊME PÉRIMÈTRE ENTRE ELLES ET AVEC LE CERCLE, ET LES COMPARAISONS DES FIGURES SOLIDES AYANT MÊME SURFACE ENTRE ELLES ET AVEC LA SPHÈRE.

La divinité, cher Mégéthius, a donné aux hommes la conception la plus haute et la plus parfaite de la sagesse et des mathématiques, mais n'a octroyé ce privilège que partiellement aux animaux. Elle a, en effet, accordé aux hommes de pouvoir, de par leur intelligence, faire toute chose par raison et en connaissance de cause et, quant aux autres êtres vivants, elle a octroyé à chacun d'eux la faculté d'acquérir ce qui leur est utile et de nécessité vitale, non plus par raison, mais grâce à une certaine intuition naturelle. On peut d'ailleurs observer la réalité de ce fait chez un grand nombre d'espèces animales, et tout particulièrement chez les abeilles. En effet, non seulement il y a lieu d'admirer leur discipline et leur soumission envers celles qui dirigent le gouvernement établi parmi elles ; mais, ce qui étonne encore plus, c'est leur zèle, leur propreté dans la récolte du miel, leur vigilance et leur sagesse en vue de sa conservation. On dirait que, convaincues que c'est de la part des dieux qu'elles apportent cette parcelle d'ambroisie aux hommes cultivés, les abeilles n'ont pas cru bon de répandre leur miel au hasard sur le sol, sur du bois ou sur quelque autre matière informe et irrégulière ; elles choisissent les plus belles fleurs parmi les plus agréables qui croissent à la surface de la terre et, pour contenir ce miel, elles construisent des vaisseaux qu'on appelle des alvéoles, tous égaux entre eux, semblables, juxtaposés et de la forme hexagonale. Au reste, voici comment on se rend compte de ce qu'elles parviennent à ce résultat à la faveur d'une certaine intuition géométrique. Elles ont cru que ces figures devaient être absolument juxtaposées et avoir leurs côtés communs, afin que des substances étrangères ne puissent tomber dans leurs intervalles et venir souiller ainsi le fruit de leurs travaux. Or, trois figures rectilignes étaient susceptibles de remplir cette condition, c'est-à-dire des figures régulières (1), équilatérales et [équiangles ; car les] (2) figures dissemblables répugnaient aux abeilles, et ce sont donc les triangles, les quadrilatères et les hexagones équilatéraux juxtaposés qui peuvent avoir ainsi leurs côtés communs sans qu'il y ait entre eux des compléments dissemblables (3). En effet, l'espace qui règne autour d'un même point est rempli par six triangles équilatéraux en raison de six angles dont chacun vaut les deux tiers d'un angle droit ; par quatre carrés en raison de quatre angles droits, et par trois hexagones en raison de trois angles d'hexagones dont chacun vaut un angle droit et un tiers. Mais, trois pentagones ne suffisent plus pour remplir l'espace qui règne autour d'un même point, tandis que quatre excèdent cet espace, parce que trois angles de pentagones sont plus petits que quatre angles droits (car chacun d'eux vaut un angle droit et un cinquième), et que quatre de ces angles dépassent quatre angles droits. Et trois heptagones ne peuvent pas non plus être disposés autour d'un même point en étant juxtaposés entre eux suivant leurs côtés, parce que trois angles d'heptagones dépassent quatre angles droits (car chacun d'eux vaut un angle droit et trois septièmes) ; et le même raisonnement peut s'appliquer, à fortiori, aux polygones plus élevés. En conséquence, comme il y a trois figures au moyen desquelles on peut remplir l'espace qui règne autour d'un même point : le triangle, le carré et l'hexagone, les abeilles

1. τεταγμένα, (figures) ordonnées, c'est-à-dire régulières.

2. Restauration de Scaliger en marge du manuscrit de Leyde, et admise dans l'édition critique de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 306, l. 3).

3. Le texte présente ici une phrase que l'édition de Hultsch place entre crochets comme interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 306, ll. 6-8) : ταῦτα γὰρ δύναται συμπληροῦν ἐξ αὑτῶν τὸν περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπον, ἑτέρῳ δὲ τεταγμένῳ σχήματι τοῦτο ποιεῖν ἀδύνατον, c'est-à-dire : « car ces figures peuvent remplir par elles-mêmes le lieu situé autour d'un même point ; tandis que, pour une autre figure donnée, il est impossible de réaliser cela ».

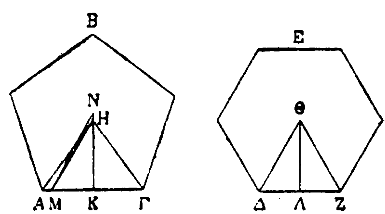
ont choisi en vue de leur industrie, grâce à leur habileté, la figure la plus polygonale, après avoir compris qu'elle peut recevoir plus de miel que chacune des autres figures.

D'ailleurs, les abeilles ne reconnaissent que ce qui leur est utile, notamment que l'hexagone est plus grand que le carré et le triangle, et que, si la même quantité de matière est dépensée pour la construction de chacune de ces figures, c'est l'hexagone qui pourra contenir plus de miel. Mais pour ce qui nous concerne, comme nous avons la prétention de posséder une plus grande part de sagesse que les abeilles, nous rechercherons quelque chose de plus remarquable. En effet, parmi les figures planes équilatérales et équiangles de même périmètre, celle qui possède un plus grand nombre d'angles est continuellement plus grande, et la plus grande de toutes est le cercle lorsqu'il a même périmètre qu'elles.

I.

Proposition i [1]. — Soient ΑΒΓ, ΔΕΖ deux polygones équilatéraux et équiangles, et que leurs périmètres soient égaux, alors que le polygone ΔΕΖ a le plus grand nombre d'angles ; je dis que le polygone ΔΕΖ est plus grand que le polygone ΓΑΒ [2].

En effet, prenons les centres Η, Θ des cercles circonscrits à ces polygones ; menons les perpendiculaires ΗΚ, ΘΛ, et menons les droites de jonction ΑΗ, ΗΓ, ΘΔ, ΘΖ. Dès lors, puisque le polygone ΕΔΖ a plus d'angles que le polygone ΑΒΓ, la droite ΔΖ mesurera le périmètre du polygone ΔΕΖ plus de fois que la droite ΑΓ ne mesure le périmètre du poly-



1. Cette proposition reproduit la première des quatorze propositions de l'ouvrage de Zénodore sur *Les figures isomètres* (περὶ ἰσομέτρων σχημάτων), qui nous a été conservé par Théon d'Alexandrie dans son *Commentaire sur l'Almageste* de Ptolémée, publié à Bâle, en 1538, puis par l'abbé Halma dans sa version française (Paris 1821). Une version latine des propositions de Zénodore a été publiée par Hultsch, en annexe de son édition critique précitée de la *Collection mathématique* de Pappus (vol. III, pp. 1189-1211).

2. Certains manuscrits donnent à cette proposition l'énoncé : « Démontrons d'abord que, parmi les polygones ordonnés n'ayant pas même nombre d'angles, mais même périmètre, le plus polygonal est toujours le plus grand aussi ».

gone ΑΒΓ ; par conséquent, la droite ΑΓ est plus grande que la droite ΔΖ (car les périmètres ont été supposés égaux) ; en sorte que la droite ΑΚ est aussi plus grande que la droite ΔΛ (car les unes sont respectivement les moitiés des autres). Posons la droite ΚΜ égale à la droite ΔΛ, et menons la droite de jonction ΜΗ. Et puisque l'angle compris sous les droites ΑΗ, ΗΓ est une partie de quatre angles droits dans la mesure où la droite ΑΓ est une partie du périmètre du polygone ΑΒΓ (parce que le polygone est équilatéral) (1) ; que, de même aussi, l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ est une partie de quatre angles droits dans la mesure où la droite ΔΖ est une partie du périmètre ΔΕΖ, et que les périmètres sont égaux entre eux [tandis que les quatre angles droits sont égaux aux quatre angles droits] (2) ; il s'ensuit que l'angle Η est à quatre angles droits comme la droite ΑΓ est au périmètre ΑΒΓ. Or, quatre angles droits sont à l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ comme le périmètre du polygone ΔΕΖ, c'est-à-dire du polygone ΑΒΓ, est à la droite ΔΖ ; donc, par raison d'égalité, l'angle compris sous les droites ΑΗ, ΗΓ est à l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ comme la droite ΑΓ est à la droite ΔΖ, et l'angle compris sous les droites ΑΗ, ΗΚ est donc aussi à l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΛ comme la droite ΑΚ est à la droite ΛΔ, c'est-à-dire à la droite ΚΜ (3). Mais, le rapport de la droite ΑΚ à la droite ΚΜ est plus grand que celui de l'angle compris sous les droites ΑΗ, ΗΚ à l'angle compris sous les droites ΜΗ, ΗΚ (car cela a été démontré dans les lemmes pour les *Sphériques*) (4) ;

---

1. Des angles égaux sont compris sous des côtés égaux. Voir EUCLIDE, liv. III, propositions 26 et 28, énoncées p. 148, n. 3.

2. La phrase καὶ αἱ δ'ὀρθαὶ ταῖς δ'ὀρθαῖς (sous-entendu ἴσαι εἰσίν), dont nous mettons la traduction entre crochets, se rencontre chez quelques anciens géomètres, mais est considérée comme inutile chez la plupart des autres ; en sorte qu'on se trouve probablement ici en présence d'une petite interpolation de scoliaste.

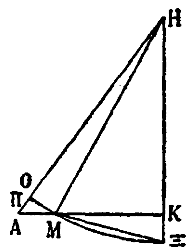
3. On a : $\frac{\text{angle } \mathrm{AH\Gamma}}{4 \text{ angles droits}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\text{périm. } \mathrm{AB\Gamma}}$. Or, $\frac{4 \text{ angles droits}}{\text{angle } \Delta\Theta\mathrm{Z}} = \frac{\text{périm. } \Delta\mathrm{EZ}}{\Delta\mathrm{Z}} = \frac{\text{périm. } \mathrm{AB\Gamma}}{\Delta\mathrm{Z}}$, d'où : $\frac{\text{angle } \mathrm{AH\Gamma}}{4 \text{ angles droits}} \times \frac{4 \text{ angles droits}}{\text{angle } \Delta\Theta\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\text{périm. } \mathrm{AB\Gamma}} \times \frac{\text{périm. } \mathrm{AB\Gamma}}{\Delta\mathrm{Z}}$ ou, comme le texte : $\frac{\text{angle } \mathrm{AH\Gamma}}{\text{angle } \Delta\Theta\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Delta\mathrm{Z}}$, d'où, considérant les moitiés : $\frac{\text{angle } \mathrm{AHK}}{\text{angle } \Delta\Theta\Lambda} = \frac{\mathrm{AK}}{\Delta\Lambda} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KM}}$.

4. D'après cette phrase incidente, ce lemme aurait fait partie d'une série d'autres destinés à des propositions sur la sphère, dues à un auteur inconnu,

par conséquent, le rapport de l'angle compris sous les droites AH, HK à celui qui est compris sous les droites ΔΘ, ΘΛ est aussi plus grand que le rapport de l'angle compris sous les droites AH, HK à celui qui est compris sous les droites MH, HK ; donc, l'angle compris sous les droites MH, HK est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΔΘ, ΘΛ. Mais, l'angle au point K, qui est droit, est égal à l'angle au point Λ ; donc, l'angle restant compris sous les droites HM, MK est plus petit que celui qui est compris sous les droites ΘΔ, ΔΛ (1). Que l'angle compris sous les droites KM, MN soit égal à celui qui est compris sous les droites ΘΔ, ΔΛ. Or, la droite ΔΛ est égale à la droite KM ; donc, la droite ΛΘ est aussi égale à la droite KN ; par conséquent, la droite ΘΛ est plus grande que la droite KH. Or, les périmètres sont égaux ; donc, le rectangle compris sous la droite ΛΘ et le

---

et qui ne nous sont pas parvenus. Commandin a donné de ce lemme une démonstration assez longue, que nous traduisons librement d'après son texte latin, en le résumant comme suit (cfr. *loc. cit.*, p. 115) : Reproduisons les triangles rectangles AHK, MHK de la figure du texte. On a : $AH > MH > KH$; décrivons l'arc ΞMO de centre H et de rayon HM. Dès lors, on a : triangle AHM > secteur OHM, et triang. MHK < secteur MHΞ ; donc : $\frac{\text{triang. AHM}}{\text{triang. MHK}} > \frac{\text{sect. OHM}}{\text{sect. MH}\Xi}$. Or, $\frac{\text{triang. AHM}}{\text{triang. MHK}} = \frac{AM}{MK}$, et $\frac{\text{sect. OHM}}{\text{sect. MH}\Xi} = \frac{\text{angle AHM}}{\text{angle MHK}}$; donc : $\frac{AM}{MK} > \frac{\text{angle AHM}}{\text{angle MHK}}$, d'où : $\frac{AM + MK}{MK} > \frac{\text{angle AHM} + \text{angle MHK}}{\text{angle MHK}}$ ou : $\frac{AK}{MK} > \frac{\text{angle AHK}}{\text{angle MHK}}$.



La démonstration de Commandin, qui date de la Renaissance, ne correspond sans doute pas à celle de l'époque de Pappus, où l'on se basait probablement sur le postulat de l'inégalité des lignes concaves dans une même direction, ayant mêmes extrémités dans le plan, au moyen duquel Archimède démontre la première proposition du livre I de son traité *De la Sphère et du Cylindre* (voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 6-8). Dès lors, comme l'a fait remarquer Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 311, en note), la démonstration aurait montré d'abord que l'on a : $MK < M\Xi$, et qu'à fortiori : $MK <$ arc MΞ. Puis, que $AM >$ tangente MΠ en M à l'arc OMΞ, et qu'à fortiori : $AM >$ arc OM, d'où, passant des arcs aux angles : $\frac{AM}{MK} > \frac{\text{angle AHM}}{\text{angle MHK}}$, d'où : $\frac{AM + MK}{MK} > \frac{\text{angle AHM} + \text{angle MHK}}{\text{angle MHK}}$ ou, comme précédemment : $\frac{AK}{MK} > \frac{\text{angle AHK}}{\text{angle MHK}}$.

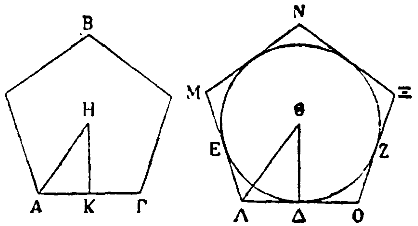
1. Les dernières expressions des deux notes précédentes donnent : $\frac{\text{angle AHK}}{\text{angle } \Delta\Theta\Lambda} > \frac{\text{angle AHK}}{\text{angle MHK}}$, d'où : angle MHK > angle ΔΘΛ, d'où : angle droit — angle MHK < angle droit — angle ΔΘΛ ou, comme le texte : angle HMK < angle ΘΔΛ.

périmètre du polygone ΔEZ est plus grand que le rectangle compris sous la droite KH et le périmètre du polygone ABΓ. De plus, les polygones sont les moitiés des aires que nous venons de dire [1] ; donc le polygone ΔEZ est plus grand que le polygone ABΓ.

II.

PROPOSITION 2. — Soit de nouveau un polygone équilatéral et équiangle ABΓ ayant son périmètre égal à la circonférence du cercle ΔEZ ; je dis que le cercle ΔEZ est plus grand que le polygone ABΓ.

Prenons d'une part le centre Θ du cercle ΔEZ, d'autre part le centre H du cercle circonscrit au polygone ABΓ ; décrivons, autour du cercle, le polygone ΛMNΞO semblable au polygone ABΓ ; menons la droite de jonction ΘΔ, et menons la perpendiculaire HK du point H sur la droite AΓ. Dès lors, puisque le périmètre du polygone ΛMNΞO est plus grand que la circonférence du cercle ΔEZ, comme Archimède l'a exposé dans le livre *De la Sphère et du Cylindre* [2], et que la circonférence du cercle est égale au périmètre du polygone ABΓ, il s'ensuit que le périmètre du polygone ΛMNΞO est aussi plus grand que le périmètre du polygone ABΓ. De plus, les polygones sont semblables ; donc, la droite ΛΔ est plus grande que la droite AK. Or, le triangle AHK est semblable au triangle ΛΘΔ (car les polygones entiers sont semblables aussi) ; donc, la droite ΘΔ est aussi plus grande que



1. On a : triangle $\Theta\Delta Z = \frac{1}{2}\Lambda\Theta \times \Delta Z$, d'où : somme des triangles $\Theta\Delta Z$ = aire polygone $\Delta EZ = \frac{1}{2}\Lambda\Theta \times$ périmètre ΔEZ. Et, de même : aire polygone ABΓ = $\frac{1}{2}$ KH × périmètre ABΓ. Or, périmètre ΔEZ = périmètre ABΓ, et on a démontré que $\Lambda\Theta > KH$; donc : aire polygone ΔEZ > aire polygone ABΓ.

2. Le texte présente ici l'interpolation : διὰ τὸ περιέχειν αὐτήν, parce qu'il entoure ce (cercle). Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 312, l. 8.

la droite HK [1]. Mais, la circonférence du cercle ΔEZ est égale au périmètre du polygone ΑΒΓ; donc, le rectangle compris sous la droite ΔΘ et la circonférence du cercle ΔEZ est plus grand que le rectangle compris sous la droite HK et le périmètre du polygone ΑΒΓ. Or, le rectangle compris sous la droite ΔΘ et la circonférence du cercle est le double du cercle ΔEZ (car cela a été aussi démontré par Archimède dans son livre *De la Circonférence du Cercle*) [2] ; tandis que le rectangle compris sous la droite HK et le périmètre du polygone ΑΒΓ est le double du polygone ΑΒΓ; et il en est ainsi pour les moitiés ; par conséquent, le cercle est plus grand que le polygone ΑΒΓ [3].

III.

Proposition 3. — Archimède a démontré que le rectangle compris sous le périmètre du cercle et le rayon est le double du cercle. Nous allons cependant démontrer la chose ci-dessous, afin qu'on ne doive pas recourir à l'ouvrage d'Archimède pour ce seul théorème [4].

---

1. On a (Archimède, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 1 : « Si un polygone est circonscrit à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence du cercle ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 6) : périmètre ΛΜΝΞΟ > circonférence cercle ΔΕΖ. Or, par hypothèse : circonférence cercle ΔΕΖ = périmètre polygone ΑΒΓ; donc : périmètre polygone ΛΜΝΞΟ > périmètre polygone ΑΒΓ. Or, les polygones sont semblables par hypothèse ; donc : ΛΔ > ΑΚ. Or, par similitude des polygones on a aussi : triangle ΑΗΚ semblable au triangle ΛΘΔ ; donc : ΘΔ > ΗΚ.

2. Archimède, *De la Mesure du Cercle*, proposition 1 : « Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit, et le périmètre égal à la base ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 127.

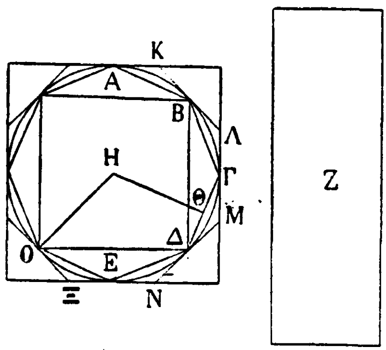
Le traité d'Archimède qui, d'après Pappus était intitulé : *De la Circonférence du Cercle* (περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας) ne nous est malheureusement pas parvenu en entier, et la partie que nous en possédons sous le titre : *De la Mesure du Cercle* (περὶ κύκλου μέτρησις), accompagnée du précieux commentaire d'Eutocius, ne comporte que trois théorèmes, sans préambule, lesquels établissent le rapport de la circonférence au diamètre du cercle, et constituent le principal titre de gloire d'Archimède.

3. On a (note avant-précédente) : ΘΔ > ΗΚ ; donc : ΘΔ × circonférence du cercle ΔΕΖ > ΗΚ × périmètre du polygone ΑΒΓ. Or, la proposition d'Archimède énoncée dans la note précédente donne : ΘΔ × circonférence du cercle ΔΕΖ = 2 cercles ΔΕΖ, et ΗΚ × périmètre du polygone ΑΒΓ = 2 aires polygone ΑΒΓ ; d'où, considérant les moitiés, on a : cercle ΔΕΖ > aire polygone ΑΒΓ.

4. Le théorème d'Archimède est énoncé ici d'une manière plus libre et un peu différente de celle que nous avons rapportée dans la note avant-précédente,

Soit, en effet, le cercle ΑΒΓΔ, et que l'aire Z soit la moitié du rectangle compris sous le périmètre de ce cercle et son rayon ; je dis que l'aire Z est équivalente au cercle ΑΒΓΔ.

Qu'elle soit d'abord plus petite s'il se peut. Dès lors, d'après la marche suivie dans le douzième livre des *Éléments* (1), il est possible d'inscrire un polygone dans le cercle ΑΒΓΔ, de manière que ce polygone inscrit soit plus grand que l'aire Z, en inscrivant d'abord un carré dans le cercle, et en divisant continuellement les arcs des segments restants en deux parties égales, jusqu'à ce qu'il reste des segments plus petits que l'excédent dont le cercle ΑΒΓΔ surpasse l'aire Z. Qu'il soit inscrit ; que ce soit le polygone ΑΒΓΔΕ, et menons du centre H la perpendiculaire ΗΘ sur un côté du polygone, notamment sur le côté ΓΔ. Dès lors, puisque le périmètre du cercle ΑΒΓΔ est plus grand que le périmètre du polygone ΑΒΓΔΕ, et que son rayon est plus grand que la droite ΗΘ, il s'ensuit que le rectangle compris sous le périmètre du cercle ΑΒΓΔ et le rayon est plus grand que le rectangle compris sous le périmètre du polygone ΑΒΓΔΕ et la droite ΗΘ, et qu'il en est de même pour les moitiés. En conséquence, l'aire Z est plus grande que le polygone ΑΒΓΔΕ ; ce qui est impossible, car on a supposé qu'elle est plus petite ; donc, le cercle ΑΒΓΔ n'est pas plus grand que l'aire Z.



et la démonstration apagogique qu'en donne Pappus est aussi beaucoup plus longue que celle d'Archimède. La même proposition d'Archimède sera d'ailleurs invoquée par Pappus, plus loin, à la proposition 22 du livre VIII, où il ajoute qu'il a donné lui-même une démonstration de cette proposition dans son commentaire sur le premier livre de la *Composition mathématique*, ou *Almageste*, de Claude Ptolémée. Ce commentaire est perdu, et la présente proposition 3 est probablement le seul fragment qui nous en ait été conservé, pour la raison que Pappus reproduit ici cette démonstration afin de se conformer sans doute à l'ordonnance de l'opuscule de Zénodore, où la même proposition d'Archimède est aussi démontrée, mais d'une manière un peu différente (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, *Zenodori de figuris isometris*, p. 1194).

1. Euclide, liv. XII, prop. 2, énoncée p. 181, n. 1.

Je dis qu'il n'est pas plus petit. En effet, qu'il soit plus petit s'il se peut. Dès lors, il est possible de circonscrire un polygone au cercle ΑΒΓΔ de manière que l'aire Ζ soit plus grande que ce polygone circonscrit, en circonscrivant d'abord un carré autour du cercle, et en menant continuellement des tangentes aux arcs restants divisés en deux parties égales, jusqu'à ce qu'il reste des segments des figures situées à l'extérieur plus petits que l'excédent dont l'aire Ζ surpasse le cercle ΑΒΓΔ (car il est démontré comment cela peut [1] s'obtenir [2]. Qu'un polygone soit donc circonscrit comme on vient de le dire, que ce soit le polygone ΚΛΜΝΞ, et menons la droite de jonction ΗΟ du centre Η à l'un des points de contact Ο. Dès lors, puisque le périmètre du polygone ΚΛΜΝΞ est plus grand que le périmètre du cercle ΑΒΓΔ, il s'ensuit que le rectangle compris sous le périmètre du polygone ΚΛΜΝΞ et la droite ΗΟ est plus grand que le rectangle compris sous le périmètre du cercle ΑΒΓΔ et la droite ΗΟ, et qu'il en est de même des moitiés. En conséquence, le polygone ΚΛΜΝΞ est plus grand que l'aire Ζ; ce qui est impossible, car on a supposé qu'il est plus petit. Dès lors, l'aire Ζ n'est pas plus grande que le cercle ΑΒΓΔ. Or, on a démontré qu'elle n'est pas plus petite; donc, elle lui est équivalente, et l'aire Ζ est le double du rectangle compris sous le périmètre du cercle ΑΒΓΔ et le rayon de ce cercle.

IV.

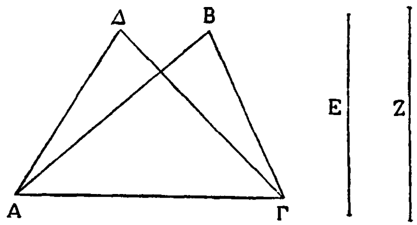
Le cercle est, non seulement plus grand que les figures planes ordonnées qui sont équilatérales et équiangles, mais aussi que celles qui ont les côtés inégaux et les angles différents lorsqu'il a même périmètre que ces figures; car nous allons démontrer que, parmi les figures polygonales isopérimètres et ayant le même nombre de côtés, la plus grande est équilatérale et équiangle.

---

1. Le texte présente ici le mot ἀνάγκῃ (forcément ou par nécessité) qui a été abandonné comme interpolation par Commandin (*loc. cit.*, p. 117, en note), et placé entre crochets dans l'édition de Hultsch (*loc. cit.*, vol. I, p. 317, l. 4).
2. EUCLIDE, liv. XII, prop. 2, énoncée p. 181, n. 1.

Nous commencerons donc par exposer les théorèmes qui sont assumés pour cette démonstration.

Proposition 4. — Soit un triangle ABΓ ayant le côté AB plus grand que le côté BΓ; soit une droite E plus petite que la droite AB et plus grande que la droite BΓ; je dis qu'il est possible d'établir sur la droite AΓ deux droites dont la somme est égale aux droites AB, BΓ, tandis que l'une d'elles est égale à la droite E.



En effet, soit la droite Z celle dont les droites AB, BΓ surpassent la droite E. Dès lors, la droite Z est d'une part plus petite que la droite AB (puisque la somme des droites AB, BΓ est égale à la somme des droites E, Z, parmi lesquelles la droite E est plus grande que la droite BΓ) et, d'autre part, plus grande que la droite BΓ (puisque la somme des droites AB, BΓ est de nouveau égale à la somme des droites E, Z, parmi lesquelles la droite E est plus petite que la droite AB). En conséquence, puisque la somme des droites AB, BΓ est plus grande que la droite AΓ (1), il s'ensuit que la somme des droites E, Z est aussi plus grande que la droite AΓ. Et puisque la somme des droites AΓ, ΓB est aussi plus grande que la droite AB; que la droite E est plus grande que la droite ΓB, et que la droite Z est plus petite que la droite AB, il s'ensuit que la somme des droites AΓ, E est, à fortiori, plus grande que la droite Z. Pareillement, puisque la somme des droites AΓ, ΓB est plus grande que la droite AB, et que la droite E est plus petite que la droite AB, il s'ensuit que la somme des droites AΓ, Z est, à fortiori, plus grande que la droite E (2). En conséquence, il est possible de

---

1. Euclide, liv. I, prop. 20 : « Deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 34.

2. Soit $AB > E > B\Gamma$. Posons : $Z = AB + B\Gamma - E$, d'où : $Z + E = AB + B\Gamma$. Or, d'une part : $E > B\Gamma$; donc : $Z < AB$ et, d'autre part : $E < AB$; donc : $Z > B\Gamma$. Or, $AB + B\Gamma > A\Gamma$; donc : $Z + E > A\Gamma$. Mais, $A\Gamma + B\Gamma > AB$, d'où, considérant que $E > B\Gamma$ et $Z < AB$, on a : $A\Gamma + E > Z$. Pareillement : $A\Gamma + B\Gamma > AB$, d'où, considérant que $Z > B\Gamma$ et $E < AB$, on a : $A\Gamma + Z > E$.

construire un triangle au moyen des droites ΑΓ, Ε, Ζ (1). Que soit construit le triangle ΑΓΔ .... (2).

V.

PROPOSITION 5. — Parmi les triangles isopérimètres et de même base, le triangle isocèle est le plus grand, et celui qui approche plus l'isocèle (3) est continuellement plus grand.

En effet, soient, sur la base ΒΓ, des triangles isopérimètres : le triangle isocèle ΑΒΓ et le triangle ΒΔΓ qui approche plus l'isocèle que le triangle ΒΕΓ (car ils peuvent être construits en vertu de ce que l'on a démontré tantôt) (4) ; je dis que le triangle ΑΒΓ est le plus grand et que le triangle ΒΔΓ est plus grand que le triangle ΒΕΓ.

Prolongeons la droite ΒΑ ; posons la droite ΑΖ égale à la droite ΓΑ et menons les droites de jonction ΖΔ, ΔΑ. Dès lors, puisque les droites ΖΔ, ΒΔ (5) sont plus grandes que la droite ΒΖ, elles sont donc aussi plus grandes que les droites ΒΑ, ΑΓ (car la droite ΑΓ est égale à la droite ΑΖ). Mais, les droites ΒΑ, ΑΓ sont égales aux droites ΒΔ, ΔΓ ; donc, les droites ΒΔ, ΔΖ sont aussi plus grandes que les droites ΒΔ, ΔΓ. Si on retranche de part et d'autre la droite ΒΔ, la droite restante ΖΔ est plus grande que la droite ΔΓ. Or, les deux droites ΖΑ, ΑΔ sont respectivement égales aux deux droites ΓΑ, ΑΔ, et la base ΖΔ est plus grande

1. EUCLIDE, liv. I, prop. 22 : « Avec trois droites qui sont égales à trois droites données, construire un triangle ; il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième, parce que deux côtés d'un triangle, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 37.

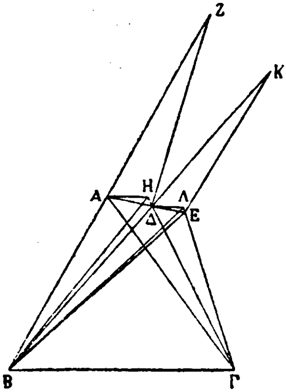
2. La fin de la proposition se perd dans une lacune (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 318, l. 18). Il manque donc la conclusion disant que deux droites ont ainsi été établies sur la droite ΑΓ, dont l'une est égale à la droite Ε, et dont la somme est égale à la somme ΑΒ + ΒΓ.

Le passage lacuneux est suivi d'une phrase que Hultsch place entre crochets pour marquer qu'il s'agit d'une extrapolation : « et il est clair que si les droites Ε, Ζ sont égales, le triangle ΑΓΔ sera isocèle ; et si elles sont inégales, la plus grande d'entre elles sera égale à la droite ΓΔ » (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 318, ll. 18-20).

3. ἰσοσκελέστερον, littéralement : plus isocèle, c'est-à-dire se rapprochant plus de la figure isocèle.

4. Voir proposition 4.

5. C'est-à-dire la somme des droites ΖΔ, ΔΒ.



que la base ΔΓ ; donc, l'angle compris sous les droites ZΛ, ΛΔ est plus grand que celui compris sous les droites ΔΛ, ΛΓ ; donc, l'angle compris sous ZΛ, ΛΓ est plus grand que le double de l'angle compris sous ΔΛ, ΛΓ. Mais, il est le double de l'angle compris sous AB, BΓ, c'est-à-dire de l'angle compris sous AΓ, ΓB (car le triangle est isocèle) ; donc, l'angle compris sous AΓ, ΓB est aussi plus grand que l'angle compris sous ΔΛ, ΛΓ. Posons l'angle compris sous les droites ΓΛ, ΛH égal à cet angle compris sous les droites AΓ, ΓB ; il s'ensuit que la droite ΛH est parallèle à la droite BΓ à cause des angles alternes égaux. Dès lors, prolongeant la droite ΓΔ jusqu'au point H, et menant la droite de jonction BH, il est clair que le triangle ABΓ est plus grand que le triangle BΔΓ, car le triangle BΛΓ équivaut au triangle BHΓ [1].

Derechef, prolongeons la droite BΔ jusqu'au point K ; posons la droite ΔK égale à la droite ΔΓ, et menons les droites de jonction KE, ΔE. Puisque les droites BE, EK sont plus grandes que la droite BK, c'est-à-dire que les droites BΔ, ΔΓ, c'est-à-dire que les droites BE, EΓ, si l'on retranche de part et d'autre la droite BE, la droite restante EK est plus grande que la droite EΓ. Or, les deux droites KΔ, ΔE sont respectivement égales aux deux droites ΓΔ, ΔE, et la base KE est plus grande que la base EΓ ; donc, l'angle compris sous les droites KΔ, ΔE est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΓΔ, ΔE ; donc, l'angle compris sous KΔ, ΔΓ est plus grand que le double de l'angle compris sous ΓΔ, ΔE. Or, ce même angle compris sous KΔ, ΔΓ est plus petit

1. En notations usuelles, on a : $Z\Delta + \Delta B > BZ$. Or, on a par construction : $\Lambda Z = \Lambda\Gamma$; donc : $Z\Delta + \Delta B > B\Lambda + \Lambda\Gamma$. Or, les triangles isopérimètres $AB\Gamma$, $\Lambda B\Gamma$ donnent : $BA + A\Gamma = \Delta B + \Delta\Gamma$; donc : $Z\Delta + \Delta B > \Delta B + \Delta\Gamma$ ou : $Z\Delta > \Delta\Gamma$. Considérant les triangles $Z\Lambda\Delta$, $\Gamma\Lambda\Delta$ dans lesquels $Z\Lambda = \Lambda\Gamma$, on a : $\widehat{Z\Lambda\Delta} > \widehat{\Delta\Lambda\Gamma}$, d'où : $\widehat{Z\Lambda\Gamma} > 2\widehat{\Delta\Lambda\Gamma}$. Or, le triangle $AB\Gamma$ est isocèle ; donc: $\widehat{Z\Lambda\Gamma} = 2\widehat{AB\Gamma} = 2\widehat{A\Gamma B}$; donc: $\widehat{A\Gamma B} > \widehat{\Delta\Lambda\Gamma}$. Construisons $\widehat{\Gamma\Lambda H} = \widehat{A\Gamma B}$, d'où parallélisme des droites ΛH, $B\Gamma$, d'où : triangle $B\Lambda\Gamma$ = triangle $BH\Gamma$; donc triangle $B\Lambda\Gamma >$ triangle $B\Delta\Gamma$.

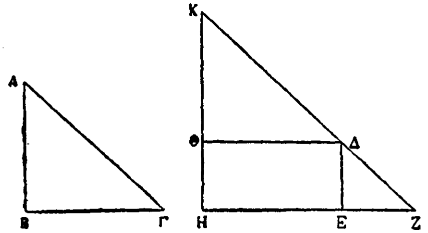
que le double de l'angle compris sous ΔΓ, ΓΒ (car l'angle compris sous ΔΓ, ΓΒ est plus grand que celui qui est compris sous ΔΒ, ΒΓ, parce que les angles compris sous ΑΒ, ΒΓ et sous ΑΓ, ΓΒ sont égaux) ; donc, l'angle compris sous ΔΓ, ΓΒ est plus grand que celui qui est compris sous ΓΔ, ΔΕ. Établissons, sur la droite ΔΓ et au point Δ, un angle compris sous les droites ΓΔ, ΔΛ égal à l'angle compris sous les droites ΔΓ, ΓΒ. Or, il est clair que la droite ΔΛ, parallèle à la droite ΒΓ à cause des angles alternes, sera située entre les droites ΔΕ, ΔΚ ; donc, si la droite ΓΕ est prolongée jusqu'à la parallèle ΔΛ qu'elle rencontre au point Λ, et si on mène la droite de jonction ΒΛ, le triangle ΒΓΔ sera équivalent au triangle ΒΛΓ (1) ; en sorte que le triangle ΑΒΓ est plus grand que le triangle ΒΕΓ qui est plus petit que le triangle ΒΔΓ (2).

VI.

Proposition 6. — Soient, au contraire, deux triangles rectangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ ayant les angles Γ, Ζ égaux ; je dis que le carré des droites ΑΓ, ΔΖ constituant une seule droite équivaut aux carrés des droites ΒΓ, ΕΖ constituant une seule droite et des droites ΑΒ, ΔΕ constituant une seule droite.

En effet, prolongeons la droite ΕΖ jusqu'au point Η ; posons la droite ΕΗ égale à la droite ΒΓ ; que la droite menée par le point Η, parallèlement à la droite ΔΕ, rencontre au point Κ la droite ΔΖ prolongée, et menons la droite ΔΘ parallèle à la droite ΖΗ. Dès lors, puisque la droite ΔΘ est égale à la droite ΗΕ dans un parallélogramme, c'est-à-dire égale à la droite ΒΓ ; que l'angle compris sous les droites ΚΔ, ΔΘ est égal à l'angle Ζ,

1. Le texte présente ici l'interpolation : « étant sur la même base ΒΓ, et les droites ΒΓ, ΔΛ étant parallèles » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 322, l. 4).
2. On a : $ΒΕ + ΕΚ > ΒΚ$. Posons : $ΔΚ = ΔΓ$; donc : $ΒΕ + ΕΚ > ΒΔ + ΔΓ$. Or, les triangles isopérimètres ΒΔΓ, ΒΕΓ donnent : $ΒΔ + ΔΓ = ΒΕ + ΕΓ$; donc : $ΒΕ + ΕΚ > ΒΕ + ΕΓ$ ou, comme le texte : $ΕΚ > ΕΓ$. Considérant les triangles ΚΔΕ, ΓΔΕ dans lesquels $ΚΔ = ΓΔ$, on a : $\widehat{ΚΔΕ} > \widehat{ΓΔΕ}$, d'où : $\widehat{ΚΔΓ} > 2\widehat{ΓΔΕ}$. Mais, $\widehat{ΚΔΓ} = \widehat{ΔΓΒ} + \widehat{ΔΒΓ}$ et $\widehat{ΔΒΓ} < \widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΓΒ} < \widehat{ΔΓΒ}$, d'où : $\widehat{ΚΔΓ} < 2\widehat{ΔΓΒ}$; donc, comme le texte : $\widehat{ΔΓΒ} > \widehat{ΓΔΕ}$. Construisons $\widehat{ΓΔΛ} = \widehat{ΔΓΒ}$, d'où parallélisme des droites ΔΛ, ΒΓ, d'où : triangle ΒΔΓ = triangle ΒΛΓ, donc : triangle ΒΛΓ > triangle ΒΕΓ.



c'est-à-dire à l'angle Γ; que l'angle droit Θ est égal à l'angle B ; que l'angle restant K est égal à l'angle A, il s'ensuit que les triangles KΘΔ, ABΓ sont équiangles et égaux. En conséquence, le carré de la droite KZ équivaut aux carrés des droites KH, HZ, c'est-à-dire que le carré des droites AΓ, ΔZ constituant une seule droite équivaut au carré des droites AB, ΔE constituant une seule droite et au carré des droites BΓ, EZ constituant une seule droite (1).

VII.

PROPOSITION 7. — La somme des triangles semblables isocèles est plus grande que la somme des triangles isocèles qui, établis sur les mêmes bases, ne sont semblables ni entre eux ni à ces triangles semblables, et sont isopérimètres avec ces derniers (2).

Soient les triangles semblables isocèles ΔZB, BAΓ, et soient, sur les mêmes bases, d'autres triangles isocèles ΔEB, BΛΓ, isopérimètres avec les triangles ΔZB, BAΓ et nécessairement non semblables à ces derniers (3), et il sera démontré comment cela peut être construit (4) ; je dis que la somme des triangles ΔBZ, BAΓ est plus grande que la somme des triangles ΔEB, BΛΓ.

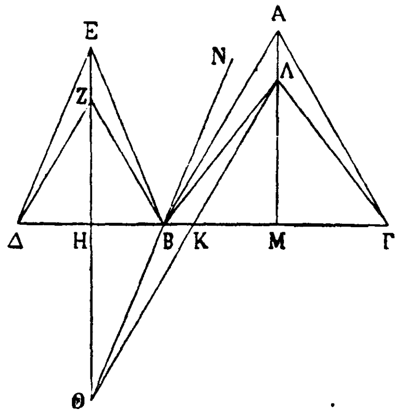
Menons les droites de jonction EZ, AΛ et prolongeons-les jusqu'aux bases ; elles les coupent donc en deux parties égales et à angles droits ; car les droites ΔE, EZ sont égales aux droites BE, EZ, les bases ΔZ, ZB sont égales parce que les triangles

1. Il résulte des constructions que l'on a : $\overline{KZ}^2 = \overline{KH}^2 + \overline{HZ}^2$ Or, $\overline{KZ}^2 = (A\Gamma + \Delta Z)^2$; $\overline{KH}^2 = (AB + \Delta E)^2$ et $\overline{HZ}^2 = (B\Gamma + EZ)^2$; d'où : $(A\Gamma + \Delta Z)^2 = (AB + \Delta E)^2 + (B\Gamma + EZ)^2$.

2. Cette proposition reproduit presque littéralement la proposition 10 de l'opuscule de Zénodore, dont l'énoncé est cependant plus complet que celui de Pappus, en ce sens qu'il spécifie que les triangles sont établis sur des bases inégales (ἐπὶ ἀνίσων βάσεων) Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1203.

3. Le texte présente ici l'interpolation ὅτι αἱ γωνία ἄνισοί εἰσιν, (parce que les angles sont inégaux) Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 324, l. 3.

4. Voir ci-après proposition 8.



sont isocèles, et les angles sont égaux [1] ; en sorte que les angles extérieurs Z, Z sont égaux [2]. Mais les angles Δ, B sont aussi égaux ; donc, les angles restants H, H sont aussi égaux ; donc ils sont droits, et les droites ΔH, HB sont égales. Pareillement, les droites BM, MΓ sont aussi égales, et les angles M, M sont droits. Que les droites coupent donc aux points H, M [3] ; prolongeons la droite EH ; posons la droite HΘ égale à cette droite et menons la droite de jonction ΘB. Dès lors, l'angle compris sous les droites EB, BH sera égal à l'angle compris sous les droites ΘB, BH. Mais, l'angle compris sous EB, BH est plus grand que l'angle compris sous AB, BΓ (parce qu'il est aussi égal à l'angle compris sous ZB, BH ; car les triangles ΔBZ, BAΓ sont semblables) ; donc, l'angle compris sous ΘB, BH est aussi plus grand que l'angle compris sous AB, BΓ. En conséquence, la droite qui relie les points Θ, Λ coupe la droite BM, parce que, supposant ΔBΓ comme étant une seule droite, et la droite ΘBN étant prolongée en dehors de la droite AB, l'angle compris sous AB, BΓ est plus petit que l'angle compris sous ΘB, BH, c'est-à-dire plus petit que l'angle compris sous NB, BΓ situé suivant son sommet, et parce que l'angle compris sous ΛB, BΓ est, à fortiori, plus petit ; en sorte que la droite BM sera coupée par la droite ΘΛ au point K. Et il est clair que celle-ci ne coupera pas la droite MΓ, sinon elle couperait en un point autre que Λ la droite ΛM prolongée. Dès lors, puisque ΔE, EB, BΛ, ΛΓ sont égales aux droites ΔZ, ZB, BA, AΓ [4] (car les triangles ont été supposés de même périmètre),

1. Le texte présente ici la glose interpolée : καὶ ὅμοια τὰ ΔΕΖ, ΖΕΒ τρίγωνα (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 324, l. 10).
2. Nouvelle glose interpolée : ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἐντός (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 324, l. 12).
3. C'est-à-dire que les droites EZ, AΛ prolongées coupent les bases ΔB, BΓ aux points H, M. Cette phrase inutile semble d'ailleurs avoir été interpolée.
4. C'est-à-dire : puisque la somme des droites est égale à la somme des droites par hypothèse d'isopérimétrie.

et que, de moitiés, les droites EB, BΛ, c'est-à-dire les droites ΘB, BΛ, sont aussi égales aux droites ZB, BA, tandis que les droites ΘB, BΛ sont plus grandes que la droite ΘΛ, il s'ensuit que les droites ZB, BA sont aussi plus grandes que la droite ΘΛ, et le carré des droites ZB, BA, prises ensemble comme une seule droite, est donc plus grand que le carré de la droite ΘΛ. Mais, le carré des droites ZH, AM prises ensemble comme une seule droite, conjointement avec le carré des droites HB, BM prises ensemble comme une seule droite, c'est-à-dire avec le carré de la droite HM, vaut le carré des droites ZB, BA prises ensemble comme une seule droite, en vertu de la similitude des triangles rectangles HZB, BAM (car cela a été démontré précédemment) (1); tandis que le carré des droites ΛM, HΘ prises ensemble comme une seule droite, c'est-à-dire le carré des droites ΛM, HE prises ensemble comme une seule droite, conjointement avec le carré des droites HK, KM prises ensemble comme une seule droite, c'est-à-dire avec le carré de la droite HM, vaut le carré de la droite ΘΛ, c'est-à-dire le carré des droites ΘK, KΛ prises ensemble comme une seule droite, en vertu de la même démonstration précédente (2). En conséquence, le carré des droites AM, ZH prises ensemble comme une seule droite, conjointement avec le carré de la droite HM, est [plus grand] (3) que le carré des droites EH, ΛM prises ensemble comme une seule droite conjointement avec le carré de la droite HM. Retranchons de part et d'autre le carré de la droite HM ; il s'ensuit que le carré restant des droites ZH, AM prises ensemble comme une seule droite est plus grand que le carré des droites HE, ΛM prises ensemble comme une seule droite ; donc, la somme des droites ZH, AM est de longueur plus grande que la somme des droites EH, ΛM (4). Or,

1. Voir proposition 6.
2. Voir proposition 6.
3. Lacune comblée d'abord par Scaliger au moyen du mot μεῖζόν, en marge du manuscrit de Leyde, puis par Commandin au moyen du mot *majus* dans sa version latine (Cfr. *loc. cit.*, p. 120).
4. La première partie de la démonstration, d'une lecture assez pénible, en raison probablement de certains remaniements de scoliastes, se déroule comme suit en notations actuelles : On a par hypothèse : $\Delta E + EB + B\Lambda + \Lambda\Gamma = \Delta Z + ZB + BA + A\Gamma$ ou, vu que les triangles sont isocèles : $EB + B\Lambda = ZB + BA$. Or, on a par construction : $\Theta B = EB$; donc : $\Theta B + B\Lambda = ZB + BA$. Or, $\Theta B + B\Lambda > \Theta\Lambda$; donc : $ZB + BA > \Theta\Lambda$, d'où : $(ZB + BA)^2 > \overline{\Theta\Lambda}^2$ (I).

les triangles qui sont sous la même hauteur sont entre eux comme les bases ; par conséquent, si l'on considère les moitiés des triangles, le triangle EHB est au triangle ZHB, et si l'on considère les triangles entiers, le triangle ΔEB est au triangle ΔZB comme la droite HE est à la droite HZ ; tandis que le triangle MΛΓ est au triangle MAΓ et le triangle double BΛΓ est au triangle double BAΓ comme la droite ΛM est à la droite MA (1) ; donc, en additionnant pour composition, le rapport de la somme des triangles ΔEB, BΛΓ à la somme des triangles ΔZB, ABΓ est le même que celui de la somme des droites EH, ΛM à la somme des droites ZH, AM (2) ; car cela sera démontré dans

---

Or, en vertu de la proposition 6, les triangles rectangles semblables ZHB, AMB donnent, d'une part : $(\mathrm{ZH} + \mathrm{AM})^2 + (\mathrm{HB} + \mathrm{BM})^2 = (\mathrm{ZB} + \mathrm{BA})^2$ ou : $(\mathrm{ZH} + \mathrm{AM})^2 + \overline{\mathrm{HM}}^2 = (\mathrm{ZB} + \mathrm{BA})^2$, et les triangles rectangles semblables ΘHK ΛMK donnent d'autre part : $(\Lambda\mathrm{M} + \mathrm{H}\Theta)^2 + (\mathrm{HK} + \mathrm{KM})^2 = (\Theta\mathrm{K} + \mathrm{K}\Lambda)^2$ ou : $(\Lambda\mathrm{M} + \mathrm{HE})^2 + \overline{\mathrm{HM}}^2 = \overline{\Theta\Lambda}^2$, d'où, en présence de la relation (I), il vient : $(\mathrm{ZH} + \mathrm{AM})^2 + \overline{\mathrm{HM}}^2 > (\Lambda\mathrm{M} + \mathrm{HE})^2 + \overline{\mathrm{HM}}^2$ ou : $(\mathrm{ZH} + \mathrm{AM})^2 > (\Lambda\mathrm{M} + \mathrm{HE})^2$ ou, comme le texte : $\mathrm{ZH} + \mathrm{AM} > \Lambda\mathrm{M} + \mathrm{HE}$.

1. Les triangles EHB, ZHB de même hauteur HB donnent : $\frac{\text{triang. EHB}}{\text{triang. ZHB}} = \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{HZ}}$, d'où, considérant les doubles de ces triangles, on a : $\frac{\text{triangle } \Delta\mathrm{EB}}{\text{triangle } \Delta\mathrm{ZB}} = \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{HZ}}$ (I). D'autre part, les triangles MΛΓ, MAΓ de même hauteur MΓ donnent : $\frac{\text{triangle M}\Lambda\Gamma}{\text{triangle MA}\Gamma} = \frac{\Lambda\mathrm{M}}{\mathrm{MA}}$, d'où, considérant les doubles de ces triangles, on a : $\frac{\text{triangle B}\Lambda\Gamma}{\text{triangle BA}\Gamma} = \frac{\Lambda\mathrm{M}}{\mathrm{MA}}$ (II).

2. Le texte porte ici effectivement : τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον (a même rapport), c'est-à-dire que, des deux relations (I) et (II) de la note précédente, on devrait tirer par addition : $\frac{\text{triangle } \Delta\mathrm{EB} + \text{triangle B}\Lambda\Gamma}{\text{triangle } \Delta\mathrm{ZB} + \text{triangle BA}\Gamma} = \frac{\mathrm{HE} + \Lambda\mathrm{M}}{\mathrm{HZ} + \mathrm{MA}}$, ce qui est impossible dans le cas des triangles de bases inégales considérés dans la proposition. On peut d'ailleurs rechercher dans quelles conditions les relations (I) et (II), que nous désignerons pour abréger par $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{c}{d} = \frac{\gamma}{\delta}$, donneront $\frac{a+c}{b+d} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ (III). En effet, on peut écrire : $\alpha = ka$; $\beta = kb$; $\gamma = mkc$ et $\delta = mkd$, d'où (III) devient : $\frac{a+c}{b+d} = \frac{ka + mkc}{kb + mkd} = \frac{a + mc}{b + md}$, d'où : $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a + c - (a + mc)}{b + d - (b + md)}$, ou : $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c\,(m-1)}{d\,(m-1)}$ (IV) ; ce qui admet deux solutions. La première, pour $m = 1$, entraîne donc : $\frac{a}{\alpha} = \frac{c}{\gamma} = \frac{b}{\beta} = \frac{d}{\delta}$; ce qui n'est pas le cas dans les figures de la proposition. La seconde solution, pour $m \lesseqgtr 1$, réduit la relation (IV) à $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$, d'où $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ce qui ne répond pas davantage au cas des triangles de la proposition.

Commandin n'a pas relevé l'erreur dans sa version (Cfr. *loc. cit.*, p. 120). Hultsch donne le texte que nous reproduisons au début de cette note et que la suite (1). Or, la somme des droites EH, ΛM est plus petite que la somme des droites ZH, AM ; donc, la somme des triangles ΔEB, BΛΓ est aussi plus petite que la somme des triangles ΔZB, BAΓ (2).

VIII.

PROPOSITION 8. — Soient les triangles isocèles AEB, ΓΔZ établis sur les bases inégales AB, ΓΔ ; que la droite AE soit égale à la droite ΓZ, et que la droite AB soit plus grande que

---

nous avons respecté dans notre traduction ; mais, il fait cependant remarquer en note qu'il est impossible de comprendre de quelle manière l'auteur établit la relation d'égalité en question (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 326, l. 36 et note). Revenant sur ce passage dans l'appendice de son édition (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1239), Hultsch suppose que l'auteur grec a voulu dire τὸν αὐτὸν ἐλάσσονος πρὸς μεῖζον λόγον, avec le mot αὐτὸν pris, non plus dans le sens de « même » ou « égal », mais dans le sens particulier de « similaire » ; de sorte que la phrase signifierait ainsi que le rapport de la somme des triangles à la somme des triangles est similaire à celui de la somme des droites à la somme des droites ; rapport qui a été démontré plus haut être plus petit que l'unité.

Quelle que puisse avoir été l'altération subie par le texte en cet endroit, nous croyons que l'explication proposée par Hultsch est trop détournée, et que le texte aura simplement perdu une négation (οὐκ) ; de sorte que le texte indiquerait dès lors que les relations (I) et (II) permettent de considérer la relation d'inégalité : $\frac{\text{triangle } \Delta EB + \text{triangle } B\Lambda\Gamma}{\text{triangle } \Delta ZB + \text{triangle } BA\Gamma} \gtrless \frac{HE + \Lambda M}{HZ + MA}$.

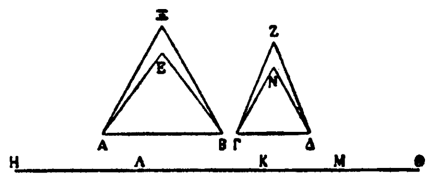
1. Le texte renvoie à la proposition 9, qui devait précisément démontrer la relation d'inégalité de la note précédente ; mais cette proposition est malheureusement entièrement perdue dans une longue lacune.

2. On a vu plus haut que l'on a : $HE + \Lambda M < HZ + MA$, d'où en présence de la relation d'inégalité de la note précédente, en adoptant toutefois le signe $<$, on a, comme le texte : triangle ΔEB + triangle $B\Lambda\Gamma$ < triangle ΔZB + triangle $BA\Gamma$.

Cette conclusion, qui manque de rigueur devant l'adoption arbitraire du signe $<$, fait fortement douter de l'authenticité de toute la fin de la démonstration à partir de l'établissement de la relation : $ZH + AM > \Lambda M + HE$, endroit jusqu'où Pappus reproduit presque textuellement la démonstration de Zénodore. On se trouve donc probablement en présence d'une substitution de la part d'un auteur postérieur. La fin de la démonstration de Zénodore, plus claire et plus correcte, se résume d'ailleurs de la manière suivante (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1203, *appendix*) : Retranchons de part et d'autre $ZH + \Lambda M$, il vient : $ZH + AM - (ZH + \Lambda M) > \Lambda M + HE - (ZH + \Lambda M)$ ou : $A\Lambda > EZ$. Or, par hypothèse faite dans l'énoncé de Zénodore, mais omise dans l'énoncé de Pappus on a : $B\Gamma > \Delta B$, d'où : $BM > HB$, tandis qu'on a : $A\Lambda \times BM = 2$ triangles $AB\Lambda$ et $EZ \times HB = 2$ triangles EBZ ; donc : triangle $AB\Lambda$ > triangle EBZ. On aura de même : triangle $A\Gamma\Lambda$ > triangle $E\Delta Z$; donc, par addition on a : quadrilatère rentrant $BA\Gamma\Lambda$ > quadrilatère rentrant ΔEBZ, d'où : quad. $BA\Gamma\Lambda$ + (triangle ΔZB + triangle $B\Lambda\Gamma$) > quad. ΔEBZ + (triangle ΔBZ + triangle $B\Lambda\Gamma$) ou : triangle ΔZB + triangle $BA\Gamma$ > triangle ΔEB + triangle $BA\Gamma$.

la droite ΓΔ (les triangles sont donc dissemblables). Dès lors, il faut établir des triangles isocèles semblables sur les droites AB, ΓΔ, de manière que la somme de quatre de leurs côtés soit égale à la somme des droites AE, EB, ΓZ, ZΔ (1).

Exposons une droite HΘ égale aux droites AE, EB, ΓZ, ZΔ ; coupons-la au point K de manière que la droite HK soit à la droite KΘ comme la base AB est à la base ΓΔ, et coupons aussi chacune des droites HK, KΘ en deux parties égales aux points Λ, M. Dès lors, puisque la droite HΘ est plus grande que la somme des droites AB, ΓΔ (parce que les droites AE, EB et ΓZ, ZΔ sont aussi plus grandes) et que la droite HK est à la droite KΘ comme la droite AB est à la droite ΓΔ, il s'ensuit que la droite HK est



plus grande que la droite AB et la droite KΘ plus grande que la droite ΓΔ (2). Et chacune de ces droites est divisée en deux parties égales ; donc, deux des droites AB, HΛ, ΛK, toujours prises conjointement, sont plus grandes que la droite restante ; et pareillement pour les droites ΓΔ, KM, MΘ (3) Établissons donc le triangle AΞB au moyen des droites AB, HΛ, ΛK (il est clair d'ailleurs que les droites AΞ, ΞB tomberont à l'extérieur des droites AE, EB, parce que les droites HΛ, ΛK sont plus grandes que les droites AE, EB, car les droites AE, EB sont la moitié de la droite HΘ, puisque les droites AE, EB sont égales aux droites ΓZ, ZΔ ; que l'ensemble des droites est égal à la droite HΘ, et que la droite HK est plus grande que la moitié

1. Cette proposition résout le problème invoqué au début de la proposition précédente, et dont la solution aurait été différée. Elle reproduit en termes peu différents la proposition 8 de Zénodore (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1200).

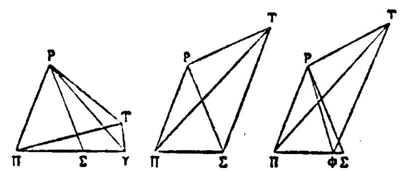
2. Soit $H\Theta = AE + EB + \Gamma Z + Z\Delta$, et soit : $\frac{HK}{K\Theta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{HK + K\Theta}{K\Theta} = \frac{H\Theta}{K\Theta} = \frac{AB + \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}$. Or, $AE + EB > AB$ et $\Gamma Z + Z\Delta > \Gamma\Delta$, d'où: $H\Theta > AB + \Gamma\Delta$; donc, comme le texte : $K\Theta > \Gamma\Delta$ et $HK > AB$.

3. Considérant les deux dernières relations de la note précédente, on a d'une part : $HK = H\Lambda + \Lambda K$; donc, comme le texte : $H\Lambda + \Lambda K > AB$ et $AB + \Lambda K > H\Lambda$ et $AB + H\Lambda > \Lambda K$; et on a d'autre part : $K\Theta = KM + M\Theta$; donc, comme le texte : $KM + M\Theta > \Gamma\Delta$ et $\Gamma\Delta + M\Theta > KM$ et $\Gamma\Delta + KM > M\Theta$.

de la droite HΘ) (1), et établissons le triangle ΓΝΔ au moyen des droites ΓΔ, KM, MΘ (il sera pareillement établi intérieurement) (2). Et il est clair que ces triangles sont semblables ; car la droite HK est à la droite KΘ et, considérant les moitiés, la droite HΛ est à la droite KM et la droite ΛΚ à la droite MΘ et, considérant les droites qui leur ont été établies égales, la droite AΞ est à la droite ΓΝ et la droite BΞ à la droite ΔΝ, comme la droite AB est à la droite ΓΔ (3).

[Mais, le triangle AEB devient tantôt plus grand, tantôt plus petit que le triangle ΓΖΔ, tantôt égal à ce triangle.

En effet, soit le triangle ΠΡΣ ayant la droite ΠΡ égale à la droite ΖΓ, la droite ΡΣ égale à la droite ΔΖ et la droite ΠΣ égale à la droite ΓΔ. Les triangles ΓΖΔ, ΠΡΣ sont donc égaux et semblables entre eux. Dès lors, puisque la droite AB est plus grande que la droite ΓΔ, c'est-à-dire plus grande que la droite ΠΣ, et que les droites AE, EB sont égales aux droites ΠΡ, ΡΣ (parce qu'elles sont aussi respectivement égales aux droites ΓΖ, ΖΔ), (4) il s'ensuit que l'angle compris sous les droites AE, EB est plus grand que l'angle compris sous les droites ΠΡ, ΡΣ (puisqu'il est aussi plus grand que l'angle compris sous les droites ΓΖ, ΖΔ). Posons l'angle compris sous



1. Le triangle établi sur AB avec les droites HΛ, ΛΚ sera plus grand que le triangle AEB ; car, on a par hypothèse : $AE = \Gamma Z$, d'où : $AE + EB = \Gamma Z + Z\Delta$. Or, on a posé : $H\Theta = AE + EB + \Gamma Z + Z\Delta$; donc : $\frac{1}{2}\ H\Theta = AE + EB = \Gamma Z + Z\Delta$. Or, $HK = H\Lambda + \Lambda K > \frac{1}{2} H\Theta$; donc : $H\Lambda + \Lambda K > AE + EB$.

2. Le triangle établi sur ΓΔ avec les droites KM, MΘ sera compris à l'intérieur du triangle ΓΖΔ ; car on a, comme dans la note précédente : $\frac{1}{2} H\Theta = \Gamma Z + Z\Delta$ et $K\Theta = KM + M\Theta < \frac{1}{2} H\Theta$; donc : $KM + M\Theta < \Gamma Z + Z\Delta$.

3. Les triangles AZB, ΓΝΔ sont semblables ; car on a posé : $\frac{HK}{K\Theta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$, d'où, considérant les moitiés : $\frac{H\Lambda}{KM} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$, d'où, considérant que $H\Lambda = A\Xi = B\Xi$ et $KM = \Gamma N = \Delta N$, on a : $\frac{A\Xi}{\Gamma N} = \frac{B\Xi}{\Delta N} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$.

4. On a par hypothèse : $AE = EB = \Gamma Z = Z\Delta$.

les droites ΠΡ, ΡΤ égal à l'angle E, la droite ΡΤ égale à la droite ΡΣ, et menons la droite de jonction ΠΤ ; il s'ensuit que le triangle ΠΡΤ est égal et semblable au triangle AEB. Prolongeons la droite ΠΣΥ ; que la droite ΠΥ soit égale à la droite AB, et menons la droite de jonction ΡΥ ; il s'ensuit que la droite ΡΥ est plus grande que la droite ΡΣ et que la droite ΡΤ (car chacune des droites ΠΡ, ΡΤ est égale à la droite ΡΣ). En conséquence, le triangle ΠΡΤ est égal et semblable au triangle AEB ; ou bien le triangle ΠΡΤ est égal au triangle ΠΡΣ lorsque la droite ΤΣ est parallèle à la droite ΡΠ et lorsque les angles alternes compris sous les droites ΡΠ, ΠΤ et sous les droites ΠΤ, ΤΣ sont égaux (car les triangles sont sur la même base ΡΠ et entre les mêmes parallèles ΡΠ, ΤΣ) ; ou bien il est plus grand lorsque la droite ΤΥ est parallèle à la droite ΡΠ et lorsque l'angle compris sous les droites ΠΤ, ΤΥ est égal à l'angle alterne compris sous les droites ΡΠ, ΠΤ (car le triangle ΠΡΤ devient de nouveau égal au triangle ΡΥΠ, tandis que le triangle ΠΡΥ est plus grand que le triangle ΠΡΣ ; donc, le triangle ΠΡΤ est aussi plus grand que le triangle ΠΡΣ). Enfin [1], lorsque la droite ΤΦ est parallèle à la droite ΡΠ (à cause des angles alternes égaux compris sous les droites ΡΠ, ΠΤ et sous les droites ΠΤ, ΤΦ et à cause de l'égalité des triangles ΠΡΤ, ΡΠΦ, de manière que le triangle ΠΡΣ soit plus grand que le triangle ΠΡΦ, c'est-à dire plus grand que le triangle ΠΡΤ). En sorte que le triangle AEB, égal au triangle ΠΡΤ, est aussi plus grand ou plus petit que le triangle ΠΡΣ, c'est-à-dire que le triangle ΓΖΔ, ou bien lui est égal] [2].

Proposition 9. — Voici le reste des choses qui ont été différées .... [3]

1. Le triangle ΠΡΤ devient plus petit que le triangle ΠΡΣ.

2. Le long passage faisant suite à la proposition 8, et que l'édition critique de Hultsch place entre crochets (cfr. *loc. cit.*, vol. I, pp. 330-332), est une digression confuse, contenant d'ailleurs une inexactitude, qui doit être attribuée à un scoliaste interpolateur.

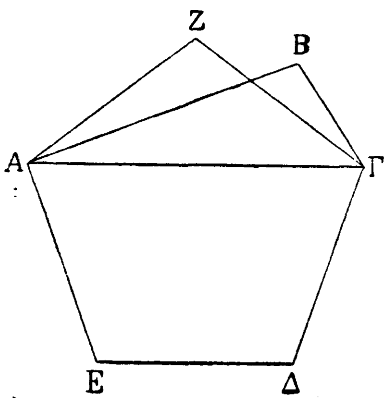
3. Cette proposition se perd entièrement dans une lacune. Elle devait probablement démontrer la relation : $\frac{\text{triangle } \Delta EB + \text{triangle } B\Lambda\Gamma}{\text{triangle } \Delta ZB + \text{triangle } B\Lambda\Gamma} \lesseqgtr \frac{EH + \Lambda M}{ZH + \Lambda M}$ qui avait été admise provisoirement sans démonstration à la fin de la proposition 7.

IX.

PROPOSITION 10. — Ces choses étant exposées au préalable, nous allons démontrer ce qui a été proposé plus haut [1], notamment que, parmi les figures rectilignes ayant même périmètre et même nombre de côtés, la plus grande est celle qui est équilatérale et équiangle [2].

Soit ΑΒΓΔΕ le plus grand des plurilatères [3] ayant même périmètre et même nombre de côtés que lui ; je dis qu'il est équilatéral.

En effet, qu'il ne le soit pas ; mais que les droites ΑΒ, ΒΓ soient, si possible, inégales, et menons la droite de jonction ΑΓ sur laquelle soit établi le triangle isocèle ΑΖΓ, de manière que la somme des droites ΑΖ, ΖΓ soit égale à la somme des droites ΑΒ, ΒΓ, conformément à la quatrième proposition [4]. Dès lors, puisque nous avons démontré, avant les trois dernières propositions [5], que le triangle isocèle est le plus grand des triangles isopérimètres établis sur une même base, il s'ensuit que le triangle ΑΖΓ est plus grand que le triangle ΑΒΓ. Ajoutons de part et d'autre le quadrilatère ΑΓΔΕ ; on aura une aire ΖΓΔΕΑ plus grande que l'aire la plus grande ΑΒΓΔΕ [6], de même péri-



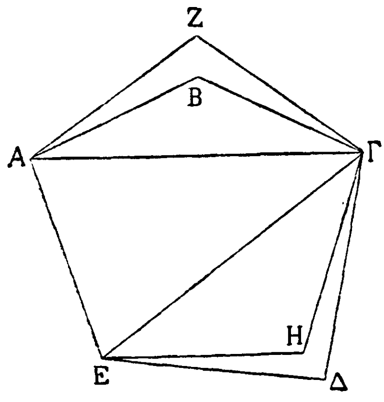
1. Voir l'alinéa qui précède la proposition 4.
2. Cette proposition est démontrée dans l'opuscule de Zénodore, où elle constitue la proposition 11 (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III : *Supplementa in Pappi Alexandrini Collectione, Zenodori de figuris isometris*, pp. 1206-1207). Pappus reproduit la démonstration de Zénodore dans la même forme, mais d'une manière un peu plus explicite.
3. Pappus emploie le mot πολύπλευρον, plurilatère, lorsque la figure rectiligne plane est considérée au point de vue de ses côtés ; tandis qu'il réserve le mot πολύγωνον, polygone, pour le cas où cette figure est considérée spécialement au point de vue de ses angles ou de ses sommets.
4. Voir proposition 4.
5. Voir proposition 5.
6. Par hypothèse.

mètre qu'elle et ayant même nombre de côtés ; ce qui est impossible. En conséquence, ΑΒΓΔΕ est équilatéral. Et il est clair que le plurilatère plus équilatéral [1] est continuellement plus grand ; car, ainsi qu'on l'a démontré trois propositions plus haut [2], le triangle plus isocèle est aussi continuellement plus grand.

X.

Au reste, je dis que le plurilatère ΑΒΓΔΕ est aussi équiangle.

En effet, qu'il ne le soit pas ; mais que l'angle B soit plus grand que l'angle Δ, s'il se peut. Dès lors, la droite ΑΓ est aussi plus grande que la droite ΓΕ (car la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est égale à la somme des droites ΓΔ, ΔΕ) [3]. Établissons, sur les droites inégales ΑΓ, ΓΕ, les triangles semblables isocèles ΑΖΓ, ΓΗΕ, ayant la somme des côtés ΑΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΕ égale à la somme des côtés ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, comme nous l'avons montré dans la proposition qui précède d'une celle-ci [4]. En conséquence, la somme des triangles établis ΑΖΓ, ΓΗΕ sera plus grande que celle des triangles primitifs ΑΒΓ, ΓΔΕ ; car cela a été également démontré deux propositions plus haut [5]. Et si l'on ajoute de part et d'autre le triangle ΑΓΕ, il se présentera de même ce qui ne peut avoir lieu ; car le plurilatère ΑΖΓΗΕ sera plus grand que le plus grand plurilatère ΑΒΓΔΕ [6] ayant même périmètre que lui. En conséquence, le plurilatère ΑΒΓΔΕ est équiangle. [Mais il est aussi équilatéral] [7] ; donc, parmi les figures rectilignes iso-



1. ἰσοπλευρότερον, (figure plurilatère) dont les côtés tendent le plus vers l'égalité.
2. Voir proposition 5.
3. Par hypothèse.
4. Voir proposition 8.
5. Voir proposition 7.
6. Par hypothèse.
7. Reconstitution proposée par Hultsch (Cf. *loc. cit.* vol. III, *appendix*, p. 1240).

périmètres et de même nombre de côtés, la plus grande est équilatérale et équiangle.

Et il est évident que le cercle est la plus grande des figures isopérimètres, puisque nous avons démontré (1) qu'il est plus grand qu'une figure ordonnée (2), c'est-à-dire équilatérale et équiangle.

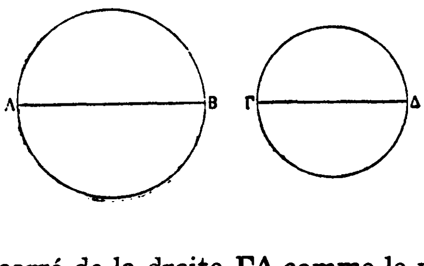
XI.

D'ailleurs, ceci rentre également dans les mêmes considérations que nous venons de faire : le demi-cercle est le plus grand des segments de cercle qui ont le même arc. Nous allons le démontrer en exposant d'abord les choses que l'on adopte à cet effet.

Proposition 11. — Les circonférences de cercles sont entre elles comme les diamètres (3).

Soient deux cercles AB, ΓΔ et leurs diamètres AB, ΓΔ ; je dis que la droite AB est à la droite ΓΔ comme la circonférence du cercle AB est à la circonférence du cercle ΓΔ.

En effet, puisque le carré de la droite AB est au carré de la droite ΓΔ comme le cercle AB est au cercle ΓΔ (4), mais, que le rectangle compris sous la droite AB et la circonférence du cercle est le quadruple du cercle AB, et que le rectangle compris sous la droite ΓΔ et la circonférence du cercle ΓΔ est le quadruple du cercle ΓΔ (car cela a été démontré précédemment) (5), il s'ensuit que le carré de la droite AB est au



carré de la droite ΓΔ comme le rectangle compris sous la droite AB et la circonférence du cercle AB est au rectangle compris sous

1. Voir proposition 6.
2. C'est-à-dire régulière.
3. La même proposition, énoncée en termes peu différents, sera de nouveau démontrée au livre VIII, prop. 22.
4. Euclide, liv. XII, prop. 2, énoncée p. 181, n. 1.
5. Voir proposition 3, p. 243.

la droite ΓΔ et la circonférence du cercle ΓΔ et que, par permutation, le rectangle compris sous la circonférence du cercle ΓΔ et la droite ΓΔ est au carré de la droite ΓΔ comme le rectangle compris sous la circonférence du cercle AB et la droite AB est au carré de la droite AB. En conséquence, la circonférence du cercle ΓΔ est à la droite ΓΔ comme la circonférence du cercle AB est à la droite AB et, par permutation, la droite AB est à la droite ΓΔ comme la circonférence du cercle AB est à la circonférence du cercle ΓΔ (1).

XII.

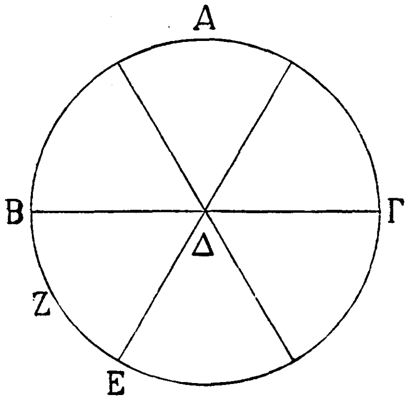
Cela se démontre aussi sans admettre que le rectangle compris sous le diamètre du cercle et sa circonférence est le quadruple du cercle ; car les polygones semblables inscrits ou circonscrits dans les cercles ont des périmètres qui sont entre eux dans le même rapport que les rayons ; de sorte que les circonférences des cercles sont aussi entre elles comme les diamètres.

Proposition 12. — Soient de nouveau le cercle ABΓ décrit autour du centre Δ, son rayon ΔB, et menons du point Δ une droite ΔE ; je dis que le cercle ABΓ est au secteur BΔE comme la circonférence du cercle ABΓ est à l'arc BZE. (2)

Si l'arc BZE est commensurable avec la circonférence du cercle ABΓ ; si le périmètre ABΓ du cercle est divisé dans les mesures de cet arc, et si les droites de jonction sont menées des

1. En notations usuelles, on a (Euclide, liv. XII, prop. 2) : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{\text{cercle AB}}{\text{cercle }\Gamma\Delta}$. Or, la proposition 3 a démontré que l'on a : circonf. cercle AB × diam. AB = 4 cercles AB et circonf. cercle ΓΔ × diamètre ΓΔ = 4 cercles ΓΔ ; donc : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{\text{circonf. cercle AB}\times \text{AB}}{\text{circonf. cercle }\Gamma\Delta\times\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{\text{circonf. cercle }\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{\text{circonf. cercle AB}}{\text{AB}}$; d'où, comme le texte : $\frac{\text{AB}}{\Gamma\Delta}=\frac{\text{circonf. cercle AB}}{\text{circonf. cercle }\Gamma\Delta}$.

2. Cette proposition 12 a probablement été iterpolée par un copiste ; car elle appartient au commentaire que Pappus a écrit sur le livre V de l'*Almageste* de Claude Ptolémée, où elle est à sa place plutôt qu'ici. (Voir : *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. Texte établi et annoté par A. Rome.* Tome I, *Commentaire sur les livres* 5 *et* 6 *de l'Almageste.* Roma, Bibliotheca Apostolica Vaticana, 1931, pp. 256-257).



points de division au centre Δ, tous les secteurs s'adaptent entre eux, et leur nombre est égal au nombre des mesures. En conséquence, le cercle ΑΒΓ sera au secteur ΒΔΕ comme le périmètre entier ΑΒΓ du cercle est à l'arc ΒΖΕ [1].

Mais, si le périmètre n'est pas commensurable avec l'arc ΒΕΖ, le périmètre ΑΒΓ est pareillement à l'arc ΒΖΕ comme le cercle ΑΒΓ est au secteur ΒΔΕ.

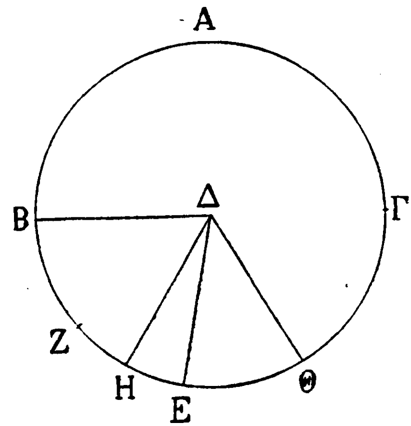
Que le périmètre ΑΒΓ du cercle soit, si possible, d'abord à l'arc ΒΖ, plus petit que l'arc ΒΖΕ, comme le cercle ΑΒΓ est au secteur ΒΔΕ ; prenons un autre arc ΒΗ, plus grand que l'arc ΒΖ, plus petit que l'arc ΒΖΕ et commensurable avec le périmètre ΑΒΓ; ce qui constitue un lemme des *Sphériques* [2], et menons la droite de jonction ΔΗ. Dès lors, en vertu de ce que nous avons dit plus haut [3], le périmètre ΑΒΓ du cercle est à l'arc ΒΖΗ comme le cercle ΑΒΓ est au secteur ΒΔΗ. Mais, le rapport du périmètre ΑΒΓ du cercle à l'arc ΒΖΗ est plus petit que son rapport à l'arc ΒΖ [4], c'est-à-dire plus petit que le rapport du cercle ΑΒΓ

1. Euclide, liv. V, prop. 15 : « Les parties comparées entre elles ont la même raison que leurs équimultiples ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 267. Le texte présente ici la petite interpolation : ιε´ τοῦ ε´ στοιχείων, c'est-à-dire : (proposition) XV du (livre) V des *Éléments* (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 338, l. 5).

2. λῆμμα σφαιρικῶν, Pappus semble renvoyer ici à un lemme sur la sphère que l'on ne rencontre cependant pas dans les *Sphériques* de Théodore de Tripoli, et que Commandin déclare n'avoir rencontré nulle part ; en sorte qu'il indique lui-même un moyen de trouver un arc commensurable avec le périmètre du cercle (Cfr. *loc. cit.*, p. 124). Hultsch conjecture, au contraire, qu'il s'agit ici de la proposition 27 du livre V de Pappus, dont la seconde partie contient des propositions ayant principalement trait à la sphère (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 339, en note). Il y a cependant lieu de remarquer que, dans le commentaire de Pappus sur le livre V de l'*Almageste*, d'où cette proposition a été empruntée, le texte porte λῆμμα σφαιρικόν (voir p. 257, l. 16, de l'édition de A. Rome mentionnée dans la note avant-précédente), ce qui permettrait une interprétation différente.

3. Voir la première partie de cette proposition.

4. Euclide, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6.



au secteur BΔE ; donc, le rapport du cercle ΑΒΓ au secteur BΔH sera aussi plus petit que son rapport au secteur BΔE ; ce qui ne peut avoir lieu (1). En conséquence, le périmètre ΑΒΓ du cercle n'est pas à l'arc BZ, plus petit que l'arc BZE, comme le cercle ΑΒΓ est au secteur BΔE.

Je dis aussi qu'il n'est pas à un arc plus grand que l'arc BZE.

En effet, qu'il soit, si possible, à un arc ΒΕΓ ; prenons pareillement un arc BEΘ qui, plus grand que l'arc BZE et plus petit que l'arc ΒΕΓ, est commensurable avec le périmètre ΑΒΓ du cercle, et menons la droite de jonction ΔΘ. Dès lors, puisque le périmètre ΑΒΓ du cercle est de nouveau à l'arc BEΘ comme le cercle ΑΒΓ est au secteur BΔΘ, et que le rapport du périmètre ΑΒΓ à l'arc BEΘ est plus grand que son rapport à l'arc ΒΕΓ, c'est-à-dire plus grand que le rapport du cercle ΑΒΓ au secteur BΔE (2), le rapport du cercle ΑΒΓ au secteur BΔΘ sera évidemment aussi plus grand que son rapport au secteur BΔE ; ce qui ne peut avoir lieu (3). En conséquence, le périmètre ΑΒΓ du cercle n'est pas à un arc plus grand que l'arc BZE comme le cercle ΑΒΓ est au secteur BΔE. Or, on a démontré qu'il n'est

---

1. Si l'arc BH, commensurable avec la circonférence ΑΒΓ, est tel que l'on ait : arc BZ $<$ arc BH $<$ arc BZE, on a, en vertu de la première partie de la démonstration : $\frac{\text{périmètre cercle } AB\Gamma}{\text{arc } BZH} = \frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{secteur } B\Delta H}$. Or (EUCLIDE, liv. V, prop. 8), on a : $\frac{\text{périmètre cercle } AB\Gamma}{\text{arc } BZH} < \frac{\text{périmètre cercle } AB\Gamma}{\text{arc } BZ}$, et on a : $\frac{\text{périm. cercle } AB\Gamma}{\text{arc } BZ} < \frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{secteur } B\Delta E}$; donc : $\frac{\text{périm. cercle } AB\Gamma}{\text{arc } BZH} < \frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{secteur } B\Delta E}$, d'où : $\frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{secteur } B\Delta H} < \frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{secteur } B\Delta E}$; ce qui est impossible.

2. Par hypothèse.

3. Si l'arc BEΘ, commensurable avec la circonférence ΑΒΓ est tel que l'on ait : arc BZE $<$ arc BEΘ $<$ arc ΒΕΓ, on aura, en raisonnant comme plus haut : $\frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{secteur } B\Delta\Theta} > \frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{secteur } B\Delta E}$; ce qui est impossible.

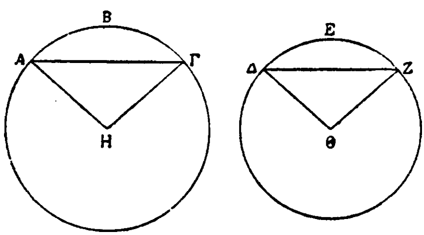
pas à un arc plus petit ; donc, le périmètre ΑΒΓ du cercle est à l'arc BZE comme le cercle ΑΒΓ est au secteur ΒΔΕ.

XIII.

Proposition 13. — Les segments semblables de cercles sont entre eux comme sont entre eux les carrés de leurs bases (1), et leurs arcs sont entre eux comme les bases.

Soient ΑΒΓ, ΔΕΖ des segments semblables de cercles ; je dis que le carré de la droite ΑΓ est au carré de la droite ΔΖ comme le segment ΑΒΓ est au segment ΔΕΖ, et que la droite ΑΓ est à la droite ΔΖ comme [l'arc] (2) ΑΒΓ est à l'arc ΔΕΖ.

Complétons les cercles (3) ; prenons leurs centres Η, Θ, et menons les droites de jonction ΑΗ, ΗΓ, ΔΘ, ΘΖ. Dès lors, puisque les segments ΑΒΓ, ΔΕΖ sont semblables, l'angle au point Η est égal à l'angle au point Θ, le triangle ΑΗΓ est semblable au triangle ΔΘΖ, et l'arc ΑΒΓ est semblable à l'arc ΔΕΖ. En conséquence, le périmètre du cercle ΑΒΓ est à l'arc ΑΒΓ, c'est-à-dire deux angles droits sont à l'angle Η, comme le cercle ΑΒΓ est au secteur ΑΗΓΒ, et le périmètre du cercle ΔΕΖ est à l'arc ΔΕΖ, c'est-à-dire deux angles droits sont à l'angle Θ, comme le cercle ΔΕΖ est au secteur ΔΘΖΕ. Or, l'angle Θ est égal à l'angle Η ; donc, le cercle ΔΕΖ est au secteur ΔΘΖΕ comme le cercle ΑΒΓ est au secteur ΑΗΓΒ et, par permutation, le secteur ΑΗΓΒ est au secteur ΔΘΖΕ comme le cercle ΑΒΓ est au cercle ΔΕΖ. Mais, le carré de la droite ΑΗ est au carré



1. Cette proposition a déjà été invoquée sans démonstration au cours de la proposition 30 du livre IV (voir p. 204).

2. Lacune comblée d'abord par le mot « circonferentia » dans la version de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 125, l. 14) ; puis par le mot περιφέρεια dans l'édition de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 340, l. 17).

3. προσαναπεπληρώσθωσαν οἱ κύκλοι, littéralement : que les cercles soient comblés.

de la droite ΔΘ, c'est-à-dire que le triangle AHΓ est au triangle ΔΘZ (1) comme le cercle est au cercle (2) ; par conséquent, le triangle AHΓ est aussi au triangle ΔΘZ comme le secteur AHΓB est au secteur ΔΘZE, et le segment restant (3) ABΓ est au segment restant ΔEZ comme le triangle AHΓ est au triangle ΔΘZ, c'est-à-dire comme le carré de la droite AΓ est au carré de la droite ΔZ (4).

Au reste, je dis que la droite AΓ est à la droite ΔZ comme l'arc ABΓ est à l'arc ΔEZ.

En effet, les constructions étant les mêmes, l'arc ABΓ est à l'arc ΔEZ comme la circonférence du cercle ABΓ est à la circonférence du cercle ΔEZ, et la droite AH est à la droite ΔΘ, c'est-à-dire la droite AΓ à la droite ΔZ (5), comme les circonférences des cercles sont entre elles (6) ; par conséquent, la droite AΓ est à la droite ΔZ comme l'arc ABΓ est à l'arc ΔEZ.

XIV.

Proposition 14. — Soient deux cercles et, à leurs centres, les angles égaux compris sous les droites AB, BΓ et sous les droites ΔE, EZ ; soient les tangentes AH, ΔΘ et les perpendiculaires AK, ΔΛ ; il faut démontrer que le triangle ΔΘΛ est au triligne ΔZΛ (7) comme le triangle AHK est au triligne AΓK.

---

1. Euclide, liv. VI, prop. 19 : « Les triangles semblables sont entre eux en raison double de leurs côtés homologues ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 330.

2. Euclide, liv. XII, prop. 2 énoncée p. 181, n. 1.

3. Euclide, liv. V, prop. 19 : « Si une grandeur entière est à une autre grandeur entière comme la grandeur retranchée de la première est à la grandeur retranchée de la seconde, la grandeur restante sera à la grandeur restante comme la première grandeur entière est à la seconde grandeur entière ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 275.

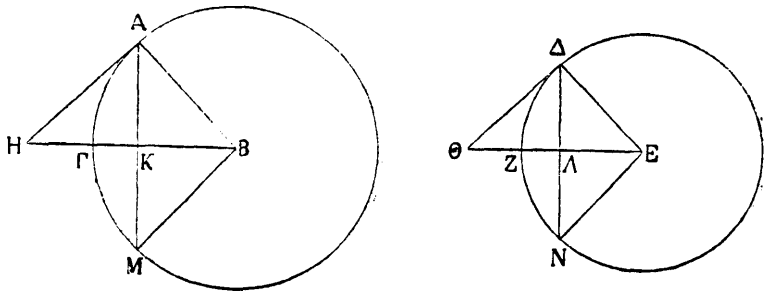
4. On a : $\frac{\text{cercle } \Delta EZ}{\text{secteur } \Delta\Theta ZE} = \frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{secteur } AH\Gamma B}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{secteur } AH\Gamma B}{\text{secteur } \Delta\Theta ZE} = \frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{cercle } \Delta EZ}$. Or, $\frac{\text{triangle } AH\Gamma}{\text{triangle } \Delta\Theta Z} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{\Delta\Theta}^2}$ et $\frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{cercle } \Delta EZ} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{\Delta\Theta}^2}$, d'où : $\frac{\text{cercle } AB\Gamma}{\text{cercle } \Delta EZ} = \frac{\text{triangle } AH\Gamma}{\text{triangle } \Delta\Theta Z}$; d'où : $\frac{\text{sect. } AH\Gamma B - \text{triangle } AH\Gamma}{\text{sect. } \Delta\Theta ZE - \text{triangle } \Delta\Theta Z} = \frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{segment } \Delta EZ} = \frac{\text{triangle } AH\Gamma}{\text{triangle } \Delta\Theta Z} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\Delta Z}^2}$.

5. Euclide, liv. VI, prop. 4, énoncée p. 27, n. 1.

6. Voir proposition 11.

7. τρίγραμμον, le triligne ou figure plane délimitée par trois lignes droites et courbes.

Cela résulte clairement de ce qui vient d'être exposé [1]. En effet, le triangle AHK devient semblable au triangle ΔΘΛ et le triligne



AΓK semblable au triligne ΔZΛ, et ils ont respectivement entre eux le même rapport que le carré de la droite AK possède avec le carré de la droite ΔΛ [2].

XV.

PROPOSITION 15. — Soit le triangle rectangle ABΓ ; décrivons, autour du point Γ comme centre, l'arc AΔ passant par le point A, et que l'angle au point B soit droit. Il faut démontrer que le rapport du secteur AΔΓ au triligne ΔAB est plus grand que celui de l'angle droit à l'angle compris sous les droites BΓ, ΓA.

Menons la droite ZA perpendiculaire à la droite ΓA (elle est donc tangente à l'arc AΔ) ; décrivons par le point B, autour du centre A, l'arc EBH, et menons la perpendiculaire BΘ sur la droite AZ. Dès lors, puisque le rapport du triligne EBZ au triligne EBΘ est plus grand que son rapport au secteur EAB [3]

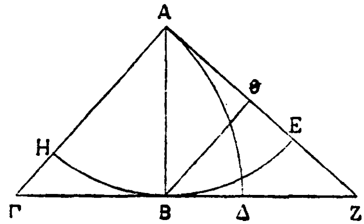
1. Voir proposition 13.

2. On a démontré (prop. 13) que l'on a : $\frac{\text{triangle } \Delta EN}{\text{triangle } ABM} = \frac{\text{segment } \Delta ZN}{\text{segment } A\Gamma M} = \frac{\overline{\Delta N}^2}{\overline{AM}^2}$,

d'où, considérant les moitiés des termes : $\frac{\text{triangle } \Delta E\Lambda}{\text{triangle } ABK} = \frac{\text{triligne } \Delta Z\Lambda}{\text{triligne } A\Gamma K} = \frac{\overline{\Delta\Lambda}^2}{\overline{AK}^2}$,

d'où, considérant la similitude des triangles AHK, ABK et des triangles ΔΘΛ, ΔEΛ on a : $\frac{\text{triangle } \Delta\Theta\Lambda}{\text{triangle } AHK} = \frac{\text{triligne } \Delta Z\Lambda}{\text{triligne } A\Gamma K} = \frac{\overline{\Delta\Lambda}^2}{\overline{AK}^2}$.

3. EUCLIDE, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6.



et que, par composition, le rapport du triangle ZΘB au triligne EΘB est aussi plus grand que le rapport du triangle ZAB au secteur EAB, tandis que le triangle ZAB est au triligne AΔB comme le triangle ZΘB est au triligne EBΘ, parce que les angles compris sous les droites EA, AB et sous les droites AΓ, ΓΔ sont égaux (car cela a été démontré précédemment) (1), il s'ensuit que le rapport du triangle ZAB au triligne ΔAB est aussi plus grand que le rapport de ce même triangle au secteur EAB (2) ; donc, le secteur EAB est plus grand que le triligne ΔAB. En conséquence, le rapport du secteur EAB au secteur AHB est plus grand que celui du triligne ΔAB au secteur AHB. Mais, le rapport du triligne ΔAB au secteur AHB est plus grand que son rapport au triangle ABΓ ; donc, à fortiori, le rapport du secteur EAB au secteur BAH est plus grand que celui du triligne ΔAB au triangle BAΓ. Or, l'angle compris sous les droites ZA, AB est à l'angle compris sous les droites BA, AΓ comme le secteur EAB est au secteur BAH (3) ; donc, le rapport de l'angle compris sous ZA, AB à l'angle compris sous BA, AΓ est plus grand que celui du triligne ΔAB au triangle BAΓ et, inversement, le rapport du triangle BAΓ au triligne BAΔ est plus grand que celui de l'angle compris sous BA, AΓ à l'angle compris sous BA, AZ (4) et, par composition, le rapport du secteur ΔΓA au triligne ΔAB est plus grand que celui de l'angle compris sous ZA, AΓ à l'angle compris sous ZA, AB (5), c'est-à-dire que celui de l'angle droit à l'angle compris sous AΓ, ΓB (car l'angle compris sous ZA, AB est égal à l'angle compris sous AΓ, ΓB, parce que, dans le triangle

1. Voir proposition 14.
2. EUCLIDE, liv. V, prop. 13 : « Si la première grandeur a la même raison avec la seconde que la troisième avec la quatrième, et si la troisième a avec la quatrième une raison plus grande que la cinquième avec la sixième, la première aura avec la seconde une raison plus grande que la cinquième avec la sixième. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 264.
3. EUCLIDE, liv. VI, prop. 33, énoncée p. 181, n. 1.
4. Cette transformation d'inégalité de rapports est démontrée au livre VII, prop. 7.
5. Transformation démontrée au livre VII, prop. 3.

rectangle ZAΓ, la droite AB est perpendiculaire et que le triangle ZAB est semblable au triangle AΓZ) (1).

XVI.

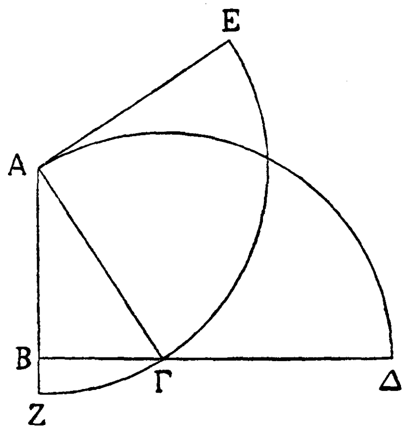
Proposition 16. — Soit de nouveau le triangle rectangle ABΓ ayant l'angle droit au point B, et décrivons autour du centre Γ l'arc AΔ passant par le point A (2) ; je dis que le rapport du secteur AΓΔ au triligne ABΔ est plus grand que celui de l'angle droit à l'angle compris sous les droites AΓ, ΓΔ.

Menons la droite AE perpendiculaire à la droite AΓ ; prolongeons la droite BA, et décrivons par le point Γ l'arc EΓZ autour du centre A. Dès lors, puisque les arcs sont décrits autour du même rayon ΓA, il est clair qu'ils appartiennent à des cercles égaux. Et l'angle compris sous les droites AΓ, ΓΔ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΓA, AE (3); donc, le secteur AΓΔ est plus grand que le secteur AΓE. En conséquence, le rapport du secteur AΓΔ au triangle ABΓ est plus grand que celui du secteur AΓE au même triangle, et, à fortiori, plus grand que celui du secteur AΓE au secteur AΓZ. Or, l'angle compris sous EA, AΓ est à l'angle compris sous ΓA, AZ comme le secteur AΓE est au secteur ΓAZ ; donc, le rapport du secteur AΓΔ au

1. On a : $\frac{\text{triligne EBZ}}{\text{triligne EB}\Theta} > \frac{\text{triligne EBZ}}{\text{secteur EAB}}$, d'où : $\frac{\text{triligne EBZ} + \text{triligne EB}\Theta}{\text{triligne EB}\Theta} > \frac{\text{triligne EBZ} + \text{secteur EAB}}{\text{secteur EAB}}$ ou, comme le texte : $\frac{\text{triangle ZB}\Theta}{\text{triligne EB}\Theta} > \frac{\text{triangle ZAB}}{\text{secteur EAB}}$. Or, $\widehat{\text{EAB}} = \widehat{\text{A}\Gamma\Delta}$; donc (proposition 14), on a : $\frac{\text{triangle ZAB}}{\text{triligne A}\Delta\text{B}} = \frac{\text{triangle ZB}\Theta}{\text{triligne EB}\Theta}$; donc (Euclide, liv. V, prop. 13) : $\frac{\text{triangle ZAB}}{\text{triligne A}\Delta\text{B}} > \frac{\text{triangle ZAB}}{\text{secteur EAB}}$, d'où : secteur EAB > triligne AΔB. Dès lors, on a : $\frac{\text{secteur EAB}}{\text{secteur BAH}} > \frac{\text{triligne A}\Delta\text{B}}{\text{secteur BAH}}$. Or, on a : $\frac{\text{triligne A}\Delta\text{B}}{\text{secteur BAH}} > \frac{\text{triligne A}\Delta\text{B}}{\text{triangle AB}\Gamma}$; donc, à fortiori : $\frac{\text{secteur EAB}}{\text{secteur BAH}} > \frac{\text{triligne A}\Delta\text{B}}{\text{triangle AB}\Gamma}$. Or (Euclide, liv. VI, prop. 33), on a : $\frac{\text{angle ZAB}}{\text{angle BA}\Gamma} = \frac{\text{secteur EAB}}{\text{secteur BAH}}$; donc : $\frac{\text{angle ZAB}}{\text{angle BA}\Gamma} > \frac{\text{triligne A}\Delta\text{B}}{\text{triangle AB}\Gamma}$, d'où : $\frac{\text{triangle AB}\Gamma}{\text{triligne A}\Delta\text{B}} > \frac{\text{angle BA}\Gamma}{\text{angle ZAB}}$, d'où : $\frac{\text{triangle AB}\Gamma + \text{triligne A}\Delta\text{B}}{\text{triligne A}\Delta\text{B}} > \frac{\text{angle BA}\Gamma + \text{angle ZAB}}{\text{angle ZAB}}$ ou : $\frac{\text{secteur }\Delta\Gamma\text{A}}{\text{triligne A}\Delta\text{B}} > \frac{\text{angle ZA}\Gamma}{\text{angle ZAB}} = \frac{\text{angle droit}}{\text{angle A}\Gamma\text{B}}$.

2. Et coupant au point Δ le côté BΓ prolongé du triangle ABΓ.

3. L'angle ΓAE est droit par construction.



triangle ΑΒΓ est aussi plus grand que celui de l'angle compris sous ΕΑ, ΑΓ à l'angle compris sous ΓΑ, ΑΖ. Et, par inversion et composition (1), le rapport du secteur ΑΓΔ au triligne ΑΒΔ est plus grand que celui de l'angle compris sous ΕΑ, ΑΓ à l'angle compris sous ΕΑ, ΑΖ, c'est-à-dire celui de l'angle droit à l'angle compris sous ΑΓ, ΓΔ (car l'angle compris sous ΕΑ, ΑΖ est égal à l'angle compris sous ΑΓ, ΓΔ, parce que l'angle compris sous ΑΓ, ΓΔ est égal à l'angle droit compris sous ΓΒ, ΒΑ augmenté de l'angle compris sous ΒΑ, ΑΓ) (2).

XVII.

Proposition 17. — Ces choses étant exposées au préalable, nous allons démontrer de la manière suivante le théorème de comparaison qui a été proposé (3).

Soient deux segments de cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ ayant les arcs ΑΒΓ, ΔΕΖ égaux ; que le segment ΑΒΓ soit un demi-cercle, et

---

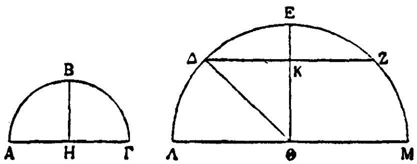
1. Le texte présente ici la petite interpolation erronée d'un scoliaste : *καὶ ἀναστρέψαντι*, et par conversion (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 346, l. 15).

2. On a : secteur ΑΓΔ > secteur ΓΑΕ ; donc : $\frac{\text{secteur } \mathrm{A\Gamma\Delta}}{\text{triangle } \mathrm{AB\Gamma}} > \frac{\text{secteur } \mathrm{\Gamma AE}}{\text{triangle } \mathrm{AB\Gamma}} > \frac{\text{secteur } \mathrm{\Gamma AE}}{\text{secteur } \mathrm{\Gamma AZ}}$. Or, $\frac{\text{angle } \mathrm{\Gamma AE}}{\text{angle } \mathrm{\Gamma AZ}} = \frac{\text{secteur } \mathrm{\Gamma AE}}{\text{secteur } \mathrm{\Gamma AZ}}$; donc : $\frac{\text{secteur } \mathrm{A\Gamma\Delta}}{\text{triangle } \mathrm{AB\Gamma}} > \frac{\text{angle } \mathrm{\Gamma AE}}{\text{angle } \mathrm{\Gamma AZ}}$, d'où, par inversion et par composition : $\frac{\text{triangle } \mathrm{AB\Gamma} + \text{secteur } \mathrm{A\Gamma\Delta}}{\text{secteur } \mathrm{A\Gamma\Delta}} < \frac{\text{angle } \mathrm{\Gamma AZ} + \text{angle } \mathrm{\Gamma AE}}{\text{angle } \mathrm{\Gamma AE}}$ ou : $\frac{\text{triligne } \mathrm{AB\Delta}}{\text{secteur } \mathrm{A\Gamma\Delta}} < \frac{\text{angle } \mathrm{EAZ}}{\text{angle } \mathrm{\Gamma AE}}$, d'où par nouvelle inversion, comme le texte : $\frac{\text{secteur } \mathrm{A\Gamma\Delta}}{\text{triligne } \mathrm{AB\Delta}} > \frac{\text{angle } \mathrm{\Gamma AE}}{\text{angle } \mathrm{EAZ}}$. Or, $\widehat{\mathrm{\Gamma AE}} = 1$ angle droit, et $\widehat{\mathrm{EAZ}} = 1$ angle droit $+ \widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = \widehat{\mathrm{A\Gamma\Delta}}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{secteur } \mathrm{A\Gamma\Delta}}{\text{triligne } \mathrm{AB\Delta}} > \frac{\text{angle droit}}{\text{angle } \mathrm{A\Gamma\Delta}}$.

3. Voir § XI, p. 260, le théorème énonçant que le demi-cercle est le plus grand des segments de cercles ayant des arcs égaux.

que le segment ΔEZ soit d'abord plus petit qu'un demi-cercle ; je dis que le demi-cercle est plus grand que le segment.

Prenons les centres H, Θ des cercles ; menons la perpendiculaire HB, puis, du point Θ, la perpendiculaire ΘKE sur la droite ΔZ, puis la droite ΛM parallèle à la droite ΔZ, enfin, la droite de jonction ΔΘ. Dès lors, puisque la droite ΛΘ est à la droite AH comme l'arc ΛE est à l'arc AB (car les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres) (1), et que l'arc AB est égal à l'arc ΔE, il s'ensuit que la droite ΛΘ est à la droite AH comme l'arc ΛE est à l'arc EΔ. Or, le secteur ΛΘE est au secteur EΘΔ comme l'arc EΛ est à l'arc ΔE, et le rapport du carré de la droite ΛΘ au carré de la droite AH est le doublement de celui de la droite ΘΛ à la droite HA ; tandis que le rapport du carré de la droite ΘΛ au carré de la droite AH, c'est-à-dire le rapport du secteur ΛΘE au secteur AHB est le doublement de celui du secteur ΛEΘ au secteur ΔEΘ ; donc, le secteur ΔEΘ est moyen proportionnel des secteurs ΛEΘ, ABH (2). Et puisque, en vertu du lemme démontré précédemment (3), le rapport du secteur EΔΘ au triligne EΔK est plus grand que celui d'un angle droit, c'est-à-dire de l'angle compris sous les droites ΛΘ, ΘE, à l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘE, c'est-à-dire plus grand que celui du secteur ΛΘE au secteur ΔΘE, et que le secteur ΔΘE est au secteur AHB comme le secteur ΛΘE est au secteur ΔΘE, [il s'ensuit que le secteur



1. Voir proposition 11.

2. On a (prop. 11) : $\frac{\Lambda\Theta}{AH} = \frac{\text{arc } \Lambda E}{\text{arc } AB}$. Or, par hypothèse : arc ΔE = arc AB ; donc: $\frac{\Lambda\Theta}{AH} = \frac{\text{arc } \Lambda E}{\text{arc } \Delta E}$. Or, (Euclide, liv. VI, prop. 33, énoncée p. 181, n. 1), on a : $\frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } E\Theta\Delta} = \frac{\text{arc } \Lambda E}{\text{arc } \Delta E}$; donc : $\frac{\Lambda\Theta}{AH} = \frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } E\Theta\Delta}$. D'autre part, on a (prop. 13) : $\frac{\overline{\Lambda\Theta}^2}{\overline{AH}^2} = \frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } AHB}$; donc : $\frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } E\Theta\Delta} \times \frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } E\Theta\Delta} = \frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } AHB}$, ou, comme le texte : $\frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } E\Theta\Delta} = \frac{\text{secteur } E\Theta\Delta}{\text{secteur } AHB}$.

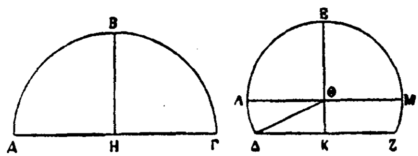
3. Voir proposition 15.

ΔΘΕ] [1] a un rapport plus grand avec le triligne ΔΕΚ que celui que possède ce même secteur avec le secteur ΑΒΗ. En conséquence, le secteur ΑΗΒ est plus grand que le triligne ΔΚΕ. Or, il en est de même pour les doubles ; donc, le demi-cercle ΑΒΓ est plus grand que le segment ΔΕΖ [2].

XVIII.

Que le segment soit, au contraire, plus grand que le demi-cercle ; je dis que le demi-cercle est ainsi plus grand aussi [3].

En effet, faisons les mêmes constructions. Dès lors, nous démontrerons pareillement que le secteur ΔΘΕ est au secteur ΑΗΒ comme le secteur ΛΘΕ est au secteur ΔΘΕ (car les arcs ΑΒ, ΔΕ sont égaux). Et puisque, en vertu du lemme qui précède celui-ci de deux [4], le rapport du secteur ΔΘΕ au triligne ΔΚΕ est plus grand que celui de l'angle droit, c'est-à-dire de l'angle compris sous les droites ΛΘ, ΘΕ, à l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ, c'est-à-dire plus grand que celui du secteur ΛΘΕ au secteur ΔΘΕ, c'est-à-dire plus grand que celui du secteur ΔΘΕ au secteur ΑΒΗ, il s'ensuit que le secteur ΑΗΒ sera plus grand que le triligne ΔΕΚ et, considérant les doubles, le demi-cercle ΑΒΓ sera donc plus grand que le segment ΔΕΖ [5]. En conséquence, le demi-cercle est le plus grand de tous les segments de cercles ayant des arcs égaux.



1. Lacune comblée par Commandin au moyen des mots ὁ ἄρα ΔΘΕ τομεὺς en note de sa version latine (Cfr. *loc. cit.*, p. 129, l. 29).

2. On a (proposition 15) : $\frac{\text{secteur } E\Theta\Delta}{\text{triligne } E\Delta K} > \frac{\text{angle } \Lambda\Theta E}{\text{angle } E\Theta\Delta} = \frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } E\Theta\Delta}$. Or, on a démontré la relation : $\frac{\text{secteur } \Lambda\Theta E}{\text{secteur } E\Theta\Delta} = \frac{\text{secteur } E\Theta\Delta}{\text{secteur } AHB}$; donc : $\frac{\text{secteur } E\Theta\Delta}{\text{triligne } E\Delta K} > \frac{\text{secteur } E\Theta\Delta}{\text{secteur } AHB}$, d'où, comme le texte : secteur ΑΗΒ > triligne ΕΔΚ, d'où considérant les doubles : demi-cercle ΑΒΓ > segment ΔΕΖ.

3. C'est-à-dire que si l'on a : arc ΑΒΓ = arc ΔΕΖ, on aura : demi-cercle ΑΒΓ > segment ΔΕΖ.

4. Voir proposition 16.

5. On démontrera, comme dans la proposition 17, que le secteur ΔΘΕ est moyen proportionnel entre les secteurs ΑΗΒ, ΛΘΕ, c'est-à-dire que l'on a.

XIX (1).

Les philosophes disent que c'est à juste titre que le premier des dieux a revêtu le monde de la figure sphérique, choisie comme étant la plus belle de celles qui existent. Ils mentionnent les propriétés naturelles de la sphère et y ajoutent encore que la sphère est la plus grande de toutes les figures de même surface. Tout ce qu'ils déclarent appartenir à la sphère est d'ailleurs manifeste et ne réclame guère de démonstrations; mais, quant à déclarer qu'elle est plus grande que d'autres figures, les philosophes ne le démontrent pas et se bornent à l'affirmer; et il n'est pas facile de s'en convaincre sans examen plus étendu. Dès lors, de même que, dans ce qui précède, nous avons trouvé que le cercle est la plus grande des figures polygonales ayant même périmètre que lui, nous allons essayer maintenant de démontrer que la sphère est, par voie de conséquence, la plus grande des figures solides régulières ayant même surface qu'elle. Nous allons tout d'abord disserter quelque peu sur les solides mêmes auxquels il s'agit de comparer la sphère. Il est en effet possible d'imaginer un grand nombre de figures solides ayant des surfaces de toute espèce; mais nous aurons égard plutôt à celles qui paraissent régulières (2). Or, celles-ci ne sont pas seulement constituées par les cinq figures que l'on rencontre chez le divin Platon, à savoir : le tétraèdre et l'hexaèdre, l'octaèdre et le dodécaèdre et, en cinquième lieu, l'icosaèdre (3), mais encore par celles qui ont été découvertes au

---

$\frac{\text{secteur } \Lambda\Theta\text{E}}{\text{secteur } \Delta\Theta\text{E}} = \frac{\text{secteur } \Delta\Theta\text{E}}{\text{secteur AHB}}$. Or, la proposition 16 donne : $\frac{\text{secteur } \Delta\Theta\text{E}}{\text{triligne } \Delta\text{KE}} > \frac{\text{angle droit } \Lambda\Theta\text{E}}{\text{angle } \Delta\Theta\text{E}} = \frac{\text{secteur } \Lambda\Theta\text{E}}{\text{secteur } \Delta\Theta\text{E}}$; donc : $\frac{\text{secteur } \Delta\Theta\text{E}}{\text{triligne } \Delta\text{KE}} > \frac{\text{secteur } \Delta\Theta\text{E}}{\text{secteur AHB}}$, d'où, comme le texte : secteur AHB $>$ triligne ΔKE, d'où, considérant les doubles : demi-cercle ΑΒΓ $>$ segment ΔEZ.

1. Ce chapitre inaugure la seconde partie du livre V relative aux corps solides. Certains manuscrits portent en marge le titre : περὶ τῶν στερεῶν (Sur les figures solides), et la version latine de Hultsch intitule ce chapitre : *Libri quinti pars secunda. In Archimedis solidorum doctrinam* (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 351).

2. Le texte porte ici l'interpolation : καὶ τούτων πολὺ πλέον τούς τε κώνους καὶ κυλίνδρους καὶ τὰ καλούμενα πολύεδρα (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 352, ll. 9-10).

3. *Œuvres de Platon, nouvelle édition accompagnée de notes, d'arguments et de tables analytiques, précédée d'une esquisse de la Philosophie de Platon par*

nombre de treize par Archimède et sont comprises sous des polygones équilatéraux et équiangles, mais non semblables [1].

Il y a d'abord l'octaèdre compris sous 4 triangles et 4 hexagones.

En plus de ce dernier, il y a trois décatétraèdres [2], dont le premier est compris sous 8 triangles et 6 carrés, le second sous 6 carrés et 8 hexagones, et le troisième sous 8 triangles et 6 octogones.

En plus de ces derniers, il y a deux icohexaèdres [3], dont le premier est compris sous 8 triangles et 18 carrés, et le second sous 12 carrés, 8 hexagones et 6 octogones.

En plus de ces derniers, il y a trois triacontadoèdres [4], dont le premier est compris sous 20 triangles et 12 pentagones ; le second sous 12 pentagones et 20 hexagones, et le troisième sous 20 triangles et 12 décagones.

En plus de ces derniers, il y a le triacontaoctaèdre [5] compris sous 32 triangles et 6 carrés.

En plus de ces derniers, il y a deux hexécontadoèdres [6], dont le premier est compris sous 20 triangles, 30 carrés et 12 pentagones, et le second sous 30 carrés, 20 hexagones et 12 décagones.

En plus de ceux-là, le dernier est l'ennécontadoèdre [7] compris sous 80 triangles et 12 pentagones.

M. Swalbé, et d'une introduction à la République par M. Aimé-Martin. Paris, 2 vol. gr. in-8°. Voir *Timée ou de la Nature*, vol. I, p. 652.

Voir aussi : EUCLIDE, liv. XIII, prop. 13 à 18 relatives à l'inscription des cinq polyèdres réguliers dans la sphère (Trad. de Peyrard, vol. III, pp. 257-300).

1. On ne possède plus l'ouvrage dans lequel Archimède avait traité de treize polyèdres semi-réguliers de son invention. Un essai de reconstitution de la manière dont Archimède aurait obtenu la génération de ces polyèdres a été donné par Kepler sous le titre : *Joan. Kepleri Harmonices Mundi libri V. Lineii Austriae*, 1619, petit in-folio, pp. 62-65.

2. τεσσαρεσκαιδεκάεδρον, le décatétraèdre, c'est-à-dire le solide semi-régulier à quatorze faces ou bases.

3. ἑκκαιεικοσάεδρον, l'icohexaèdre, ou solide semi-régulier à vingt-six bases ou faces.

4. δυοκαιτριακοντάεδρον, le triacontadoèdre, ou solide semi-régulier à trente-deux bases ou faces.

5. ὀκτωκαιτριακοντάεδρον, le triacontaoctaèdre, ou polyèdre compris sous trente-huit faces ou bases.

6. δυοκαιεξηκοντάεδρον, l'hexécontadoèdre, ou polyèdre compris sous soixante-deux faces.

7. δυοκαιενενηκοντάεδρον, l'ennécontadoèdre, ou polyèdre compris sous quatre-vingt-douze faces.

On reconnaîtra de la manière suivante combien chacune de ces treize figures polyèdres possède d'angles et de côtés :

En effet, si, pour les polyèdres dont les angles solides sont entourés de trois angles plans, on dénombre tout simplement les angles plans que possèdent toutes les bases du polyèdre, il est évident que le nombre d'angles solides est le tiers du nombre obtenu ; tandis que pour les polyèdres dont l'angle solide est entouré de quatre angles plans, si l'on dénombre tous les angles plans que possèdent les bases du polyèdre, le nombre des angles solides de ce polyèdre est le quart du nombre obtenu. Enfin, de même pour les polyèdres dont l'angle solide est entouré de cinq angles plans, le nombre qui exprime la quantité des angles solides est le cinquième de la quantité des angles plans.

D'autre part, on trouve de la manière suivante quel est le nombre de côtés [1] que possède chacun des polyèdres :

Si l'on dénombre tous les côtés que possèdent les plans qui délimitent les polyèdres, leur nombre sera évidemment égal au nombre des angles plans. Mais, comme chacun des côtés est commun à deux plans, il est évident que le nombre des côtés du polyèdre est la moitié de ce nombre.

En conséquence, puisque le premier des treize polyèdres non homogènes [2] est compris sous 4 triangles et 4 hexagones, il a 12 angles solides et 18 côtés ; car les angles des quatre triangles sont au nombre de 12 et les côtés au nombre de 12 ; tandis que les angles des quatre hexagones sont au nombre de 24 et les côtés au nombre de 24 ; donc, le nombre total obtenu étant 36, le nombre d'angles solides est nécessairement le tiers du nombre que nous venons de dire, parce que chacun des angles solides du polyèdre est entouré de trois angles plans, et que le nombre de côtés est la moitié de ce nombre, c'est-à-dire de 36 ; de sorte qu'il y a 18 côtés.

D'autre part, le premier des décatétraèdres est compris sous 8 triangles et 6 carrés ; de sorte qu'il a 12 angles solides (car chacun de ses angles est entouré de quatre angles plans), et il a 24 côtés. Le second des décatétraèdres étant compris sous

1. τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν, la quantité de côtés, c'est-à-dire le nombre d'arêtes.
2. ἀνομοιογενῆ πολύεδρα, les polyèdres non homogènes, dont les faces ne sont pas toutes de la même espèce, ou polyèdres semi-réguliers.

6 carrés et 8 hexagones, a 24 angles solides (car chacun de ses angles est entouré de trois angles plans) et il a 36 côtés. Enfin, le troisième des décatétraèdres étant compris sous 8 triangles et 6 octogones, a 24 angles solides et 36 côtés.

D'autre part, le premier des icohexaèdres étant compris sous 8 triangles et 18 carrés, a 24 angles solides et 48 côtés ; tandis que le second des icohexaèdres étant compris sous 12 carrés; 8 hexagones et 6 octogones, a 48 angles solides et 72 côtés.

D'autre part, le premier des triacontadoèdres étant compris sous 20 triangles et 12 pentagones, a 30 angles solides et 60 côtés ; tandis que le second des triacontadoèdres, étant compris sous 12 pentagones et 20 hexagones, a 60 angles solides et 90 côtés, et que le troisième des triacontadoèdres, étant compris sous 20 triangles et 12 décagones, a 60 angles solides et 90 côtés.

D'autre part, le triacontaoctaèdre étant compris sous 32 triangles et 6 carrés, a 24 angles solides et 60 côtés.

D'autre part, le premier des hexécontadoèdres étant compris sous 20 triangles, 30 carrés et 12 pentagones, a 60 angles solides et 120 côtés ; tandis que le polyèdre restant, étant compris sous 30 carrés, 20 hexagones et 12 décagones, a 120 angles solides et 180 côtés.

Enfin, l'ennécontadoèdre étant compris sous 80 triangles et 12 pentagones, a 60 angles solides et 150 côtés [1].

1. Les caractéristiques des treize polyèdres semi-réguliers d'Archimède se résument comme suit :

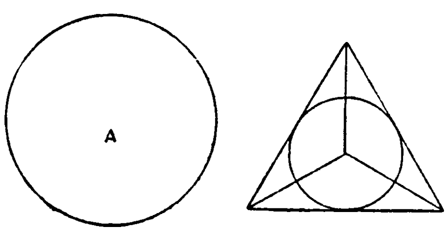
POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS		ESPÈCE DES FACES DU POLYÈDRE	NOMBRE DES faces	NOMBRE DES angles	NOMBRE DES arêtes
Octaèdre	I	4 triangles et 4 hexagones	8	12	18
Décatétraèdres	II	8 triangles et 6 carrés	14	12	24
	III	6 carrés et 8 hexagones	14	24	36
	IV	8 triangles et 6 octogones	14	24	36
Icohexaèdres	V	8 triangles et 18 carrés	26	24	48
	VI	12 carrés, 8 hexagones et 6 octogones	26	48	72
Triacontadoèdres	VII	20 triangles et 12 pentagones	32	30	60
	VIII	12 pentagones et 20 hexagones	32	60	90
	IX	20 triangles et 12 décagones	32	60	90
Triacontaoctaèdre	X	32 triangles et 6 carrés	38	24	60
Hexécontadoèdres	XI	20 triangles, 30 carrés et 12 pentagones	62	60	120
	XII	30 carrés, 20 hexagones et 12 décagones	62	120	180
Ennécontadoèdre	XIII	80 triangles et 12 pentagones	92	60	150

Nous négligerons pour le moment ces treize figures (1) comprises sous les polygones inégaux et dissemblables parce qu'elles sont moins régulières, et il convient de comparer avec la sphère les cinq figures que nous avons nommées ; car celles-ci étant comprises sous des plans égaux et semblables, elles sont les seules à avoir des angles solides égaux et sont, par cela-même, plus régulières que les autres. D'ailleurs, il a été démontré par Euclide (2) et par d'autres qu'il est impossible de trouver d'autres figures en dehors de ces cinq qui soient comprises sous des polygones équilatéraux et semblables.

Nous allons donc comparer ces derniers polyèdres avec la sphère.

Proposition 18. — Soit une sphère dont on a le centre, et soit l'une des cinq figures que nous avons dites, ayant sa surface totale équivalente à celle de la sphère ; je dis que la sphère est plus grande.

En effet, imaginons une sphère inscrite dans le polyèdre de manière à être tangente aux plans qui l'entourent ; il s'ensuit que la surface du polyèdre est plus grande que la surface de la sphère inscrite, car elle l'entoure. Mais, la surface du polyèdre équivaut à la surface de la sphère A ; en sorte que la surface de la sphère A est aussi plus grande que la surface de la sphère inscrite dans le polyèdre, et le rayon de la sphère A est donc aussi plus grand que le rayon de la sphère inscrite. Or, la surface de la sphère A équivaut à la surface du polyèdre ; donc, le cône dont la base est un cercle équivalent à la surface de la sphère A [et dont la hauteur est égale au rayon de la sphère A] (3) est plus grand



1. Le texte présente ici l'interpolation : ἤτοι ἀνομοιογώνια ὄντα ἢ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 358, l. 19).
2. Euclide, *Eléments*, liv. XIII.
3. Lacune comblée par Eisenmann dans son édition première du texte grec de la seconde partie du livre V de Pappus, établie d'après un manuscrit de Paris (codex Parisinus 2368) et intitulée : *Pappi Alexandrini collectiones mathematicae nunc primum graece edidit Herm. Jos. Eisenmann. Libri quinti pars altera.* Parisiis, 1824.

que la pyramide dont la base est le rectiligne (1) équivalent à la surface du polyèdre, et dont la hauteur est le rayon de la sphère inscrite dans le polyèdre. Mais, ce cône équivaut à la sphère A (car cela est manifeste en vertu des choses démontrées par Archimède dans le livre *De la Sphère et du Cylindre* (2) et des autres lemmes que nous avons rangés ci-dessous) (3) ; tandis que cette pyramide équivaut au polyèdre (4) ; par conséquent, la sphère A est plus grande que le polyèdre proposé.

XX.

Au reste ces cinq figures présentent encore entre elles une certaine conformité que nous examinerons ultérieurement (5). On démontrera, en effet, que si on leur suppose des surfaces équivalentes, celle qui a plus de bases est continuellement plus grande. Ainsi, l'icosaèdre sera plus grand que le dodécaèdre et le dodécaèdre plus grand que l'octaèdre et, pareillement, l'octaèdre sera plus grand que le cube et le cube plus grand que la pyramide. Ces solides sont d'ailleurs affectés de la même manière que les polygones plans ; car, de même qu'on a démontré que, lorsque ces derniers ont même périmètre, celui qui a plus d'angles est continuellement plus grand (6) et que le cercle est le plus grand de tous (7), on démontrera maintenant que la sphère est plus grande que les polyèdres.

---

1. εὐθύγραμμον (sous-entendu σχῆμα, figure), c'est-à-dire la figure plane délimitée par des lignes droites, ou le rectiligne.

2. ARCHIMÈDE, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 33 : « L'aire de toute sphère est quadruple du plus grand de ses cercles », et prop. 34 : « Toute sphère est quadruple du cône ayant le plus grand cercle de la sphère comme base et le rayon de la sphère comme hauteur ». Voir : *Œuvres complètes d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 63-69.

3. Voir les vingt-trois lemmes constituant les propositions 20 à 36 qui vont suivre.

4. EUCLIDE, liv. XII, prop. 6 : « Les pyramides qui ont la même hauteur et qui ont des polygones pour bases, sont entre elles comme leurs bases ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 143.

5. Les propriétés de conformité ou de comparaison (σύγκρισιν) des cinq polyèdres réguliers feront l'objet de la troisième partie du livre V, à partir de la proposition 38.

6. Voir proposition 1.

7. Voir proposition 2.

PROPOSITION 19. — D'ailleurs, il est manifeste aussi que le cône et le cylindre ayant respectivement même surface que celle d'une sphère sont plus petits qu'elle.

En effet, le cône, dont la base est équivalente à la surface d'une sphère et dont la surface totale est plus grande que la surface de cette sphère, sera trouvé équivalent à celle-ci, lorsque sa hauteur est égale au rayon de la sphère (1) ; tandis que le cylindre qui a même base que ce cône, laquelle équivaut à la surface de la sphère, et comme hauteur le tiers de l'axe du cône, cylindre équivalent ainsi au cône, sera trouvé aussi équivalent à la sphère (2), tout en ayant sa surface plus grande que celle de la sphère ; car les deux bases du cylindre valent le double de la base du cône, c'est-à-dire le double de la surface de la sphère ; en sorte que, quand l'une ou l'autre de ces figures (3) a sa surface (4) équivalente à celle d'une sphère, cette sphère est nécessairement plus grande que l'une ou l'autre de ces figures.

Telles sont donc les choses en ce qui concerne la comparaison de la sphère avec les cinq figures (5), le cône et le cylindre. Quant aux propositions démontrées par Archimède, comme nous l'avons dit, nous les démontrerons encore d'une autre manière, après les avoir fait précéder de tous les petits lemmes qui contribuent à leur démonstration (6).

---

1. On a (ARCHIMÈDE, *De la Sphère et du Cylindre*, prop. 34, énoncée p. 277, n. 2) : Vol. sphère = quatre cônes de base grand cercle et de hauteur rayon de la sphère = Cône de base quatre grands cercles et de hauteur rayon de la sphère = Cône de base aire de la sphère et de hauteur rayon de la sphère.

2. On a (EUCLIDE, liv. XII, prop. 10 : « Un cône est la troisième partie d'un cylindre qui a la même base et une hauteur égale ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 157) : Cylindre = trois cônes de même base et de même hauteur que le cylindre ; d'où : Cône = cylindre de même base et de hauteur trois fois moindre que le cône ; donc : Cône de base équivalente à l'aire de la sphère et de hauteur égale au rayon de la sphère = cylindre de base équivalente à l'aire de la sphère et de hauteur égale au tiers du rayon ; d'où, en présence de la relation de la note précédente : Sphère = Cylindre de base équivalente à l'aire de la sphère et de hauteur égale au tiers du rayon.

3. C'est-à-dire le cône et le cylindre.

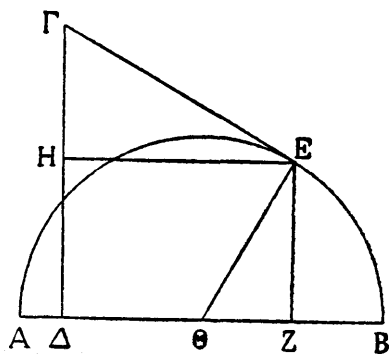
4. Sous-entendu ὅλην, (la surface) totale.

5. C'est-à-dire les cinq polyèdres réguliers.

6. Suivent, en effet, vingt-trois petits lemmes qui permettent de donner des variantes intéressantes des démonstrations de quelques belles propositions bien connues d'Archimède.

PROPOSITION 20 (lemme 1). — Soient un demi-cercle sur le diamètre AB, les perpendiculaires ΓΔ, EZ quelconques sur ce diamètre et la tangente ΓE ; je dis que le rectangle compris sous les droites ZE, EΓ, pris deux fois, équivaut au rectangle compris sous les droites AB, ΔZ.

Menons du point E la perpendiculaire EH sur la droite ΓΔ et, après avoir pris le centre Θ, menons la droite de jonction EΘ. Dès lors, puisque l'angle droit compris sous les droites ΓE, EΘ est égal à l'angle droit compris sous les droites ZE, EH, si on retranche de part et d'autre l'angle compris sous les droites HE, EΘ, l'angle restant compris sous les droites ΓE, EH sera égal à l'angle compris sous les droites ZE, EΘ. Mais, l'angle droit Z est aussi égal à l'angle droit H ; donc, le triangle ΓEH est équiangle avec le triangle ZEΘ. En conséquence, la droite HE est à la droite EΓ comme la droite ZE est à la droite EΘ ; donc, le rectangle compris sous ZE, EΓ équivaut au rectangle compris sous ΘE, EH ; en sorte que deux fois le rectangle compris sous ZE, EΓ équivaut aussi à deux fois le rectangle compris sous ΘE, EH. Mais, deux fois le rectangle compris sous ΘE, EH équivaut au rectangle compris sous AB, ΔZ (car la droite HE est égale à la droite ΔZ) ; donc, deux fois le rectangle compris sous ZE, EΓ équivaut aussi au rectangle compris sous AB, ΔZ ; en sorte que le rectangle compris sous la somme des droites EZ, ΔH et la droite ΓE équivaut au rectangle compris sous les droites AB, ΔZ (1).

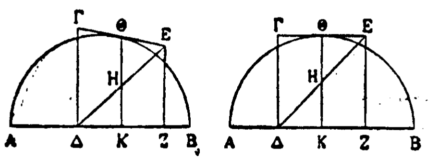


1. La similitude des triangles ΓEH, ΘZE donne : $\frac{HE}{E\Gamma} = \frac{ZE}{E\Theta}$, d'où : $ZE \times E\Gamma = \Theta E \times HE$, d'où : $2ZE \times E\Gamma = 2\Theta E \times HE$. Or, $2\Theta E = AB$ et $HE = \Delta Z$; donc : $2ZE \times E\Gamma = AB \times \Delta Z$ ou, comme le texte : $(ZE + \Delta H)\, E\Gamma = AB \times \Delta Z$.

XXI.

Proposition 21 (lemme 2). — Soient de nouveau deux perpendiculaires quelconques ΓΔ, EZ sur le diamètre et la droite ΓΘE tangente au demi-cercle, de manière que la droite ΓΘ soit égale à la droite ΘE. Je dis que le rectangle compris sous les droites AB, ΔZ équivaut au rectangle compris sous la somme des droites ΓΔ, EZ et la droite ΓE.

Menons la perpendiculaire ΘK et la droite de jonction ΔHE. Puisque les droites ΓΔ, ΘK, EZ sont parallèles, et que la droite ΓE est double de la droite EΘ, la droite ΓΔ est aussi double de la droite ΘH et la droite EZ double de la droite HK ; en sorte que la somme des droites ΓΔ, EZ est le double de la droite ΘK. Or, en vertu de ce qui a été démontré précédemment (1), deux fois le rectangle compris sous les droites ΘK, ΘΓ équivaut



au rectangle compris sous les droites AB, ΔK, et de même pour les doubles ; donc, le rectangle compris sous la somme des droites ΓΔ, EZ et la droite ΓE équivaut au rectangle compris sous les droites AB, ΔZ (2).

XXII.

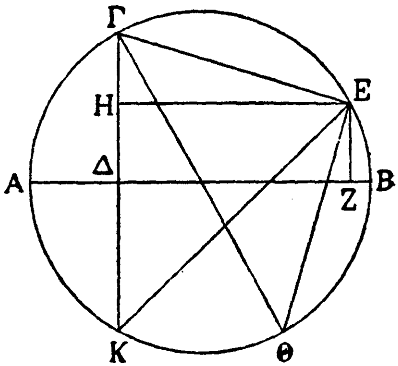
Proposition 22 (lemme 3). — Soient de nouveau un demi-cercle, une droite quelconque ΓE et les perpendiculaires ΓΔ, EZ ; je dis que le rectangle compris sous la somme des droites ΓΔ, EZ et la droite ΓE équivaut au rectangle compris sous la droite ΔZ et la droite sous-tendant l'arc qui, conjointement avec l'arc ΓE, constitue celui du demi-cercle.

---

1. Voir proposition 20 (lemme 1).

2. On a par construction : $\Gamma\Theta = \Theta E$, d'où : $\Gamma E = 2\Theta E$. Dès lors, par similitude de triangles on a : $\Gamma\Delta = 2\Theta H$ et $EZ = 2HK$; donc : $\Gamma\Delta + EZ = 2(\Theta H + HK) = 2\Theta K$. Or (proposition 20, voir note avant-précédente), on a : $2K\Theta \times \Theta\Gamma = AB \times \Delta K$, d'où : $2K\Theta \times 2\Theta\Gamma = AB \times 2\Delta K$ ou: $2K\Theta \times \Gamma E = AB \times \Delta Z$, d'où, comme le texte : $(\Gamma\Delta + EZ)\,\Gamma E = AB \times \Delta Z$.

Complétons le cercle, et soit ΓΘ son diamètre. Prolongeant la droite ΓΔ jusqu'au point K, menons-lui la perpendiculaire EH, et menons les droites de jonction EΘ, EK. Puisque la droite AB coupe la droite ΓK à angles droits, la droite ΓΔ est égale à la droite ΔK [1]. Mais, la droite HΔ est aussi égale à la droite EZ ; donc, la droite HK est égale à la somme des droites ΓΔ, EZ [2]. D'autre part, EΘ est la droite qui sous-tend l'arc restant du demi-cercle ΓEΘ [3] ; par conséquent, puisque l'angle K est égal à l'angle Θ [4], et que l'angle compris sous les droites ΘE, EΓ, situé dans un demi-cercle, est égal à l'angle droit H, il s'ensuit que les triangles ΘEΓ, KEH sont équiangles. En conséquence, la droite KH est à la droite HE comme la droite ΘE est à la droite EΓ ; donc, le rectangle compris sous la droite ΘE et la droite EH, c'est-à-dire la droite ΔZ, équivaut au rectangle compris sous les droites HK, ΓE, c'est-à-dire au rectangle compris sous la somme des droites ΓΔ, EZ et la droite ΓE [5].



XXIII.

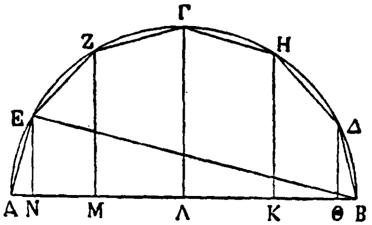
Proposition 23 (lemme 4). — Il résulte manifestement de ce qui précède que, si un arc AΓΔ du demi-cercle ABΓ est divisé en un nombre quelconque d'arcs égaux, et si l'on mène les droites de jonction, les surfaces que les droites de jonction AE, EZ, ZΓ, ΓH, HΔ engendrent dans leur révolution autour de l'axe AB sont

---

1. Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.
2. Le texte présente ici l'interpolation : ἡ τῇ ΔΖ τῇ ΗΕ, c'est-à-dire : et la (droite) ΔZ (est égale) à la (droite) HE. Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 366, l. 3.
3. C'est-à-dire qui sous-entend l'arc EΘ que complète l'arc ΓE pour former l'arc de demi-cercle ΓEΘ.
4. Euclide, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2.
5. L'égalité des angles K, Θ entraînant la similitude des triangles rectangles ΘEΓ, KHE, on a : $\frac{KH}{HE}=\frac{\Theta E}{E\Gamma}$, d'où : $\Theta E \times HE = KH \times E\Gamma$. Or, $HE = \Delta Z$ et $KH = \Gamma\Delta + EZ$; donc, comme le texte : $\Theta E \times \Delta Z = (\Gamma\Delta + EZ)\, E\Gamma$.

équivalentes au cercle dont le rayon, après avoir mené la droite de jonction EB, est en puissance du rectangle compris sous les droites EB, AΘ [1].

En effet, la surface engendrée par la droite HΔ équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous la somme des droites HK, ΔΘ et la droite HΔ [2] ; car Archimède enseigne que « lorsqu'un cône isocèle est coupé par un plan parallèle à la base, le cercle dont le rayon est le moyen proportionnel du côté du cône compris entre les plans parallèles et de la droite égale à la somme des rayons des cercles situés dans les plans parallèles, équivaut à la surface du cône située entre les plans parallèles » [3]. En conséquence, la surface engendrée par la droite HΔ équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous la somme des droites HK, ΔΘ et la droite HΔ, lequel équivaut, comme on l'a démontré [4], au rectangle compris sous les droites EB, KΘ [5]. Pareillement, la surface engendrée par la droite ΓH équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites EB, ΛK [6], et il en est de même pour



1. C'est-à-dire que l'aire engendrée par la révolution de la ligne polygonale AEZΓHΔ équivaut au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle EB × AΘ.

2. Le texte présente ici l'interpolation : ὧν μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εἰρημένου κύκλου, c'est-à-dire : (droites) dont la droite issue du centre du cercle que nous venons de dire est la moyenne proportionnelle (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 366, l. 20).

3. Archimède, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 16 : « Si l'on coupe un cône isocèle par un plan parallèle à la base, la surface du cône située entre les plans parallèles vaut le cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cône situé entre les plans parallèles et une droite égale à la somme des rayons des cercles situés dans les plans parallèles ». Voir : *Œuvres complètes d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, p. 36.

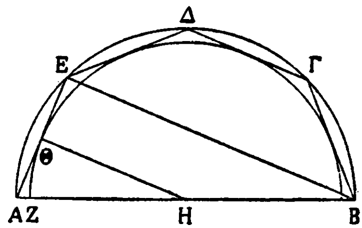
4. Voir proposition 22 (lemme 3).

5. La proposition d'Archimède énoncée dans la note avant-précédente donne : Surface latérale du tronc de cône d'arête $H\Delta =$ cercle de rayon $\sqrt{(HK + \Delta\Theta)\, H\Delta}$. Or (prop. 22), on a : $(HK + \Delta\Theta)\, H\Delta = EB \times K\Theta$; expression dans laquelle la droite EB correspond évidemment à la droite EΘ de la figure accompagnant la proposition 22 ; car « elle sous-tend l'arc EB qui complète l'arc de demi-cercle avec l'arc AE, c'est-à-dire avec son égal l'arc HΔ ».

6. Le texte présente ici une longue phrase que Hultsch considère comme une interpolation de commentateur. Nous la traduisons : « Car, le cercle étant

les droites suivantes (1). Enfin, la surface conique engendrée par la dernière droite AE équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites EB, AN, lequel équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EN (car les triangles AEB, AEN sont équiangles, et la surface engendrée par la droite AE équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites AE, EN ; ce qui a aussi été démontré par Archimède) (2). En conséquence, la surface engendrée par l'ensemble des droites ΔH, HΓ, ΓZ, ZE, EA équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites EB, AΘ (3).

Au reste, il est évident que, si l'arc entier du demi-cercle est divisé en parties égales, dont l'une est AE, et si l'on mène les droites de jonction, la surface engendrée dans une révolution d'ensemble par tous les côtés du polygone équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites EB, BA (4).



complété, et une droite égale à la droite EB étant appliquée dans le cercle en passant par le point H, le rectangle compris sous cette droite et la droite ΑΚ devient équivalent au rectangle compris sous la somme des droites ΓΛ, HK et la droite ΓH ; tandis que la surface engendrée par la droite EZ équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites EB, MN ; car ce dernier équivaut au rectangle compris sous la somme des droites EN, ZM et la droite EZ ». (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 368, ll. 4-5).

1. On aura, comme dans la note 5, p. 282 : Surface latérale du tronc de cône d'arête ΓH = cercle de rayon $\sqrt{EB \times \Lambda K}$; surface latérale du tronc de cône d'arête ΓZ = cercle de rayon $\sqrt{EB \times M\Lambda}$; et surface latérale du tronc de cône d'arête ZE = cercle de rayon $\sqrt{EB \times NM}$.

2. Archimède, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 14 : « La surface de tout cône isocèle, si l'on excepte la base, vaut le cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cône et le rayon de la base du cône ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 32.

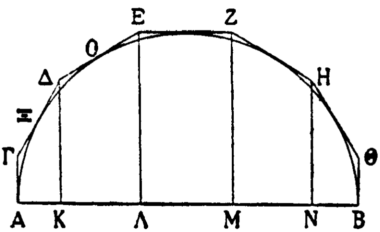
3. Cette proposition donne donc pour la dernière corde AE : Surface latérale du cône d'arête AE = cercle de rayon $\sqrt{AE \times EN}$. Or, la similitude des triangles rectangles AEB, ANE donne : $\frac{AE}{AN} = \frac{EB}{EN}$, d'où : AE × EN = EB × AN ; donc, comme dans le texte : Surface latérale du cône d'arête AE = cercle de rayon $\sqrt{EB \times AN}$. Donc, la sommation des expressions des notes précédentes donne : Surface du conoïde engendrée par les segments égaux de la ligne polygonale AEZΓHΔ = cercle de rayon $\sqrt{EB \times (AN + NM + M\Lambda + \Lambda K + K\Theta} =$ cercle de rayon $\sqrt{EB \times A\Theta}$.

4. On remarquera plus loin, au lemme 22 (p. 310), que Pappus utilisera

XXIV.

Proposition 24 (lemme 5). — Divisons de nouveau l'arc du demi-cercle en un nombre quelconque de parties égales, d'où l'on mène des tangentes de la manière dont elles sont tracées ci-dessous ; je dis que les surfaces engendrées en révolution simultanée par les droites ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ valent le cercle dont le rayon est la droite ΑΒ.

Menons les perpendiculaires des points Δ, Ε, Ζ, Η sur le diamètre. Dès lors, comme la droite ΓΞ est égale à la droite ΞΔ [1], et que les droites ΓΑ, ΔΚ sont des perpendiculaires, le rectangle compris sous les droites ΒΑ, ΑΚ équivaut au rectangle compris sous la somme des droites ΓΑ, ΔΚ et la droite ΓΔ ; car cela a été démontré au deuxième théorème [2]. Mais, la surface engendrée par la droite ΓΔ équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle



l'expression de la surface du conoïde de révolution trouvée ici en substituant à la droite EB le diamètre du cercle inscrit au polygone ΑΕΔΓΒ. Hultsch a supposé que le texte avait perdu ici un alinéa final (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 371) démontrant la légitimité de cette substitution, en disant d'une manière plus ou moins explicite que, si l'on mène la droite ΗΘ du centre Η au point de contact Θ du cercle inscrit, les angles en Θ et en Ε étant droits, les droites ΗΘ, ΕΒ sont parallèles, les triangles ΑΕΒ, ΑΘΗ sont semblables et on a : ΕΒ = 2ΘΗ = 2ΖΗ = diamètre du cercle inscrit au polygone.

1. En effet, si on relie les points Γ, Ξ, Δ, Ο au centre Ω, non marqué dans la figure du texte, les arcs ΑΞ, ΞΟ, égaux par construction, donnent (Euclide, liv. III, prop. 27 : « Dans les cercles égaux, les angles qui comprennent des arcs égaux sont égaux entre eux, soit qu'ils soient aux centres ou aux circonférences ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 169) : $\widehat{A\Omega\Xi} = \widehat{\Xi\Omega O}$. Or (Euclide, liv. VI, prop. 7, énoncée p. 160, n. 5), les triangles rectangles égaux ΓΑΩ, ΓΞΩ donnent : $\widehat{A\Omega\Gamma} = \widehat{\Xi\Omega\Gamma}$, et les triangles égaux ΔΞΩ, ΔΟΩ donnent : $\widehat{\Xi\Omega\Delta} = \widehat{O\Omega\Delta}$, d'où : $\widehat{\Xi\Omega\Gamma} = \frac{1}{2}\widehat{A\Omega\Xi}$ et $\widehat{\Xi\Omega\Delta} = \frac{1}{2}\widehat{\Xi\Omega O}$; donc : $\widehat{\Xi\Omega\Gamma} = \widehat{\Xi\Omega\Delta}$, d'où (Euclide, liv. I, prop. 26 : « Si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, et un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux, ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 43) : égalité des triangles ΓΞΩ, ΔΞΩ, d'où, comme le texte : ΓΞ = ΞΔ.

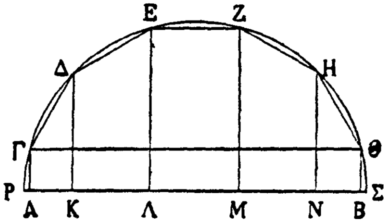
2. Voir lemme 2 (proposition 21).

compris sous la somme des droites ΓΑ, ΔΚ et la droite ΓΔ, et ce en vertu du même théorème dix-sept d'Archimède (1) ; par conséquent, le cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites ΒΑ, ΑΚ équivaut aussi à la surface engendrée par la droite ΓΔ (2). Pareillement, en raison de ce que la droite ΔΟ est de nouveau égale à la droite ΟΕ, le cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΚΛ équivaut à la surface engendrée par la droite ΔΕ, et il en est de même pour les droites suivantes. En conséquence, le cercle dont le rayon est ΑΒ équivaut à la surface engendrée par toutes les droites ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ (3).

XXV.

On aura tout aussi bien la même chose de la manière suivante :

Inscrivons ce polygone ΑΓΔΕΖΗΘΒ dans un autre demi-cercle décrit autour du même centre ; soit ΡΣ son diamètre, et menons pareillement des perpendiculaires. Dès lors, en raison de ce qui a été posé (4), l'arc ΓΔ devient double de l'arc ΓΡ, l'arc ΗΘ double de l'arc ΘΣ et, par suite, l'arc ΓΔ, conjointement avec l'arc ΓΔΘ, est égal à l'arc ΡΘΣ (5). Or, l'arc ΓΔΘ est sous-tendu par la droite de jonction ΓΘ égale à la



1. C'est-à-dire en vertu de la proposition 16, et non 17, du traité *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, d'Archimède, énoncée p. 282, n. 3.

2. La proposition 21 (ou lemme 2) donne : $BA \times AK = (\Gamma A + \Delta K)\,\Gamma\Delta$. Or, la proposition 16 d'Archimède rappelée dans la note précédente donne : cercle de rayon $\sqrt{(\Gamma A + \Delta K)\,\Gamma\Delta}$ = surface engendrée par la révolution de ΓΔ autour de ΑΒ ; donc : cercle de rayon $\sqrt{BA \times AK}$ = surface engendrée par ΓΔ.

3. On aura de même : Cercle de rayon $\sqrt{BA \times K\Lambda}$ = surface engendrée par ΔΕ, et ainsi de suite pour les droites ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ. Donc, cercle de rayon $\sqrt{BA\,(AK + K\Lambda + \Lambda M + MN + NB)}$ = cercle de rayon $\sqrt{BA \times BA}$ = cercle de rayon ΒΑ = surface engendrée par l'ensemble des droites ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ.

4. C'est-à-dire en raison des constructions de la figure précédente dans laquelle les droites ΑΓ, ΓΔ, etc., sont tangentes au cercle de diamètre ΑΒ.

5. On a : arc ΓΔ = arc ΗΘ. Or, arc ΓΔ = 2 arc ΓΡ et arc ΗΘ = 2 arcs ΘΣ ; donc : arc ΓΔ = arc ΓΡ + arc ΘΣ. Or, (arc ΓΡ + arc ΘΣ) + arc ΓΔΘ = demi-cercle ΡΘΣ ; donc, comme le texte : arc ΓΔ + arc ΓΔΘ = demi-cercle ΡΘΣ.

droite AB ; donc, en vertu du troisième théorème (1), le rectangle compris sous les droites ΘΓ, AK, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites BA, AK, équivaut au rectangle compris sous la somme des droites ΓA, ΔK et la droite ΓΔ ; le rectangle compris sous les droites BA, KΛ équivaut au rectangle compris sous la somme des droites ΔK, EΛ et la droite ΔE, et il en est de même pour les droites suivantes (2). En conséquence, la somme est égale à la somme, et le cercle dont le rayon est AB équivaut donc aux surfaces engendrées par les droites ΓΔ, ΔE, EZ, ZH, HΘ (3).

XXVI.

Proposition 25 (lemme 6). — Soit un demi-cercle dont le diamètre est la droite AB ; menons une droite quelconque AH, et divisons l'arc AH en un nombre quelconque d'arcs égaux en des points M, N, Ξ. Menons les tangentes AΓ, ΓΔ, ΔE, EZ, ZH aux points A, H ainsi qu'aux points de division et, la droite HP étant une perpendiculaire, posons la droite HΘ égale à la droite ZH. Je dis que, si le demi-cercle, mû autour de l'axe AB, se remet en place, la surface engendrée par toutes les droites AΓ, ΓΔ, ΔE, EZ, ZH excède le cercle, dont le rayon est la droite AH, du cercle dont le rayon est en puissance de la moitié du carré construit sur la droite ZΘ (4).

---

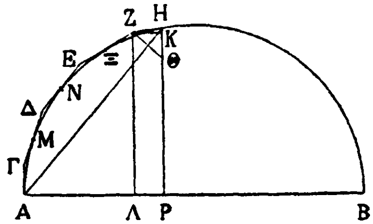
1. C'est-à-dire en vertu de la proposition 22 (lemme 3).

2. Si l'on considère que la droite ΓΘ sous-tend l'arc ΓΔΘ qui, augmenté de l'arc ΓΔ (= arc ΓP + arc ΘΣ), constitue le demi-cercle PΘΣ, la proposition 22 (lemme 3) donne : $\Theta\Gamma \times AK = (\Gamma A + \Delta K)\,\Gamma\Delta$ ou $BA \times AK = (\Gamma A + \Delta K)\,\Gamma\Delta$; puis, de même : $BA \times K\Lambda = (\Delta K + E\Lambda)\,\Delta E$; puis : $BA \times \Lambda M = (E\Lambda + ZM)\,EZ$; puis : $BA \times MN = (EZ + HN)\,ZH$, et enfin : $BA \times NB = (HN + \Theta B)\,H\Theta$.

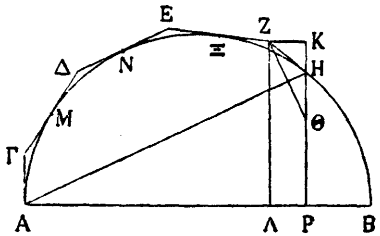
3. On a (Archimède, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 16 énoncée p. 282, n. 3) : cercle de rayon $\sqrt{(\Gamma A + \Delta K)\,\Gamma\Delta}$ = surface engendrée par la rotation de ΓΔ autour de l'axe AB ou, d'après la première égalité de la note précédente : cercle de rayon $\sqrt{BA \times AK}$ = surface engendrée par ΓΔ. On a de même : cercle de rayon $\sqrt{BA \times K\Lambda}$ = surface engendrée par ΔE ; cercle de rayon $\sqrt{BA \times \Lambda M}$ = surface engendrée par EZ; cercle de rayon $\sqrt{BA \times MN}$ = surface engendrée par ZH ; cercle de rayon $\sqrt{BA \times NB}$ = surface engendrée par HΘ. Donc, cercle de rayon $\sqrt{BA\,(AK + K\Lambda + \Lambda M + MN + NB)}$ = cercle de rayon $\sqrt{BA \times BA}$ = cercle de rayon BA = surface engendrée par l'ensemble des droites ΓΔ, ΔE, EZ, ZH, HΘ.

4. Il faut donc démontrer que l'on a : surface engendrée par la rotation de la ligne polygonale équilatérale et équiangle AΓΔEZH autour de l'axe AB = cercle de rayon AH + cercle de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}\,Z\Theta^2}$.

Menons du point Z la perpendiculaire ZΛ sur la droite AB et la perpendiculaire ZK sur la droite HP ; cette perpendiculaire ZK tombant entre les points H, Θ si l'angle compris sous les droites ZH, HΘ est aigu, et tombant à l'extérieur du point H si l'angle compris sous les droites ZH, HΘ est obtus, ainsi que les figures le représentent ([1]). Dès lors, puisque deux fois le rectangle compris sous les droites PH, HΘ, ou sous les droites PH, HZ, équivaut



au rectangle compris sous les droites AB, PΛ (car cela a été démontré au premier théorème) ([2]), ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites BA, AΛ conjointement avec le rectangle compris sous les droites HΘ, ΘK ; il s'ensuit que le rectangle compris sous BA, AΛ, conjointement avec le rectangle compris sous BA, ΛP et le rectangle compris sous HΘ, ΘK, équivaut aussi à deux fois le rectangle compris sous PH, HΘ et au rectangle compris sous BA, AΛ conjointement avec le rectangle compris sous HΘ, ΘK. Mais, le rectangle compris sous BA, AΛ conjointement avec le rectangle compris sous BA, ΛP, c'est-à-dire le rectangle compris sous BA, AP, équivaut au carré de la droite AH ([3]) ; donc, le carré de la droite AH, conjointement avec le rectangle compris sous HΘ, ΘK, équivaut aussi à deux fois le rectangle compris sous PH, HΘ conjointement avec le rectangle compris sous HΘ, ΘK et le rectangle compris sous BA, AΛ ([4]). Mais, deux fois le rectangle compris sous PH, HΘ,



1. Le troisième cas, de l'angle ZHΘ droit, amenant la confusion des droites ZH, ZK, est donc abandonné en tant que cas particulier.

2. Voir proposition 20 (lemme 1).

3. EUCLIDE, liv. VI, prop. 17 : « Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 326.

4. Considérant la tangente en H et les perpendiculaires HP, ZΛ, la proposition 20 (lemme 1) donne : $2PH \times HZ = AB \times \Lambda P$. Or, on a par construction : $H\Theta = HZ$;

conjointement avec le rectangle compris sous HΘ, ΘK, équivaut au rectangle compris sous la somme des droites HP, PK et la droite HΘ conjointement avec le carré de la droite HΘ (car cela sera démontré dans la suite) (1) ; par conséquent, le carré de la droite AH, conjointement avec le rectangle compris sous HΘ, ΘK, équivaut aussi au rectangle compris sous BA, AΛ et au rectangle compris sous la somme des droites HP, PK et la droite HΘ conjointement avec le carré de la droite HΘ (2). D'autre part, puisque les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres et comme les carrés de leurs rayons (3), et qu'il a été démontré, dans une proposition plus haut (4), que la figure composée de surfaces coniques engendrée par les tangentes ΓΔ, ΔE, EZ (5) équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites BA, AΛ ; ensuite, que la surface de la figure conique que la droite ZH engendre dans sa révolution équivaut au cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous la somme des droites HP, PK et la droite HΘ (6) ; enfin, que la figure engendrée par la droite ΓA vaut le cercle dont le rayon est en puissance du carré de la droite HΘ, il s'ensuit que la somme de ces trois cercles, c'est-à-dire la surface engendrée par les droites AΓ, ΓΔ, ΔE, EZ, ZH, excède le cercle, dont le rayon est en puissance du carré de la droite AH, du cercle dont

---

donc, comme le texte : $2PH \times H\Theta = AB \times \Lambda P$, d'où : $2PH \times H\Theta + (AB \times A\Lambda + H\Theta \times \Theta K) = AB \times \Lambda P + (AB \times A\Lambda + H\Theta \times \Theta K) = AB(A\Lambda \times \Lambda P) + H\Theta \times \Theta K = AB \times AP + H\Theta \times \Theta K$. Or, les triangles rectangles semblables APH, AHB donnent : $\frac{AH}{AB} = \frac{AP}{AH}$, d'où (EUCLIDE, liv. VI, prop. 17) : $\overline{AH}^2 = AB \times AP$; donc, comme le texte, $2PH \times H\Theta + AB \times A\Lambda + H\Theta \times \Theta K = \overline{AH}^2 + H\Theta \times \Theta K$.

1. Voir plus loin, lemme 8, p. 291.

2. Considérant l'identité $2PH \times H\Theta + H\Theta \times \Theta K = (HP + PK)\, H\Theta + \overline{H\Theta}^2$ qui sera démontrée ci-après au lemme 8, et substituant dans la dernière expression de la note avant-précédente, il vient, comme dans le texte : $AB \times A\Lambda + (HP + PK)\, H\Theta + \overline{H\Theta}^2 = \overline{AH}^2 + H\Theta \times \Theta K$.

3. EUCLIDE, liv. XII, prop. 2, énoncée p. 181, n. 1.

4. Voir proposition 24 (lemme 5), p. 284.

5. Sous-entendu : ἐν τῇ στροφῇ περὶ ἄξονα τὸν AB, c'est-à-dire : dans leur révolution autour de l'axe AB.

6. ARCHIMÈDE, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 16, énoncée p. 282, n. 3. Le texte porte d'ailleurs ici la référence interpolée : ἔστιν Ἀρχιμήδους ιϛ' θεωρήματι, phrase dans laquelle le nombre ιϛ' (17) correspond au nombre 16 des éditions critiques. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 376, l. 10).

le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites HΘ, ΘK, c'est-à-dire [de la moitié du carré construit sur la droite ZΘ] (1) (2).

Lemme 7. — Il est d'ailleurs manifeste que la moitié du carré construit sur la droite ZΘ équivaut au rectangle compris sous les droites HΘ, ΘK (3) ; et ce de la manière suivante :

En effet, l'angle compris sous les droites ZH, HΘ étant aigu dans la première figure, le carré de la droite ZΘ, conjointement avec deux fois le rectangle compris sous les droites ΘH, HK, équivaut aux carrés des droites ZH, HΘ, comme il en est au deuxième livre des *Éléments* (4) ; par conséquent, la moitié du carré de la droite ZΘ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΘH, HK, équivaut au carré de la droite ΘH (car la droite ZH est égale à la droite HΘ). Mais, le rectangle compris sous les droites ΘH, HK, conjointement avec le rectangle compris sous les droites HΘ, ΘK, équivaut au carré de la droite ΘH ; donc, en retranchant de part et d'autre le rectangle compris sous les droites ΘH, HK, la moitié du carré restant construit

1. Lacune comblée par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 138) dans les termes repris dans l'édition de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 376, l. 16).

2. La fin de la démonstration se déroule comme suit : On a, en vertu de la proposition 24 (lemme 5) : Surface du conoïde engendrée par rotation de la ligne polygonale ΓΔEZ autour de l'axe AB = cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{AB} \times \mathrm{A\Lambda}}$. D'autre part, on a, en vertu de la proposition d'Archimède mentionnée dans la note avant-précédente : Surface latérale du tronc de cône engendrée par rotation de la droite ZH = cercle de rayon $\sqrt{(\mathrm{HP} + \mathrm{Z\Lambda})\ \mathrm{H\Theta}}$ = cercle de rayon $\sqrt{(\mathrm{HP} + \mathrm{PK})\ \mathrm{H\Theta}}$. Enfin, la surface engendrée par la rotation de la perpendiculaire ΓA = cercle de rayon ΓA. Or, ΓA = ZH = HΘ ; donc : surface engendrée par ΓA = cercle de rayon HΘ. Dès lors, par sommation : Surface totale engendrée par la ligne polygonale AΓΔEZH = cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{AB} \times \mathrm{A\Lambda} + (\mathrm{HP} + \mathrm{PK})\ \mathrm{H\Theta} + \overline{\mathrm{H\Theta}}^2}$. Or, on a (voir note plus haut) : $\mathrm{AB} \times \mathrm{A\Lambda} + (\mathrm{HP} + \mathrm{PK})\ \mathrm{H\Theta} + \overline{\mathrm{H\Theta}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \mathrm{H\Theta} \times \mathrm{\Theta K}$; donc : Surface engendrée par la ligne polygonale AΓΔEZH = cercle de rayon $\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2 + \mathrm{H\Theta} \times \mathrm{\Theta K}}$ = cercle de rayon $\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2}$ + cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{H\Theta} \times \mathrm{\Theta K}}$. Or, on démontrera ci-après (lemme 7) que l'on a : $\mathrm{H\Theta} \times \mathrm{\Theta K} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{Z\Theta}}^2$; donc, comme dans le texte : Surface engendrée par la ligne polygonale AΓΔEZH = cercle de rayon $\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2}$ + cercle de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{Z\Theta}}^2}$ = cercle de rayon AH + cercle de rayon $\frac{1}{2}\mathrm{Z\Theta}\sqrt{2}$.

3. Expression admise sans démonstration à la fin du lemme précédent. Voir note.

4. Euclide, liv. II, prop. 13, énoncée p. 135, n. 4.

sur la droite ZΘ équivaut au rectangle restant compris sous les droites HΘ, ΘK (1).

D'autre part, si l'angle compris sous les droites ZH, HΘ est obtus, comme dans la seconde figure, le rectangle compris sous les droites KΘ, ΘH devient de nouveau, et ce de la manière suivante, équivalent à la moitié du carré construit sur la droite ZΘ. Puisque le carré de la droite ZΘ excède les carrés des droites ZH, HΘ de deux fois le rectangle compris sous les droites ΘH, HK, il s'ensuit que la moitié du carré construit sur la droite ZΘ excède le carré de la droite HΘ du rectangle compris sous les droites ΘH, HK. En conséquence, le carré de la droite ΘH, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΘH, HK, équivaut à la moitié du carré construit sur la droite ZΘ. Mais, le carré de la droite ΘH, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΘH, HK, équivaut au rectangle compris sous les droites KΘ, ΘH en vertu de la troisième proposition du deuxième livre des *Éléments* ; donc, la moitié du carré construit sur la droite ZΘ équivaut au rectangle compris sous les droites KΘ, ΘH (2).

Et puisque la moitié du carré de la droite ZΘ est continuellement plus petite que deux fois le carré de la droite ZH, il est évident que la surface engendrée par les droites AΓ, ΓΔ, ΔE, EZ, ZH est plus petite que le cercle dont le rayon est la droite AH

1. Considérant le triangle acutangle ZHΘ de la première figure, la proposition d'Euclide rappelée dans la note précédente donne : $\overline{Z\Theta}^2 = \overline{ZH}^2 + \overline{H\Theta}^2 - 2H\Theta \times HK$ ou, comme l'exprime le texte : $\overline{Z\Theta}^2 + 2H\Theta \times HK = \overline{ZH}^2 + \overline{H\Theta}^2$. Or, on a par construction : $ZH = H\Theta$; donc : $\overline{Z\Theta}^2 + 2H\Theta \times HK = 2\overline{H\Theta}^2$, d'où, comme le texte : $\frac{1}{2}\overline{Z\Theta}^2 + H\Theta \times HK = \overline{H\Theta}^2$. Or, $H\Theta \times HK + H\Theta \times \Theta K = H\Theta\,(HK + \Theta K) = \overline{H\Theta}^2$; donc : $\frac{1}{2}\overline{Z\Theta}^2 + H\Theta \times HK = H\Theta \times HK + H\Theta \times \Theta K$ ou, comme le texte : $\frac{1}{2}\overline{Z\Theta}^2 = H\Theta \times \Theta K$.

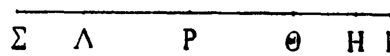
2. Considérant le triangle obtusangle ZHΘ de la seconde figure, on a (Euclide, liv. II, prop. 12, énoncée p. 135, n. 2) : $\overline{Z\Theta}^2 = \overline{ZH}^2 + \overline{H\Theta}^2 + 2H\Theta \times HK$. Or, on a par construction : $ZH = H\Theta$; donc : $\overline{Z\Theta}^2 = 2\overline{H\Theta}^2 + 2H\Theta \times HK$, d'où, comme le texte : $\frac{1}{2}\overline{Z\Theta}^2 = \overline{H\Theta}^2 + H\Theta \times HK$. Or, considérant la droite KΘ partagée en deux segments au point H, on a (Euclide, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2) : $K\Theta \times H\Theta = \overline{H\Theta}^2 + H\Theta \times HK$; donc, comme le texte : $\frac{1}{2}\overline{Z\Theta}^2 = K\Theta \times H\Theta$.

conjointement avec deux cercles dont le rayon est la droite ZH (1).

XXVII.

Lemme 8. — Je dis que (2) deux fois le rectangle compris sous les droites ΡΗ, ΗΘ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΚΘ, ΘΗ, équivaut au rectangle compris sous la somme des droites ΗΡ, ΡΚ et la droite ΗΘ, conjointement avec le carré de la droite ΗΘ.

Posons la droite ΡΣ égale à la droite ΗΡ et la droite ΡΛ égale à la droite ΘΡ ; donc, la droite restante ΛΣ est égale à la droite ΘΗ. Dès lors, puisque le rectangle compris sous ΡΗ, ΗΘ équivaut au rectangle compris sous ΡΘ, ΘΗ conjointement avec le carré de la droite ΗΘ, il s'ensuit que deux fois le rectangle compris sous ΡΗ, ΗΘ équivaut



aussi à deux fois le rectangle compris sous ΡΘ, ΘΗ conjointement avec deux fois le carré de la droite ΗΘ. Or, la droite ΗΡ est égale à la droite ΡΣ et la droite ΘΡ égale à la droite ΡΛ ; donc, le rectangle compris sous ΣΗ, ΗΘ équivaut au rectangle compris sous ΛΘ, ΘΗ conjointement avec deux fois le carré de la droite ΗΘ. Ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous ΚΘ, ΘΗ ; il s'ensuit que le rectangle compris sous ΣΗ, ΗΘ (3), conjointement avec le rectangle compris sous ΚΘ, ΘΗ, c'est-à-dire conjointement avec le rectangle compris sous ΚΗ, ΗΘ et le carré de la droite ΗΘ, ce qui constitue le rectangle compris sous la somme des droites ΗΡ, ΡΚ et la droite ΗΘ, conjointement avec le carré de la droite ΗΘ, équivaut au rectangle compris sous ΛΘ, ΘΗ

1. On a (EUCLIDE, liv. I, prop. 20, énoncée p. 246, n. 1) : $Z\Theta < 2ZH$, d'où : $\overline{Z\Theta}^2 < 4\overline{ZH}^2$; donc : $\frac{1}{2}\overline{Z\Theta}^2 < 2\overline{ZH}^2$, d'où, substituant $2\overline{ZH}^2$ à $\frac{1}{2}\overline{Z\Theta}^2$ dans l'expression démontrée à la proposition 25 (voir p. 289, n. 2), il vient : surface engendrée par la ligne polygonale ΑΓΔΕΖΗ < cercle de rayon ΑΗ + cercle de rayon $ZH\sqrt{2}$ = cercle de rayon ΑΗ + 2 cercles de rayon ΖΗ.

2. Sous-entendu : revenant sur l'expression invoquée dans le lemme 6 ou proposition 25, et dont la démonstration avait été différée (Voir notes).

3. Le texte présente ici l'interpolation : τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΗΣΛ, c'est-à-dire : le (rectangle compris) sous les (droites) ΗΣ, ΣΛ (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, p. 380, l. 1).

conjointement avec deux fois le carré de la droite ΗΘ et le rectangle compris sous ΚΘ, ΘΗ. Or, le rectangle compris sous ΛΘ, ΘΗ, conjointement avec le carré de la droite ΗΘ, équivaut au rectangle compris sous ΛΗ, ΗΘ, et le carré de la droite ΗΘ équivaut au rectangle compris sous ΗΘ, ΛΣ; donc, le rectangle compris sous ΣΗ, ΗΘ, c'est-à-dire deux fois le rectangle compris sous ΡΗ, ΗΘ, conjointement avec le rectangle compris sous ΚΘ, ΘΗ, équivaut aussi au rectangle compris sous la somme des droites ΗΡ, ΡΚ et la droite ΗΘ conjointement avec le carré de la droite ΗΘ (1).

XXVIII.

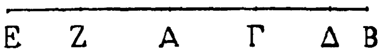
Proposition 26 (lemme 9). — Soient une droite ΑΒ et des points Γ, Δ quelconques sur celle-ci; je dis que le rectangle compris sous la somme des droites ΒΑ, ΑΔ et la droite ΓΒ, conjointement avec le carré de la droite ΓΒ, équivaut à deux fois le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ.

Posons une droite ΑΕ égale à la droite ΑΔ et une droite ΑΖ égale à la droite ΑΓ; il s'ensuit que la droite restante ΓΔ est

1. Reprenons explicitement cette démonstration : On pose : $P\Sigma = HP$ et $P\Lambda = \Theta P$; donc : $P\Sigma - P\Lambda = HP - \Theta P$ ou : $\Lambda\Sigma = \Theta H$. Dès lors, $PH \times H\Theta = (P\Theta + H\Theta)\, H\Theta$ ou, comme le texte : $PH \times H\Theta = P\Theta \times H\Theta + \overline{H\Theta}^2$, d'où : $2PH \times H\Theta = 2P\Theta \times H\Theta + 2\overline{H\Theta}^2$ (I). Or, $2PH = PH + P\Sigma = \Sigma H$ et $2P\Theta = P\Theta + P\Lambda = \Lambda\Theta$; donc, par substitution, l'expression (I) devient : $\Sigma H \times H\Theta = \Lambda\Theta \times H\Theta + 2\overline{H\Theta}^2$, d'où, comme le texte : $\Sigma H \times H\Theta + K\Theta \times H\Theta = \Lambda\Theta \times H\Theta + 2\overline{H\Theta}^2 + K\Theta \times H\Theta$ (II). Or, le premier membre de l'expression (II) devient : $\Sigma H \times H\Theta + K\Theta \times H\Theta = \Sigma H \times H\Theta + (KH + H\Theta)\, H\Theta = \Sigma H \times H\Theta + KH \times H\Theta + \overline{H\Theta}^2 = (\Sigma H + KH) H\Theta + \overline{H\Theta}^2 = (HP + HP + KH) H\Theta + \overline{H\Theta}^2 = (HP + PK)\, H\Theta + \overline{H\Theta}^2$; tandis que le second membre de l'expression (II) devient : $\Lambda\Theta \times H\Theta + 2\overline{H\Theta}^2 + K\Theta \times H\Theta = \Lambda\Theta \times H\Theta + \overline{H\Theta}^2 + \overline{H\Theta}^2 + K\Theta \times H\Theta = (\Lambda\Theta + H\Theta)\, H\Theta + H\Theta \times \Lambda\Sigma + K\Theta \times H\Theta = \Lambda H + H\Theta + H\Theta \times \Lambda\Sigma + K\Theta \times H\Theta = (\Lambda H + \Lambda\Sigma)\, H\Theta + K\Theta \times H\Theta = \Sigma H \times H\Theta + K\Theta \times H\Theta = 2PH \times H\Theta + K\Theta \times H\Theta$. Donc, on a, comme dans le texte : $2PH \times H\Theta + K\Theta \times H\Theta = (HP + PK) H\Theta + H\Theta^2$.

Cette démonstration se rapporte donc au cas du triangle obtusangle de la deuxième figure qui accompagne le texte de la proposition 25 (lemme 6), où le point Κ tombe au delà du point Η sur la droite ΘΗ. Mais, dans le cas du triangle acutangle de la première figure, où le point Κ tombe entre les points Θ, Η, la démonstration serait la même, sauf qu'au cours des transformations le terme $\Sigma H \times H\Theta + KH \times H\Theta$ deviendrait $\Sigma H \times H\Theta - KH \times H\Theta$, et que le terme $(\Sigma H + KH)$ deviendrait $(\Sigma H - KH)$.

égale à la droite EZ. Dès lors, puisque le rectangle compris sous AB, BΓ équivaut au rectangle compris sous AΓ, ΓB conjointement avec le carré de la droite ΓB, en vertu du troisième théorème du deuxième livre des *Éléments* (1), il s'ensuit que deux fois le rectangle compris sous AB, BΓ équivaut à deux fois le rectangle compris sous AΓ, ΓB conjointement avec deux fois le carré de la droite ΓB. Or, deux fois le rectangle compris sous AΓ, ΓB équivaut au rectangle compris sous ZΓ, ΓB (car la droite ZΓ est le double de la droite ΓA) ; donc, le rectangle compris sous ZΓ, ΓB, conjointement avec deux fois le carré de la droite ΓB, équivaut aussi à deux fois le rectangle compris sous AB, BΓ. Ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous ΓB, EZ, c'est-à-dire le rectangle compris sous BΓ, ΓΔ; il s'ensuit que le rectangle compris sous EΓ, ΓB, conjointement avec deux fois le carré de la droite ΓB, équivaut à deux fois le rectangle compris sous AB, BΓ conjointement avec le rectangle compris sous BΓ, ΓΔ. Mais, le rectangle compris sous EΓ, ΓB, conjointement avec deux fois le carré de la droite ΓB, équivaut au rectangle compris sous EB, BΓ conjointement avec le carré de la droite ΓB (car le rectangle compris sous EΓ, ΓB, conjointement avec le carré de la droite ΓB, équivaut au rectangle compris sous EB, BΓ en vertu de la même proposition des *Éléments*) ; donc, le rectangle compris sous EB, BΓ, c'est-à-dire le rectangle compris sous la somme des droites BA, AΔ et la droite BΓ, conjointement avec le carré de la droite ΓB, équivaut à deux fois le rectangle compris sous AB, BΓ conjointement avec le rectangle compris sous BΓ, ΓΔ ; en sorte que le rectangle compris sous la somme des droites BA, AΔ et la droite ΓB, conjointement avec le carré de la droite ΓB, équivaut à deux fois le rectangle compris sous AB, BΓ conjointement avec le rectangle compris sous BΓ, ΓΔ (2).



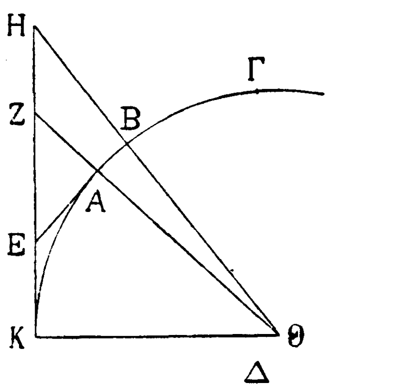
1. EUCLIDE, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2.

2. Posons : AE = AΔ et AZ = AΓ, d'où : AE — AZ = AΔ — AΓ ou EZ = ΓΔ. Dès lors, on a (EUCLIDE, liv. II, prop. 3) : $AB \times B\Gamma = (A\Gamma + B\Gamma)\, B\Gamma = A\Gamma \times B\Gamma + \overline{B\Gamma}^2$, d'où : $2AB \times B\Gamma = 2A\Gamma \times B\Gamma + 2\overline{B\Gamma}^2$. Or, $Z\Gamma = 2A\Gamma$; donc : $2AB \times B\Gamma = Z\Gamma \times B\Gamma + 2\overline{B\Gamma}^2$, d'où : $2AB \times B\Gamma + B\Gamma \times EZ =$

XXIX.

PROPOSITION 27 (lemme 10). — Soient un arc de cercle ΚΑΒΓ et une droite Δ ; je dis qu'il est possible de retrancher d'une infinité de manières un arc ΚΑ qui soit telle partie de l'arc ΚΒΓ que, si l'on mène les tangentes ΚΕ, ΑΕ, celles-ci (1) soient plus petites qu'une droite Δ.

En effet, soit ΚΗ la tangente égale à la droite Δ, et menons la droite ΗΒΘ sur le centre. Dès lors, si on coupe l'arc ΚΒΓ en deux parties égales, puis sa moitié en deux parties égales, et procédant continuellement ainsi, il reste un arc, tel que ΚΑ, plus petit que l'arc ΚΑΒ. Menons la tangente ΑΕ à ce segment ; il s'ensuit que la droite ΑΕ est égale à la droite ΚΕ (2), et on aura obtenu ce que l'on cherche. En effet, la droite qui passe par les points Θ, Α se projette sur le point Ζ (3) et la somme des droites ΚΕ, ΕΑ est plus petite que la droite ΚΖ, parce que l'angle compris sous les droites ΖΑ, ΑΕ étant droit, la droite ΖΕ est plus grande que chacune des droites ΑΕ, ΕΚ et à fortiori, cette somme est plus petite que la droite ΚΗ supposée égale à la droite Δ.



$Z\Gamma \times B\Gamma + 2\overline{B\Gamma}^2 + B\Gamma \times EZ$, d'où, considérant que $EZ = \Gamma\Delta$, il vient $2AB \times B\Gamma + B\Gamma \times \Gamma\Delta = (Z\Gamma + EZ)\, B\Gamma + 2\overline{B\Gamma}^2 = E\Gamma \times B\Gamma + \overline{B\Gamma}^2 + \overline{B\Gamma}^2 = (E\Gamma + B\Gamma)\, B\Gamma + \overline{B\Gamma}^2 = EB \times B\Gamma + \overline{B\Gamma}^2 = (BA + AE)\, B\Gamma + \overline{B\Gamma}^2$. Or, $AE = A\Delta$; donc : $2AB \times B\Gamma + B\Gamma \times \Gamma\Delta = (BA + A\Delta)\, B\Gamma + \overline{B\Gamma}^2$.

1. C'est-à-dire la somme de ces deux tangentes.
2. Voir proposition 24 (lemme 5), p. 284, n. 1.
3. C'est-à-dire en un point Ζ situé entre les points Κ, Η.

XXX.

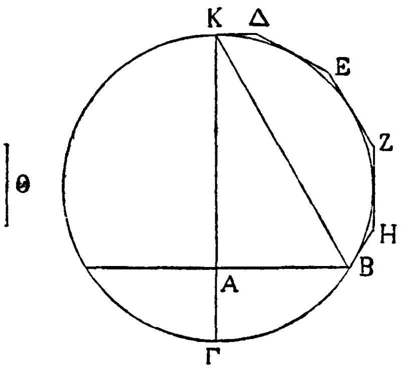
Proposition 28 (lemme 11). — La surface de tout segment de sphère équivaut au cercle dont le rayon est égal à la droite issue du pôle du segment [1].

Soit un segment de sphère dont le pôle est le point K, dont la droite menée du pôle est KB, et soit le cercle le plus grand passant par les points K, B, dont le diamètre est KΓ, et sur lequel on a la perpendiculaire BA. Je dis que la surface sphérique du segment, dont la base est le cercle ayant comme rayon la droite AB et dont le sommet est le point K, équivaut au cercle ayant comme rayon la droite KB [2].

En effet, que ces surfaces ne soient pas équivalentes, s'il se peut. Que la surface du segment soit d'abord plus grande, et imaginons un cercle de diamètre Θ qui soit plus petit que la différence de ces surfaces, en sorte que la surface du segment soit plus grande que les deux cercles ayant respectivement la droite KB comme rayon et la droite Θ comme diamètre. Divisons l'arc KB en un nombre quelconque de parties égales, et menons des tangentes telles que celles tracées ci-dessous, de telle sorte que chacune d'elles soit plus petite qu'une droite dont le carré est la huitième partie du carré de la droite Θ ; car on a exposé

1. ἡ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ τμήματος, littéralement : la (droite) issue du pôle du segment, c'est-à-dire la distance rectiligne qui sépare un point quelconque de la circonférence du cercle de base d'un segment sphérique du pôle de ce segment, ou pôle de ce cercle. C'est ce que l'on appelle maintenant « la distance polaire », par opposition avec ce que l'on appelle « le rayon sphérique », ou longueur de l'arc de grand cercle qui va d'un pôle d'un cercle de la sphère à un point quelconque de la circonférence de ce cercle. L'expression de Pappus doit d'ailleurs être rapprochée de la définition de Théodose de Tripoli (*Les Sphériques*, liv. I, déf. 5) : « Le pôle d'un cercle situé dans la sphère est un point à la surface de la sphère, d'où les droites qui tombent sur la circonférence de ce cercle sont égales entre elles ». Voir trad. précitée (p. 98, n. 1) de P. Ver Eecke, p. 1.

2. Pappus va résumer dans une seule démonstration, basée sur les lemmes qui précèdent, les deux propositions d'Archimède énoncées, l'une (*De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 42) : « L'aire de tout segment de sphère plus petit que l'hémisphère est équivalente au cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment de la sphère », et l'autre (*Ibidem*, prop. 43) : « Lors même que le segment est plus grand que l'hémisphère, son aire est pareillement équivalente au cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet à la circonférence du cercle de base du segment ». Voir *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 82-84.



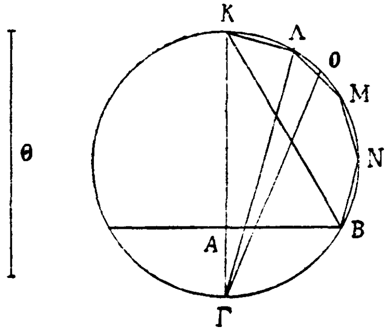
plus haut la manière dont cela peut être obtenu (1). Dès lors, puisque le carré de la droite Θ est plus grand que l'octuple du carré de la droite HB, il s'ensuit que le cercle décrit autour de la droite Θ comme diamètre est plus grand que deux cercles dont le rayon est la droite HB. Or, ainsi qu'on l'a démontré plus haut au sixième théorème (2), ces deux cercles, conjointement avec le cercle dont le rayon est la droite KB, sont plus grands que la surface engendrée par les tangentes, laquelle est circonscrite au segment de la sphère ; par conséquent, cette surface et, à fortiori, celle du segment de la sphère, sera plus petite que les cercles ayant respectivement comme rayon la droite KB et comme diamètre la droite Θ. Mais, on a supposé que cette surface est plus grande ; ce qui est absurde (3).

XXXI.

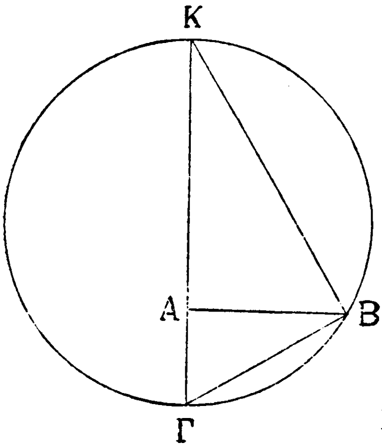
Lemme 12. — Mais que le cercle dont le rayon est la droite KB soit plus grand que la surface sphérique du segment. En consé-

1. Voir proposition 27 (lemme 10), p. 294.
2. Voir proposition 25 (lemmes 6 et 7), p. 286.
3. La démonstration se déroule comme suit : Soit, en première hypothèse : Surface du segment sphérique engendré par rotation de l'arc KB autour de l'axe KΓ > cercle de rayon KB. Soit un cercle de diamètre Θ tel que l'on ait : Surface segment sphérique — cercle de rayon KB > cercle de diamètre Θ ; donc, comme le texte : Surface segment sphérique > cercle de rayon KB + cercle de diamètre Θ. Dès lors, d'après la proposition 27 (lemme 10), on peut diviser l'arc KB en parties égales telles que l'on obtienne $\overline{BH}^2 < \frac{1}{8}\Theta^2$, d'où : $\Theta^2 > 8\overline{HB}^2$ ou $\Theta^2 > 2\,(2HB)^2$, d'où : cercle de diamètre Θ > 2 cercles de rayon BH (I). D'autre part, on a : Surface segment sphérique < surface engendrée par la ligne polygonale équilatérale et équiangle KΔEZHB tournant autour de l'axe KΓ (II). Enfin, la proposition 25 (lemmes 6 et 7) a démontré que l'on a (voir p. 291, n. 1) : Surface engendrée par la ligne polygonale KΔEZHB < cercle de rayon KB + 2 cercles de rayon BH ; donc, en présence des inégalités (I) et (II), on a, à fortiori, comme le texte : Surface segment sphérique < cercle de rayon KB + cercle de diamètre Θ : expression contraire à l'hypothèse, donc absurde.

quence, le cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites ΓK, KA est plus grand que la surface courbe du segment. Imaginons, entre ces deux surfaces, un cercle dont le rayon est en puissance d'un rectangle compris sous les droites Θ et KA ; donc, la droite KΓ est plus grande que la droite Θ. Que la droite ΓO soit égale à la droite Θ, et divisons l'arc KOB en un nombre quelconque de parties égales dont chacune est plus petite que l'arc KΛO, comme on l'a exposé dans la proposition qui précède celle-ci d'une (1), et menons les droites de jonction KΛ, ΛM, MN, NB. Dès lors, la surface engendrée par ces droites [dans leur révolution autour de l'axe KA jusqu'à leur rétablissement] (2) est entourée par la surface du segment (3); elle équivaut au cercle dont le rayon, après avoir mené la droite de jonction ΓΛ, est en puissance du rectangle compris sous les droites ΛΓ, KA, en vertu du quatrième théorème (4), et elle est plus petite que la surface sphérique du segment. En conséquence, le cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites OΓ, KA, c'est-à-dire du rectangle compris sous les droites Θ, KA, est, à fortiori, plus petit que la surface sphérique du segment. Mais, on a supposé que ce cercle intermédiaire entre la surface du segment et le cercle dont le rayon est la droite KB est plus grand ; ce qui est impossible. En conséquence, les surfaces en question sont équivalentes (5).



1. Voir proposition 27, p. 294.
2. La phrase que nous plaçons entre crochets est considérée comme une interpolation par Hultsch. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 386, l. 4).
3. Le texte présente ici l'interpolation : καὶ τὴν αὐτὴν αὐτῷ βάσιν ἕξει, et elle aura même base que (ce segment). (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 386, l. 6).
4. Voir proposition 23 (lemme 4), p. 281.
5. La seconde partie de la démonstration se déroule comme suit : Soit, en seconde hypothèse : Surface segment sphérique engendrée par l'arc KB autour de l'axe KΓ $<$ cercle de rayon KB. Or (EUCLIDE, liv. VI, prop. 8, énoncée p. 54, n. 2), on a : $\frac{KB}{KA} = \frac{\Gamma K}{KB}$, d'où : $\overline{KB}^2 = \Gamma K \times KA$ (I), d'où cette seconde hypothèse s'exprime : Surface segment sphérique $<$ cercle de rayon $\sqrt{K\Gamma \times KA}$. Imaginons



Et il est manifeste que, si le point A est le centre, le segment devient un hémisphère, et que (1) la surface de la sphère entière sera équivalente au cercle dont le rayon est la droite KΓ (2). Et l'on conclura la même chose au moyen de la somme de deux segments quels qu'ils soient (3).

XXXII.

Proposition 29 (lemme 13). — Si l'on a trois droites telles que A, B, Γ, le cône, ayant comme base le cercle dont le rayon

---

un cercle intermédiaire tel que l'on ait : Surface segment sphérique > de rayon $\sqrt{\Theta \times KA}$ < cercle de rayon $\sqrt{K\Gamma \times KA}$ (II) ; donc : $K\Gamma \times KA > \Theta \times KA$ ou : $K\Gamma > \Theta$. Appliquons, dans le cercle, la droite $\Gamma O = \Theta$; donc, il est possible (prop. 27) de diviser l'arc KB en parties égales plus petites que l'arc KΛO. Dès lors, on a (prop. 23) : Surface engendrée par la rotation de la ligne polygonale équilatérale et équiangle KΛMNB = cercle de rayon $\sqrt{\Lambda\Gamma \times KA}$. Or, on a : Surface segment sphérique > surface engendrée par la ligne polygonale KΛMNB ; donc : Surface segment sphérique > cercle de rayon $\sqrt{\Lambda\Gamma \times KA}$; d'où, à fortiori : Surface segment sphérique > cercle de rayon $\sqrt{\Gamma O \times KA}$ = cercle de rayon $\sqrt{\Theta \times KA}$; ce qui est impossible en présence de l'inégalité (II). Or, la première partie de la démonstration a déjà rejeté la première hypothèse ; donc, comme le texte : Surface segment sphérique = cercle de rayon $\sqrt{K\Gamma \times KA}$, d'où, en présence de la relation (I) il vient : Surface segment sphérique = cercle de rayon KB.

1. Sous-entendu : si le segment croît jusqu'à ce que la droite KB se confonde avec le diamètre KΓ.

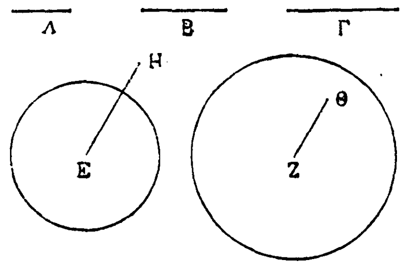
2. On aura : Surface de la sphère = cercle de rayon $K\Gamma = 4$ cercles de rayon $\frac{1}{2} K\Gamma = 4$ grands cercles de la sphère.

3. On aura : Surface sphère = surface engendrée par l'arc KB + surface engendrée par l'arc BΓ = cercle de rayon $\sqrt{\overline{KB}^2}$ + cercle de rayon $\sqrt{\overline{B\Gamma}^2}$ = cercle de rayon $\sqrt{\overline{KB}^2 + \overline{B\Gamma}^2}$ = cercle de rayon $\sqrt{\overline{K\Gamma}^2}$ = cercle de rayon KΓ = 4 cercles de rayon $\frac{1}{2}$ KΓ.

En déterminant l'aire d'un segment sphérique quelconque, puis de l'hémisphère et, enfin, de la sphère entière, Pappus condense en une seule proposition les trois célèbres propositions du traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède, dont les énoncés des deux premières sont reproduits page 295, note 2, et dont l'énoncé de la troisième est : (prop. 33) : « L'aire de toute sphère est quadruple du plus grand de ses cercles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 63.

est en puissance du rectangle compris sous les droites A, B et comme hauteur la droite Γ, équivaut au cône ayant comme base le cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites B, Γ et comme hauteur la droite A.

En effet, exposons deux cercles E, Z ; que le rayon du cercle E soit en puissance [du rectangle compris sous les droites A, B, tandis que le rayon du cercle Z est en puissance] ([1]) du rectangle compris sous les droites B, Γ, et que la hauteur du cône E soit la droite EH égale à la droite Γ, tandis que la hauteur du cône Z est la droite ZΘ égale à la droite A. Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites A, B est au rectangle compris sous les droites B, Γ [c'est-à-dire le rayon du cercle E au rayon du cercle Z] ([2]), c'est-à-dire le cercle E au cercle Z, comme la droite A est à la droite Γ, c'est-à-dire comme la droite ZΘ est à la droite EH, il s'ensuit que le cône dont la base est le cercle E et la hauteur la droite EH équivaut au cône dont la base est le cercle Z et la hauteur la droite ZΘ ; car leurs bases sont en opposition avec leurs hauteurs ([3]).



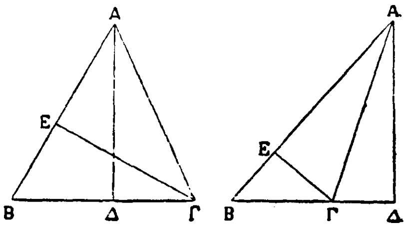
XXXIII.

Proposition 30 (lemme 14). — Soit un triangle ABΓ et, la droite BΓ restant fixe, que le triangle tourne autour de cette droite

1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 144).
2. La phrase entre crochets doit avoir été interpolée (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 388, l. 17).
3. On pose : rayon du cercle E $= \sqrt{A \times B}$ et rayon du cercle Z $= \sqrt{\Gamma \times B}$; donc : $\frac{\text{cercle E}}{\text{cercle Z}} = \frac{A \times B}{\Gamma \times B} = \frac{A}{\Gamma}$. Or, on a par construction : $Z\Theta = A$ et $EH = \Gamma$; donc : $\frac{\text{cercle E}}{\text{cercle Z}} = \frac{Z\Theta}{EH}$ ou $\frac{\text{base du cône E}}{\text{base du cône Z}} = \frac{\text{hauteur du cône Z}}{\text{hauteur du cône E}}$, d'où (Euclide, liv. XII, prop. 15 : « Les bases des cônes ou des cylindres égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs, et si les bases des cônes ou des cylindres sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs, les cônes ou les cylindres sont égaux entre eux. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 184) : cône de base cercle de rayon $\sqrt{A \times B}$ et de hauteur $\Gamma =$ cône de base cercle de rayon $\sqrt{\Gamma \times B}$ et de hauteur A.

jusqu'à ce qu'il soit remis en place ; je dis que le solide engendré par le triangle équivaut au cône dont la base équivaut à la surface conique que la droite AB engendre dans sa révolution et dont la hauteur est la perpendiculaire menée du point Γ sur la droite AB.

En effet, menons des points A, Γ les perpendiculaires ΓE, AΔ sur les droites AB, BΓ. Puisque l'angle droit Δ est égal à l'angle droite E, et que l'angle B est commun, le triangle ABΔ devient équiangle avec le triangle BΓE ; par conséquent, la droite BΓ est à la droite ΓE comme la droite BA est à la droite AΔ. Or, le rectangle compris sous les droites BA, AΔ est au carré de la droite AΔ comme la droite BA est à la droite AΔ ; donc, la droite BΓ est aussi à la droite ΓE comme le rectangle compris sous les droites BA, AΔ est au carré de la droite AΔ. En conséquence, le cône, ayant comme base le cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites BA, AΔ et comme hauteur la droite ΓE, équivaut au cône ayant comme base le cercle dont le rayon est la droite AΔ et comme hauteur la droite BΓ (parce que les bases de ces cônes sont de nouveau en opposition avec leurs hauteurs) (1). De plus, le solide que le triangle ABΓ engendre dans sa révolution (2) équivaut au cône ayant comme base le cercle dont le rayon est la droite AΔ et comme hauteur la droite BΓ ; donc, ce même solide équivaut au cône ayant comme base le cercle dont le rayon est en puissance du rectangle compris sous les droites BA, AΔ et comme hauteur la perpendiculaire ΓE. Mais, de nouveau en vertu du quinzième théorème d'Archimède (3), ce cercle équivaut à la surface conique que la droite AB engendre dans sa révolution (4), [car la surface de tout cône isocèle, exception faite de la base,



1. Voir proposition 29 (lemme 13).
2. Sous-entendu : autour de la droite AB.
3. C'est-à-dire en vertu de la proposition 15 du traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède ; proposition renseignée maintenant dans les éditions critiques comme étant la quatorzième (Voir p. 283, n. 2).
4. Sous-entendu : autour de la droite BA.

équivaut au cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cône et le rayon du cercle de base du cône] (1); par conséquent, si, la droite ΒΓ restant fixe, le triangle mû autour de cette droite se rétablit là d'où il a commencé de se mouvoir, le solide qu'il engendre équivaut au cône dont la base équivaut à la surface conique que la droite ΑΒ engendre dans sa révolution, et dont la hauteur est la perpendiculaire menée du point Γ sur la droite ΑΒ (2).

XXXIV.

Proposition 31 (lemme 15). — Soit de nouveau un triangle ΑΓΖ; menons transversalement une droite quelconque ΓΒ et, celle-ci restant fixe, faisons tourner le triangle jusqu'à ce qu'il se rétablisse en même place; je dis que le solide engendré par le triangle équivaut au cône dont la base est le cercle équivalent à la surface (3) que la droite ΑΖ engendre dans sa révolution, et dont la hauteur est la perpendiculaire menée du point Γ sur la droite ΑΖ.

Prolongeons la droite ΖΑ jusqu'au point Β (4). Dès lors, en vertu de ce qui a été démontré plus haut (5), le solide engendré

1. La phrase mise entre crochets est une interpolation qui reproduit en d'autres termes l'énoncé de la proposition précitée d'Archimède (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 390, l. 17).

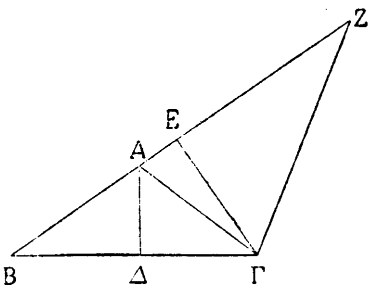
2. La similitude des triangles rectangles ΑΔΒ, ΓΕΒ donne : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A\Delta}}$. Or, on peut écrire : $\frac{\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Delta}^2} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A\Delta}}$; donc : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Delta}^2}$ (I). Dès lors, considérant ΒΓ, ΓΕ comme les hauteurs de cônes ayant respectivement comme base les cercles de rayon ΑΔ et de rayon $\sqrt{\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Delta}}$, la relation (I) montre que les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs ; donc (prop. 29), on a : cône de base cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Delta}}$ et de hauteur ΓΕ = cône de base cercle de rayon ΑΔ et de hauteur ΒΓ. Or, le solide engendré par la révolution du triangle ΒΑΓ autour de ΒΓ = cône de base cercle de rayon ΑΔ et de hauteur ΒΔ + cône de base cercle de rayon ΑΔ et de hauteur ΔΓ = cône de base cercle de rayon ΑΔ et de hauteur ΒΓ ; donc, solide engendré par triangle ΒΑΓ = cône de base cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Delta}}$ et de hauteur ΓΕ. Or (Archimède, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 14), on a : surface conique engendrée par ΒΑ autour de ΒΔ = cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Delta}}$; donc, comme le texte : solide engendré par le triangle ΒΑΓ = cône de hauteur ΓΕ et de base équivalente à la surface engendrée par la rotation de ΑΒ autour de ΒΔ.

3. Sous-entendu : κωνικῇ, conique.

4. Sous-entendu : et menons les perpendiculaires ΓΕ, ΑΔ.

5. Voir proposition 30 (lemme 14).

par le triangle ΑΒΓ équivaut au cône dont la base est équivalente à la surface du cône que forme la droite AB et dont la hauteur est la perpendiculaire menée du point Γ sur la droite BA ; tandis que le solide engendré par le triangle ΒΖΓ équivaut pareillement au cône dont la base est équivalente à la surface du cône que forme la droite BZ et dont la hauteur est la même. En conséquence, le solide restant, engendré par le triangle ΑΓΖ, équivaut au cône dont la base est équivalente à la surface du cône tronqué que forme la droite AZ et dont la hauteur est [1] la même [2].



XXXV.

Proposition 32 (lemme 16). — Mais, que la droite AZ soit parallèle à la droite ΒΓ, et menons les perpendiculaires ΖΓ, ΑΔ, je dis que le solide engendré par le triangle ABZ dans sa révolution [3] équivaut au cône dont la base est le cercle de rayon ΓΖ et la hauteur le double de la droite AZ, c'est-à-dire de la droite ΔΓ.

En effet, puisque le cylindre engendré par le parallélogramme ΑΓ équivaut au cône ayant comme base [le cercle dont le rayon est la droite ΑΔ] [4] et comme hauteur le triple de la droite ΔΓ [5],

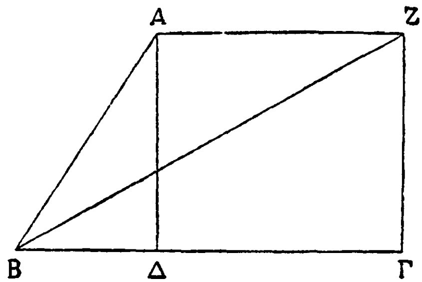
1. Le texte présente ici l'interpolation ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν AZ, la (perpendiculaire menée) du (point) Γ sur la (droite) AZ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 392, l. 18).

2. On a, en vertu de la proposition précédente : Solide engendré par le triangle ΑΒΓ = cône de base équivalente à la surface engendrée par AB et de hauteur ΓΕ, et solide engendré par le triangle ΒΖΓ = cône de base équivalente à la surface engendrée par BZ et de hauteur ΓΕ ; donc (Euclide, liv. XII, prop. 11 : « Les cônes et les cylindres qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 164) : Solide engendré par triangle ΒΖΓ — solide engendré par triangle ΑΒΓ = solide engendré par rotation du triangle ΑΓΖ autour de la droite ΒΓ = cône de base équivalente à la surface engendrée par la droite AZ (= BZ — AB) et de hauteur ΓΕ.

3. Sous-entendu : autour de la droite ΒΓ.

4. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 147).

5. Euclide, liv. XII, prop. 10, énoncée p. 278, n. 2, et prop. 14 : « Les cônes et les cylindres qui ont des bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 182.



tandis que le cône engendré par le triangle ABΔ a la même base et la droite BΔ comme hauteur, il s'ensuit que le solide engendré par le triangle ABΔ, conjointement avec le parallélogramme AΔΓZ, équivaut au cône ayant la même base et comme hauteur la droite BΔ conjointement avec trois droites ΔΓ. Retranchons de part et d'autre le cône de même base engendré par le triangle BΓZ et ayant comme hauteur la droite BΔ conjointement avec une seule droite ΔΓ ; en conséquence, le solide restant, engendré par le triangle ABZ, équivaut au cône de même base et ayant comme hauteur le double de la droite ΔΓ, ou de la droite AZ [1].

Et il est manifeste aussi que la surface engendrée par la droite AZ, laquelle est cylindrique, équivaut au cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base (car Archimède a démontré cela au quatorzième théorème du traité *De la Sphère et du Cylindre*) [2] ; en sorte que la surface engendrée par la droite AZ équivaut au cercle [dont le rayon est en puissance] [3] de deux fois le rectangle compris sous les droites ZΓ, ΓΔ [4].

---

1. On a : solide engendré par la figure BAZΓ = cône de base cercle de rayon AΔ et de hauteur BΔ + cylindre de base cercle de rayon AΔ et de hauteur ΔΓ = cône de base cercle de rayon AΔ et de hauteur BΔ + cône de base cercle de rayon AΔ et de hauteur 3ΔΓ = cône de base cercle de rayon AΔ et de hauteur (BΔ + 3ΔΓ), d'où : solide engendré par la figure BAZΓ — cône de base cercle de rayon AΔ et de hauteur (BΔ + ΔΓ) = solide engendré par le triangle ABZ = cône de base cercle de rayon AΔ et de hauteur (BΔ + 3ΔΓ— BΔ — ΔΓ = 2ΔΓ).

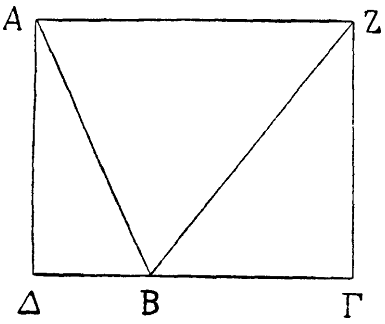
2. Archimède, *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. 13 (prop. 14 des anciennes éditions) : « L'aire de tout cylindre droit, si l'on excepte les bases, est équivalente au cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cylindre et le diamètre de la base du cylindre ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 28.

3. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 147, l. 38).

4. On a donc, en vertu de la proposition d'Archimède mentionnée dans la note avant-précédente : Surface cylindrique engendrée par la rotation de la droite AZ autour de l'axe BΓ = cercle de rayon $\sqrt{2Z\Gamma \times \Gamma\Delta}$.

XXXVI.

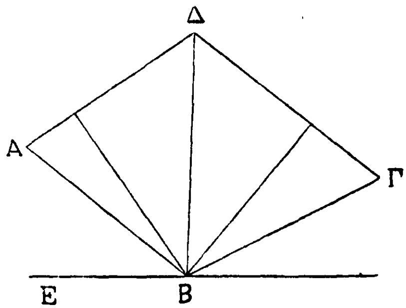
Lemme 17. — Au reste, si le point B tombe entre les points Δ, Γ, la démonstration est plus facile.



En effet, le cylindre engendré par le parallélogramme ΑΔΓΖ ayant même base que les cônes engendrés par les triangles ΑΒΔ, ΖΒΓ, et ayant comme hauteur la droite ΔΓ, il excède ces cônes d'un cône de même base dont la hauteur est le double de la droite ΔΓ ; en sorte que le solide engendré par le triangle ΑΒΖ équivaut à ce cône ; ce qu'il fallait démontrer.

XXXVII.

Proposition 33 (lemme 18). — Soit un quadrilatère ΑΒΓΔ et les perpendiculaires égales menées du point B sur les droites ΑΔ, ΔΓ ; menons une droite ΒΕ [1] et, celle-ci restant fixe, faisons tourner le quadrilatère jusqu'à ce qu'il soit remis en place. Je dis que le solide engendré par le quadrilatère équivaut au cône dont la base est équivalente aux surfaces que les droites ΑΔ, ΔΓ engendrent dans leur révolution et dont la hauteur est la perpendiculaire menée du point B sur l'une des droites ΑΔ, ΔΓ.



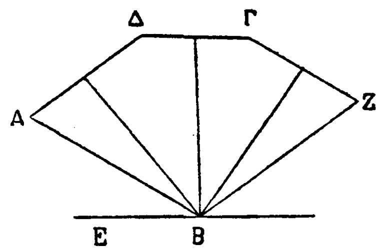
Menons la droite de jonction ΒΔ. Dès lors, le solide engendré par le quadrilatère est celui qui est engendré par les triangles ΑΒΔ, ΔΓΒ. Or, on a démontré, deux propositions plus haut [2], que le solide engendré par le

1. C'est-à-dire une droite ΒΕ quelconque à l'extérieur du quadrilatère.
2. Voir proposition 31 (lemme 15).

triangle ΑΒΔ équivaut au cône dont la base est équivalente à la surface engendrée par la droite ΑΔ et dont la hauteur est la perpendiculaire menée du point B sur l'une des droites ΑΔ, ΔΓ, et que le solide engendré par le triangle ΔΒΓ équivaut au cône dont la base est équivalente à la surface engendrée par la droite ΔΓ et dont la hauteur est la même ; par conséquent, le solide entier engendré par le quadrilatère ΑΒΓΔ équivaut au cône dont la base est équivalente aux surfaces que les droites ΑΔ, ΔΓ engendrent dans leur révolution et dont la hauteur est la perpendiculaire menée du point B sur l'une des droites ΑΔ, ΔΓ.

XXXVIII.

Proposition 34 (lemme 19). — Si, au lieu d'un quadrilatère, on a le quintilatère ΔΑΒΖΓ, ou bien une figure ayant un nombre quelconque de côtés, de telle sorte que les perpendiculaires menées du point B sur chacune des droites ΑΔ, ΔΓ, ΓΖ soient égales, on démontrera pareillement que le solide engendré par le polygone (1) équivaut au cône dont la base est équivalente aux surfaces engendrées par les droites ΑΔ, ΔΓ, ΓΖ et dont la hauteur est l'une des perpendiculaires égales que nous avons dites. Et il n'en sera pas autrement si la dernière perpendiculaire se confond avec la droite EB (2).

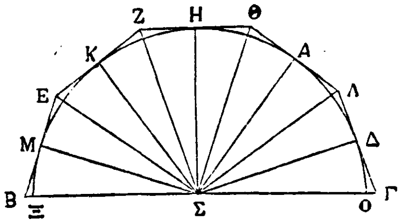


XXXIX.

Lemme 20. — Au reste, on aura identiquement ce qui précède en disant que, si l'on décrit autour d'un demi-cercle de centre Σ un polygone tel que ΒΕΖΘΛΓ, ayant un nombre quelconque de

1. Sous-entendu : tournant autour d'une droite extérieure BE menée par le point B.

2. Le texte présente ici une interpolation de scoliaste : ἑξῆς τὸ σχῆμα, annonçant une figure relative à ce cas particulier de l'une des perpendiculaires menées du point B prise comme axe de rotation (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, p. 396, l. 20).



côtés, et si, la droite ΒΓ restant fixe, le polygone tourne jusqu'à ce qu'il se remette en même place, le solide qu'il engendre, circonscrit à la sphère engendrée par le demi-cercle, équivaut au cône dont la base est la surface (1) que les côtés du polygone engendrent dans leur révolution et dont la hauteur est le rayon de la sphère.

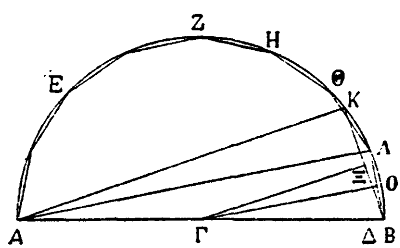
En effet, toutes les perpendiculaires telles que ΣΜ, ΣΚ, ΣΗ, ΣΑ, ΣΔ, menées du point Σ sur les côtés, sont égales ; et il n'en sera pas autrement si le point Δ se confond avec le point O et le point M avec le point Ξ (2).

Et il est clair que l'on démontrera la même chose si l'on décrit un polygone autour d'un segment de cercle tel que ΞΣΑ ou ΜΣΑ.

XL.

Proposition 35 (lemme 21). — Toute sphère équivaut au cône dont la base est la surface de la sphère et dont la hauteur est le rayon.

En effet, soit une sphère dont le diamètre est la droite AB et dont le centre est le point Γ. Que le cône, dont la base est la surface de la sphère, c'est-à-dire le cercle ayant comme rayon la droite AB (3) et dont la hauteur est le rayon ΓΒ de la sphère, soit d'abord plus grand (4), s'il se peut. Imaginons un autre cône intermédiaire, c'est-à-dire plus petit que le cône et plus grand que la sphère, dont la base est la même et dont la hauteur est une droite ΒΔ plus petite que la



1. C'est-à-dire : dont le cercle de base équivaut à la surface, etc.
2. C'est-à-dire si les derniers côtés du polygone sont perpendiculaires au diamètre.
3. Voir proposition 28.
4. Sous-entendu : τῆς σφαίρας, que la sphère.

droite ΓΒ, et, considérant le demi-cercle ΑΕΒ, menons une droite ΑΚ dont le carré soit équivalent à deux fois le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΓΔ. Dès lors, le reste, soit deux fois le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΔ, équivaut au carré construit sur la droite des points Κ, Β (1), et la moitié, c'est-à-dire le rectangle construit sous les droites ΑΒ, ΒΔ, équivaut à [la moitié] (2) du carré construit sur la droite des points Κ, Β (3). [Car deux fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΔ conjointement avec deux fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΓΔ, c'est-à-dire deux fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ, ou le carré de la droite ΑΒ, équivaut aux carrés des droites ΑΚ, ΚΒ, vu que l'angle au point Κ est droit dans un demi-cercle] (4). Inscrivons donc dans le demi-cercle le polygone équilatéral [ayant un nombre pair de côtés] (5) ΑΕΖΗΘΛΒ, de manière que l'arc ΒΛ soit plus petit que l'arc ΒΛΚ (chose qui est possible ; car, si on coupe le demi-cercle en deux parties égales, puis la moitié de son arc en deux parties égales, et si on procède continuellement ainsi, il reste un arc tel que ΒΛ, plus petit que l'arc ΒΛΚ) (6). Menons la droite de jonction ΑΛ et menons-lui la parallèle ΓΟ. Dès lors, puisque le triangle ΑΛΒ est équiangle au triangle ΓΟΒ ; que la droite ΑΛ est double de la droite ΓΟ, tandis que la droite ΛΒ est double de la droite ΒΟ, et que la droite ΛΒ est plus petite que la droite ΑΛ (7), il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΑΛ, ΓΟ est plus grand que la moitié du carré de la droite ΛΒ. (8)

1. Expression singulière pour désigner la droite ΚΒ dont la construction ne sera explicitement mentionnée que plus loin.

2. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 398, l. 24).

3. Menons la corde ΑΚ telle que l'on ait : $\overline{AK}^2 = 2AB \times \Gamma\Delta$. Or, $\overline{AB}^2 = 2AB \times B\Gamma$; d'où : $\overline{AB}^2 - \overline{AK}^2 = 2AB\,(B\Gamma - \Gamma\Delta)$ ou : $\overline{KB}^2 = 2AB \times B\Delta$, d'où : $\frac{1}{2}\overline{KB}^2 = AB \times B\Delta$. Un passage justifiant le mot λοιπὸν (reste) semble perdu ici.

4. L'édition de Hultsch considère la phrase placée entre crochets comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 400, l. 1).

5. ἀρτιόπλευρον, mot probablement interpolé, car il ne répond pas à une condition nécessaire.

6. Voir proposition 27 (lemme 10), p. 294.

7. Ce qui suppose la considération d'un polygone inscrit d'un nombre de côtés tel que l'on ait au moins : $\Lambda B < KB < \frac{1}{4}$ circonférence du cercle.

8. Les triangles rectangles ΑΛΒ, ΓΟΒ sont semblables ; donc : $A\Lambda = 2\Gamma O$ et $\Lambda B = 2BO$. Or, $A\Lambda > \Lambda B$; donc : $A\Lambda \times 2\Gamma O > \Lambda B \times 2BO = \overline{\Lambda B}^2$, d'où, comme le texte : $A\Lambda \times \Gamma O > \frac{1}{2}\overline{\Lambda B}^2$.

Donc, en raison de ce qui précède, si l'on mène la droite de jonction KB, et si l'on mène par le point Γ une parallèle à la droite AK jusqu'à la droite KB, le rectangle compris sous cette parallèle et la droite AK est plus grand que la moitié du carré de la droite KB (1) et, à fortiori, le rectangle compris sous les droites AΛ, ΓO est plus grand que la moitié du carré de cette droite ; ce qui est le rectangle compris sous les droites AB, BΔ (2). En conséquence, le cône ayant comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites AΛ, ΓO et comme hauteur la droite AB est aussi plus grand que le cône ayant comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΔ et comme hauteur la droite AB. Mais, le cône ayant comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites AΛ, ΓO et comme hauteur la droite AB, équivaut au cône ayant comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites AΛ, AB et comme hauteur la droite ΓO (3) ; donc, ce même cône, c'est-à-dire celui qui a comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites ΛA, AB et comme hauteur la droite ΓO est plus grand que le cône ayant comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΔ et comme hauteur la droite AB, c'est-à-dire plus grand que le cône équivalent ayant comme base le cercle dont le rayon est la droite AB et comme hauteur la droite BΔ. [Car la droite AB est à la droite BΔ comme le carré de la droite AB est au rectangle compris sous les droites AB, BΔ] (4). Et l'on a démontré au quatrième

1. Les triangles rectangles AKB, ΓΞB sont semblables ; donc : $AK = 2\Gamma\Xi$ et $KB = 2\Xi B$. Or, $AK > KB$, donc : $AK \times 2\Gamma\Xi > KB \times 2\Xi B = \overline{KB}^2$, d'où : $AK \times \Gamma\Xi > \frac{1}{2}\overline{KB}^2$.

2. On a : $A\Lambda > AK$ et $\Gamma O > \Gamma\Xi$, d'où, en présence de l'inégalité de la note précédente, on a, à fortiori : $A\Lambda \times \Gamma O > \frac{1}{2}\overline{KB}^2$. Or, on a eu plus haut : $\frac{1}{2}\overline{KB}^2 = AB \times B\Delta$, donc : $A\Lambda \times \Gamma O > AB \times B\Delta$.

3. Voir proposition 29 (lemme 13), p. 298.

4. La phrase que nous plaçons entre crochets est une interpolation de scoliaste (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 402, l. 16).

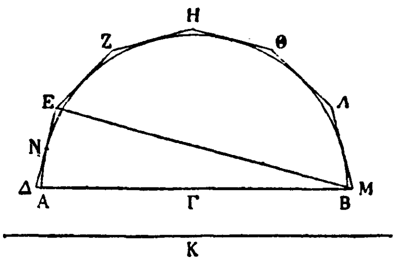
théorème (1), que la surface engendrée dans une rotation d'ensemble par tous les côtés du polygone est équivalente au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΛ, ΑΒ ; donc, le cône ayant comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΛ, ΑΒ et comme hauteur la droite ΓΟ, cône qui équivaut à la figure solide inscrite dans la sphère (2), est aussi plus grand que le cône dont le rayon de la base est la droite ΑΒ et dont la hauteur est la droite ΒΔ ; en sorte que la figure solide que nous venons de dire est aussi plus grande que le cône dont le rayon de la base est la droite ΑΒ et dont la hauteur est la droite ΒΔ. Or, on a supposé que ce cône est aussi plus grand que la sphère ; donc, à fortiori, la figure solide inscrite dans la sphère est plus grande que cette sphère ; ce qui est impossible (3).

---

1. C'est-à-dire au lemme 4, constituant la proposition 23 de l'édition de Hultsch. Voir p. 281.
2. Voir lemme 20, p. 305.
3. L'expression $ΑΛ \times ΓΟ > ΑΒ \times ΒΔ$ trouvée plus haut donne : cône de base cercle de rayon $\sqrt{ΑΛ \times ΓΟ}$ et de hauteur ΑΒ > cône de base cercle de rayon $\sqrt{ΑΒ \times ΒΔ}$ et de hauteur ΑΒ. Or, $\frac{ΓΟ}{ΑΒ} = \frac{ΑΛ \times ΓΟ}{ΑΛ \times ΑΒ}$, d'où, considérant l'équivalence de cônes dont les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs (prop. 29, p. 298, ou bien : Euclide, liv. XII, prop. 15, énoncée p. 299, n. 3), on a : cône de base cercle de rayon $\sqrt{ΑΛ \times ΓΟ}$ et de hauteur ΑΒ = cône de base cercle de rayon $\sqrt{ΑΛ \times ΑΒ}$ et de hauteur ΓΟ ; donc, comme le texte : cône de base cercle de rayon $\sqrt{ΑΛ \times ΑΒ}$ et de hauteur ΓΟ > cône de base cercle de rayon $\sqrt{ΑΒ \times ΒΔ}$ et de hauteur ΑΒ (I). Or, $\frac{ΑΒ}{ΒΔ} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{ΑΒ \times ΒΔ}$, d'où (prop. 29, ou : Euclide, liv. XII, prop. 15) comme plus haut : cône de base cercle de rayon $\sqrt{ΑΒ \times ΒΔ}$ et de hauteur ΑΒ = cône de base cercle de rayon ΑΒ et de hauteur ΒΔ. Dès lors, l'inégalité (I) donne, comme le texte : cône cercle de rayon $\sqrt{ΑΛ \times ΑΒ}$ et de hauteur ΓΟ > cône de base cercle de rayon ΑΒ et de hauteur ΒΔ (II). Or, la proposition 23 (voir p. 281) a démontré que l'on a : surface du conoïde engendré par le polygone inscrit ΑΕΖΗΘΚΑΒ = cercle de rayon $\sqrt{ΑΛ \times ΑΒ}$. Or, ΓΟ est le rayon du cercle auquel le polygone ΑΕΖΗΘΚΛΒ est circonscrit, et le lemme 20 (voir p. 305) a démontré que l'on a : solide engendré par le polygone ΑΕΖΗΘΚΛΒ = cône de base surface engendrée par polygone ΑΕΖΗΘΚΛΒ et de hauteur ΓΟ ; donc : solide engendré par le polygone = cône de base cercle de rayon $\sqrt{ΑΛ \times ΑΒ}$ et de hauteur ΓΟ, d'où, en présence de l'inégalité (II), il vient, comme dans le texte : solide engendré par le polygone > cône de base cercle de rayon ΑΒ et de hauteur ΒΔ. Or, par hypothèse, on a : cône intermédiaire de base cercle de rayon ΑΒ et de hauteur ΒΔ > sphère ; donc : solide engendré par le polygone > sphère ; ce qui est impossible. Or, comme on a : ΒΔ < ΓΒ, ce qui entraîne, à fortiori, à l'impossibilité, le texte semble avoir perdu ici une phrase concluant que le cône

XLI.

Lemme 22. — Mais, que le cône dont la base est le cercle de rayon AB et la hauteur la droite ΓB, c'est-à-dire le cône ayant comme base le cercle dont le carré de rayon équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ et comme hauteur la droite AB (1), soit plus petit que la sphère. [Car le carré de la droite AB est au rectangle compris sous les droites AB, BΓ comme la droite AB est à la droite BΓ] (2). Imaginons un cône, intermédiaire entre la sphère et ce cône, dont la base soit la même et la hauteur une droite K plus grande que la droite AB, et circonscrivons au demi-cercle un polygone équilatéral, tel que l'un de ses côtés ΔE soit plus petit que l'excédent des droites K, AB (3). Or, la droite ΔE est plus grande que les droites ΔA, BM,



ayant comme base la surface de la sphère et comme hauteur le rayon n'est pas plus grand que la sphère.

Le fait que ce cône est plus petit que la sphère découle du reste des quatre propositions suivantes du premier livre *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède :

1° Proposition 25 : « L'aire d'une figure limitée par des surfaces coniques, inscrite dans une sphère, est plus petite que le quadruple du plus grand cercle de la sphère ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 51.

2° Proposition 26 : « A la figure délimitée par des surfaces coniques inscrite dans une sphère équivaut le cône ayant la base équivalente à l'aire de la figure inscrite dans la sphère et une hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du centre de la sphère sur un côté quelconque du polygone ». Voir, trad. précitée p. 52.

3° Proposition 33, énoncée p. 298, n. 3.

4° Proposition 34 : « Toute sphère est quadruple du cône ayant le plus grand cercle de la sphère comme base, et le rayon de la sphère comme hauteur ». Voir trad. précitée, p. 65.

1. On a : $\frac{\overline{AB}^2}{AB \times B\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma}$, d'où équivalence des cônes dont les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs (prop. 29, p. 298, ou : Euclide, liv. XII, prop. 15) : cône de base cercle de rayon AB et de hauteur ΓB = cône de base cercle de rayon $\sqrt{AB \times B\Gamma}$ et de hauteur AB.

2. La phrase mise entre crochets doit être attribuée à un commentateur (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 404, l. 13).

3. C'est-à-dire imaginons un cône intermédiaire tel que l'on ait : sphère engendrée par le demi-cercle de rayon ΓB > cône de base cercle de rayon $\sqrt{AB \times B\Gamma}$ et de hauteur K > cône de base cercle de rayon $\sqrt{AB \times B\Gamma}$ et de hauteur AB.

parce que la droite NΔ est aussi plus grande que la droite ΔA ; donc, la droite ΔM est aussi plus petite que la droite K [1]. Et puisque, en vertu du quatrième théorème [2], la surface engendrée par le polygone dans sa rotation autour de l'axe ΔM équivaut au cercle dont le rayon vaut en [puissance le rectangle compris sous les droites ΔM, AB] [3], il est évident que le solide engendré par ce polygone, lequel est circonscrit à la sphère formée par le demi-cercle, équivaut, en vertu du vingtième théorème [4], au cône dont le rayon de la base vaut en [puissance le rectangle compris sous les droites ΔM, AB] [5] et dont la hauteur est le rayon ΓB de la sphère [6]. [D'ailleurs, le cône dont la base est le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites ΔM, AB et dont la hauteur est la droite BΓ équivaut au cône dont le rayon de la base est la droite AB et dont la hauteur est la droite BΓ, c'est-à-dire au cône dont la base équivaut au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ et dont la hauteur est la droite AB, parce que la droite AB est de nouveau à la droite BΓ comme le rectangle compris sous les droites ΔM, AB est au rectangle compris sous les droites AB, BΓ, et que les bases sont en opposition avec les hauteurs ; par conséquent, le solide engendré par le polygone dans sa révolution autour de l'axe ΔM équivaut au cône ayant comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites ΔM, AB et comme hauteur la droite BΓ] [7].

---

1. On a par construction : $\Delta E < K - AB$, d'où : $\Delta E + AB < K$. Or, $\Delta N > \Delta A$, d'où : $2\Delta N = \Delta E > 2\Delta A = \Delta A + BM$ ou, comme le texte : $\Delta E > \Delta A + BM$; donc : $\Delta E + AB > \Delta A + BM + AB = \Delta M$, d'où : $\Delta M < K$.

2. Proposition 23 ou lemme 4. Voir p. 281, et notes.

3. Lacune comblée par Hultsch au moyen de : δυναμένη τὸ ὑπὸ ΔΜ, ΑΒ, c'est-à-dire que le carré (du rayon) = rectangle $\Delta M \times AB$ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 406, l. 2).

4. Voir lemme 20 (p. 305).

5. Lacune comblée par Hultsch au moyen des mêmes mots mentionnés dans la note avant-précédente (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 406, l. 5).

6. Il résulte de la proposition 23 (lemme 4) que l'on a : surface engendrée par le polygone ΔΕΖΗΘΛΜ autour de l'axe ΔM = cercle de rayon $\sqrt{\Delta M \times AB}$. Or, on a démontré (lemme 20) que l'on a : Solide engendré par le polygone ΔΕΖΗΘΛΜ = cône de base équivalente à la surface engendrée par le polygone et de hauteur ΓB ; donc, comme le texte : solide engendré par le polygone = cône de base cercle de rayon $\sqrt{\Delta M \times AB}$ et de hauteur ΓB.

7. Le long passage que nous mettons entre crochets est un commentaire interpolé (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 406, ll. 7-18).

De plus, la droite K est plus grande que la droite ΔM, tandis que le cône ayant comme base le cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle compris sous les droites K, AB et comme hauteur la droite BΓ est plus petit que la sphère ; donc, le solide circonscrit est, à fortiori, plus petit que la sphère ; ce qui est impossible [1]. En conséquence, le cône équivaut à la sphère.

XLII.

Proposition 36 (lemme 23). — Une sphère et un rapport étant donnés, couper la surface de la sphère par un plan de manière que les surfaces des segments aient entre elles ce même rapport donné.

En effet, soit une sphère dont AΔBE est un cercle le plus grand et AB le diamètre. Soit d'autre part le rapport de la droite Z à la droite H, et coupons la droite AB en un point Γ de manière que la droite AΓ soit à la droite ΓB comme la droite Z est à la droite H. Coupons la sphère par un plan passant par le point Γ, à angles droits sur la droite AB ; soit ΔE la section commune [2], et menons les droites de jonction AΔ, ΔB.

---

1. On a posé : cône intermédiaire de base cercle de rayon $\sqrt{AB \times B\Gamma}$ et de hauteur $K <$ sphère engendrée par le demi-cercle de rayon ΓB. Or, considérant que $\frac{B\Gamma \times AB}{K \times AB} = \frac{B\Gamma}{K}$, on a : cône de base cercle de rayon $\sqrt{AB \times B\Gamma}$ et de hauteur $K =$ cône de base cercle de rayon $\sqrt{K \times AB}$ et de hauteur BΓ ; donc, on a par hypothèse : cône de base cercle de rayon $\sqrt{K \times AB}$ et de hauteur $B\Gamma <$ sphère. Or, $K > \Delta M$; donc, la dernière expression de la note avant-précédente donne, à fortiori : Solide engendré par le polygone = cône de base cercle de rayon $\sqrt{\Delta M \times AB}$ et de hauteur $B\Gamma <$ sphère, ce qui est impossible.

Le fait que ce cône est, au contraire, plus grand que la sphère découle du reste des quatre propositions suivantes du premier livre *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède :

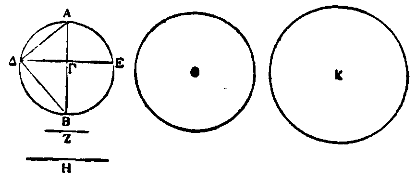
1° Proposition 30 : « L'aire d'une figure circonscrite à la sphère est plus grande que le quadruple du plus grand cercle de la sphère ». Voir trad. de Paul Ver Eecke, p. 57.

2° Proposition 31 : « A la figure circonscrite à la sphère plus petite équivaut un cône ayant comme base un cercle équivalent à l'aire de la figure, et dont la hauteur est égale au rayon de la sphère ». Voir *ibidem*, p. 59.

3° Proposition 33, énoncée p. 298, n. 3.

4° Proposition 34, énoncée p. 309, n. 3.

2. C'est-à-dire la section commune du plan et du grand cercle AΔBE.



Exposons deux cercles Θ, K : le cercle Θ ayant son rayon égal à la droite AΔ et le cercle K ayant son rayon égal à la droite ΔB. En conséquence, le cercle Θ sera équivalent à la surface du segment ΔAE, et le cercle K sera équivalent à la surface du segment ΔBE ; car cela a été démontré précédemment [1]. Et puisque l'angle compris sous les droites AΔ, ΔB est droit, et que la droite ΔΓ est perpendiculaire, le carré de la droite AΔ est au carré de la droite ΔB, c'est-à-dire le carré du rayon du cercle Θ au carré du rayon du cercle K, c'est-à-dire le cercle Θ au cercle K, c'est-à-dire la surface du segment ΔAE à la surface du segment ΔBE de la sphère, comme la droite AΓ est à la droite ΓB, c'est-à-dire comme la droite Z est à la droite H. [2]

XLIII.

Proposition 37. — Étant donné ce qui précède [3], il est clair aussi que, pour toute sphère, le cylindre ayant la base équivalente au plus grand des cercles de la sphère et la hauteur égale au diamètre de la sphère est sesquialtère [4] de la sphère, et que sa surface est sesquialtère de la surface de la sphère.

En effet, étant donné le demi-cercle AEΓ dont la droite AΓ est le diamètre, le point E, celui de la division en deux parties égales et le point Z le centre, si l'on mène les trois tangentes AB, BΔ, ΔΓ par les points A, E, Γ, et si, la droite AΓ restant fixe,

---

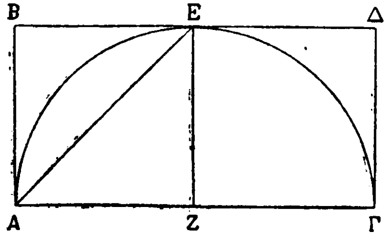
1. Voir proposition 28, p. 295.

2. On a (Euclide, liv. VI, prop. 8, énoncée p. 54, n. 2) : $\overline{A\Delta}^2 = AB \times A\Gamma$ et $\overline{\Delta B}^2 = AB \times \Gamma B$, donc : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{Z}{H}$. Or (Euclide, liv. XII, prop. 2, énoncée p. 181, n. 1) on a : $\frac{\text{cercle } \Theta}{\text{cercle K}} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2}$; donc : $\frac{\text{cercle } \Theta}{\text{cercle K}} = \frac{Z}{H}$. Or (prop. 28), on a : cercle Θ = surface segment ΔAE et cercle K = surface segment ΔBE ; donc : $\frac{\text{surface segment } \Delta AE}{\text{surface segment } \Delta BE} = \frac{Z}{H}$.

3. C'est-à-dire les vingt-trois lemmes qui précèdent.

4. ἡμιόλιος sesquialtère, c'est-à-dire $\frac{3}{2}$ ou une fois et demie.

on fait tourner le demi-cercle jusqu'à ce qu'il soit rétabli en même lieu d'où il a commencé d'être mû, le cylindre engendré par le parallélogramme rectangle ΑΒΔΓ aura le rapport sesquialtère ([1]) avec la sphère engendrée par le demi-cercle, et sa surface sera dans le même rapport avec la surface de la sphère. En effet, puisque la surface du cylindre engendré par la droite ΒΔ équivaut au cercle dont le rayon [est la moyenne proportionnelle entre la droite ΒΔ et la somme des droites ΑΒ, ΓΔ, c'est-à-dire au cercle dont le rayon ([2])] est la droite ΑΓ ([3]), et que ce cercle équivaut à quatre cercles les plus grands de la sphère ([4]) ; tandis qu'on a démontré aussi que la surface de la sphère équivaut à quatre cercles les plus grands ([5]), il s'ensuit que la surface engendrée par la droite ΒΔ équivaut à la surface de la sphère. En conséquence, conjointement avec les deux cercles qui sont les bases du cylindre, son rapport à la surface de la sphère est celui de 6 à 4, ce qui est le rapport sesquialtère ([6]). Et puisque le cône qui a la base équivalente à la surface de la sphère et comme



1. ἡμιόλιος λόγος, le rapport sesquialtère, c'est-à-dire le rapport de $1\frac{1}{2}$ à 1.

2. La phrase que nous mettons entre crochets est une interpolation de scoliaste qui, nonobstant ce que Pappus a démontré plus haut, préfère s'en rapporter à la proposition 13 du livre I du traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède, énoncée p. 303, n. 2. Or, comme cette proposition est en réalité relative au cône, Hultsch a fait remarquer que l'interpolateur se serait exprimé plus correctement en disant : μέση ἀνάλογόν ἐστιν τῆς ΒΔ καὶ διπλασίας τῆς ΑΒ, τουτέστιν, etc., est la moyenne proportionnelle de la (droite) ΒΔ et du double de la (droite) ΑΒ, c'est-à-dire... (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 411, en note).

3. Voir proposition 24 (p. 284), d'où il résulte que l'on a : surface latérale du cylindre engendrée par rotation de ΒΔ autour de ΑΓ = cercle de rayon ΑΓ.

4. Car $\mathrm{A\Gamma} = 2\mathrm{AZ}$.

5. Car il résulte de la proposition 28 (voir p. 295), que la surface de la sphère équivaut au cercle dont le rayon est égal au diamètre de la sphère, c'est-à-dire équivaut à quatre grands cercles.

6. C'est-à-dire que si, à la surface latérale du cylindre équivalente à quatre grands cercles, on ajoute les deux grands cercles des bases, on a :

$$\frac{\text{surface totale du cylindre}}{\text{surface de la sphère}} = \frac{4+2}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}.$$

hauteur le rayon de la sphère .... (1) est la sixième partie du cylindre entier ; donc, ce cylindre est aussi sesquialtère de la sphère (2).

[Au reste, il a été démontré antérieurement que, si l'arc de demi-cercle n'est pas coupé en deux arcs égaux, mais en autant d'arcs qu'on pourra, et si l'on mène des tangentes à ces arcs de la manière dont elles ont été tracées ici, la surface engendrée par toutes ces tangentes dans une révolution d'ensemble équivaut pareillement à quatre cercles les plus grands.] (3)

Les choses que nous avons exposées concernant les propositions qui sont démontrées par Archimède dans le traité *De la Sphère et du Cylindre* se terminent ici (4), et, à leur suite, conformément à notre promesse (5), nous allons traiter des comparaisons des cinq figures ayant même surface : la pyramide, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre (6), non pas par la méthode appelée analytique, au moyen de laquelle quelques-uns chez les Anciens ont établi les démonstrations (7), mais par la voie de la synthèse, afin que ces comparaisons soient exposées par nous

1. Lacune que la recension des divers manuscrits n'a pas permis de combler.

2. Le passage lacuneux de la fin de la démonstration a fait l'objet d'une première restauration conjecturale de la part de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 154, ll. 17-21), laquelle a été complétée par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 411, ll. 10-16) et que nous traduisons du latin comme suit, en usant de caractères italiques pour ce qui fait défaut dans le texte grec : « ... *est équivalent à la sphère, il en résulte que le cône ayant comme base un cercle le plus grand de la sphère et même hauteur est la quatrième partie de la sphère. Mais ce cône est la troisième partie du cylindre qui a la même base et la même hauteur, c'est-à-dire qu'il est* la sixième partie du cylindre entier *que nous avons posé au début* ; donc, ce cylindre est aussi *à la sphère dans le rapport de six à quatre, c'est-à-dire qu'il est* sesquialtère de la sphère ».

3. Le passage mis entre crochets est une interpolation intempestive qui considère la surface de la sphère à la limite du conoïde circonscrit (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 410, ll. 16-21).

4. Pappus abandonne ici les quelques propositions d'Archimède dont il s'est attaché à donner des démonstrations quelque peu différentes en se basant sur la série de lemmes qui précèdent, et il passe à la troisième partie du livre V qui sera consacrée aux propriétés comparatives des cinq polyèdres réguliers. Bien que le texte grec de cette troisième partie ne porte pas de sous-titre, la version latine de Hultsch l'intitule : *Libri quinti pars tertia. Quinque polyedrorum Platonicorum comparationes* (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 411).

5. Voir § XX, p. 240, n. 5.

6. Le texte présente ici l'interpolation : et elles (ces comparaisons) donnent la voie des démonstrations (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 410, l. 27).

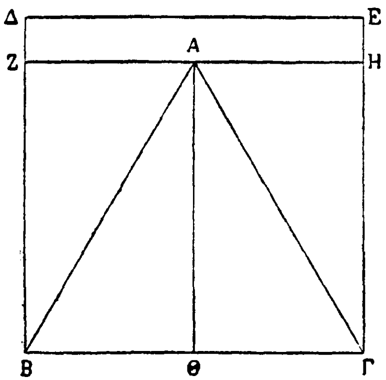
7. Le texte présente ici l'interpolation : des figures que nous venons de dire (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 412, l. 1).

d'une manière plus claire et plus concise (1). Exposons préalablement (2) les choses suivantes (3).

XLIV.

PROPOSITION 38 (lemme 1). — Le carré construit sur un des côtés de tout triangle équilatéral est plus grand que le double de ce triangle équilatéral et plus petit que son quadruple.

En effet, soient le triangle équilatéral ΑΒΓ et la perpendiculaire ΑΘ sur la base ΒΓ (laquelle coupe évidemment la droite ΒΓ en deux parties égales). Décrivons le carré ΒΔΕΓ sur la droite ΒΓ



(il est évident qu'il tombera au delà du triangle ΑΒΓ, parce que la perpendiculaire ΑΘ est plus petite que le côté du triangle) (4), et menons par le point Α la droite ΖΑΗ parallèle à la droite ΒΓ. Dès lors, puisque le carré de la droite ΑΒ est le quadruple du carré de la droite ΒΘ, il s'ensuit que le carré de la droite ΑΒ est l'épitrite (5) du carré de la droite ΑΘ, c'est-à-dire que le carré de la droite ΔΒ est l'épitrite du carré de la droite ΒΖ ; donc, la droite ΔΒ est plus petite que le double de la droite ΒΖ. De plus, le carré ΒΕ est au parallélogramme ΖΓ comme la droite ΔΒ est à la droite ΒΖ ; donc, le carré ΒΕ est aussi plus petit que le double du parallélogramme ΖΓ [c'est-à-dire que le quadruple] (6) du triangle ΑΒΓ. En conséquence,

1. Le texte présente ici l'interpolation : « puisque, de plus, tous les lemmes grands et petits, au nombre de seize, dont on a besoin ici ont été disposés à l'intention du grand nombre de ceux qui désirent s'instruire ». (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 412, ll. 3-6).

2. Le texte porte l'interpolation : τῶν συγκρίσεων, aux comparaisons (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. I, p. 412, l. 6).

3. C'est-à-dire les seize lemmes qui vont suivre.

4. Remarque élémentaire probablement interpolée.

5. ἐπίτριτος, l'épitrite, c'est-à-dire $\frac{4}{3}$ ou $1 + \frac{1}{3}$.

6. Lacune comblée par Eisenmann au moyen des mots τούτεστιν ἢ τετραπλάσιον, lesquels ont été adoptés par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 412, ll. 22).

le carré BE est plus petit que le quadruple et plus grand que le double du triangle ΑΒΓ (1).

XLV.

PROPOSITION 39 (lemme 2). — Le carré de la droite menée du centre d'une sphère qui enveloppe un octaèdre, perpendiculairement à un plan de cet octaèdre, est la troisième partie du carré du rayon de la sphère.

Soient ΑΒΓ un triangle de l'octaèdre situé dans la sphère, le cercle décrit autour de ce triangle et la perpendiculaire ΔE menée du centre Δ de la sphère sur le plan du cercle. Dès lors, il résulte manifestement des *Sphériques* que le point E est le centre du cercle (2). Menons les droites de jonction EB, BΔ; je dis que le carré du rayon ΔB de la sphère est le triple du carré de la droite ΔE.

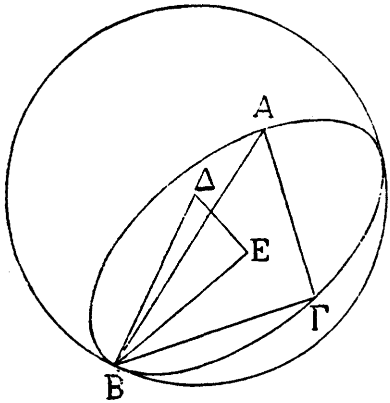
En effet, puisqu'il a été démontré que, dans le cas de l'octaèdre, le carré du diamètre de la sphère est le double du carré du côté de l'octaèdre (3), et qu'il est aussi le quadruple du carré du rayon de la sphère, il s'ensuit que le carré de la droite ΒΓ est le double du carré de la droite BΔ. Et puisque, en vertu de la proposition 12 du livre XIII des *Éléments* (4), le carré de la droite ΒΓ est le triple du carré de la droite BE, et qu'il est le double du carré de la droite BΔ, il s'ensuit que le carré de la droite

1. On a : $AB = B\Gamma = 2B\Theta$; donc : $\overline{AB}^2 = 4\overline{B\Theta}^2$. Or, le triangle rectangle $AB\Theta$ donne : $\overline{AB}^2 = \overline{A\Theta}^2 + \overline{B\Theta}^2 = \overline{A\Theta}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2$, d'où, comme le texte : $\overline{AB}^2 = \frac{4}{3}\overline{A\Theta}^2$ ou : $\overline{B\Delta}^2 = \frac{4}{3}\overline{BZ}^2$; donc : $\overline{B\Delta}^2 < 4\overline{BZ}^2$, d'où, comme le texte : $B\Delta < 2BZ$. Or, $\frac{\overline{B\Delta}^2}{BZ \times B\Gamma} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{BZ \times B\Delta} = \frac{B\Delta}{BZ}$, donc : $\overline{B\Delta}^2 < 2BZ \times B\Gamma$. Or, $BZ \times B\Gamma =$ 2 triangles $AB\Gamma$; donc : $\overline{B\Delta}^2 <$ 4 triangles $AB\Gamma$. Or, $B\Delta > BZ$, d'où : $\overline{B\Delta}^2 > BZ \times B\Delta = A\Theta \times B\Gamma =$ 2 triangles $AB\Gamma$.

2. THÉODOSE DE TRIPOLI, *Les Sphériques*, livre I, corollaire : « Il est clair, d'après cela, que si l'on a un cercle dans une sphère, la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur ce cercle tombera sur le centre du cercle ». Voir trad. précitée de P. Ver Eecke, p. 3.

3. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 14 : « Construire un octaèdre, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit la pyramide, et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est double du carré du côté de l'octaèdre ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 263.

4. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 12, énoncée p. 115, n. 4.



BΔ est sesquialtère du carré de la droite BE. Or, le carré de la droite BΔ équivaut aux carrés des droites BE, EΔ ; donc, les carrés des droites BE, EΔ sont sesquialtères du carré de la droite BE ; donc, le carré de la droite BE est le double du carré de la droite ΔE ; donc, la somme des carrés des droites BE, EΔ, c'est-à-dire le carré de la droite BΔ, est le triple du carré de la droite ΔE (1).

XLVI.

LA MÊME CHOSE D'UNE AUTRE MANIÈRE.

Lemme 3. — Exposons un carré sur lequel soit établie la moitié d'un octaèdre ABΓΔE ; menons les droites de jonction AΓ, BΔ qui sont les diamètres du carré, ainsi que la droite de jonction EZ. Donc, comme dans les *Éléments* (2), la droite EZ est le rayon de la sphère qui enveloppe l'octaèdre. Menons maintenant du centre Z la perpendiculaire ZH sur la droite AB (la droite AH est donc égale à la droite HB) (3), et menons la droite de jonction EH. Et puisque le triangle ABE est équilatéral, et que la droite AH est égale à la droite HB, la droite EH passe donc par le centre du [cercle] (4) décrit autour du triangle ABE (5). En consé-

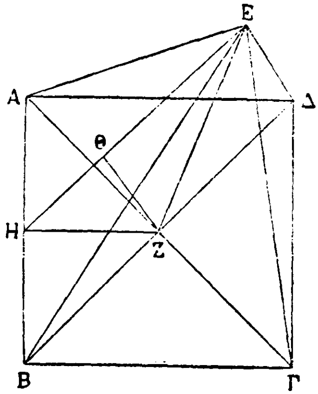
1. En notations usuelles on a (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 14) : $2\overline{B\Gamma}^2 = 4\overline{B\Delta}^2$ ou, comme le texte : $\overline{B\Gamma}^2 = 2\overline{B\Delta}^2$. Or, dans le triangle équilatéral ABΓ inscrit dans le cercle de rayon BE on a (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 12) : $\overline{B\Gamma}^2 = 3\overline{BE}^2$; donc : $2\overline{B\Delta}^2 = 3\overline{BE}^2$, d'où, comme le texte : $\overline{B\Delta}^2 = \frac{3}{2}\overline{BE}^2$. Or, le triangle rectangle BEΔ donne : $\overline{B\Delta}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{\Delta E}^2$; donc : $\frac{3}{2}\overline{BE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{\Delta E}^2$, d'où : $\overline{BE}^2 = 2\overline{\Delta E}^2$, d'où : $\overline{BE}^2 + \overline{\Delta E}^2 = 3\overline{\Delta E}^2$, ou : $\overline{B\Delta}^2 = 3\overline{\Delta E}^2$.

2. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 14, énoncée p. 317, n. 3.

3. Cette phrase, que le texte grec présente entre parenthèses, a probablement été interpolée.

4. Restauration indiquée d'abord dans la version latine de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 156, l. 10) et adoptée dans l'édition de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 416, l. 1).

5. EUCLIDE, liv. III, prop. 1, corollaire : « De là il est évident que si dans



quence, la perpendiculaire menée du point Z sur le plan du [cercle] (1) ABE tombe sur la droite EH (2). Qu'elle tombe telle que la droite ZΘ. Dès lors, puisque la droite AZ est égale à la droite ZB, et que l'angle compris sous les droites AZ, ZB est droit, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ZA, AH est la moitié de l'angle droit. Mais, l'angle compris sous les droites ZH, HA est droit aussi ; donc, l'angle restant, compris sous les droites AZ, ZH, est aussi la moitié de l'angle droit ; donc, la droite AH est égale à la droite ZH ; donc, le carré de la droite AZ est double du carré de la droite ZH. Or, la droite AZ est égale à la droite EZ ; donc, la somme des carrés des droites EZ, ZH est triple du carré de la droite ZH. Mais, la somme des carrés des droites EZ, ZH équivaut au carré de la droite EH, parce que la droite EZ est perpendiculaire au carré ABΓΔ (3) ; par conséquent, le carré de la droite EH est triple du carré de la droite ZH. De plus, la droite EZ est à la droite ZΘ comme la droite EH est à la droite HZ, parce que les triangles EZH, EZΘ sont équiangles ; par conséquent, le carré de la droite EZ, rayon de la sphère, est triple du carré de la perpendiculaire ZΘ menée sur le plan de l'octaèdre (4).

---

un cercle une droite en coupe une autre en deux parties égales, et à angles droits, le centre du cercle est dans la sécante. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 120.

1. Lacune que la version latine de Commandin comble par « trianguli » (du triangle) (cfr. *loc. cit.*, p. 156, l. 11) ; que la première édition du texte grec du livre V par Eisenmann comble par le mot τριγώνου (du triangle), et que Hultsch comble enfin par le mot κύκλου (du cercle) (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 416, l. 2) ; ce qui correspond mieux à la proposition de Théodose invoquée ici tacitement.

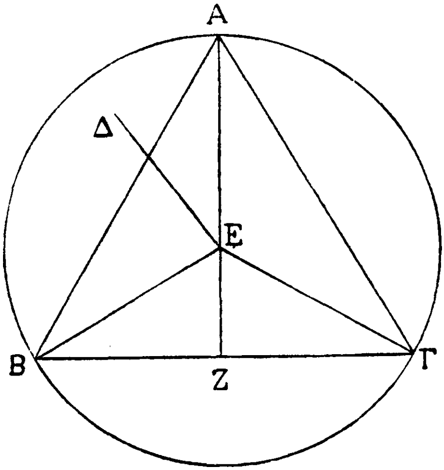
2. La perpendiculaire menée du point Z sur le plan du cercle ABE tombe au centre de ce cercle (THÉODORE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 1, énoncée p. 118, n. 2) ; donc, elle tombe sur la droite EH qui passe par ce centre.

3. C'est-à-dire au plan du carré ABΓΔ.

4. Les triangles rectangles considérés par le texte donnent : $AH = ZH$, d'où : $\overline{AZ}^2 = 2\overline{ZH}^2$. Or, les droites AZ, EZ, rayons de la sphère circonscrite à l'octaèdre, sont égales, donc : $\overline{EZ}^2 = 2\overline{ZH}^2$, d'où, comme le texte : $\overline{EZ}^2 + \overline{ZH}^2 = 3\overline{ZH}^2$. Or, le point E est le pôle de l'hémisphère circonscrit au demi-octaèdre, et le point Z est le centre du cercle de base de l'hémisphère, circonscrit au carré ABΓΔ; d'où le triangle EZH est rectangle en Z, d'où, comme le texte : $\overline{EZ}^2 + \overline{ZH}^2 = \overline{HE}^2$;

XLVII.

Proposition 40 (lemme 4). — Soit ΑΒΓ un triangle équilatéral inscrit dans une sphère, et soit Δ le centre de la sphère. Menons, de ce centre, la perpendiculaire ΔΕ sur le plan du triangle (le point Ε est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ΑΒΓ, comme cela se trouve dans les *Sphériques*) (1), et prolongeons la droite de jonction ΑΕ ; je dis que la droite ΑΕ est double de la droite ΕΖ.



En effet, menons les droites de jonction ΒΕ, ΕΓ ; elles sont donc égales entre elles. Et puisque les angles compris sous les droites ΒΑ, ΑΕ et sous les droites ΕΒ, ΒΖ sont l'un et l'autre le tiers de l'angle droit, et que les angles compris sous les droites ΒΕ, ΕΖ et sous les droites ΑΒ, ΒΓ sont l'un et l'autre les deux tiers de l'angle droit, le triangle ΑΒΖ est équiangle au triangle ΒΕΖ. En conséquence, la droite ΒΕ, c'est-à-dire la droite ΑΕ, est à la droite ΕΖ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΖ. Or, la droite ΑΒ est double de la droite ΒΖ ; donc, la droite ΑΕ est aussi double de la droite ΕΖ (2).

---

donc : $\overline{HE}^2 = 3\overline{ZH}^2$. Or, les triangles semblables ΕΖΗ, ΕΖΘ donnent : $\frac{EZ}{Z\Theta} = \frac{HE}{ZH}$, d'où : $\frac{\overline{EZ}^2}{\overline{Z\Theta}^2} = \frac{\overline{HE}^2}{\overline{ZH}^2}$, d'où, en présence de l'égalité précédente : $\overline{EZ}^2 = 3\overline{Z\Theta}^2$.

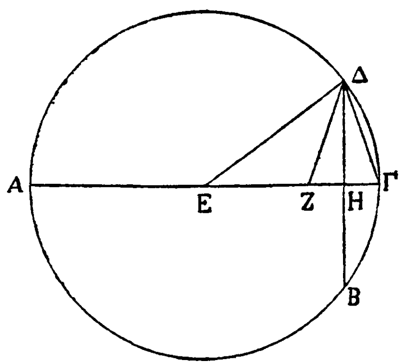
1. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 1, corollaire, énoncé p. 317, n. 2.

2. En notations usuelles : $\widehat{BAE} = \widehat{EBZ} = \frac{1}{3}$ angle droit ; donc : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{BEZ} = \frac{2}{3}$ angle droit, d'où similitude des triangles ΑΒΖ, ΒΕΖ, d'où : $\frac{BE = AE}{EZ} = \frac{AB}{BZ}$. Or, $AB = 2BZ$; donc : $AE = 2EZ$.

XLVIII.

Proposition 41 (lemme 5). — Soient le cercle ΑΒΓΔ décrit autour du centre Ε et le diamètre ΑΓ ; que la droite ΔΗΒ, à angles droits sur la droite ΑΓ, soit celle du pentagone [1], et posons la droite ΖΗ égale à la droite ΓΗ ; je dis que la droite ΕΓ est découpée en extrême et moyenne raison au point Ζ, et que le grand segment est la droite ΕΖ.

En effet, menons les droites de jonction ΕΔ, ΖΔ, ΓΔ. Dès lors, puisque ΓΔ est l'arc du décagone (car ΔΓΒ est l'arc du pentagone), l'angle compris sous les droites ΔΕ, ΕΓ est les deux cinquièmes de l'angle droit ; en sorte que les angles compris sous les droites ΕΓ, ΓΔ et sous les droites ΕΔ, ΔΓ sont l'un et l'autre les quatre cinquièmes de l'angle droit. Mais, puisque la droite ΖΗ est égale à la droite ΗΓ ; que la droite ΔΗ est commune [3] et à angles droits sur la droite ΖΓ, il s'ensuit que la droite ΔΖ est aussi égale à la droite ΔΓ ; en sorte que l'angle compris sous les droites ΔΖ, ΖΓ, égal à l'angle compris sous les droites ΔΓ, ΓΖ, est aussi les quatre cinquièmes de l'angle droit. Or, l'angle compris sous les droites ΖΕ, ΕΔ est deux cinquièmes de l'angle droit ; donc, l'angle restant compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ est deux cinquièmes de l'angle droit.



En conséquence, l'angle compris sous les droites ΔΕ, ΕΖ est égal à l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ ; en sorte que le côté ΕΖ est égal au côté ΖΔ, c'est-à-dire à la droite ΔΓ [4]. Dès lors, puisque l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΓ est égal à l'angle compris sous les droites ΕΓ, ΓΔ, c'est-à-dire à l'angle compris sous

1. C'est-à-dire : que la droite ΔΗΒ soit un côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle.
2. Euclide, liv. VI, déf. 3, énoncée p. 114, n. 5.
3. C'est-à-dire commune aux deux triangles rectangles ΖΔΗ, ΓΔΗ.
4. L'égalité des droites ΕΖ, ΖΔ, ΔΓ est démontrée ici comme dans la proposition 15 du livre *Des Lemmes* d'Archimède. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 540.

les droites ΔZ, ZΓ, et que l'angle compris sous les droites ΔΓ, ΓZ est commun, il s'ensuit que l'angle restant, compris sous les droites ΔE, EΓ, est égal à l'angle restant compris sous les droites ZΔ, ΔΓ ; donc, le triangle ΔEΓ est équiangle au triangle ΔZΓ. En conséquence, la droite ΓΔ est à la droite ΓZ comme la droite EΓ est à la droite ΓΔ ; donc, le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓZ équivaut au carré de la droite ΓΔ. Or, la droite ΓΔ est égale à la droite EZ ; donc, le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓZ équivaut au carré de la droite EZ. En conséquence, la droite EΓ est découpée en extrême et moyenne raison au point Z; et le grand segment est la droite EZ (1).

IL.

Proposition 42 (lemme 6). — Lorsqu'une ligne droite est découpée en extrême et moyenne raison, le rapport du carré de la droite entière au quintuple du carré du petit segment est plus grand que celui de 4 à 3.

En effet, que la droite AB soit découpée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que la droite ΓB soit son petit segment, je dis que le rapport du carré de la droite AB au quintuple du carré de la droite ΓB est plus grand que celui de 4 à 3.

---

1. L'angle ΔEZ, qui mesure l'arc du décagone, $= \frac{2}{5}$ d'angle droit, d'où : $\widehat{E\Gamma\Delta} + \widehat{E\Delta\Gamma} = 2$ angles droits $- \frac{2}{5}$ d'angle droit $= \frac{8}{5}$ d'angle droit, d'où : $\widehat{E\Gamma\Delta} = \widehat{E\Delta\Gamma} = \frac{4}{5}$ d'angle droit. Or, on a posé : $ZH = H\Gamma$; donc : $\Delta Z = \Delta\Gamma$; donc : $\widehat{\Delta Z\Gamma} = \widehat{E\Gamma\Delta} = \frac{4}{5}$ d'angle droit, d'où : $\widehat{\Delta Z\Gamma} - \widehat{\Delta EZ} = \widehat{E\Delta Z} = \frac{2}{5}$ d'angle droit ; donc : $\widehat{E\Delta Z} = \widehat{\Delta EZ}$, d'où : $EZ = Z\Delta = \Delta\Gamma$ (I). Dès lors, considérant les deux triangles isocèles EΔΓ, ΔΓZ ayant l'angle ΔΓZ commun, il reste : $\widehat{\Delta E\Gamma} = \widehat{Z\Delta\Gamma}$, d'où similitude des triangles EΔΓ, ΔΓZ, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma Z} = \frac{E\Gamma}{\Gamma\Delta}$, d'où, comme le texte : $E\Gamma \times \Gamma Z = \overline{\Gamma\Delta}^2$, d'où, en présence de l'égalité (I), il vient : $E\Gamma \times \Gamma Z = \overline{EZ}^2$, d'où : $\frac{E\Gamma}{EZ} = \frac{EZ}{\Gamma Z}$, c'est-à-dire que EΓ est divisé en extrême et moyenne raison en Z. Une note de Commandin relative à cette proposition (cfr. *loc. cit.*, p. 158) fait remarquer qu'il en résulte que, si le côté de l'hexagone inscrit est divisé en extrême et moyenne raison, le grand segment est le côté du décagone inscrit.

Posons la droite ΓΔ égale à la droite ΓB. Dès lors, puisque la droite AB est découpée en extrême et moyenne raison, le carré de la droite AB, conjointement avec le carré de la droite ΓB, devient, conformément au théorème 4 du livre XIII des *Éléments* (1), équivalent à trois carrés de la droite AΓ, c'est-à-dire à trois rectangles compris sous les droites AB, BΓ. Mais, trois rectangles compris sous les droites AB, BΓ valent trois rectangles compris sous les droites AΓ, ΓB conjointement avec trois carrés de la droite ΓB (parce que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ pris une seule fois équivaut au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB conjointement avec le carré de la droite ΓB, en vertu du théorème 3 du livre II des *Éléments*) (2) ; donc, les carrés des droites AB, BΓ valent trois rectangles compris sous les droites AΓ, ΓB conjointement avec trois carrés de la droite ΓB. Si on retranche de part et d'autre le carré de la droite BΓ, le carré restant de la droite AB équivaut donc à trois rectangles compris sous les droites AΓ, ΓB conjointement avec deux carrés de la droite BΓ, c'est-à-dire à trois rectangles compris sous les droites AΓ, ΓΔ conjointement avec deux carrés de la droite ΓΔ. Mais, trois rectangles compris sous les droites AΓ, ΓΔ valent trois rectangles compris sous les droites AΔ, ΔΓ conjointement avec trois carrés de la droite ΓΔ (parce que le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ conjointement avec le carré de la droite ΔΓ, en vertu du même théorème 3 du livre II des *Éléments*) ; donc, le carré de la droite AB vaut trois rectangles compris sous les droites AΔ, ΔΓ conjointement avec le quintuple du carré de la droite ΓΔ, c'est-à-dire avec le quintuple du carré de la droite ΓB (3). Posons

1. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 4 : « Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, le carré de la droite entière, conjointement avec le carré du plus petit segment, est triple du carré du plus grand segment ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 220.

2. EUCLIDE, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 1.

3. Si l'on suit le texte en notations usuelles, on a par construction d'extrême et moyenne raison : $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où : $AB \times B\Gamma = \overline{A\Gamma}^2$. Or, la droite AB ainsi divisée donne aussi (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 4) : $\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2=3\overline{A\Gamma}^2$; donc : $\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2=3AB \times B\Gamma$. Or, considérant la droite AB divisée au point Γ on a

donc la droite ΔE égale à la droite AΔ. Il est clair d'ailleurs que la droite AΔ est plus petite que la droite ΓΔ [1], parce que la droite ΓA est aussi découpée en extrême et moyenne raison, et que son grand segment est la droite ΔΓ.

En effet, d'une manière générale, si une ligne droite, telle que AB, est découpée en extrême et moyenne raison, ayant comme petit segment la droite ΓB, si l'on pose la droite ΓΔ égale à la droite ΓB, la droite AΓ est aussi découpée en extrême et moyenne raison, et son grand segment est la droite ΔΓ [2]. De la même manière, la droite ΔΓ est aussi découpée en extrême et moyenne raison au point E, et son grand segment est la droite ΔE [3] [et, en effet, la droite ΓΔ étant posée égale à la droite ΓB, la droite entière est découpée en extrême et moyenne raison au point Γ ; donc, la droite EΓ est plus petite que chacune des droites AΔ, ΔE, parce que la droite ΓΔ est à la droite ΔA, c'est-à-dire à la droite ΔE, comme la droite AΓ est à la droite ΓΔ, et, par division, la droite EΓ est à la droite ΔE comme la droite AΔ est à la droite ΓΔ. Or, la droite AΔ est plus petite que la droite ΔΓ ; donc, la droite EΓ est aussi plus petite que la droite ΔE] [4] ; par conséquent, le quadruple du rectangle compris sous les droites ΔE, EΓ est plus grand que le rectangle

(Euclide, liv. II, prop. 3, c'est-à-dire l'identité : $(a+b)\,b = ab + b^2$) : $AB \times B\Gamma = A\Gamma \times B\Gamma + \overline{B\Gamma}^2$; donc : $\overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 = 3\,(A\Gamma \times B\Gamma + \overline{B\Gamma}^2)$ ou, comme le texte : $\overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 = 3A\Gamma \times B\Gamma + 3\overline{B\Gamma}^2$, d'où : $\overline{AB}^2 = 3A\Gamma \times B\Gamma + 2\overline{B\Gamma}^2$. Mais, on a posé : $\Gamma\Delta = B\Gamma$; donc : $\overline{AB}^2 = 3A\Gamma \times \Gamma\Delta + 2\overline{\Gamma\Delta}^2$. Or, considérant la droite AΓ divisée au point Δ, on a comme plus haut (Euclide, liv. II, prop. 3) : $A\Gamma \times \Gamma\Delta = A\Delta \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma\Delta}^2$, d'où, comme le texte : $3A\Gamma \times \Gamma\Delta = 3A\Delta \times \Gamma\Delta + 3\overline{\Gamma\Delta}^2$; donc : $\overline{AB}^2 = 3A\Delta \times \Gamma\Delta + 5\overline{\Gamma\Delta}^2$. Or, $\Gamma\Delta = B\Gamma$; donc : $\overline{AB}^2 = 3A\Delta \times \Gamma\Delta + 5\overline{B\Gamma}^2$.

1. C'est-à-dire que $\Delta E = A\Delta < \Gamma\Delta$.

2. On a par construction : $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{AB - A\Gamma}{A\Gamma - B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où, considérant que l'on a posé : $\Gamma\Delta = B\Gamma$, il vient : $\frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$, c'est-à-dire que la droite AΓ est divisée en extrême et moyenne raison en Δ, et que le grand segment est ΓΔ.

3. L'expression de la note précédente donne de même : $\frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} = \frac{A\Gamma - \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta - A\Delta}$, d'où, considérant que l'on a posé : $\Delta E = A\Delta$, il vient : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$, c'est-à-dire que ΔΓ est divisé en extrême et moyenne raison en E, et que le grand segment est ΔE.

4. Le passage mis entre crochets doit être attribué à un commentateur (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 422, ll. 1-7).

compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ. Ajoutons de part et d'autre quatre fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ ; il s'ensuit que quatre fois le rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΕΓ, conjointement avec quatre fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ, c'est-à-dire avec quatre fois le carré de la droite ΔΕ, est plus grand que cinq fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ. Mais, quatre fois le rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΕΓ, conjointement avec quatre fois le carré de la droite ΔΕ, équivaut à quatre fois le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ; [donc, quatre fois le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ] (1) est plus grand que cinq fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ. Ajoutons de part et d'autre cinq fois le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ ; il s'ensuit que neuf fois le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ est plus grand que cinq fois le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ conjointement avec cinq fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ, c'est-à-dire plus grand que cinq fois le carré de la droite ΔΓ. En conséquence, le rapport de trois fois le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ à cinq fois le carré de la droite ΔΓ est plus grand que son rapport à neuf fois le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ. Or, le rapport de trois fois le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ à neuf fois le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ est celui de 1 à 3 ; donc, le rapport de trois fois le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ à cinq fois le carré de la droite ΔΓ est plus grand que celui de 1 à 3. En conséquence, par composition, le rapport de trois fois le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ conjointement avec cinq fois le carré de la droite ΔΓ, c'est-à-dire avec cinq fois le carré de la droite ΓΒ [à cinq fois le carré de la droite ΓΒ] (2) est plus grand que celui de 4 à 3. Or, on a démontré que trois fois le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ, conjointement avec cinq fois le carré de la droite ΓΒ, équivaut au carré de la droite ΑΒ ; donc, le rapport du carré de la droite ΑΒ à cinq fois le carré de la droite ΓΒ est plus grand que le rapport de 4 à 3 (3).

1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 160, l. 12).
2. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 160, l. 22).
3. On a : $\Delta E > E\Gamma$, d'où : $\Delta E \times E\Gamma > \overline{E\Gamma}^2$. Or, considérant ΔΓ divisé en Ε (Euclide, liv. II, prop. 4, c'est-à-dire l'identité : $ab + b^2 = (a + b)\ b$), on a :

Il résulte donc manifestement de là, que le carré de la droite AB est aussi plus grand que cinq fois le carré de la droite ΒΓ (1).

L.

Proposition 43 (lemme 7). — Le dodécuple du carré de la perpendiculaire menée, du centre de la sphère qui enveloppe l'icosaèdre, sur un plan de l'icosaèdre est plus grand que le quintuple du carré du côté de l'icosaèdre.

Exposons le cercle ΑΒΓ qui admet, comme dans les *Éléments* (2) le pentagone de l'icosaèdre (3), et soient ΑΓ le diamètre de ce cercle et E le centre. D'autre part, soit ΔΚΒ le côté du pentagone équilatéral, perpendiculaire sur le diamètre [côté qui est d'ailleurs, comme dans les *Éléments*, celui de l'icosaèdre] (4) ; élevons, aux points E, Γ, les droites ΖΕΗ, ΓΛ perpendiculaires au plan du cercle ; que les droites ΕΘ, ΓΛ soient l'une et l'autre celles de

---

$\Delta E \times E\Gamma + \overline{E\Gamma}^2 = \Delta\Gamma \times E\Gamma$; donc : $\Delta E \times E\Gamma + \Delta E \times E\Gamma + \overline{E\Gamma}^2 > \Delta\Gamma \times E\Gamma + \overline{E\Gamma}^2$ ou : $2\Delta E \times E\Gamma > \Delta\Gamma \times E\Gamma$, d'où, à fortiori, comme le texte : $4\Delta E \times E\Gamma > \Delta\Gamma \times E\Gamma$, d'où : $4\Delta E \times E\Gamma + 4\Delta\Gamma \times E\Gamma > \Delta\Gamma \times E\Gamma + 4\Delta\Gamma \times E\Gamma$. Or, on a démontré plus haut que l'on a : $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$, d'où : $\Delta\Gamma \times E\Gamma = \overline{\Delta E}^2$; donc, comme le texte : $4\Delta E \times E\Gamma + 4\overline{\Delta E}^2 > 5\Delta\Gamma \times E\Gamma$. Or, considérant ΔΓ divisé en E, l'identité $ab + a^2 = (a+b)a$ donne : $\Delta E \times E\Gamma + \overline{\Delta E}^2 = \Delta\Gamma \times \Delta E$; donc, comme le texte : $4\Delta\Gamma \times \Delta E > 5\Delta\Gamma \times E\Gamma$, doù : $5\Delta\Gamma \times \Delta E + 4\Delta\Gamma \times \Delta E > 5\Delta\Gamma \times \Delta E + 5\Delta\Gamma + E\Gamma$, ou : $9\Delta\Gamma \times \Delta E > 5\Delta\Gamma(\Delta E + E\Gamma) = 5\overline{\Delta\Gamma}^2$. Or, par construction : $\Delta E = A\Delta$; donc : $9\Delta\Gamma \times A\Delta > 5\overline{\Delta\Gamma}^2$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 8 énoncée p. 36, n. 6) l'on a : $\frac{3\Delta\Gamma \times A\Delta}{5\overline{\Delta\Gamma}^2} > \frac{3\Delta\Gamma \times A\Delta}{9\Delta\Gamma \times A\Delta} = \frac{1}{3}$, d'où : $\frac{3\Delta\Gamma \times A\Delta + 5\overline{\Delta\Gamma}^2}{5\overline{\Delta\Gamma}^2} > \frac{1+3}{3}$. Or, par construction : $\Delta\Gamma = \Gamma B$; donc, comme le texte : $\frac{3\Delta\Gamma \times A\Delta + 5\overline{\Gamma B}^2}{5\overline{\Gamma B}^2} > \frac{4}{3}$. Or, on a démontré (voir, page 323, n. 3) que l'on a : $3\Delta\Gamma \times A\Delta + 5\overline{\Gamma B}^2 = \overline{AB}^2$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{AB}^2}{5\overline{\Gamma B}^2} > \frac{4}{3}$.

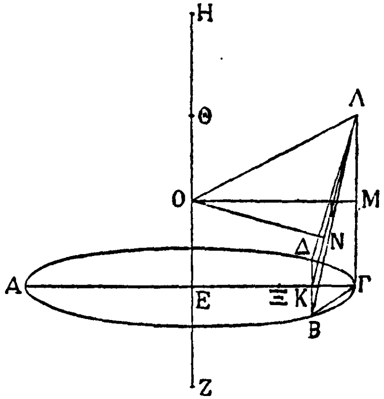
1. La dernière inégalité de la note précédente entraîne : $\overline{AB}^2 > 5\overline{\Gamma B}^2$.

2. Euclide, liv. XIII, prop. 16 : « Construire un icosaèdre, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit les figures précédentes, et démontrer que le côté de l'icosaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle mineure ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 270.

3. C'est-à-dire : soit ΑΒΓ le petit cercle de la sphère circonscrit à la base de la pyramide pentagonale de l'icosaèdre inscrit dans cette sphère.

4. La phrase mise entre crochets doit avoir été interpolée (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 424, l. 2).

l'hexagone (1) ; les droites ΕΖ, ΗΘ, l'une et l'autre celles du décagone (2), et coupons la droite ΕΘ en deux parties égales au point Ο. Le point Ο est donc le centre de la sphère (3), conformément au théorème 16 du livre XIII des *Éléments* (4). Menons les droites de jonction ΛΔ, ΛΒ, ΛΚ, ΒΓ. Dès lors, puisque la droite ΓΛ appartient à l'hexagone, la droite ΒΓ au décagone, et que l'angle compris sous les droites ΒΓ, ΓΛ est droit, il s'ensuit que la droite ΒΛ appartient au pentagone en vertu du théorème 10 du livre XIII (5), et que la droite ΛΔ lui appartient pareillement. Or, la droite ΒΔ lui appartient aussi ; donc ΒΛΔ est un des triangles équilatéraux qui entourent l'icosaèdre (6). Et puisque la droite ΛΚ est [à angles droits] (7) sur la droite ΒΔ (8), le plan passant par les droites ΑΓ, ΚΛ étant celui qui passe par les parallèles ΕΗ, ΓΛ, est donc perpendiculaire à la droite ΒΔ (9), [et la droite ΒΔ est donc perpendiculaire à ce plan, car cela a été démontré dans les propo-



1. C'est-à-dire posons les droites ΕΘ, ΓΛ toutes deux égales au côté de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle ΑΒΓ.

2. C'est-à-dire posons les droites ΕΖ, ΗΘ toutes deux égales au côté du décagone régulier inscrit dans le cercle ΑΒΓ.

3. C'est-à-dire le centre de la sphère circonscrite à l'icosaèdre dont ΔΒ est une arête.

4. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 16, corollaire : « D'après cela, il est évident que le carré du diamètre de la sphère est quintuple du carré du rayon du cercle d'après lequel l'icosaèdre a été construit, et que le diamètre de la sphère est composé du côté de l'hexagone et du double du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 279.

5. On a par construction : ΑΓ = côté de l'hexagone et ΓΒ = côté du décagone. Or, le triangle ΑΓΒ est rectangle en Γ ; donc : $\overline{\mathrm{ΑΓ}}^2 + \overline{\mathrm{ΓΒ}}^2 = \overline{\mathrm{ΑΒ}}^2$, c'est-à-dire que (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 10, énoncée p. 115, n. 1) la droite ΛΒ est le côté du pentagone inscrit dans le cercle ΑΒΓ.

6. On a par hypothèse : ΒΔ = côté du pentagone ; donc : ΒΔ = ΛΒ = ΛΔ ; donc, le triangle ΒΛΔ est équilatéral, et, comme le point Λ est sur la sphère, ce triangle constitue une face de l'icosaèdre.

7. Restauration d'Eisenmann, adoptée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 424, l. 13).

8. On a par hypothèse : ΔΚ = ΚΒ ; donc : $\widehat{\mathrm{ΔΚΛ}} = \widehat{\mathrm{ΒΚΛ}}$.

9. EUCLIDE, liv. XI, prop. 4, énoncée p. 103, n. 7.

sitions des *Éléments* relatives aux solides] ([1]). En conséquence, tous les plans qui passent par la droite BΔ, et dont l'un est le triangle BΔΛ, sont perpendiculaires au plan qui passe par les parallèles EH, ΓΛ ([2]), et dans lequel se trouve aussi le triangle ΓΚΛ ; en sorte que le triangle BΔΛ est aussi perpendiculaire au triangle ΓΚΛ. Menons la perpendiculaire ON sur la droite ΚΛ. Dès lors, on a deux plans ΓΚΛ et BΔΛ, perpendiculaires entre eux, et la droite ON est perpendiculaire à leur section commune ΚΛ dans l'un de ces plans ([3]) ; donc, la droite ON est perpendiculaire au triangle BΔΛ ([4]). Et la droite ΛΒ est double de la droite BK ([5]) ; en sorte que la droite ΛΝ est double de la droite NK en vertu du quatrième lemme ([6]). Coupons la droite ΓΛ en deux parties égales au point M, et menons la droite de jonction OM ([7]) ; il s'ensuit que la droite OM sera parallèle à la droite EΓ (car la droite EO est égale à la droite ΓΜ, parce que les droites ΓΛ, EΘ, qui sont leurs doubles, sont égales et parallèles), et la droite ΛΙ est égale à la droite ΙΚ (car la droite ΙΜ du triangle ΓΚΛ est menée parallèlement à la droite ΓΚ, et la droite ΓΜ est égale à la droite ΜΛ). Or, la droite ΛΝ est double de la droite NK ; donc, la droite ΚΛ est comme 6, la droite ΛΝ comme 4, la droite KN comme 2, chacune des droites ΛΙ, ΙΚ comme 3, et la droite ΙΝ comme 1 ; donc, la droite ΛΙ est triple de la droite ΙΝ ([8]). En conséquence, je dis que douze carrés de

1. La phrase mise entre crochets est une interpolation de commentateur qui renvoie à la proposition d'Euclide rappelée dans la note précédente (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 424, l. 15).
2. Euclide, liv. XI, prop. 18, énoncée p. 105, n. 1.
3. Dans le plan ΓΚΛ.
4. Euclide, liv. XI, déf. 3 : « Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 1.
5. Car on a démontré que la droite ΛΒ est égale au côté BΔ du pentagone inscrit dans le cercle ΑΒΓ.
6. La droite ON est menée du centre O de la sphère, perpendiculairement au plan du triangle équilatéral ΔΛΒ ; donc (prop. 40, que le texte désigne comme étant le lemme 4, voir p. 320), le point N divise la droite ΛΚ de manière que ΛΝ = 2NK.
7. Sous-entendu : qui coupe la droite ΚΛ au point I.
8. On a : ΛΙ = ΙΚ, et on a démontré que l'on a : ΛΝ = 2NK ; donc, ΛΚ = 3NK ; puis : ΛΙ = ΙΚ $= \frac{1}{2}$ ΛΚ $= \frac{3}{2}$ NK ; puis : ΙΝ = (ΙΚ — NK) $= \frac{1}{2}$ NK, d'où : $\frac{\Lambda K}{6} = \frac{\Lambda N}{4} = \frac{\Lambda I}{3} = \frac{KN}{2} = \frac{IN}{1}$, d'où, comme le texte : ΛΙ = 3ΙΝ.

la droite ON sont plus grands que cinq carrés de la droite BΔ.

Posons la droite KΞ égale à la droite KΓ. Dès lors, en vertu du cinquième théorème exposé plus haut, la droite EΓ est découpée en extrême et moyenne raison au point Ξ, et la droite EΞ est son grand segment (1) ; tandis que, en vertu du sixième théorème, le carré de la droite EΓ est plus grand que le quintuple du carré du petit segment ΞΓ ; donc, le carré de la droite EΓ est plus grand que le quintuple du carré de la droite ΞΓ et plus grand que le vingtuple du carré de la droite KΓ (2). Et le carré de la droite ΓΛ est au carré de la droite ΓK, c'est-à-dire que le carré de la droite ON est au carré de la droite NI, comme le carré de la droite EΓ est au carré de la droite KΓ (car les triangles ONI, ΛIM, ΛKΓ sont équiangles) ; par conséquent, le carré de la droite ON est plus grand que vingt carrés de la droite NI, et 36 carrés de la droite ON sont donc plus grands que 720 carrés de la droite NI. Or, 720 carrés de la droite NI valent 80 carrés de la droite ΛI (car on a démontré que la droite ΛI est triple de la droite IN) ; tandis que 80 carrés de la droite IΛ valent 20 carrés de la droite ΛK (car la droite ΛK est double de la droite ΛI), et que 20 carrés de la droite KΛ valent 15 carrés de la droite BΔ (car le triangle ΔBΛ est isocèle, la droite ΛK est perpendiculaire, et le carré de la droite BΔ est l'épitrite (3) du carré de la droite KΛ) ; en sorte que 36 carrés de la droite ON sont plus grands que 15 carrés de la droite BΔ ; donc, 12 carrés de la droite ON sont plus grands que 5 carrés de la droite BΔ ; ce qu'il fallait démontrer (4).

1. La droite EΓ est menée du centre E du cercle, perpendiculairement au côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle ; donc, si l'on pose : $K\Xi = K\Gamma$, la proposition 41, que le texte désigne comme étant le lemme 5, a démontré que la droite EΓ est divisée en extrême et moyenne raison, et que EΞ est le grand segment.

2. La droite EΓ étant donc divisée en extrême et moyenne raison, la proposition 42, que le texte désigne comme étant le lemme 6, a démontré que l'on a : $\overline{E\Gamma}^2 > 5\overline{\Xi\Gamma}^2$. Or, $\Xi\Gamma = 2K\Gamma$; donc, comme le texte : $\overline{E\Gamma}^2 > 20\,\overline{K\Gamma}^2$.

3. ἐπίτριτος, c'est-à-dire $1 + \frac{1}{3}$.

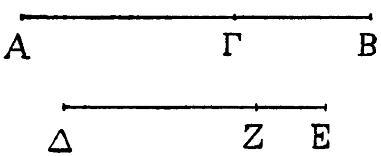
4. Les triangles rectangles ΛΓK, ONI, respectivement semblables au triangle rectangle ΛMI, sont semblables entre eux ; donc : $\frac{\overline{ON}^2}{\overline{NI}^2} = \frac{\overline{\Gamma\Lambda}^2}{\overline{\Gamma K}^2}$. Or, on a par construction : $E\Gamma = \Gamma\Lambda$; donc : $\frac{\overline{ON}^2}{\overline{NI}^2} = \frac{\overline{E\Gamma}^2}{\overline{\Gamma K}^2}$. Or, la dernière inégalité de la

LI.

PROPOSITION 44 (lemme 8). — Si deux droites sont découpées en extrême et moyenne raison, elles sont dans la proportion indiquée ci-après [1] :

Découpons la droite AB en extrême et moyenne raison au point Γ, et que son grand segment soit la droite AΓ ; découpons pareillement la droite ΔE au point Z, et que son grand segment soit la droite ΔZ ; je dis que la droite entière ΔE est au grand segment ΔZ comme la droite entière AB est au grand segment AΓ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au carré de la droite AB, et que le rectangle compris sous les droites ΔE, EZ équivaut au carré de la droite ΔZ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΔE, EZ est au carré de la droite ΔZ comme le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au carré de la droite AΓ. En conséquence, quatre fois le rectangle compris sous les droites ΔE, EZ est au carré de la droite ΔZ comme quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au carré de la droite AΓ, et, par composition, quatre fois le rectangle compris sous les droites ΔE, EZ, conjointement avec le carré de la droite ΔZ, est au carré de la droite ΔZ comme quatre



note 2 ci-dessus donne : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{\overline{\Gamma K}^2} > 20$; donc, comme le texte : $\overline{ON}^2 > 20\,\overline{NI}^2$ ou : $36\,\overline{ON}^2 > 720\,\overline{NI}^2$. Or, $NI = \frac{1}{3}\Lambda I$; donc $720\,\overline{NI}^2 = \frac{720}{9}\overline{\Lambda I}^2 = 80\,\overline{\Lambda I}^2$; tandis que $\Lambda I = \frac{1}{2}\Lambda K$, d'où : $80\,\overline{\Lambda I}^2 = \frac{80}{4}\overline{\Lambda K}^2 = 20\,\overline{\Lambda K}^2$; donc : $36\,\overline{ON}^2 > 20\overline{\Lambda K}^2$. Or, considérant que le triangle ΔBΛ est équiangle, et que la droite ΛK est perpendiculaire sur la base BΔ, la proposition 38, ou lemme 1 (voir p. 316) a démontré que l'on a : $\overline{B\Delta}^2 = \frac{4}{3}\overline{\Lambda K}^2$, d'où : $20\,\overline{\Lambda K}^2 = 15\,\overline{B\Delta}^2$; donc, comme le texte : $36\,\overline{ON}^2 > 15\,\overline{B\Delta}^2$, d'où : $12\,\overline{ON}^2 > 5\,\overline{B\Delta}^2$.

1. Cette proposition reproduit presque textuellement la proposition 7 du livre XIV d'Euclide, attribué à Hypsiclès, laquelle est énoncée : « Ensuite, si deux droites sont coupées en extrême et moyenne raison, nous démontrerons ainsi qu'elles sont dans la proportion suivante ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 504.

fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ, conjointement avec le carré de la droite AΓ, est au carré de la droite AΓ. Mais quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ, conjointement avec le carré de la droite AΓ, constitue le carré de la somme des droites AB, BΓ en vertu du théorème 8 du livre II des *Éléments* ; tandis que quatre fois le rectangle compris sous les droites ΔE, EZ, conjointement avec le carré de la droite ΔZ, constitue le carré de la somme des droites ΔE, EZ (1) ; donc, le carré de la somme des droites ΔE, EZ est au carré de la droite ΔZ comme le carré de la somme des droites AB, BΓ est au carré de la droite AΓ. En conséquence, la somme simple des droites ΔE, EZ est à la droite ΔZ comme la somme des droites AB, BΓ est à la droite AΓ, et, par composition, la somme des droites ΔE, EZ conjointement avec la droite ΔZ, c'est-à-dire deux droites ΔE, est à la droite ΔZ comme la somme des droites AB, BΓ conjointement avec la droite AΓ, c'est-à-dire deux droites AB, est à la droite AΓ. Enfin, considérant les moitiés des antécédents, la droite ΔE est à la droite ΔZ comme la droite AB est à la droite AΓ (2).

Il est clair, d'après cela, que si l'on a deux droites égales, telles que AB, ΔE, et si chacune d'elles est découpée en extrême et moyenne raison aux points Γ, Z, leurs grands segments sont égaux et leurs petits segments sont pareillement égaux ; car, comme on l'a démontré, la droite ΔE est à la droite ZΔ comme la droite AB est à la droite AΓ, et permutons (3).

---

1. Euclide, liv. II, prop. 8 : « Si une droite est coupée d'une manière quelconque, quatre fois le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments avec le carré du segment restant, est égal au carré décrit avec la droite entière et le dit segment, comme avec une seule droite ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 99.

2. On a par construction : $AB \times B\Gamma = \overline{A\Gamma}^2$ et $\Delta E \times EZ = \overline{\Delta Z}^2$; donc : $\frac{4\Delta E \times EZ}{\overline{\Delta Z}^2} = \frac{4AB \times B\Gamma}{\overline{A\Gamma}^2}$, d'où : $\frac{4\Delta E \times EZ + \overline{\Delta Z}^2}{\overline{\Delta Z}^2} = \frac{4AB \times B\Gamma + \overline{A\Gamma}^2}{\overline{A\Gamma}^2}$. Or (Euclide, liv. II, prop. 8, c'est-à-dire l'identité : $4(a+b)b + a^2 = [(a+b)+b]^2$), on a : $4\Delta E \times EZ + \Delta Z^2 = (\Delta E + EZ)^2$ et $4AB \times B\Gamma + \overline{A\Gamma}^2 = (AB + B\Gamma)^2$; donc : $\frac{(\Delta E + EZ)^2}{\Delta Z^2} = \frac{(AB + B\Gamma)^2}{\overline{A\Gamma}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Delta E + EZ}{\Delta Z} = \frac{AB + B\Gamma}{A\Gamma}$, d'où : $\frac{\Delta E + EZ + \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{A\Gamma}$ ou : $\frac{2\Delta E}{\Delta Z} = \frac{2AB}{A\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

3. La relation de la note précédente donne : $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{AB}{\Delta E}$; donc, si $AB = \Delta E$,

LII.

PROPOSITION 45 (lemme 9). — Soit le demi-cercle ΑΒΓ dont le centre est le point Ε ; que la droite ΑΓ soit triple de la droite ΓΔ, la droite ΔΒ perpendiculaire sur la droite ΑΓ, et menons la droite de jonction ΒΓ. Le carré de la droite ΑΓ est donc triple du carré de la droite ΒΓ (car le carré de la droite ΑΓ est au carré de la droite ΓΒ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΔ, à cause de la similitude des triangles ΑΒΓ, ΒΔΓ) (1). D'autre part, découpons la droite ΒΓ en extrême et moyenne raison au point Θ ; que le grand segment soit la droite ΒΘ, et que le carré de la droite ΕΓ soit quintuple du carré de la droite ΕΖ (ce qui est possible, car la droite ΕΓ est triple de la droite ΕΔ) (2) ; je dis que le rapport du carré de la droite ΒΘ au carré de la droite ΓΖ est celui de 5 à 3.

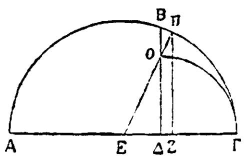
Posons la droite ΕΗ égale à la droite ΕΖ ; découpons la droite ΖΗ en extrême et moyenne raison au point Κ, et que son grand segment soit la droite ΖΚ. Et puisque le carré de la droite ΓΕ est quintuple du carré de son segment ΕΖ, et que le double de la droite ΕΖ (3) est découpé en extrême et moyenne raison au

---

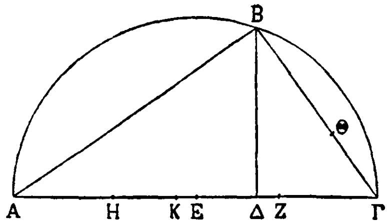
on a : $A\Gamma = \Delta Z$ et $\Gamma B = ZE$. Ce corollaire évident ne se trouve pas à la suite de la proposition d'Hypsiclès mentionnée dans la note 1 de la page 330. Hultsch n'a cependant pas attribué ce corollaire à un interpolateur (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 431, en note).

1. On a par construction : $A\Gamma = 3\Gamma\Delta$. Or, les triangles semblables ΑΒΓ, ΒΔΓ donnent : $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2} = \frac{B\Gamma \times A\Gamma}{\Gamma\Delta \times B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$; donc, comme le texte : $\overline{A\Gamma}^2 = 3\overline{B\Gamma}^2$.

2. La détermination de la droite ΕΖ telle que l'on ait : $\overline{E\Gamma}^2 = 5\overline{EZ}^2$ étant supposée connue, il y a lieu de s'en rapporter, soit à la proposition 16 du livre XIII d'Euclide (voir l'énoncé p. 326, n. 2) au cours de laquelle cette détermination intervient, soit à la proposition 48 qui va suivre, où cette détermination intervient également d'une manière que l'on peut appliquer ici comme suit : La relation $A\Gamma = 3\Gamma\Delta$ ou $2E\Gamma = 3(E\Gamma - E\Delta)$ donne : $E\Gamma = 3E\Delta$. Posons : $\Delta O = \Delta\Gamma = 2E\Delta$; menons la droite de jonction ΕΟ, coupant la circonférence en Π, et abaissons la perpendiculaire ΠΖ. Dès lors, la similitude des triangles ΕΔΟ, ΕΖΠ donne : $\frac{\Delta O}{\Delta E} = \frac{Z\Pi}{ZE}$; donc : $Z\Pi = 2ZE$, d'où : $\overline{Z\Pi}^2 = 4\overline{ZE}^2$. Or, $\overline{E\Pi}^2 = \overline{ZE}^2 + \overline{Z\Pi}^2$; donc : $\overline{E\Pi}^2 = \overline{ZE}^2 + 4\overline{ZE}^2 = 5\overline{ZE}^2$ ou $\overline{E\Gamma}^2 = 5\overline{EZ}^2$.



3. C'est-à-dire la droite ΖΗ.



point K, il s'ensuit que la droite KZ est égale à la droite ZΓ en vertu du théorème 2 du livre XIII des *Éléments* (1) ; en sorte que la droite ΓH est aussi découpée en extrême et moyenne raison au point Z, et que son grand segment est la droite ZH (2). Mais, d'après ce qui a été démontré précédemment, la droite ΓH est à la droite HZ, c'est-à-dire la droite ZH à la droite ZΓ, comme la droite ΓB est à la droite BΘ (3) et, par permutation, la droite BΘ est à la droite ΓZ comme la droite BΓ est à la droite ZH ; donc, puisque le carré de la droite AΓ est triple du carré de la droite BΓ et quintuple du carré de la droite HZ, le carré de la droite AΓ est donc comme 15, le carré de la droite BΓ comme 5, et le carré de la droite HZ comme 3. En conséquence, le rapport du carré de la droite BΓ au carré de la droite ZH est celui de 5 à 3 ; en sorte que le rapport du carré de la droite BΘ au carré de la droite ZΓ est aussi celui de 5 à 3 (4).

---

1. Euclide, liv. XIII, prop. 2 : « Si le carré d'une ligne droite est égal au quintuple du carré d'un de ses segments, et si le double de ce segment est coupé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est la partie restante de la droite premièrement exposée ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 215.

2. Euclide, liv. XIII, prop. 5 : « Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, et si on lui ajoute une droite égale au plus grand segment, la droite entière sera coupée en extrême et moyenne raison, et le plus grand segment sera la droite premièrement exposée ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 222.

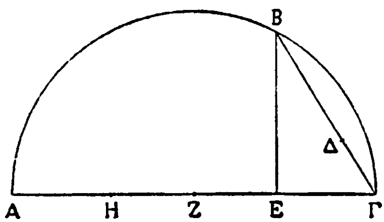
3. Voir proposition 44 (lemme 8), p. 330.

4. Explicitement : on a par construction : $\overline{E\Gamma}^2 = 5\overline{EZ}^2$ et $\frac{ZH = 2EZ}{KZ} = \frac{KZ}{HK}$, c'est-à-dire que la droite ZH est découpée en extrême et moyenne raison en K. Or, dans ces conditions (Euclide, liv. XIII, prop. 2), on a : $KZ = Z\Gamma$. Dès lors, considérant la droite ZH coupée en extrême et moyenne raison en K, à laquelle on ajoute la droite ZΓ égale au grand segment KZ, on a (Euclide, liv. XIII, prop. 5) : $\frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{HZ}{Z\Gamma}$, c'est-à-dire que la droite ΓH est découpée en extrême et moyenne raison au point Z. Dès lors, les droites ΓH, ZH, BΓ découpées en extrême et moyenne raison respectivement aux points Z, K, Θ donnent (voir prop. 44) : $\frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{HZ}{KZ = \Gamma Z} = \frac{\Gamma B}{B\Theta}$, d'où, par permutation, comme le texte : $\frac{B\Theta}{\Gamma Z} = \frac{\Gamma B}{HZ}$ (I). D'autre part, on a démontré (p. 332, n. 1) que l'on a : $\overline{A\Gamma}^2 = 3\overline{B\Gamma}^2$; et puisque $\Gamma E = \frac{1}{2} A\Gamma$ et $EZ = \frac{1}{2} HZ$, la relation de construction $\overline{\Gamma E}^2 = 5\overline{EZ}^2$

LIII.

Proposition 46 (lemme 10). — Soit de nouveau le demi-cercle ABΓ dont le centre est le point Z ; que le carré de la droite ΓZ soit quintuple du carré de la droite EZ (1) ; que la droite BE soit à angles droits sur la droite AΓ ; découpons la droite de jonction BΓ en extrême et moyenne raison au point Δ, et que son grand segment soit la droite BΔ ; je dis que les carrés des droites ΓB, BΔ sont le quintuple du carré de la droite ΓE.

Posons la droite ZH égale à la droite EZ ; la droite ΓH est donc découpée en extrême et moyenne raison au point E, et son grand segment est la droite EH (2). Et puisque le rectangle compris sous les droites HΓ, ΓE équivaut au carré de la droite EH, et que la droite EΓ est égale à la droite AH (parce que la droite EZ est aussi égale à la droite ZH), il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AE, EΓ équivaut au carré de la droite EH (3). De plus, le carré de la droite BΓ est au carré de la droite BΔ comme le carré de la droite EH, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites AE, EΓ, est au carré de la droite EΓ (parce que la droite ΓB est aussi à la droite BΔ comme la droite HE est à la droite EΓ); tandis que la droite EA est à la droite EΓ comme le rectangle compris sous les droites AE, EΓ est au carré de la



devient : $\overline{A\Gamma}^2 = 5\overline{HZ}^2$; donc, comme le texte : $\overline{A\Gamma}^2 = 3\overline{B\Gamma}^2 = 5\overline{HZ}^2$, d'où : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{15} = \frac{\overline{B\Gamma}^2}{5} = \frac{\overline{HZ}^2}{3}$, d'où : $\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{HZ}^2} = \frac{5}{3}$, d'où la relation (I) donne, comme le texte : $\frac{\overline{B\Theta}^2}{\overline{\Gamma Z}^2} = \frac{5}{3}$.

1. Voir p. 332, n. 2.

2. Voir p. 333, n. 2.

3. La droite ΓH est découpée en extrême et moyenne raison en E, c'est-à-dire que l'on a : $\frac{H\Gamma}{EH} = \frac{EH}{E\Gamma}$, d'où, comme le texte : $H\Gamma \times E\Gamma = \overline{EH}^2$. Or, on a par construction : $ZH = EZ$, d'où : $Z\Gamma - EZ = ZA - ZH$ ou, comme le texte : $E\Gamma = AH$, d'où : $H\Gamma = HE + E\Gamma = HE + HA = AE$; donc : $AE \times E\Gamma = \overline{EH}^2$.

droite ΕΓ, [car cela est démontré par la proposition 1 du livre VI des *Éléments* en décrivant un carré sur la droite ΕΓ, et en complétant le parallélogramme sur la droite ΑΕ] (1) ; par conséquent, le carré de la droite ΓΒ est au carré de la droite ΒΔ comme la droite ΑΕ est à la droite ΕΓ (2). Par composition, la somme des carrés des droites ΓΒ, ΒΔ est au carré de la droite ΒΔ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΕ, c'est-à-dire comme le carré de la droite ΑΓ est au carré de la droite ΓΒ. (3) Or, le carré de la droite ΒΔ est aussi au carré de la droite ΕΓ comme le carré de la droite ΒΓ est au carré de la droite ΕΗ (4) ; donc, par raison d'identité, la somme des carrés des droites ΓΒ, ΒΔ est au carré de la droite ΓΕ comme le carré de la droite ΑΓ est au carré de la droite ΕΗ. Or, le carré de la droite ΑΓ est quintuple du carré de la droite ΗΕ ; donc, la somme des carrés des droites ΓΒ, ΒΔ est quintuple du carré de la droite ΕΓ ; ce qu'il fallait démontrer (5).

---

1. D'après Hultsch, la phrase mise en crochets doit avoir été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 432, ll. 23-25).

2. Les deux droites ΗΓ, ΒΓ sont coupées en extrême et moyenne raison respectivement aux points Ε, Δ ; donc (prop. 44 ou lemme 8), on a : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}}=\frac{\mathrm{H\Gamma}}{\mathrm{HE}}$, d'où (première relation de la note 3, page 334) : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}}=\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E\Gamma}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{EH}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}$, d'où (seconde relation de la note 3, page 334) : $\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}=\frac{\mathrm{AE}\times\mathrm{E\Gamma}}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

3. La relation de la note précédente donne : $\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2+\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}=\frac{\mathrm{AE}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}}$. Or, la corde ΒΓ donne dans le demi-cercle : $\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{E\Gamma}=\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}{\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2}$, donc, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2+\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2}$.

4. On a démontré (note 2 ci-dessus) que l'on a : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}}=\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E\Gamma}}$, d'où : $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EH}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{EH}}^2}$.

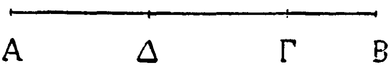
5. Les dernières relations des deux notes précédentes donnent : $\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2+\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}\times\frac{\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2}\times\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{EH}}^2}$ ou, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2+\overline{\mathrm{B\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{EH}}^2}$. Or, on a posé : $\overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2=5\overline{\mathrm{EZ}}^2$, et l'on a : $\mathrm{\Gamma Z}=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}$ et $\mathrm{EZ}=\frac{1}{2}\mathrm{EH}$, d'où : $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2=5\overline{\mathrm{EH}}^2$; donc, comme le texte : $\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2+\overline{\mathrm{B\Delta}}^2=5\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2$.

LIV.

Proposition 47 (lemme 11). — Si le côté de l'hexagone (1) est découpé en extrême et moyenne raison, le grand segment est le côté du décagone (2).

En effet, découpons le côté ΔB de l'hexagone en extrême et moyenne raison au point Γ, et que le grand segment soit la droite ΔΓ ; je dis que la droite ΔΓ est le côté du décagone.

Apposons la droite ΔA qui soit le côté du décagone ; donc, la droite AB est découpée en extrême et moyenne raison au point Δ. Mais, la droite ΔB est aussi découpée ainsi au point Γ; donc, en vertu du lemme 8, la droite BΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AB est à la droite BΔ, c'est-à-dire comme la droite BΔ est à la droite ΔA. En conséquence, la droite AΔ est égale à la droite ΔΓ. Or, la droite AΔ est le côté du décagone ; donc, la droite ΔΓ est aussi le côté du décagone (3).

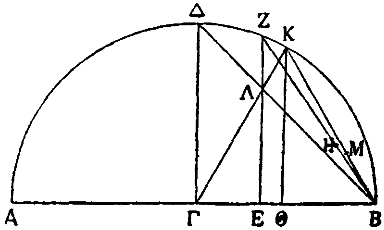


LV.

Proposition 48 (lemme 12). — Au regard des [figures] (4) inscrites dans une même sphère, un même cercle entoure le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre (5).

1. Sous-entendu : régulier inscrit dans un cercle.
2. Sous-entendu : régulier inscrit dans le même cercle.
3. Explicitement : Si on ajoute le côté AΔ du décagone au côté ΔB de l'hexagone inscrits dans le même cercle (Euclide, liv. XIII, prop. 9, énoncée p. 114, n. 7), il s'ensuit que la droite entière AB est découpée en extrême et moyenne raison en Δ, c'est-à-dire que l'on a ; $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{B\Delta}{\Delta A}$. Or, par hypothèse on a aussi : $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma B}$; donc (prop. 44 ou lemme 8, voir p. 330), on a : $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{B\Delta}$; donc : $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Delta A}$, d'où : $\Delta\Gamma = \Delta A$. Or, par hypothèse ΔA est le côté du décagone ; donc, ΔΓ est aussi le côté du décagone.
4. Le texte aura perdu ou sous-entendu ici le mot σχημάτων, des figures.
5. Cette propriété comparative du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère avait déjà été déduite comme corollaire à la proposition 58 du livre III (voir p. 120), et la démonstration propre que Pappus en donne ici ne diffère pas essentiellement de celle donnée par Hypsiclès dans le livre Ier, prop. 2, de son ouvrage sur les cinq corps solides ; ouvrage ordinairement désigné

En effet, exposons le diamètre AB d'une sphère, le demi-cercle de centre Γ décrit autour de ce diamètre, et la perpendiculaire ΓΔ menée de ce centre sur la droite AB. Coupons la droite AB de manière que la droite AE soit double de la droite EB ; menons la perpendiculaire EZ et les droites de jonction ΔΛB, ZB. La droite ZB est donc le côté du cube [1], comme dans le livre XIII des *Éléments* où il est question du cube [2]. Coupons la droite ZB en extrême et moyenne raison au point H, et que son grand segment soit la droite ZH ; il s'ensuit que la droite ZH est le côté du dodécaèdre en vertu du corollaire relatif au dodécaèdre dans le livre XIII des *Éléments* [3]. Prolongeons la droite de jonction ΛΓ jusqu'au point K ; menons la perpendiculaire KΘ sur la droite AB ; découpons la droite de jonction KB en extrême et moyenne raison au point M, et que son grand



comme étant le livre XIV des *Éléments* d'Euclide. Cette proposition y est énoncée : « Le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 485.

Hypsiclès fait précéder sa démonstration des considérations suivantes : « Cela est écrit par Aristée dans le livre de la comparaison des cinq corps, et par Apollonius dans la seconde édition de la comparaison du dodécaèdre avec l'icosaèdre, où il fait voir que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le dodécaèdre est à l'icosaèdre, parce que la perpendiculaire menée du centre de la sphère au pentagone du dodécaèdre est la même que la perpendiculaire menée au triangle de l'icosaèdre. Nous démontrerons que le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère, après avoir exposé ce qui suit : Si dans un cercle on décrit un pentagone équilatéral, la somme des carrés du côté du pentagone et de la droite qui sous-tend deux côtés du pentagone, est quintuple du carré du rayon de ce cercle. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 485.

1. C'est-à-dire le côté du cube inscrit dans la sphère de diamètre AB.

2. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 15 : « Construire un cube, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit les figures précédentes, et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est triple du carré du côté du cube ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 267.

3. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 17 : « Construire un dodécaèdre, et le circonscrire de la même sphère que les figures précédentes, et démontrer aussi que le côté du dodécaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle apotome ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 280.

Corollaire : « D'après cela, il est évident que le côté du cube étant coupé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est le côté du dodécaèdre ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 288.

segment soit la droite KM. Et puisque la droite AB est double de la droite BΓ et la droite AE double de la droite EB, la droite restante EB est donc double de la droite restante ΓE. Mais, la droite BE est égale à la droite EΛ, parce que la droite BE est à la droite EΛ comme la droite BΓ est à la droite ΔΓ ; donc, la droite ΛE est aussi double de la droite EΓ. Mais, la droite KΘ est aussi double de la droite ΘΓ ; donc, le carré de la droite ΘK est quadruple du carré de la droite ΓΘ ; donc, le carré de la droite KΓ est quintuple du carré de la droite ΓΘ ; donc, le carré de la droite BΓ est aussi quintuple du carré de la droite ΓΘ (1). En conséquence, la droite KB est le côté de l'icosaèdre ; car cela a été démontré dans le livre XIII des *Éléments* (2). Dès lors, puisqu'il a été démontré, dans le lemme 9 (3), que le rapport du carré de la droite ZH au carré de la droite BΘ est celui de 5 à 3, et, dans le lemme 10 (4), que la somme des carrés des droites BK, KM est quintuple du carré de la droite BΘ, il s'ensuit que la somme des carrés des droites BK, KM est triple du carré de la droite ZH (5).

---

1. On a par construction : $AE = 2EB$. Or, $AB = 2\Gamma B$; donc : $AB - AE = 2(\Gamma B - EB)$ ou, comme le texte : $EB = 2\Gamma E$. Or, la similitude des triangles BΓΔ, BEΛ donne : $\frac{EB}{E\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta = B\Gamma}$, d'où : $EB = E\Lambda$; donc :. $E\Lambda = 2\Gamma E$. Or, la similitude des triangles ΓEΛ, ΓΘK donne : $\frac{K\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{E\Lambda}{\Gamma E}$; donc : $K\Theta = 2\Theta\Gamma$, d'où : $\overline{K\Theta}^2 = 4\overline{\Theta\Gamma}^2$, d'où : $\overline{\Gamma K}^2 = \overline{\Theta\Gamma}^2 + \overline{K\Theta}^2 = \overline{\Theta\Gamma}^2 + 4\overline{\Theta\Gamma}^2 = 5\overline{\Theta\Gamma}^2$, ou, comme le texte : $\overline{B\Gamma}^2 = 5\overline{\Theta\Gamma}^2$.

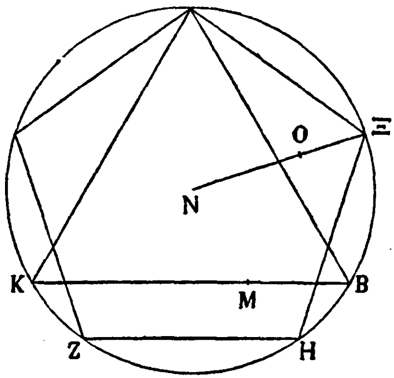
2. Cette déduction se déroule explicitement comme suit : La dernière égalité de la note précédente donne : $4\overline{B\Gamma}^2 = 5(4\overline{\Theta\Gamma}^2)$, d'où, en présence de $K\Theta = 2\Theta\Gamma$, il vient : $\overline{AB}^2 = 5\overline{K\Theta}^2$; donc (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 16, énoncée p. 326, n. 2, et corollaire, énoncé p. 327, n. 4), la droite KΘ est le rayon du cercle circonscrit à la base pentagonale de a pyramide de l'icosaèdre inscrit dans la sphère de diamètre AB. Or, $\overline{KB}^2 = \overline{B\Theta}^2 + \overline{K\Theta}^2$; donc (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 10, énoncée p. 115, n. 1), la droite KB est le côté du pentagone, la droite BΘ le côté du décagone, et KΘ le côté de l'hexagone inscrits dans ce même cercle de rayon KΘ, Or, $K\Theta = 2\Theta\Gamma$; donc : $AB = 2\Gamma B = 2(\Theta\Gamma + B\Theta) = K\Theta + 2B\Theta$, d'où (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 16, corollaire énoncé p. 327, n. 4), la droite KΘ est le côté de l'hexagone, et BΘ le côté du décagone inscrits dans le cercle circonscrit au pentagone de l'icosaèdre. Or, on vient de voir que la droite KB est le côté du pentagone inscrit dans ce cercle ; donc, la droite KB est une arête de l'icosaèdre, c'est-à-dire un côté des triangles équilatéraux qui constituent la surface de l'icosaèdre inscrit dans la sphère de diamètre AB.

3. C'est-à-dire la proposition 45 constituant le lemme 9, voir p. 332.

4. C'est-à-dire la proposition 46 constituant le lemme 10, voir p. 334.

5. On a démontré plus haut que l'on a : $\overline{B\Gamma}^2 = 5\overline{\Theta\Gamma}^2$, et, par hypothèse, la droite ZB est divisée en extrême et moyenne raison en H ; donc (prop. 45), on

Dès lors, exposons le cercle qui entoure le triangle de l'icosaèdre (1) ; qu'une droite quelconque NΞ menée du centre soit découpée en extrême et moyenne raison au point O, et que le grand segment soit la droite ON. En conséquence, la droite NO est le côté du décagone en raison de ce qui a été démontré précédemment (2). Et puisque le carré du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre N est triple du carré du rayon NΞ, conformément au livre XIII des *Éléments* (3), et que le côté de ce triangle est la droite KB, il s'ensuit que le carré de la droite KB est triple du carré de la droite NΞ. De plus, ces deux droites sont découpées en extrême et moyenne raison ; donc, en vertu de ce qui a été démontré au début (4), la droite KM est à la droite NO comme la droite BK est à la droite NΞ ; et il en est de même pour leurs carrés, qui sont tous à tous comme l'un est à l'autre. En conséquence, la somme des carrés des droites BK, KM est triple de la somme des carrés des droites ΞN, NO. Or, on a démontré que la somme des carrés des droites BK, KM est aussi triple du carré de la droite ZH ; donc, la somme des carrés des droites ΞN, NO équivaut au carré de la droite ZH (5). Or, la droite NΞ est le côté de l'hexagone,



a, comme le texte : $\frac{\overline{ZH}^2}{\overline{B\Theta}^2}=\frac{5}{3}$, d'où : $3\overline{ZH}^2=5\overline{B\Theta}^2$. Or, on a (prop. 46) : $\overline{BK}^2+\overline{KM}^2=5\overline{B\Theta}^2$; donc, comme le texte : $\overline{BK}^2+\overline{KM}^2=3\overline{ZH}^2$.

1. C'est-à-dire le triangle équilatéral dont le côté a été trouvé égal à la droite KB.

2. Voir proposition 47 ou lemme 11, p. 336.

3. Euclide, liv. XIII, prop. 12, énoncée p. 115, n. 4.

4. C'est-à-dire à la proposition 44, ou lemme 8, voir p. 330.

5. Explicitement : le rayon NΞ est le côté de l'hexagone inscrit. Or, il est divisé en extrême et moyenne raison en O ; donc (prop. 47 ou lemme 11), la droite NO est le côté du décagone inscrit. Or (Euclide, liv. XIII, prop. 12), on a : $\overline{KB}^2=3\overline{N\Xi}^2$ (I), et les deux droites NΞ, KB sont divisées en extrême et moyenne raison respectivement aux points O, M, c'est-à-dire que l'on a (prop. 44, lemme 8) : $\frac{BK}{N\Xi}=\frac{KM}{NO}$, d'où : $\frac{\overline{BK}^2}{\overline{N\Xi}^2}=\frac{\overline{KM}^2}{\overline{NO}^2}$, d'où : $\frac{\overline{BK}^2+\overline{KM}^2}{\overline{N\Xi}^2+\overline{NO}^2}=\frac{\overline{BK}^2}{\overline{N\Xi}^2}$; donc, en présence de la

et la droite NO celui du décagone ; donc, la droite ZH est le côté du pentagone inscrit dans le cercle dont le centre est N (car cela est aussi démontré dans le livre XIII des *Éléments*) (1). Or, la droite ZH, côté du pentagone, est aussi le côté du dodécaèdre ; donc, le même cercle entoure le triangle de l'icosaèdre et le pentagone du dodécaèdre (2).

LVI.

(Lemme 13). — On démontrera d'une autre manière qu'un même cercle entoure le triangle de l'icosaèdre et le pentagone du dodécaèdre.

Exposons une sphère dans laquelle nous inscrivons le dodécaèdre et l'icosaèdre (3). Que le pentagone ΓΔΕΖΗ du dodécaèdre soit entouré par le cercle ΓΔΕ, et que le triangle de l'icosaèdre soit inscrit dans le cercle ΠΡΣ ; je dis que ces cercles sont égaux, c'est-à-dire que le même cercle entoure le pentagone et le triangle.

Menons la droite de jonction ΕΓ ; la droite ΓΕ est donc le côté du cube compris dans la même sphère que le dodécaèdre ; car cela est démontré dans le livre XIII des *Éléments* (4). Prenons

---

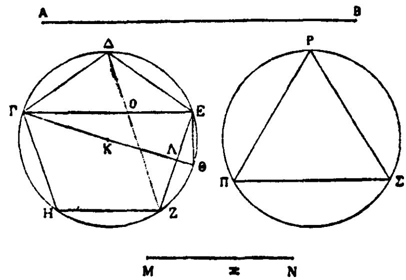
relation (I) on a, comme le texte : $\overline{BK}^2 + \overline{KM}^2 = 3(\overline{N\Xi}^2 + \overline{NO}^2)$. Or, on a démontré (voir page 338, note 5) que l'on a : $\overline{BK}^2 + \overline{KM}^2 = 3\overline{ZH}^2$; donc, comme le texte : $\overline{N\Xi}^2 + \overline{NO}^2 = \overline{ZH}^2$.

1. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 10, énoncée p. 115, n. 1.

2. La dernière expression de la note avant-précédente indique, en vertu de la proposition d'Euclide rappelée dans la note précédente, que la droite ZH est le côté du pentagone inscrit dans le cercle de rayon NΞ. Or, on a vu, au début de la démonstration, que la droite ZH est aussi (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 17, corollaire, énoncé p. 337, n. 3) le côté du dodécaèdre inscrit dans la sphère de diamètre AB (voir première figure) ; donc le triangle de l'icosaèdre et le pentagone du dodécaèdre sont inscrits dans un même cercle de la sphère de diamètre AB.

3. C'est-à-dire : soit une sphère représentée sur la figure par son diamètre AB, et imaginons que le dodécaèdre et l'icosaèdre soient inscrits dans cette sphère.

4. Cette conclusion se justifie comme suit : Menons la droite ΔΖ. On a donc deux droites ΓΕ, ΔΖ qui sous-tendent deux angles consécutifs d'un pentagone régulier ; donc (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 8, énoncée p. 114, n. 6), elles se coupent mutuellement en extrême et moyenne raison au point O, et leurs grands segments ΓΟ, ΟΖ sont tous deux égaux au côté ΓΔ du pentagone. Or, ΓΔ est le côté du dodécaèdre et (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 17, corollaire énoncé p. 337, n. 3), lorsque le côté du cube inscrit dans la sphère est coupé en extrême et moyenne raison, le grand segment est le côté du dodécaèdre inscrit dans la même sphère ; donc, la droite ΓΟ étant égale au côté du dodécaèdre, la droite ΓΕ, coupée en extrême et moyenne raison en O, est le côté du cube.



le centre K du cercle, d'où nous menons la perpendiculaire KΛ que nous prolongeons jusqu'aux points Γ, Θ (1), et menons la droite de jonction EΘ. La droite EΘ est donc le côté du décagone (2). Et puisque le carré de la droite ΓΘ, c'est-à-dire la somme des carrés des droites ΓE, EΘ, est quadruple du carré de la droite ΘK, il s'ensuit que la somme des carrés des droites ΓE, EΘ, ΘK est quintuple du carré de la droite ΘK. Mais, les carrés des droites EΘ, ΘK valent le carré de la droite EZ (car le carré du côté du pentagone vaut le carré du côté de l'hexagone, conjointement avec le carré du côté du décagone, inscrits dans le même cercle, conformément au livre XIII des *Éléments*)(3) ; donc, la somme des carrés des droites ΓE, EZ est quintuple du carré de la droite ΘK(4). Exposons donc le diamètre AB de la sphère, ainsi qu'une droite MN telle que le carré de la droite AB soit quintuple du carré de la droite MN, conformément à un lemme du livre XIII des *Éléments* (5). Or, le carré du diamètre de la sphère est quintuple du carré du rayon du cercle d'où l'on a l'icosaèdre, conformément au livre XIII des *Éléments* (6) ; donc, la droite MN

1. Le texte admet comme démontré que le prolongement de la perpendiculaire menée du centre K sur le côté EZ du pentagone tombe sur le point Γ, sommet d'angle du pentagone, attendu que Γ est le sommet du triangle isocèle ZΓE, par le milieu de la base duquel passe la perpendiculaire.

2. Car le point Θ divise l'arc du pentagone en deux parties égales.

3. Euclide, liv. XIII, prop. 10, énoncée p. 115, n. 1.

4. Considérant le diamètre du cercle de centre K, on a : $\overline{\Gamma\Theta}^2 = 4\overline{\Theta K}^2$. Or, le triangle rectangle ΓEΘ donne : $\overline{\Gamma\Theta}^2 = \overline{\Gamma E}^2 + \overline{E\Theta}^2$; donc, comme le texte : $\overline{\Gamma E}^2 + \overline{E\Theta}^2 = 4\overline{\Theta K}^2$, d'où : $\overline{\Gamma E}^2 + \overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta K}^2 = 5\overline{\Theta K}^2$. Or (Euclide, liv. XIII, prop. 10), on a : $\overline{E\Theta}^2 + \overline{\Theta K}^2 = \overline{EZ}^2$; donc : $\overline{\Gamma E}^2 + \overline{EZ}^2 = 5\overline{\Theta K}^2$.

5. C'est-à-dire conformément à la construction exposée subsidiairement dans la proposition 16 du livre XIII d'Euclide (voir aussi la prop. 45, p. 332, n. 2). Dans les conditions de la présente proposition, il suffit de diviser la droite AB en cinq segments égaux ; d'élever, au premier point de section, une perpendiculaire coupant la demi-circonférence de cercle décrite sur AB en un point d'où l'on mène la droite de jonction avec le point de section suivant, et le carré de cette droite sera la cinquième partie du carré de la droite AB.

6. C'est-à-dire que, en vertu du corollaire de la proposition 16 du livre XIII d'Euclide (énoncé p. 327, n. 4), le carré du diamètre de la sphère est quintuple du carré du rayon du cercle de cette sphère, dans lequel s'inscrit la base pentagonale de la pyramide à faces de triangles équilatéraux de l'icosaèdre inscrit dans cette sphère.

est le rayon [du cercle] (1) d'où l'on a l'icosaèdre. Coupons la droite MN en extrême et moyenne raison au point Ξ, et que le grand segment soit la droite MΞ. Dès lors, la droite MΞ est le côté du décagone en vertu du lemme 11 (2). Et puisque le carré de la droite AB est quintuple du carré de la droite MN ; et que le carré de la droite AB est aussi triple du carré du côté ΓE du cube, conformément au livre XIII des *Éléments* (3), il s'ensuit que trois carrés de la droite ΓE valent cinq carrés de la droite MN (4). Or, cinq carrés de la droite MN sont à cinq carrés de la droite MΞ comme trois carrés de la droite ΓE sont à trois carrés de la droite ΓΔ (car le côté ΓE du cube étant coupé en extrême et moyenne raison, son grand segment est le côté du dodécaèdre, conformément au livre XIII des *Éléments*) (5) ; par conséquent, trois carrés de la droite ΓE, conjointement avec trois carrés de la droite ZE, sont égaux à cinq carrés de la droite MN conjointement avec cinq carrés de la droite MΞ (6). Or, cinq carrés de la droite MN, conjointement avec cinq carrés de la droite MΞ, valent cinq carrés de la droite PΣ conformément à ce qui est

---

1. Lacune que Hultsch comble, d'après Commandin, suivi par Eisenmann, au moyen des mots τοῦ κύκλου.

2. La droite MN étant le rayon du cercle dans lequel s'inscrit la base pentagonale de la pyramide de l'icosaèdre, elle est aussi le côté de l'hexagone inscrit dans ce cercle, et cette droite étant divisée en extrême et moyenne raison, la proposition 47, ou lemme 11 (voir p. 336) a démontré que le grand segment MΞ est le côté du décagone inscrit dans le même cercle.

3. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 15, énoncée p. 337, n. 2.

4. On a démontré plus haut (p. 340, n. 4) que la droite ΓE est le côté du cube inscrit dans la sphère de diamètre AB circonscrite au dodécaèdre ; donc (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 15, c'est-à-dire que le carré du diamètre de la sphère est triple du carré du côté du cube inscrit dans cette sphère), on a : $\overline{AB}^2 = 3\overline{\Gamma E}^2$. Or, par hypothèse, on a : $\overline{AB}^2 = 5\overline{MN}^2$; donc, comme le texte : $3\overline{\Gamma E}^2 = 5\overline{MN}^2$.

5. EUCLIDE, liv. XIII, prop. 8, énoncée p. 114, n. 6.

6. Si le côté ΓE du cube inscrit est découpé en extrême et moyenne raison (voir droite ΔZ et point O ajoutés dans la figure du texte), son grand segment ΓO est égal au côté du pentagone ΓΔ (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 8). Or, par hypothèse, ΓΔ est le côté du dodécaèdre inscrit dans la sphère de diamètre AB. Dès lors, considérant les deux droites ΓE, MN coupées en extrême et moyenne raison respectivement aux points O, Ξ, la proposition 44, ou lemme 8 (voir p. 330) donne : $\frac{\Gamma E}{\Gamma O = \Gamma\Delta} = \frac{MN}{M\Xi}$, d'où, comme le texte : $\frac{3\overline{\Gamma E}^2}{3\overline{\Gamma\Delta}^2} = \frac{5\overline{MN}^2}{5\overline{M\Xi}^2}$, d'où : $\frac{3\overline{\Gamma E}^2}{3\overline{\Gamma E}^2 + 3\overline{\Gamma\Delta}^2} = \frac{5\overline{MN}^2}{5\overline{MN}^2 + 5\overline{\Xi M}^2}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note 4 ci-dessus : $3\overline{\Gamma E}^2 + 3\overline{\Gamma\Delta}^2 = 5\overline{MN}^2 + 5\overline{M\Xi}^2$, d'où, considérant que $EZ = \Gamma\Delta$, on a, comme le texte : $3\overline{\Gamma E}^2 + 3\overline{ZE}^2 = 5\overline{MN}^2 + 5\overline{M\Xi}^2$

démontré relativement à l'icosaèdre dans le livre XIII des *Éléments* ; donc, cinq carrés de la droite ΡΣ valent trois carrés de la droite ΓΕ conjointement avec trois carrés de la droite ΖΕ. Mais, cinq carrés de la droite ΡΣ valent quinze carrés du rayon du cercle circonscrit autour du triangle ΠΡΣ en vertu du théorème 12 du livre XIII des *Éléments* ; tandis que trois carrés de la droite ΓΕ, conjointement avec trois carrés de la droite ΖΕ, valent quinze carrés du rayon du cercle circonscrit autour du pentagone ΓΔΕΖΗ (car on a démontré que la somme des carrés des droites ΓΕ, ΕΖ est quintuple du carré de la droite ΘΚ) ; donc, quinze carrés du rayon du cercle circonscrit autour du triangle ΠΡΣ valent quinze carrés du rayon du cercle circonscrit autour du pentagone ΓΔΕΖΗ ; en sorte qu'un carré de rayon est égal à un carré de rayon, et que le cercle est égal au cercle (1). En conséquence, le même cercle entoure le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère.

LVII.

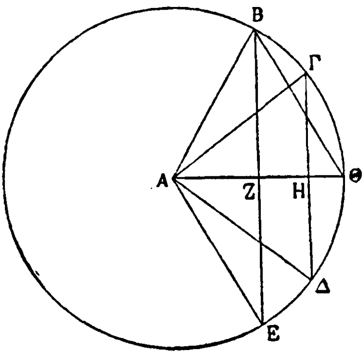
Proposition 49 (lemme 14). — Douze pentagones sont plus grands que vingt triangles inscrits dans un même cercle.

Soit le cercle ΒΓΔΕ entourant le triangle de l'icosaèdre et le pentagone du dodécaèdre (2) ; inscrivons, dans ce cercle, le

1. La fin de la démonstration se déroule explicitement comme suit : On a démontré plus haut (voir p. 342, n. 2) que la droite ΜΝ est le rayon du cercle dans lequel s'inscrit la base pentagonale de la pyramide de l'icosaèdre inscrit dans la sphère de diamètre ΑΒ ; donc, cette droite est le côté de l'hexagone inscrit dans ce cercle. D'autre part, on a démontré que ΜΞ est le côté du décagone inscrit dans ce cercle (p. 342, n. 2). Or, par hypothèse, ΡΣ est le côté de la face triangulaire de l'icosaèdre inscrit dans la sphère ; donc (Euclide, liv. III, prop. 16, énoncée p. 326, n. 2), ΡΞ est le côté du pentagone (base de la pyramide de l'icosaèdre) inscrit dans le cercle de rayon ΜΝ. Dès lors (Euclide, liv. XIII, prop. 10, énoncée p. 115, n. 1), puisque, dans un même cercle, la somme des carrés des côtés de l'hexagone et du décagone vaut le carré du côté du pentagone, on a : $\overline{\mathrm{MN}}^2 + \overline{\mathrm{M\Xi}}^2 = \overline{\mathrm{P\Sigma}}^2$, d'où : $5\overline{\mathrm{MN}}^2 + 5\overline{\mathrm{M\Xi}}^2 = 5\overline{\mathrm{P\Sigma}}^2$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente, on a, comme le texte : $5\overline{\mathrm{P\Sigma}}^2 = 3\overline{\Gamma\mathrm{E}}^2 + 3\overline{\mathrm{ZE}}^2$. Or (Euclide, liv. XIII, prop. 12, énoncée, p. 115, n. 4), le carré du côté du triangle équilatéral étant triple du carré du rayon du cercle circonscrit, on a : $\overline{\mathrm{P\Sigma}}^2 = 3(\text{ rayon cercle } \Pi\mathrm{P\Sigma})^2$, d'où : $5\overline{\mathrm{P\Sigma}}^2 = 15\ (\text{rayon cercle } \Pi\mathrm{P\Sigma})^2$. Or, on a démontré (p. 341, n. 4), que l'on a : $\overline{\Gamma\mathrm{E}}^2 + \overline{\mathrm{ZE}}^2 = 5\overline{\Theta\mathrm{K}}^2$, d'où : $3\overline{\Gamma\mathrm{E}}^2 + 3\overline{\mathrm{ZE}}^2 = 15\overline{\Theta\mathrm{K}}^2 = 15(\text{ rayon cercle } \Gamma\Delta\mathrm{EZH})^2$; donc, comme le texte : $(\text{rayon cercle } \Pi\mathrm{P\Sigma})^2 = (\text{rayon cercle } \Gamma\Delta\mathrm{EZH})^2$, d'où : cercle ΠΡΣ = cercle ΓΔΕΖΗ.

2. Voir proposition 48.

côté BE du triangle et le côté ΓΔ du pentagone, et que ces côtés soient parallèles. Prenons le centre A du cercle, d'où nous menons la perpendiculaire AZHΘ sur les parallèles, et menons les droites de jonction AB, AΓ, AΔ, AE, [BΘ, ΓΘ] ([1]). Dès lors, puisque la droite BE est le côté du triangle, la droite BΘ est donc le côté de l'hexagone ([2]). D'autre part, puisque la droite ΓΔ est le côté du pentagone, la droite ΓΘ est donc le côté du décagone ([3]). De plus, les droites BZ, ΓH sont des perpendiculaires ; donc, le rectangle compris sous les droites ΓH, HA est plus grand que le rectangle compris sous les droites BZ, ZA en vertu de ce qui va suivre ([4]). En conséquence, le triangle AΓΔ est aussi plus grand que le triangle ABE, et soixante triangles ΓΔA sont donc aussi plus grands que soixante triangles BAE. Mais, soixante triangles ΓAΔ constituent le dodécaèdre, car chaque pentagone contient cinq triangles pareils au triangle ΓAΔ ([5]) ; tandis que soixante triangles BAE constituent l'icosaèdre, car chaque triangle contient trois triangles pareils au triangle BAE ([6]). Dès lors, douze pentagones sont plus grands que vingt triangles inscrits dans le même cercle ([7]).

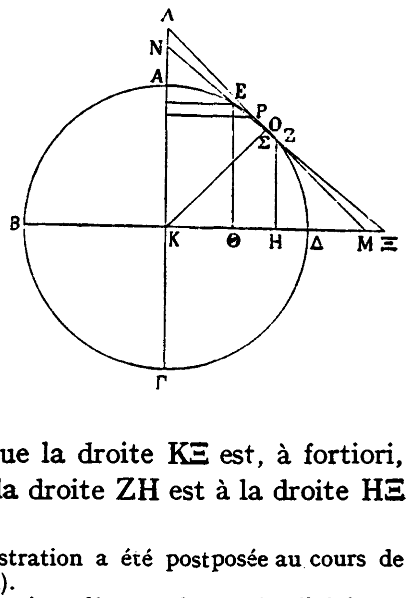


1. Lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 444, l. 26).
2. La perpendiculaire AΘ divise en deux parties égales l'arc BE du trigone.
3. La perpendiculaire AΘ divise en deux parties égales l'arc ΓΔ du pentagone.
4. Voir la proposition suivante 50 (lemme 15).
5. C'est-à-dire que soixante triangles ΓAΔ constituent la surface totale du dodécaèdre, dont les douze faces pentagonales contiennent chacune cinq de ces triangles.
6. C'est-à-dire que soixante triangles BAE constituent la surface totale de l'icosaèdre, dont les vingt faces triangulaires contiennent chacune trois de ces triangles.
7. Admettant en fait l'inégalité $\Gamma H \times HA > BZ \times ZA$ qui ne sera démontrée qu'à la proposition suivante, probablement pour éviter ici les complications de la figure, on a : $\Gamma H \times HA =$ triangle AΓΔ et $BZ \times ZA =$ triangle ABE ; donc : triangle AΓΔ $>$ triangle ABE, d'où : 60 triangles AΓΔ $>$ 60 triangles ABΔ ou : 12 pentagones de côté ΓΔ $>$ 20 triangles de côté BE.

LVIII.

PROPOSITION 50 (lemme 15). — Voici le lemme qui a été différé ([1]). Soient le cercle ΑΒΓΔ dont le centre est le point Κ, des diamètres ΑΓ, ΒΔ perpendiculaires entre eux, l'arc ΔΕ de l'hexagone, l'arc ΔΖ du décagone, et les droites ΕΘ, ΖΗ perpendiculaires sur le diamètre ΒΔ. Je dis que le rectangle compris sous les droites ΖΗ, ΗΚ est plus grand que le rectangle compris sous les droites ΕΘ, ΘΚ.

En effet, soit ΔΟ l'arc de l'octogone. Dès lors, considérant le cercle comme étant 360, l'arc ΔΕ est ainsi 60, l'arc ΔΖ est 36, l'arc ΟΔ est 45 ; donc, l'arc restant ΖΟ est 9, et l'arc restant ΟΕ est 15 ([2]). Posons l'arc ΟΡ égal à l'arc ΖΟ ; il s'ensuit que l'arc restant ΑΡ est aussi égal à l'arc restant ΔΖ ([3]). Prolongeons les droites de jonction ΖΕ, ΖΡ, et qu'elles soient telles que les droites ΝΕΖΞ, ΛΡΖΜ. En conséquence, la droite de jonction ΚΟ coupe la droite ΖΡ en deux parties égales et à angles droits. Qu'elle la coupe au point Σ. Dès lors, puisque chacun des angles compris sous les droites ΟΚ, ΚΛ et sous les droites ΟΚ, ΚΜ est la moitié de l'angle droit, la droite ΚΜ est donc égale à la droite ΚΛ ; tandis que la droite ΚΞ est, à fortiori, plus grande que la droite ΚΝ ([4]). Et la droite ΖΗ est à la droite ΗΞ



1. C'est-à-dire le lemme dont la démonstration a été postposée au cours de la proposition précédente (voir p. 344, n. 4).
2. C'est-à-dire que, si l'on considère la circonférence du cercle divisée en 360 parties égales ou degrés, l'arc ΔΕ de l'hexagone inscrit sera le sixième de la circonférence, ou 60°, l'arc ΔΖ du décagone sera le dixième, ou 36°, l'arc ΔΟ de l'octogone sera le huitième, ou 45° ; d'où : arc ΖΟ = arc ΔΟ — arc ΔΖ = 9°, et arc ΟΕ = arc ΔΕ — arc ΔΟ = 15°.
3. Posons : arc ΟΡ = arc ΖΟ. Or, arc ΑΟ = arc ΔΟ = 45° ; donc : arc ΑΟ — arc ΟΡ = arc ΔΟ — arc ΖΟ ou, comme le texte : arc ΑΡ = arc ΔΖ.
4. On a : $\widehat{OK\Lambda} = \widehat{OKM} = \frac{1}{2}$ angle droit, d'où similitude et égalité des triangles ΟΚΛ, ΟΚΜ, d'où, comme le texte : ΚΜ = ΚΛ. Or, le point Ρ est situé

comme la droite NK est à la droite KΞ ; donc, la droite ZH est plus petite que la droite HΞ. Mais, la droite ZH est plus grande que la perpendiculaire menée du point E sur la droite AK, c'est-à-dire plus grande que la droite ΘK (car la perpendiculaire menée du point P (1) est égale à la droite ZH) ; donc, le rapport de la droite HΘ à la droite ΘK est plus grand que son rapport à la droite HΞ (2), et, par composition, le rapport de la droite HK à la droite KΘ est plus grand que celui de la droite ΘΞ à la droite ΞH, c'est-à-dire de la droite EΘ à la droite ZH. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ZH, HK est plus grand que le rectangle compris sous les droites EΘ, ΘK (3).

LIX.

Proposition 51 (lemme 16). — Lorsqu'un triangle isocèle a comme angle au sommet les quatre cinquièmes d'un angle droit, et qu'un triangle équilatéral lui est équivalent, on démontre que, si l'on découpe une droite en extrême et moyenne raison, le rapport du carré d'un côté du triangle équilatéral au carré de l'un des côtés égaux du triangle isocèle est plus petit que celui du carré de la droite entière à cinq fois le carré du petit segment.

En effet, soit le triangle isocèle BΔE, ayant comme angle au point E les quatre cinquièmes d'un angle droit, entouré du cercle dont le centre est le point E, et soit AEZΓ le diamètre perpendiculaire sur la droite BΔ. La droite BZΔ est donc le côté du

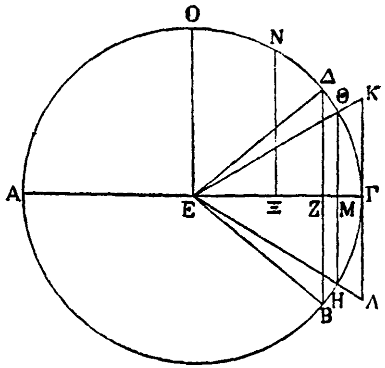
---

entre les points E, Z ; donc : $KM < K\Xi$ et $K\Lambda > KN$, d'où, à fortiori, comme le texte : $K\Xi > KN$.

1. Sous-entendu : ἐπὶ τὴν AK, sur la (droite) AK.

2. Euclide, liv. V, prop. 8, énoncée, p. 36, n. 6.

3. Les triangles semblables ZHΞ, NKΞ donnent : $\frac{ZH}{H\Xi} = \frac{KN}{K\Xi}$, d'où, en présence de la dernière inégalité de la note antépénultième, on a, comme le texte : $ZH < H\Xi$. Or, $ZH =$ perpendiculaire de P sur AK, et perpendiculaire de P sur $AK >$ perpendiculaire de E sur AK ($= \Theta K$) ; donc : $ZH > \Theta K$. Dès lors : $\frac{H\Theta}{\Theta K} > \frac{H\Theta}{ZH}$ et $\frac{H\Theta}{H\Xi} < \frac{H\Theta}{ZH}$; donc, comme le texte : $\frac{H\Theta}{\Theta K} > \frac{H\Theta}{H\Xi}$, d'où : $\frac{H\Theta + \Theta K}{\Theta K} > \frac{H\Theta + H\Xi}{H\Xi}$ ou, comme le texte : $\frac{HK}{\Theta K} > \frac{\Theta\Xi}{H\Xi}$. Or, les triangles semblables EΘΞ, ZHΞ donnent : $\frac{\Theta\Xi}{H\Xi} = \frac{E\Theta}{ZH}$; donc : $\frac{HK}{\Theta K} > \frac{E\Theta}{ZH}$, d'où, comme le texte : $ZH \times HK > E\Theta \times \Theta K$.



pentagone [1]. Dès lors, si nous découpons les arcs ΓΗ, ΓΘ comme étant l'un et l'autre ceux du dodécagone, et si nous menons la droite de jonction ΗΘ et les droites de jonction ΕΗ, ΕΘ, il s'ensuit que le triangle ΕΗΘ sera équilatéral [2]. Et si nous menons la tangente ΚΓΛ, le triangle ΕΚΛ sera aussi équilatéral [3]. Et si l'on veut ajuster un triangle [4] équivalent au triangle ΒΔΕ [5], on démontre qu'il tombe entre les triangles ΘΕΗ, ΚΕΛ, c'est-à-dire qu'il sera plus grand que le triangle ΕΗΘ et plus petit que le triangle ΚΕΛ.

En effet, puisque le rapport du carré de la droite ΘΕ au carré de la droite ΕΜ est celui de 4 à 3, et que la droite ΘΕ est égale à la droite ΕΓ, il s'ensuit que le rapport du carré de la droite ΕΓ au carré de la droite ΕΜ est aussi celui de 4 à 3 [6]. Or, le carré de la droite ΚΛ est au carré de la droite ΘΗ, c'est-à-dire que le triangle ΚΕΛ est au triangle ΕΗΘ, comme le carré de la droite ΕΓ est au carré de la droite ΕΜ, et il en est de même pour les sextuples ; donc, le rapport de l'hexagone circonscrit à l'hexagone inscrit est celui de 4 à 3, c'est-à-dire de 12 à 9. Or,

---

1. Sous-entendu : ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, c'est-à-dire : inscrit dans le cercle.

2. C'est-à-dire que, si l'on pose : $\Gamma\Theta = \Gamma H =$ arc du dodécagone, on a : $H\Theta =$ arc de l'hexagone, d'où : $H\Theta =$ côté de l'hexagone inscrit $=$ rayons ΕΔ et ΕΗ, d'où le triangle ΕΗΘ est équilatéral (Euclide, liv. IV, prop. 15, énoncée p. 116, n. 3).

3. La tangente ΚΛ étant parallèle à la droite ΘΗ, la similitude des triangles donne : $\frac{EK}{K\Lambda} = \frac{E\Theta}{\Theta H}$. Or, $E\Theta = \Theta H$; donc : $EK = K\Lambda = E\Lambda$.

4. L'énoncé de la proposition indique que le texte sous-entend ici le mot ἰσόπλευρον, équilatéral.

5. C'est-à-dire ajuster sous l'angle ΚΕΛ un triangle équilatéral équivalent au triangle isocèle ΒΔΕ.

6. Le triangle ΘΕΗ étant équilatéral, on a : $\Theta M = \frac{1}{2} E\Theta$. Or, $\overline{E\Theta}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{\Theta M}^2$; donc : $\overline{E\Theta}^2 = \overline{EM}^2 + \frac{1}{4}\overline{E\Theta}^2$, d'où : $3\overline{E\Theta}^2 = 4\overline{EM}^2$, d'où : $\frac{\overline{E\Theta}^2}{\overline{EM}^2} = \frac{4}{3}$. Or, $E\Theta = E\Gamma$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{\overline{EM}^2} = \frac{4}{3}$.

le rapport de l'hexagone circonscrit à cinq triangles ΚΕΛ est celui de 12 à 10 ; donc, cinq triangles ΚΕΛ sont plus grands que l'hexagone inscrit (1) ; donc, à fortiori, ils sont plus grands que le pentagone inscrit (car le pentagone équilatéral inscrit dans le cercle est plus petit que l'hexagone qui y est inscrit) (2). En conséquence, le triangle ΔΕΒ est plus petit que le triangle ΚΕΛ (3).

D'autre part, je dis que ce triangle est plus grand que le triangle ΕΗΘ.

En effet, prenons l'arc ΓΝ de l'hexagone, et menons la perpendiculaire ΝΞ. Et puisque, en vertu du lemme qui précède (4), le

---

1. On a, par similitude de triangles : $\frac{\mathrm{K}\Lambda}{\Theta\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{E}\Gamma}{\mathrm{EM}}$, d'où (EUCLIDE, liv. VI, prop. 22, énoncée p. 125, n. 4) : $\frac{\overline{\mathrm{K}\Lambda}^2}{\overline{\Theta\mathrm{H}}^2} = \frac{\mathrm{K}\Lambda \times \mathrm{E}\Gamma}{\Theta\mathrm{H} \times \mathrm{EM}} = \frac{\text{triangle } \mathrm{KE}\Lambda}{\text{triangle } \Theta\mathrm{EH}} = \frac{\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2}{\overline{\mathrm{EM}}^2}$, d'où : $\frac{6 \text{ triangles } \mathrm{KE}\Lambda}{6 \text{ triangles } \Theta\mathrm{EH}} = \frac{\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2}{\overline{\mathrm{EM}}^2}$ ou : $\frac{\text{hexagone circonscrit de côté } \mathrm{K}\Lambda}{\text{hexagone inscrit de côté } \Theta\mathrm{H}} = \frac{\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2}{\overline{\mathrm{EM}}^2}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : $\frac{\text{hexagone circonscrit}}{\text{hexagone inscrit}} = \frac{4}{3} = \frac{12}{9}$. Or, $\frac{\text{hexagone circonscrit} = 6 \text{ triangles } \mathrm{KE}\Lambda}{5 \text{ triangles } \mathrm{KE}\Lambda} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10}$; donc, comme le texte : 5 triangles ΚΕΛ > hexagone inscrit.

2. Il est probable que cette remarque incidente s'appuie sur une démonstration directe ancienne qui ne nous est pas parvenue. Toutefois, en faisant abstraction du fait que Pappus pouvait déjà légitimement invoquer l'ensemble des propositions du traité *De la mesure du Cercle* d'Archimède (voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 127-134) pour conclure que dans le même cercle l'aire de l'hexagone régulier est plus grande que celle du pentagone régulier, il y a lieu de remarquer qu'il peut s'en rapporter aussi au chapitre IX, livre I de l'*Almageste* (voir trad. Halma, pp. 26-29), où Claude Ptolémée considère le côté du pentagone régulier inscrit comme sous-tendant 72 des 360 parties égales, c'est-à-dire nos degrés actuels, dans lesquelles il divise la circonférence du cercle, puis mesure le côté du pentagone en fonction du diamètre du cercle qu'il divise en 120 de ces mêmes parties, et trouve qu'il est égal à 70 de ces parties, 32 scrupules (nos minutes actuelles), et 3 secondes ; donc, que le périmètre du pentagone régulier est plus petit que $\frac{5 \times 71}{120} = \frac{355}{120}$ du diamètre du cercle circonscrit. Or, comme dans ces mêmes conditions le côté de l'hexagone inscrit sera 60 parties du diamètre divisé en 120 parties, son périmètre sera $\frac{6 \times 60}{120} = \frac{360}{120}$ du diamètre ; d'où : périmètre de l'hexagone > périmètre du pentagone. Dès lors, la première proposition du livre V (voir p. 139), dans laquelle Pappus démontre que l'aire de l'hexagone est plus grande que celle du pentagone de même périmètre, permet de conclure, à fortiori, que l'aire de l'hexagone régulier est plus grande que celle du pentagone régulier inscrit dans le même cercle.

3. On a donc : aire hexagone inscrit > aire pentagone inscrit ; donc, l'inégalité de la note 1 ci-dessus donne, à fortiori : 5 triangles ΚΕΛ > pentagone inscrit. Or, pentagone inscrit = 5 triangles ΔΕΒ ; donc : triangle ΚΕΛ > triangle ΔΕΒ.

4. Voir proposition 50 ou lemme 15, p. 345.

rectangle compris sous les droites ΔZ, ZE est plus grand que le rectangle compris sous les droites NΞ, ΞE, et que le rectangle compris sous les droites NΞ, ΞE équivaut au rectangle compris sous les droites ΘM, ME (car toutes sont égales à toutes) ; il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΔZ, ZE est plus grand que le rectangle compris sous les droites ΘM, ME ; en sorte que le triangle BΔE est aussi plus grand que le triangle ΘEH (1).

En conséquence, le triangle équilatéral construit (2) équivalent au triangle BΔE est tel que sa base, parallèle à la droite HΘ, ou à la droite KΛ, tombe entre les points K, Θ. Dès lors, puisqu'il a été démontré au lemme 6 (3) que, lorsqu'une droite est découpée en extrême et moyenne raison, le rapport du carré de la droite entière à cinq fois le carré de son petit segment est plus grand que le rapport de 4 à 3 ; tandis que le rapport du carré de la droite KE au carré de la droite EΓ, c'est-à-dire de la droite EΘ, est celui de 4 à 3 (4), il s'ensuit que le rapport du carré de la droite entière à cinq fois le carré de son petit segment est, à fortiori, plus grand que le rapport du carré du côté du triangle équilatéral (5), situé entre les droites KE, ΘE, au carré de la droite EΘ, c'est-à-dire au carré du côté EΔ du triangle isocèle (6).

1. Considérant les deux perpendiculaires ΔZ, NΞ, la proposition rappelée dans la note précédente donne : $\Delta Z \times ZE > N\Xi \times \Xi E$. Or, par construction, l'arc ΓN est celui d'un côté de l'hexagone ; donc, les droites de jonction NE, NΓ, non tracées sur la figure du texte, toutes deux égales au rayon, forment avec la droite EΓ un triangle équilatéral égal au triangle EΘH ; donc : $N\Xi = ME$ et $\Xi E = \Theta M$, d'où : $N\Xi \times \Xi E = ME \times \Theta M$; donc : $\Delta Z \times ZE > ME \times \Theta M$ ou, comme le texte : triangle $B\Delta E >$ triangle ΘEH.

2. C'est-à-dire construit dans l'angle KEΛ.

3. Voir proposition 42, ou lemme 6, p. 322.

4. Voir proposition 38, ou lemme 1, p. 316.

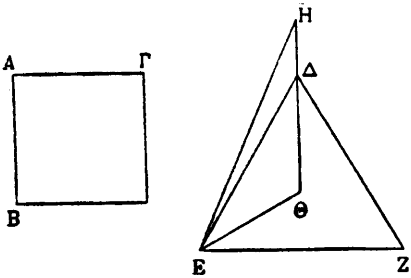
5. Sous-entendu : équivalent au triangle BEΔ.

6. Explicitement : une droite découpée en extrême et moyenne raison donne (prop. 42) : $\frac{\text{carré de la droite entière}}{\text{5 carrés du petit segment}} > \frac{4}{3}$. Or dans le triangle équilatéral KEΓ on a : $\overline{KE}^2 = \overline{E\Gamma}^2 + \overline{K\Gamma}^2 = \overline{E\Gamma}^2 + \frac{1}{4}\overline{KE}^2$, d'où : $3\overline{KE}^2 = 4\overline{E\Gamma}^2$ ou, comme le texte : $\frac{\overline{KE}^2}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{4}{3}$; donc : $\frac{\text{carré de la droite entière}}{\text{5 carrés du petit segment}} > \frac{\overline{KE}^2}{\overline{E\Gamma}^2}$. Or, on a démontré que la base du triangle équilatéral équivalent au triangle isocèle BEΔ tombe entre les bases ΘH et KΛ ; donc, cette base est plus petite que KE ; donc, on a, à fortiori : $\frac{\text{carré de la droite entière}}{\text{5 carrés du petit segment}} > \frac{\text{carré du côté du triangle équivalent au triangle } BE\Delta}{\overline{\Theta E}^2 = \overline{E\Delta}^2}$.

LX.

Les lemmes consacrés à la comparaison des [cinq figures] (1) ayant une surface équivalente ont ainsi été démontrés à part, et il s'agit maintenant de démontrer successivement que l'icosaèdre est la figure la plus grande ; qu'après lui viennent le dodécaèdre, puis l'octaèdre ; qu'après l'octaèdre vient le cube, et que la pyramide (2) est la figure la plus petite.

Proposition 52. — Traitons en premier lieu du cube et de la pyramide (3), et soient ΑΒΓ le carré du cube et ΔΕΖ le triangle de la pyramide. Dès lors, puisqu'on suppose que les surfaces de ces figures sont équivalentes, six carrés ΑΒ sont donc équivalents à quatre triangles ΔΕΖ. En conséquence, le rapport du triangle ΔΕΖ au carré ΑΒ est celui de 3 à 2.



Menons la perpendiculaire ΗΘ du sommet de la pyramide sur le plan (4), et menons la droite de jonction ΕΘ. Il est donc clair que le point Θ est le centre du cercle décrit autour du triangle ΔΕΖ (5) ; par conséquent, le carré de la droite ΔΕ, c'est-à-dire de la droite ΕΗ, est triple du carré de la droite ΕΘ. De plus, l'angle compris sous les droites ΕΘ, ΘΗ est droit ; donc, le rapport du carré de la droite ΗΕ au carré de la droite ΗΘ est celui de 3 à 2, c'est-à-dire de 54 à 36 ; tandis que le rapport du carré de la droite ΗΘ au carré du tiers de la droite ΗΘ est celui de 36 à 4 ; par conséquent, le rapport

1. Restauration due à Hultsch, d'après Commandin (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 452, l. 14).
2. C'est-à-dire le tétraèdre régulier.
3. C'est-à-dire démontrons d'abord que le cube est plus grand que le tétraèdre de surface équivalente.
4. C'est-à-dire sur le plan de base ΔΕΖ du tétraèdre.
5. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 9 : « Si l'on a un cercle dans une sphère, et si de l'un des pôles de ce cercle on mène une ligne droite perpendiculaire sur le cercle, celle-ci tombera au centre du cercle et, prolongée, elle tombera sur l'autre pôle du cercle ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 14.

du carré de la droite HE, c'est-à-dire de la droite EZ, au carré du tiers de la droite HΘ est celui de 54 à 4 [1]. Et puisque le carré d'un côté de tout triangle équilatéral est plus petit que le quadruple de ce triangle équilatéral, il s'ensuit que quatre triangles ΔEZ, constituant six carrés de la droite AΓ, sont plus grands que le carré de la droite EZ. En conséquence, le rapport du carré de la droite AΓ au carré de la droite EZ est plus grand que celui de 1 à 6, c'est-à-dire de 9 à 54. Or, comme on l'a démontré, le rapport du carré de la droite EZ au carré du tiers de la droite HΘ est celui de 54 à 4 ; donc, par raison d'identité, le rapport du carré de la droite AΓ au carré du tiers de la droite HΘ est plus grand que celui de 9 à 4 et, par suite, le rapport de la droite simple AΓ au tiers de la droite HΘ est plus grand que celui de 3 à 2. Or, on a démontré que le rapport du triangle ΔEZ au carré AB est celui de 3 à 2 ; donc, le rapport du triangle ΔEZ au carré AB est plus petit que celui de la droite AΓ au tiers de la droite HΘ et, inversement, le rapport de la droite AΓ au tiers de la droite HΘ est plus grand que celui du triangle ΔEZ au carré AB [2]. Dès lors, si nous faisons en

1. Explicitement : le point Θ étant le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ΔEZ, on a (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 12, énoncée, p. 115, n. 4) : $\overline{\Delta E}^2 = 3\overline{E\Theta}^2$. Or, le point H étant le sommet du tétraèdre, on a : EH = ΔE ; donc : $\overline{EH}^2 = 3\overline{E\Theta}^2$, d'où : $\frac{\overline{EH}^2}{\overline{E\Theta}^2} = \frac{3}{1}$, d'où : $\frac{\overline{EH}^2}{\overline{EH}^2 - \overline{E\Theta}^2} = \frac{3}{2}$. Or, le triangle rectangle EΘH donne : $\overline{EH}^2 - \overline{E\Theta}^2 = \overline{H\Theta}^2$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{EH}^2}{\overline{H\Theta}^2} = \frac{3}{2} = \frac{54}{36}$. Or $\frac{1}{9}\overline{H\Theta}^2 = (\frac{1}{3}H\Theta)^2$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Theta H}^2}{(\frac{1}{3}H\Theta)^2} = \frac{9}{1} = \frac{36}{4}$; donc : $\frac{\overline{EH}^2}{\overline{H\Theta}^2} \times \frac{\overline{H\Theta}^2}{(\frac{1}{3}H\Theta)^2} = \frac{54}{36} \times \frac{36}{4}$, ou, comme le texte : $\frac{\overline{EH}^2}{(\frac{1}{3}H\Theta)^2} = \frac{54}{4}$.

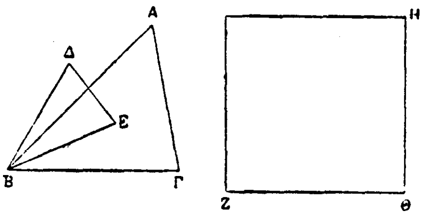
2. Le triangle équilatéral ΔEZ donne (prop. 38 ou lemme 1, p. 316) : $\overline{EZ}^2 < 4$ triangles ΔEZ. Or, par hypothèse; 4 triangles ΔEZ = 6 $\overline{\Gamma A}^2$; donc : $6\,\overline{A\Gamma}^2 > \overline{EZ}^2$; d'où, comme le texte : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{EZ}^2} > \frac{1}{6} = \frac{9}{54}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente, et considérant que EH = EZ, on a : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{EZ}^2} \times \frac{\overline{EZ}^2}{(\frac{1}{3}H\Theta)^2} > \frac{9}{54} \times \frac{54}{4}$ ou, comme le texte : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{(\frac{1}{3}H\Theta)^2} > \frac{9}{4}$ d'où : $\frac{A\Gamma}{\frac{1}{3}H\Theta} > \frac{3}{2}$ Or, la relation d'hypothèse précitée donne : $\frac{\text{triangle } \Delta EZ}{\overline{A\Gamma}^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, donc, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{\frac{1}{3}H\Theta} > \frac{\text{triangle } \Delta EZ}{\overline{A\Gamma}^2}$.

sorte que le triangle ΔEZ soit à une autre surface comme la droite AΓ est au tiers de la droite HΘ, il sera à une surface plus petite que le carré AB. Or, le cube est le carré AB multiplié par la hauteur AΓ, et la pyramide est le triangle ΔEZ multiplié par une hauteur qui est le tiers de la perpendiculaire amenée du sommet de la pyramide sur le triangle ΔEZ [1] ; donc, le cube est plus grand que la pyramide [2].

LXI.

PROPOSITION 53. — L'octaèdre est plus grand que le cube [3].

En effet, soit ABΓ le triangle de l'octaèdre et ZH le carré du cube. Soit ΔE la perpendiculaire menée, du centre de la sphère qui entoure l'octaèdre, sur le triangle ABΓ, et menons les droites de jonction ΔB, BE. Dès lors, puisqu'on suppose que huit triangles ABΓ sont équivalents à six carrés ZH, il s'ensuit que le rapport du carré ZH au triangle ABΓ est celui de 4 à 3. Or, d'une manière générale, en vertu du premier lemme, le carré d'un côté de tout triangle équilatéral est plus grand que le double de ce triangle équilatéral ; donc, si l'on considère que le carré de la droite ZΘ est 4, le carré



1. EUCLIDE, liv. VII, prop. 7 : « Tout prisme ayant une base triangulaire peut se diviser en trois pyramides égales entre elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires ». Et corollaire : « D'après cela, il est évident que toute pyramide est la troisième partie d'un prisme qui a la même base et la même hauteur qu'elle ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, pp. 147 et 149.

2. Soit une surface $\alpha^2 < \overline{A\Gamma}^2$ telle que l'on ait : $\frac{A\Gamma}{\frac{1}{3}H\Theta} = \frac{\text{triangle } \Delta EZ}{\alpha^2}$, d'où : $\alpha^2 \times A\Gamma = \text{triangle } \Delta EZ \times \frac{1}{3} H\Theta$, c'est-à-dire : prisme de base α^2 et de hauteur $A\Gamma =$ prisme de base triangulaire ΔEZ et de hauteur $\frac{1}{3} H\Theta$; donc, prisme de base $\overline{A\Gamma}^2$ et de hauteur $A\Gamma =$ cube $>$ prisme de base triangulaire ΔEZ et de hauteur $\frac{1}{3} H\Theta =$ pyramide de base triangle ΔEZ et de hauteur HΘ. Il y a lieu de remarquer que, sans passer par la considération d'une surface plus petite que la face du cube, la dernière inégalité de la note avant-précédente donnait directement : $\overline{A\Gamma}^3 >$ triangle $\Delta EZ \times \frac{1}{3} H\Theta$, c'est-à-dire cube $>$ tétraèdre.

3. Sous-entendu : de même surface.

de la droite ΒΓ est plus grand que 6. En conséquence, le rapport de 4 à 6, c'est-à-dire de 36 à 54, est plus grand que celui du carré de la droite ΖΘ au carré de la droite ΒΓ (1). Et puisque, en vertu du second lemme, le rapport du carré de la droite ΒΔ au carré de la droite ΔΕ est celui de 3 à 1, et que le carré de la droite ΒΔ équivaut aux carrés des droites ΒΕ, ΕΔ, il s'ensuit que le rapport du carré de la droite ΔΕ au carré de la droite ΕΒ est celui de 1 à 2 (2). Or, le rapport du carré de la droite ΒΓ au carré de la droite ΒΕ est celui de 6 à 2 en vertu de la proposition 12 du livre XIII des *Éléments* ; donc, le rapport du carré de la droite ΔΕ au carré de la droite ΒΓ est celui de 1 à 6, c'est-à-dire de 9 à 54. Mais, le rapport du carré du tiers de la droite ΔΕ au carré de la droite ΔΕ est celui de 1 à 9 (car le triple en puissance est l'ennuple) (3) ; donc, le rapport du carré du tiers de la droite ΔΕ au carré de la droite ΒΓ est celui de 1 à 54. Or, on a démontré que le rapport de 36 à 54 est plus grand que celui du carré de la droite ΖΘ au carré de la droite ΒΓ ; donc, par raison d'identité, le rapport de 36 à 1 est plus grand que celui du carré de la droite ΖΘ au carré du tiers de la droite ΔΕ et, par suite, le rapport simple de 6 à 1 est plus grand que celui de la droite ΖΘ au tiers de la droite ΔΕ (4). Or, le rapport de six carrés ΖΗ à un de ces

---

1. On a par hypothèse : 8 triangles ΑΒΓ = 6 carrés ΖΗ = $6\overline{Z\Theta}^2$, d'où : $\frac{\overline{Z\Theta}^2}{\text{triangle } AB\Gamma} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, d'où : triangle $AB\Gamma = \frac{3}{4}\overline{Z\Theta}^2$. Or, le triangle équilatéral ΑΒΓ donne (prop. 38, ou lemme 1, voir p. 316) : $\overline{B\Gamma}^2 > 2$ triangles ΑΒΓ ; donc : $\overline{B\Gamma}^2 > 2 \times \frac{3}{4}\overline{Z\Theta}^2$ ou, comme le texte : $\overline{B\Gamma}^2 > \frac{6}{4}\overline{Z\Theta}^2$, d'où : $\frac{4}{6} = \frac{36}{54} > \frac{\overline{Z\Theta}^2}{\overline{B\Gamma}^2}$.

2. La proposition 39, ou lemme 2 (voir p. 317) a démontré que le carré de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan du triangle de l'octaèdre inscrit dans cette sphère équivaut au tiers du carré du rayon de la sphère, c'est-à-dire que l'on a : $\frac{1}{3}\overline{B\Delta}^2 = \overline{\Delta E}^2$, d'où : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2} = \frac{3}{1}$. Or, le triangle rectangle ΒΕΔ donne : $\overline{B\Delta}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{\Delta E}^2$; donc : $\frac{\overline{BE}^2 + \overline{\Delta E}^2}{\overline{\Delta E}^2} = \frac{3}{1}$, d'où : $\frac{\overline{BE}^2 + \overline{\Delta E}^2 - \overline{\Delta E}^2}{\overline{\Delta E}^2} = \frac{2}{1}$, ou, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta E}^2}{\overline{BE}^2} = \frac{1}{2}$.

3. La phrase entre parenthèses a probablement été interpolée (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. I, p. 456, l. 21).

4. Considérant le triangle équilatéral ΑΒΓ et le rayon ΒΕ du cercle circonscrit, on a (Euclide, liv. XIII, prop. 12, énoncée p. 115, n. 4) : $\overline{B\Gamma}^2 = 3\overline{BE}^2$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{BE}^2} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2}$, d'où, par raison d'identité avec la dernière expres-

carrés est celui de 6 à 1, et six de ces carrés sont équivalents à huit triangles ΑΒΓ ; donc, le rapport de huit triangles ΑΒΓ au carré ΖΗ est plus grand que celui de la droite ΖΘ au tiers de la droite ΔΕ. Or, l'octaèdre est constitué par huit triangles ΑΒΓ multipliés par une hauteur qui est le tiers de la droite ΔΕ ; tandis que le cube est constitué par le carré ΖΗ multiplié par la hauteur ΘΖ ; donc, l'octaèdre est plus grand que le cube (1).

LXII.

Proposition 54. — Démontrons que l'icosaèdre est plus grand que l'octaèdre (2).

Soient ΑΒΓ le triangle de l'octaèdre et ΔΕΖ celui de l'icosaèdre. Menons, des centres des sphères qui entourent ces solides, les perpendiculaires ΗΘ, ΚΛ sur les plans de ces solides. Dès lors, puisqu'on a démontré, dans le théorème 7 précédemment exposé (3), que douze carrés de la droite ΗΘ sont plus grands que cinq carrés de la droite ΕΖ ; [tandis que cinq carrés de la droite ΕΖ] (4)

---

sion de la note avant-précédente, on a : $\frac{\overline{\Delta E}^2}{\overline{B\Gamma}^2} = \frac{1}{6} = \frac{9}{54}$. Or, $(\frac{1}{3}\Delta E)^2 = \frac{1}{9}\overline{\Delta E}^2$, d'où : $\frac{(\frac{1}{3}\Delta E)^2}{\overline{\Delta E}^2} = \frac{1}{9}$; donc : $\frac{(\frac{1}{3}\Delta E)^2}{\overline{\Delta E}^2} \times \frac{\overline{\Delta E}^2}{\overline{B\Gamma}^2} = \frac{1}{9} \times \frac{9}{54}$ ou, comme le texte : $\frac{(\frac{1}{3}\Delta E)^2}{\overline{BE}^2} = \frac{1}{54}$. Or, on a démontré (voir page 353, note 1) que l'on a : $\frac{36}{54} > \frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{B\Gamma}^2}$; donc, par raison d'identité : $\frac{36}{1} > \frac{\overline{Z\Theta}^2}{(\frac{1}{3}\Delta E)^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{6}{1} > \frac{Z\Theta}{\frac{1}{3}\Delta E}$.

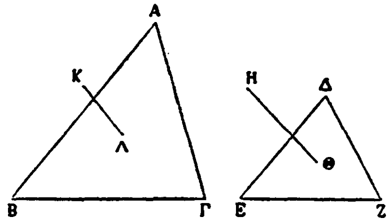
1. On peut écrire : $\frac{6\overline{Z\Theta}^2}{\overline{Z\Theta}^2} = \frac{6}{1}$. Or, par hypothèse : $6\overline{Z\Theta}^2 = 8$ triangles ΑΒΓ ; donc, comme le texte : $\frac{8 \text{ triangles } AB\Gamma}{\overline{Z\Theta}^2} = \frac{6}{1}$, d'où, en présence de la dernière inégalité de la note précédente, on a, comme le texte : $\frac{8 \text{ triangles } AB\Gamma}{\overline{Z\Theta}^2} > \frac{Z\Theta}{\frac{1}{3}\Delta E}$, d'où : 8 triangles $AB\Gamma \times \frac{1}{3}\Delta E > \overline{Z\Theta}^3$, c'est-à-dire : 8 prismes de base triangulaire ΑΒΓ et de hauteur $\frac{1}{3}\Delta E$, ou 8 pyramides de base ΑΒΓ et de hauteur ΔΕ, ou volume de l'octaèdre > cube de base $\overline{Z\Theta}^2$ et de hauteur ΖΘ.

2. Sous-entendu : de même surface.

3. Proposition 43, ou lemme 7 (voir p. 326).

4. Restauration due à Commandin dans sa version latine (cfr. *loc. cit.*, p. 175,

valent deux carrés de la droite ΒΓ (parce que cinq triangles ΔΕΖ valent aussi deux triangles ΑΒΓ, vu que, au quadruple, vingt triangles valent huit triangles, et que, dans les figures homologues qui sont entre elles en raison doublée de côté homologue à côté homologue, le carré est au carré comme le triangle est au triangle) (1), et que deux carrés de la droite ΒΓ valent douze carrés de la droite ΚΛ (car on a démontré antérieurement que le rapport du carré de la droite ΒΓ au carré de la droite ΚΛ est celui de 6 à 1) (2) ; par conséquent, douze carrés de la droite ΗΘ sont plus grands que douze carrés de la droite ΚΛ ; donc, la droite ΘΗ est plus grande que la droite ΚΛ, et le tiers de la droite ΘΗ est plus grand que le tiers de la droite ΚΛ. Et puisque l'icosaèdre est constitué par vingt triangles ΔΕΖ multipliés par le tiers de la droite ΗΘ comme hauteur ; que l'octaèdre est constitué par huit triangles ΑΒΓ multipliés par le tiers de la droite ΚΛ comme hauteur, et que, par hypothèse, vingt triangles ΔΕΖ sont équivalents à huit triangles ΑΒΓ, il s'ensuit que l'icosaèdre est plus grand que l'octaèdre (3).



l. 25), puis introduite dans le texte grec par Eisenmann de la manière qui a été adoptée dans l'édition critique de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 458, l. 12).

1. La phrase mise entre parenthèses est admise sans réserve dans l'édition critique de Hultsch. Néanmoins, nous inclinons à l'attribuer à un commentateur ayant voulu rappeler, en termes moins corrects d'ailleurs, la proposition 20 du livre VI d'Euclide qui est énoncée : « Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones ; et le polygone a avec le polygone une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 333.

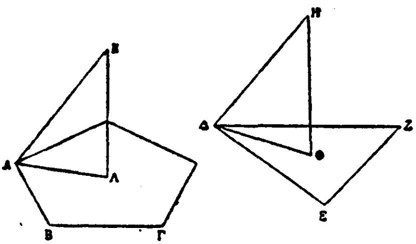
2. Proposition 53 (voir p. 352).

3. Explicitement : La proposition 43 a démontré que le dodécuple carré de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère circonscrite sur une face triangulaire de l'icosaèdre est plus grand que le quintuple carré de l'arête de l'icosaèdre, c'est-à-dire que l'on a : $12\overline{\mathrm{H}\Theta}^2 > 5\overline{\mathrm{EZ}}^2$ (I). Or, par hypothèse, l'icosaèdre et l'octaèdre considérés ont même surface, c'est-à-dire que l'on a : 20 triangles ΔΕΖ = 8 triangles ΑΒΓ (II), d'où : $\frac{\text{triangle } \Delta\mathrm{EZ}}{\text{triangle } \mathrm{AB}\Gamma} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. Or, la similitude des triangles ΔΕΖ, ΑΒΓ donne : $\frac{\text{triangle } \Delta\mathrm{EZ}}{\text{triangle } \mathrm{AB}\Gamma} = \frac{\overline{\mathrm{EZ}}^2}{\overline{\mathrm{B}\Gamma}^2}$; donc : $\frac{\overline{\mathrm{EZ}}^2}{\overline{\mathrm{B}\Gamma}^2} = \frac{2}{5}$, d'où, comme le texte : $5\overline{\mathrm{EZ}}^2 = 2\overline{\mathrm{B}\Gamma}^2$ (III). Or, on a démontré (prop. 53, voir

LXIII.

PROPOSITION 55. — L'icosaèdre est plus grand que le dodécaèdre (1).

En effet, soient ΑΒΓ un des pentagones du dodécaèdre et ΔΕΖ un des triangles de l'icosaèdre. Menons, des centres des sphères qui entourent ces figures solides, les perpendiculaires ΗΘ, ΚΛ sur les plans ΔΕΖ, ΑΒΓ, et menons les droites de jonction ΗΔ, ΘΔ, ΚΑ, ΑΛ. Dès lors, puisqu'il a été démontré au théorème 12 précédemment exposé (2) qu'un même cercle entoure le [pentagone du dodécaèdre et le] (3) triangle de l'icosaèdre inscrit dans la même sphère que le dodécaèdre, il s'ensuit que la droite ΑΛ est le rayon du cercle qui entoure le triangle d'un icosaèdre (4) ; que la droite ΚΛ est la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur ce triangle ; que la



p. 353, n. 4) que, dans le triangle ΑΒΓ de l'octaèdre, on a : $\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{K\Lambda}}^2} = \frac{6}{1} = \frac{12}{2}$; donc, comme le texte : $2\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 = 12\overline{\mathrm{K\Lambda}}^2$, d'où, en présence de la relation (III) on a : $5\overline{\mathrm{EZ}}^2 = 12\overline{\mathrm{K\Lambda}}^2$, d'où, en présence de la relation (I) on a, comme le texte : $12\overline{\mathrm{H\Theta}}^2 > 12\overline{\mathrm{K\Lambda}}^2$, d'où : $\mathrm{H\Theta} > \mathrm{K\Lambda}$, d'où, comme le texte : $\frac{1}{3}\mathrm{H\Theta} > \frac{1}{3}\mathrm{K\Lambda}$ (IV). Or, on a : volume de l'icosaèdre = 20 triangles ΔΕΖ × hauteur $\frac{1}{3}\mathrm{H\Theta}$, et volume de l'octaèdre = 8 triangles ΑΒΓ × hauteur $\frac{1}{3}\mathrm{K\Lambda}$, d'où, en présence de l'égalité d'hypothèse (II) et de l'inégalité (IV) on a : 20 prismes de base triangulaire ΔΕΖ et de hauteur $\frac{1}{3}\mathrm{H\Theta}$, ou 20 pyramides de base ΔΕΖ et de hauteur ΗΘ, ou volume de l'icosaèdre > 8 prismes de base triangulaire ΑΒΓ et de hauteur $\frac{1}{3}\mathrm{K\Lambda}$, ou 8 pyramides de base ΑΒΓ et de hauteur ΚΛ, ou volume de l'octaèdre.

1. Sous-entendu : de même surface.
2. Proposition 48 ou lemme 12, voir p. 336.
3. Restauration due à Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 176, *commentarius*, l. 44).
4. C'est-à-dire que ΑΛ est le rayon du cercle qui entoure le pentagone ΑΒΓ du dodécaèdre et qui entoure aussi le triangle de l'icosaèdre inscrit dans la même sphère de rayon ΚΑ, triangle semblable au triangle ΔΕΖ de l'icosaèdre inscrit dans la sphère de rayon ΗΔ.

droite KA est le rayon de la sphère, mais, en plus, que le triangle HΘΔ est établi semblablement, [ce pourquoi il est semblable au triangle KΛA ; car le rayon de la sphère qui entoure l'icosaèdre est à la droite ΔΘ comme le rayon de la sphère qui entoure le dodécaèdre est à la droite AΛ. Mais, la droite EΔ est aussi à la droite ΔΘ comme le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle qui accepte le triangle de l'icosaèdre ainsi que le pentagone du dodécaèdre est à la droite AΛ ; donc, le rayon HΔ de la sphère est aussi à la droite ΔΘ comme le rayon KA de la sphère est à la droite AΛ. De plus, les angles aux points Λ, Θ sont droits ; donc, le triangle AKΛ est semblable au triangle ΔHΘ] (1). D'autre part, puisqu'il a été démontré au théorème 14 précédemment exposé (2) que vingt triangles ΔEZ, c'est-à-dire douze pentagones ABΓ, sont plus grands que vingt triangles inscrits dans le cercle qui entoure le pentagone ABΓ, il est clair que le cercle décrit autour du triangle ΔEZ est aussi plus grand que celui qui est décrit autour du pentagone ABΓ ; en sorte que la droite ΔΘ est aussi plus grande que la droite AΛ. Et les triangles ΔHΘ, AKΛ sont semblables ; donc, la droite AΛ est à la droite ΛK comme la droite ΔΘ est à la droite ΘH et, par permutation, la droite HΘ est à la droite KΛ comme la droite ΔΘ est à la droite AΛ. Or, la droite ΔΘ est plus grande que la droite AΛ ; donc, la droite HΘ est aussi plus grande que la droite KΛ, et le tiers de la droite HΘ est donc plus grand que le tiers de la droite KΛ. Or, l'icosaèdre est constitué par vingt triangles ΔEZ multipliés par le tiers de la droite HΘ ; tandis que le dodécaèdre est constitué par douze pentagones ABΓ multipliés par le tiers de la droite KΛ, et l'on a supposé que vingt triangles ΔEZ sont équivalents à douze pentagones ABΓ ; par conséquent, l'icosaèdre est plus grand que le dodécaèdre (3).

1. La longue phrase incidente, que l'édition de Hultsch place entre crochets, a probablement été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 460, ll. 15-25). Elle constitue un commentaire prolixe, et d'ailleurs inutile, en présence de la conclusion légitime de similitude qui précède immédiatement.

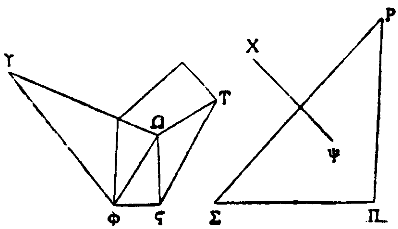
2. Proposition 49 ou lemme 14, voir p. 343.

3. Explicitement : par hypothèse, l'icosaèdre et le dodécaèdre inscrits dans deux sphères différentes ont même surface, c'est-à-dire que l'on a : 20 triangles ΔEZ de l'icosaèdre = 12 pentagones ABΓ du dodécaèdre. Dès lors, si l'on considère la sphère de centre K, le cercle de centre Λ entourant, outre

LXIV.

PROPOSITION 56. — Le dodécaèdre est plus grand que l'octaèdre [1].

Soient ΦϚΤ le pentagone du dodécaèdre ainsi que la perpendiculaire ΥΩ menée, du centre de la sphère entourant ce dodécaèdre, sur le pentagone ΦϚΤ, et menons les droites de jonction ΩΦ, ΩϚ, ΩΤ, ΥΦ ; soient, d'autre part, ΣΡΠ le triangle de l'octaèdre et la perpendiculaire ΧΨ, menée de la même manière, que l'on doit démontrer être plus petite que la perpendiculaire ΥΩ.



Mettons en évidence le théorème [2] qui a été admis pour la comparaison de l'icosaèdre et de l'octaèdre [3], au moyen duquel on a démontré que douze carrés de la droite ΟΝ sont plus grands que cinq carrés de la

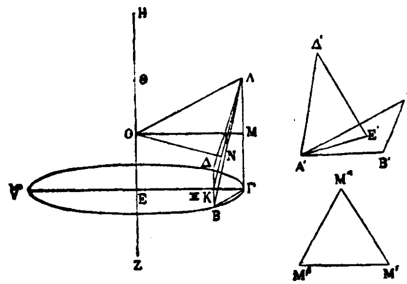
le pentagone ΑΒΓ, le triangle de l'icosaèdre inscrit dans la même sphère (prop. 48 ou lemme 12), triangle semblable au triangle ΔΕΖ de l'icosaèdre inscrit dans la sphère de centre Η, on a, dans la sphère de centre Κ (prop. 49 ou lemme 14) : 12 pentagones ΑΒΓ $>$ 20 triangles inscrits dans le même cercle ; donc, en présence de l'égalité d'hypothèse on a : 20 triangles ΔΕΖ inscrits dans le cercle de centre Θ $>$ 20 triangles inscrits dans le cercle de centre Λ, d'où : cercle de centre Θ $>$ cercle de centre Λ, d'où, comme le texte : $\Delta\Theta > \mathrm{A}\Lambda$. Or, la similitude des triangles ΔΗΘ, ΑΚΛ donne : $\frac{\mathrm{A}\Lambda}{\Lambda\mathrm{K}} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta\mathrm{H}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta\mathrm{H}}{\Lambda\mathrm{K}} = \frac{\Delta\Theta}{\mathrm{A}\Lambda}$; donc : $\Theta\mathrm{H} > \Lambda\mathrm{K}$; donc : $\frac{1}{3}\Theta\mathrm{H} > \frac{1}{3}\Lambda\mathrm{K}$. Or, volume de l'icosaèdre inscrit dans la sphère de centre Η $=$ 20 prismes de base triangulaire ΔΕΖ et de hauteur $\frac{1}{3}\mathrm{H}\Theta =$ 20 pyramides de base ΔΕΖ et de hauteur ΗΘ ; et volume du dodécaèdre inscrit dans la sphère de centre Κ $=$ 12 prismes de base pentagonale ΑΒΓ et de hauteur $\frac{1}{3}\mathrm{K}\Lambda =$ 12 pyramides de base pentagonale ΑΒΓ et de hauteur ΚΛ ; donc, en présence de l'égalité d'hypothèse et de l'inégalité précédente, on a, comme le texte : icosaèdre inscrit dans la sphère de centre Η $>$ dodécaèdre de même surface inscrit dans la sphère de centre Κ.

1. Sous-entendu : de même surface.

2. Sous-entendu : et la figure qui l'accompagne.

3. Le texte présente ici la petite interpolation : οὗ σημεῖον ἀστήρ, due à un commentateur ayant voulu rappeler une marque de renvoi en forme d'étoile, ou astérisque, dans l'un des manuscrits.

droite BΔ ([1]). Soit encore, comme dans le théorème qui précède ([2]), le triangle A′, B′, Γ′ de l'icosaèdre ([3]) et la perpendiculaire Δ′ E′ menée du point Δ′ ([4]). En conséquence, le triangle ΥΦΩ est semblable au triangle Δ′A′E′ et au triangle ONΛ ([5]) [et douze carrés de la droite Δ′E′ sont plus grands que cinq carrés de la droite B′Γ′, c'est-à-dire que douze carrés de la droite ΥΩ sont plus grands que cinq carrés de la droite ϚT] ([6]). Dès lors, puisque, en vertu du lemme 16 ([7]), il a été démontré que, si l'on a un triangle isocèle, tel que ϚΩT, ayant comme angle au point Ω les quatre cinquièmes de l'angle droit, ainsi qu'un triangle équilatéral qui lui soit équivalent, tel que $M^{\alpha}M^{\beta}M^{\gamma}$, le rapport du carré de la droite $M^{\alpha}M^{\beta}$ au carré de la droite ϚΩ est, si l'on découpe une droite en extrême et moyenne raison, plus petit



---

1. Voir proposition 43, ou lemme 7, p. 326.
2. Voir proposition 55, p. 356.
3. C'est-à-dire le triangle de l'icosaèdre inscrit dans la même sphère de rayon ΥΦ.
4. C'est-à-dire menée du centre Δ′ de la sphère circonscrite à l'icosaèdre auxiliaire.
5. La similitude de ces trois triangles se démontre forcément d'une manière trop longue, vu les propositions précédentes invoquées par le texte. Ainsi, par hypothèse, le cercle ΦϚT de la sphère de rayon ΥΦ est circonscrit au pentagone du dodécaèdre inscrit dans cette sphère et, par construction (voir prop. 43 et figure), le cercle ΛΔB de la sphère de rayon OΛ est circonscrit au triangle de l'icosaèdre inscrit dans cette sphère. Or, la proposition 48, ou lemme 12 (voir p. 336), a démontré qu'un même cercle entoure le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère ; donc, si l'on compare, comme dans la proposition 55 (voir p. 356), le triangle ΛΔB avec le triangle inscrit dans le cercle ΦϚT, lequel est le triangle A′B′Γ′, la similitude des triangles A′B′Γ′, ΛΔB entraîne, comme dans la proposition 55, la similitude des triangles A′Δ′E′, ΛON. Or, les triangles ΥΦΩ, A′Δ′E′ sont égaux, c'est-à-dire semblables, donc, comme le texte : le triangle ΥΦΩ est semblable aux triangles Δ′A′E′ et ΛON.
6. La phrase que nous mettons entre crochets a probablement été interpolée ; car, sa première partie, bien que vraie, n'intéresse pas la démonstration, et la seconde partie est erronée par suite de quelque corruption du texte, comme l'a fait remarquer Commandin en disant : « Corrupta haec sunt, ut opinor, neque enim vera ; quare si quis ea una cum antedictis de medio tollat, fortasse non errabit » (Cfr. *loc. cit.*, p. 179, *commentarius*, l. 11).
7. Proposition 51, ou lemme 16, voir p. 346.

que le rapport du carré de la droite entière à cinq fois le carré de son petit segment ; et puisque la droite ΕΓ est découpée en extrême et moyenne raison au point Ξ (1), il s'ensuit que le rapport de la droite ΕΓ à cinq fois le carré de la droite ΞΓ est plus grand que celui du carré de la droite $M^{\alpha}M^{\beta}$ au carré de la droite ϚΩ, c'est-à-dire que celui de quinze fois le carré de la droite $M^{\alpha}M^{\beta}$ à quinze fois le carré de la droite ϚΩ (2). Et puisqu'on a huit triangles ΣΡΠ équivalents à douze pentagones ΦϚΤ, c'est-à-dire soixante triangles ϚΩΤ, il s'ensuit que deux triangles ΞΡΠ sont aussi équivalents à quinze triangles ϚΩΤ, c'est-à-dire à quinze triangles $M^{\alpha}M^{\beta}M^{\gamma}$; en sorte que deux carrés de la droite ΣΠ sont équivalents à quinze carrés de la droite $M^{\beta}M^{\gamma}$. En conséquence, le rapport du carré de la droite ΕΓ à cinq fois le carré de la droite ΞΓ est plus grand que celui de deux carrés de la droite ΣΠ à quinze fois le carré de la droite ΩΦ, (car la droite ΩϚ est égale à la droite ΩΦ) (3). Or, deux carrés de la droite ΣΠ valent douze carrés de la droite ΧΨ comme on l'a démontré dans la comparaison du cube et de l'octaèdre (4) ; donc, le rapport du carré de la droite ΕΓ à cinq fois le carré de la droite ΞΓ est plus grand que celui de douze carrés de la droite ΧΨ à quinze carrés de la droite ΩΦ. De plus, la droite ΞΚ est égale à la droite ΚΓ ; donc, le rapport du carré de la droite ΕΓ à vingt

1. Proposition 43, ou lemme 7, p. 326.

2. Considérant le triangle isocèle ϚΩΤ dont la base ϚΤ est le côté du pentagone, on a : angle $\text{Ϛ}\Omega\text{T} = \frac{4}{5}$ angle droit ; considérant d'autre part un triangle équilatéral $M\alpha M\beta M\gamma$ équivalent au triangle isocèle ϚΩΤ, et considérant enfin qu'il a été démontré au cours de la proposition 43 (voir p. 329, n. 1) que la droite ΕΓ est découpée en extrême et moyenne raison en Ξ, on a (prop. 51, ou lemme 16) : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{5\overline{\Xi\Gamma}^2} > \frac{\overline{M\alpha M\beta}^2}{\overline{\Omega\text{Ϛ}}^2}$ ou, comme le texte : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{5\overline{\Xi\Gamma}^2} > \frac{15\,\overline{M\alpha M\beta}^2}{15\,\overline{\Omega\text{Ϛ}}^2}$.

3. L'octaèdre et le dodécaèdre considérés ont même aire par hypothèse, c'est-à-dire que l'on a : 8 triangles ΣΡΠ = 12 pentagones ΦϚΤ = 60 triangles ϚΩΤ, d'où, comme le texte : 2 triangles ΣΡΠ = 15 triangles ϚΩΤ. Or, on a par construction : triangle $M\alpha M\beta M\Gamma$ = triangle ϚΩΤ ; donc : 2 triangles ΣΡΠ = 15 triangles $M\alpha M\beta M\Gamma$, d'où, par substitution des carrés des côtés homologues de ces deux triangles équilatéraux, on a, comme le texte : $2\overline{\Sigma\Pi}^2 = 15\,\overline{M\beta M\Gamma}^2$, d'où la dernière inégalité de la note précédente devient : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{5\overline{\Xi\Gamma}^2} > \frac{2\overline{\Sigma\Pi}^2}{15\overline{\Omega\text{Ϛ}}^2}$. Or, on a : ΩΦ = ΩϚ ; donc, comme le texte : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{5\overline{\Xi\Gamma}^2} > \frac{2\overline{\Sigma\Pi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$.

4. Proposition 53, voir p. 352.

fois le carré de la droite ΚΓ est plus grand que celui de douze carrés de la droite ΧΨ à quinze carrés de la droite ΩΦ ; en sorte que le rapport de trente-six carrés de la droite ΕΓ, c'est-à-dire trente-six carrés de la droite ΓΛ, , à sept cent vingt carrés de la droite ΓΚ est plus grand que celui de 12 carrés de la droite ΧΨ à 15 carrés de la droite ΩΦ. Mais, la droite ΛΜ est à la droite ΙΜ comme la droite ΓΛ est à la droite ΓΚ ; tandis que la droite ΟΝ est à la droite ΝΙ comme la droite ΛΜ est à la droite ΜΙ ; en sorte que le rapport de trente-six carrés de la droite ΟΝ à sept cent vingt carrés de la droite ΝΙ, c'est-à-dire à quatre-vingts carrés de la droite ΛΙ (car on a démontré au lemme 7 que la droite ΙΛ est triple de la droite ΙΝ), c'est-à-dire à vingt carrés de la droite ΚΛ, c'est-à-dire à quinze carrés de la droite ΒΔ (car le carré de la droite ΒΔ est l'épitrite du carré de la droite ΚΛ), est plus grand que le rapport de douze carrés de la droite ΧΨ à quinze carrés de la droite ΩΦ ; en sorte que le rapport de douze carrés de la droite ΟΝ à cinq carrés de la droite ΒΔ est aussi plus grand que celui de douze carrés de la droite ΧΨ à quinze carrés de la droite ΩΦ. Or, cinq carrés de la droite ΒΔ valent quinze carrés de la droite ΝΛ conformément au livre XIII des *Éléments* (1) (car le centre du cercle décrit autour du triangle ΒΔΛ est le point Ν) (2) ; par conséquent, le rapport de douze carrés de la droite ΟΝ à quinze carrés de la droite ΛΝ, c'est-à-dire de douze carrés de la droite Δ'Ε' à quinze carrés de la droite Ε'Α', est plus grand que celui de douze carrés de la droite ΧΨ à quinze carrés de la droite ΩΦ. De plus, le triangle Δ'Α'Ε' est semblable au triangle ΥΦΩ ; donc, le rapport de douze carrés de la droite ΥΩ à quinze carrés de la droite ΩΦ [est plus grand que celui de douze carrés de la droite ΧΨ à quinze carrés de la droite ΩΦ] (3) ; par conséquent, la perpendiculaire ΥΩ est plus grande que la perpendiculaire ΧΨ. Or, on a supposé que les surfaces des figures

1. Euclide, liv. XIII, prop. 12, énoncée p. 115, n. 4.

2. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 1, corollaire, énoncé p. 317, n. 2. Le point Ο est le centre de la sphère à laquelle appartient le cercle décrit autour du triangle ΒΔΛ, et la droite ΟΝ est perpendiculaire au plan de ce cercle.

3. Restauration due à Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 179, *commentarius*, l. 45) et adoptée dans l'édition de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 468, l. 8-9).

solides sont équivalentes ; donc, le dodécaèdre est plus grand que l'octaèdre (1).

---

1. La dernière partie de la démonstration, d'une lecture un peu pénible, se déroule comme suit : Considérant le triangle ΣΡΠ de l'octaèdre et la perpendiculaire ΧΨ menée, du centre Χ de la sphère circonscrite à l'octaèdre, sur le plan du triangle, la proposition 53 a démontré subsidiairement (voir p. 353, n. 4), que l'on a : $2\overline{\Sigma\Pi}^2 = 12\overline{X\Psi}^2$; donc, l'inégalité $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{5\overline{\Xi\Gamma}^2} > \frac{2\overline{\Sigma\Pi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$ précédente (voir page 360, n. 3) devient, comme dans le texte : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{5\overline{\Xi\Gamma}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. Or, en posant $\Xi K = K\Gamma$ on a découpé ΕΓ en extrême et moyenne raison (voir prop. 43, p. 229, n. 1), d'où : $\Xi K + K\Gamma = 2K\Gamma$ ou : $\Xi\Gamma = 2K\Gamma$, d'où : $\overline{\Xi\Gamma}^2 = 4\overline{K\Gamma}^2$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{20\overline{K\Gamma}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$ ou : $\frac{36\overline{E\Gamma}^2}{720\overline{K\Gamma}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. Or, ΓΛ étant, par construction, le côté de l'hexagone inscrit dans le cercle ΑΒΓ (voir prop. 43, p. 327, n. 2), on a : $\Gamma\Lambda = E\Gamma$; donc : $\frac{36\overline{\Gamma\Lambda}^2}{720\overline{K\Gamma}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. D'autre part, la similitude des triangles ΛΜΙ, ΛΓΚ donne : $\frac{\Lambda M}{IM} = \frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma K}$, et la similitude des triangles rectangles ΛΜΙ, ΟΝΙ (voir prop. 43, p. 329, n. 4) donne : $\frac{ON}{NI} = \frac{\Lambda M}{IM}$; donc : $\frac{ON}{NI} = \frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma K}$, d'où l'inégalité précédente devient, comme le texte : $\frac{36\overline{ON}^2}{720\overline{NI}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. Or, on a démontré (prop. 43, p. 328, n. 8) que l'on a : $\Lambda I = 3NI$, d'où : $\overline{NI}^2 = \frac{1}{9}\overline{\Lambda I}^2$; donc : $\frac{36\overline{ON}^2}{80\overline{\Lambda I}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. Or, $\Lambda I = \frac{1}{2} K\Lambda$, d'où : $\overline{\Lambda I}^2 = \frac{1}{4}\overline{K\Lambda}^2$; donc, comme le texte ; $\frac{36\overline{ON}^2}{20\overline{K\Lambda}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. Or, $\overline{K\Lambda}^2 = \overline{\Lambda B}^2 - \overline{KB}^2 = \overline{\Lambda B}^2 - \frac{1}{4}\overline{\Lambda B}^2 = \frac{3}{4}\overline{\Lambda B}^2$, d'où : $20\overline{K\Lambda}^2 = 15\overline{\Lambda B}^2$, donc, comme le texte : $\frac{36\overline{ON}^2}{15\overline{\Lambda B}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$ ou : $\frac{12\overline{ON}^2}{5\overline{\Lambda B}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. Or, Ν est le centre et ΝΛ le rayon du cercle décrit autour du triangle équilatéral ΔΛΒ ; donc (Euclide, liv. XIII, prop. 12), on a : $\overline{B\Lambda}^2 = 3\overline{N\Lambda}^2$ ou : $5\overline{B\Lambda}^2 = 15\overline{N\Lambda}^2$; donc : comme le texte : $\frac{12\overline{ON}^2}{15\overline{N\Lambda}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. Or, on a démontré plus haut que les triangles ΟΛΝ, Δ'Α'Ε' sont semblables ; donc : $\frac{ON}{N\Lambda} = \frac{\Delta'E'}{A'E'}$, d'où : $\frac{12\overline{ON}^2}{15\overline{N\Lambda}^2} = \frac{12\overline{\Delta'E'}^2}{15\overline{A'E'}^2}$; donc, comme le texte : $\frac{12\overline{\Delta'E'}^2}{15\overline{A'E'}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$. Or, on a démontré plus haut que les triangles Δ'Α'Ε', ΥΦΩ sont semblables ; donc : $\frac{\Delta'E'}{A'E'} = \frac{\Upsilon\Omega}{\Omega\Phi}$; donc, comme le texte : $\frac{12\overline{\Upsilon\Omega}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2} > \frac{12\overline{X\Psi}^2}{15\overline{\Omega\Phi}^2}$, d'où : $\Upsilon\Omega > X\Psi$. Or, le dodécaèdre et l'octaèdre considérés ayant même aire, on a : 12 pentagones ΦϚΤ = 8 triangles ΣΡΠ ; donc : 12 pentagones ΦϚΤ $\times \frac{1}{3}\Upsilon\Omega >$ 8 triangles ΣΡΠ $\times \frac{1}{3} X\Psi$ ou : 12 prismes de base pentagonale ΦϚΤ et de hauteur $\frac{1}{3}\Upsilon\Omega >$ 8 prismes de base triangulaire ΣΡΠ et de hauteur $\frac{1}{3} X\Psi$

Proposition 57. — Il résulte clairement des propositions démontrées ci-dessus que, parmi les cinq figures qu'on appelle aussi polyèdres, celle qui est plus polyédrique [1] est continuellement plus grande, et l'on reconnaîtra de la manière suivante, qu'en dehors de ces cinq figures, il est impossible d'en trouver d'autres qui soient comprises sous des polygones équilatéraux égaux et semblables [2].

Tout angle solide doit être constitué par trois angles plans [3] au moins ; et si les angles qui comprennent l'angle solide sont au nombre de trois ou plus, ils sont toujours plus petits que quatre angles droits [4]. En conséquence, un angle solide ne peut pas être compris sous des angles d'hexagone ou sous ceux d'une autre figure rectiligne plus polygonale (car trois de ces angles qui pourraient au moins le comprendre ne sont pas plus petits que quatre angles droits) ; tandis qu'il peut être compris sous trois angles seulement du pentagone, comme cela se présente pour le dodécaèdre. Derechef, quatre angles ou plus du carré ne peuvent pas comprendre un angle solide (car ils ne sont pas plus petits que quatre angles droits) ; tandis que trois de ces angles comprennent l'angle du cube. Enfin, de la même façon, six angles ou plus du triangle équilatéral ne sont pas plus petits que quatre angles droits et, par là même, ils ne comprendront pas un angle solide ; tandis que cinq, quatre et trois de ces angles pourront le comprendre, et l'angle de l'icosaèdre sera compris sous cinq de ces

---

ou : 12 pyramides de base $\Phi\varsigma T$ et de hauteur $\Upsilon\Omega >$ 8 pyramides de base $\Sigma P \Pi$ et de hauteur $X\Psi$ ou : volume dodécaèdre > volume octaèdre.

1. πολυεδρότερον, la (figure) qui a des bases plus nombreuses.

2. Cette proposition doit être rapprochée de la proposition 18 du livre XIII d'Euclide : « Exposer les côtés des cinq figures, et les comparer entre eux. » (Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 289), et Scolie : « Je dis aussi, qu'excepté les cinq figures dont nous venons de parler ; on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 298.

3. Euclide, liv. XI, déf. 11 : « Un angle solide est l'inclinaison mutuelle de plus de deux lignes qui se rencontrent et qui ne sont pas dans une même surface. Autrement : Un angle solide est celui qui est compris par plus de deux angles plans qui ne sont pas dans une même surface et qui sont construits en un seul point. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 3.

4. Euclide, liv. XI, prop. 21 : « Tout angle solide est compris sous des angles, plans qui sont plus petits que quatre angles droits ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 43.

angles, celui de l'octaèdre sous quatre, et celui de la pyramide sous trois. Il résulte donc manifestement de ce que nous venons de dire, qu'à l'exception de ces derniers angles solides, il n'y en a pas d'autre qui soit constitué par des angles égaux d'un même polygone ; en sorte qu'en dehors des cinq polyèdres dont nous venons de parler, il n'est pas possible d'en trouver un autre qui soit contenu sous des polygones égaux et semblables.

FIN DU Ier VOLUME

Imprimé par Desclée De Brouwer et Cie, Bruges (Belgique) — 7063

PAPPUS D'ALEXANDRIE

LA COLLECTION MATHÉMATIQUE

ŒUVRE TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES

PAR

PAUL VER EECKE

INGÉNIEUR DES MINES
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL
COMMANDEUR DE L'ORDRE DE LÉOPOLD

TOME SECOND

Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique

DESCLÉE DE BROUWER ET Cie

PARIS (VIIe) | BRUGES
76bis, RUE DES SAINTS-PÈRES | 22, QUAI AUX BOIS

1933

LIVRE VI DE LA COLLECTION DE PAPPUS D'ALEXANDRIE

IL CONTIENT LES SOLUTIONS DES QUESTIONS EMBARRASSANTES QUI SE PRÉSENTENT DANS LA PETITE COLLECTION ASTRONOMIQUE (1).

Comme beaucoup de ceux qui professent le domaine astronomique (2) se sont enquis avec trop peu de soin au sujet de ses propositions, ils en ajoutent certaines comme étant nécessaires et en omettent d'autres comme n'étant pas nécessaires. C'est ainsi que, par exemple, à propos du sixième théorème du troisième livre des *Sphériques* de Théodose (3), ils disent que chacun des cercles les plus grands doit être découpé à angles droits par celui qui passe par les pôles de la sphère, alors que ce n'est pas toujours

1. La petite collection astronomique se compose des ouvrages suivants que l'École d'Alexandrie opposait au grand ouvrage astronomique intitulé l'*Almageste* de Claude Ptolémée : les trois livres des *Sphériques* de Théodose de Tripoli ; les *Données*, l'*Optique*, la *Catoptrique* et les *Phénomènes* d'Euclide; le traité *Des Habitations* et les deux livres *Des Jours et des Nuits* de Théodose ; le traité *De la Sphère en mouvement* et les deux livres *Du Lever et du Coucher des étoiles errantes* d'Autolycus; le traité *Des Grandeurs et des Distances du Soleil et de la Lune* d'Aristarque de Samos; le traité *Des Ascensions* d'Hypsiclès et les trois livres *Des Sphériques* de Ménélaüs (Voir *Bibliothèque grecque* de Fabricius, édition de Harles, vol. II, p. 16).

2. ὁ ἀστρονομούμενος τόπος, expression dans laquelle τόπος (lieu) a le sens de ce qui embrasse la matière d'une science ou d'une discipline, c'est-à-dire le sens de champ ou domaine (astronomique).

3. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. III, prop. 6 : « Si le pôle de parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand; si deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles, coupent ce grand cercle à angles droits; si l'on découpe, sur le cercle oblique, d'un même côté du plus grand des parallèles, des arcs égaux consécutifs, et si, par les points ainsi déterminés et par le pôle, on décrit des cercles les plus grands, ceux-ci découperont, dans leur intervalle, des arcs inégaux sur le plus grand des parallèles; et l'arc plus rapproché du cercle le plus grand primitif sera continuellement plus grand que celui qui en est plus éloigné ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 96.

le cas. Il en est de même pour le deuxième théorème des *Phénomènes* d'Euclide (1) où ils négligent d'indiquer combien de fois le zodiaque (2) sera perpendiculaire à l'horizon (3). Enfin, au quatrième théorème du traité *Des Jours et des Nuits*, ils dénaturent Théodose, et omettent, comme n'étant pas nécessaires, quelques-unes des autres propositions qui suivent ce théorème et qui seront démontrées par nous chacune en particulier.

I.

PROPOSITION 1. — Si, sur une surface sphérique, trois arcs de cercles les plus grands, respectivement plus petits que le demi-cercle, se coupent mutuellement, deux de ces arcs, de quelque manière qu'on les prenne, sont plus grands que l'arc restant.

Que des arcs de cercles les plus grands se coupent mutuellement aux points A, B, Γ ; je dis que deux de ces arcs indifféremment pris sont plus grands que l'arc restant.

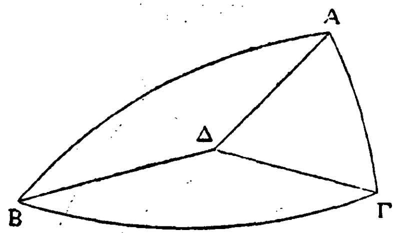
En effet, prenons le centre de la sphère qui est le même que celui des arcs AB, BΓ, ΓA ; que ce soit le point Δ, et menons les droites de jonction ΔA, ΔB, ΔΓ. Dès lors, puisque l'angle solide situé au point Δ est enveloppé par les trois angles plans compris

1. *Euclidis Phaenomena et Scripta Musica edidit Henricus Menge. Fragmenta collegit et disposuit J. L. Heiberg. Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri*, 1916. La proposition 2 est énoncée (p. 12 de cette édition critique) : « Ἐν μιᾷ κόσμου περιφορᾷ ὁ μὲν διά τῶν πολῶν τῆς σφαίρας κύκλος δὶς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα · ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος πρὸς μὲν τὸν μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθός, πρὸς δὲ τὸν ὁρίξοντα οὐδέποτε, ὅταν ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξύ ἦτοῦ Θερινοῦ τροπικοῦ καὶ τοῦ φανεροῦ πόλου ». A défaut de pouvoir renvoyer à une traduction française encore attendue, nous traduisons donc : « Dans une révolution du monde, le cercle qui passe par les pôles de la sphère sera deux fois perpendiculaire à l'horizon, et le cercle du zodiaque sera deux fois perpendiculaire au méridien ; mais il ne le sera jamais à l'horizon si le pôle de l'horizon est situé entre le tropique d'été et le pôle apparent ».

2. Le texte présente ici l'interpolation δὶς (deux fois). C'est une remarque de commentateur passée de marge en texte d'un manuscrit (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 475, l. 11).

3. Le mot ὁρίζων, qui qualifie le mot sous-entendu κύκλος (cercle), désigne ici le grand cercle qui sépare ou délimite la partie apparente de la partie non apparente de la sphère céleste. Le mot horizon par lequel nous traduisons le mot grec n'a donc pas ici le sens que nous donnons habituellement à ce mot, c'est-à-dire la partie de la surface terrestre où se termine notre vue, ou ligne circulaire dont l'observateur est le centre, et où le ciel et la terre semblent se joindre.

sous les droites ΑΔ, ΔΒ, les droites ΒΔ, ΔΓ et les droites ΓΔ, ΔΑ, deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prenne, sont plus grands que l'angle restant ([1]). Or, les angles compris sous les droites ΑΔ, ΔΒ, les droites ΒΔ, ΔΓ et les droites ΓΔ, ΔΑ s'appuient sur les arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ; donc ([2]), deux de ces arcs, de quelque manière qu'on les prenne, sont plus grands que l'arc restant.



Ménelaüs appelle une telle figure un trilatère ([3]) dans ses *Sphériques* ([4]).

II.

Proposition 2. — Si deux arcs de cercles les plus grands sont établis intérieurement sur un seul côté d'un trilatère, ils seront plus petits que les deux côtés restants de ce trilatère.

En effet, que les deux arcs de cercles les plus grands ΒΔ, ΒΓ

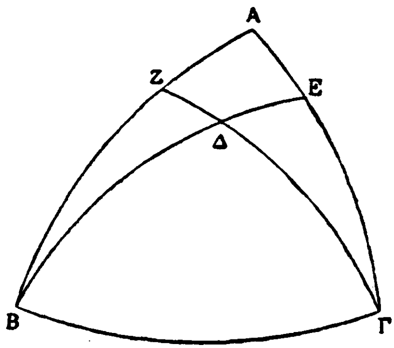
1. Euclide, liv. XI, prop. 20 : « Si un angle solide est compris sous trois angles plans, deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prenne, sont plus grands que l'angle restant. » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 41.

2. Euclide, liv. VI, prop. 33, énoncée p. 181, n. 1.

3. τρίπλευρον, trilatère, figure que nous appelons triangle sphérique.

4. Ménélaüs d'Alexandrie, astronome grec qui vécut vers le milieu du premier siècle après J.-C. D'après Claude Ptolémée, il aurait observé à Rome une conjonction de la lune avec les étoiles du front du Scorpion, l'année de l'avènement de Trajan, quatre-vingt-dix-huit ans après J.-C. Il a écrit un ouvrage intitulé *Les Sphériques* qui traite uniquement des triangles sphériques, sans enseigner cependant à les résoudre et à les calculer. Le seul théorème d'usage pratique qu'il contient est celui figurant en tête du troisième et dernier livre, et que les Arabes ont nommé *la règle d'intersection*, parce qu'il exprime la relation entre six segments déterminés sur les trois côtés d'un triangle sphérique par un arc de grand cercle quelconque. L'ouvrage de Ménélaüs, dont le texte grec est perdu, nous est parvenu dans une version arabe qui fut traduite pour la première fois en latin par François Maurolyc, traduction publiée à Messine, en 1558, dans l'ouvrage contenant, en outre, ses versions latines des *Sphériques* de Théodore et du traité *De la Sphère en mouvement* d'Autolycus. Cette traduction latine fut réimprimée dans un ouvrage du Père Mersenne, à Paris, 1644, et à la suite de la deuxième édition du texte grec de Théodose par Hunt, à Oxford, 1707. L'astronome anglais Halley a donné deux éditions latines de l'ouvrage de Ménélaüs : la première intitulée : *Menelaï Sphaericorum libri III, ed. Ed. Halleius*, Oxonii, 1758, petit in-4°, et la seconde *Menelaï Sphaericorum lib. III, quos olim collatis mss. hebraïcis et arabicis typis exprimandos curavit Ed. Halleius, praefationem addidit G. Costard.* Oxonii, 1758, petit in-4°.

soient établis intérieurement sur un seul côté ΒΓ du trilatère ΑΒΓ;



je dis que les arcs ΒΔ, ΔΓ sont plus petits que les arcs ΒΑ, ΑΓ.

Puisque deux côtés de tout trilatère sont plus petits que le côté restant, les arcs ΓΕ, ΕΔ sont donc plus grands que l'arc ΓΔ. Ajoutons de part et d'autre l'arc ΔΒ, il s'ensuit que les arcs ΓΕ, ΕΒ sont plus grands que les arcs ΓΔ, ΔΒ. Derechef, puisque deux côtés de tout trilatère sont plus grands que le côté restant, les arcs ΒΑ, ΑΕ sont donc plus grands que l'arc ΕΒ. Ajoutons de part et d'autre l'arc ΕΓ; il s'ensuit que les arcs ΒΑ, ΑΓ sont plus grands que les arcs ΒΕ, ΕΓ. Mais les arcs ΒΕ, ΕΓ sont plus grands que les arcs ΒΔ, ΔΓ; donc, à fortiori, les arcs ΒΑ, ΑΓ sont plus grands que les arcs ΒΔ, ΔΓ (1).

III.

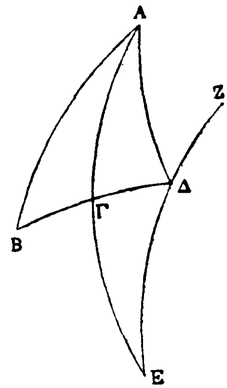
Proposition 3. — Que trois arcs de cercles les plus grands, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ coupent un arc de cercle le plus grand ΒΔ; que chacun des arcs ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ soit plus petit qu'un quadrant, et que l'arc ΒΓ soit égal à l'arc ΓΔ; on doit démontrer que la somme des arcs ΒΑ, ΑΔ est plus grande que le double de l'arc ΑΓ.

Posons l'arc ΓΕ égal à l'arc ΑΓ. Puisque l'arc ΑΓ est plus petit qu'un quadrant, il s'ensuit que l'arc ΓΕ est aussi plus petit qu'un quadrant; donc, l'arc ΑΕ est plus petit qu'un demi-cercle. En conséquence, le cercle ΑΔ complété ne passera pas par le point Ε (2). Dès lors, décrivons par les points Ε, Δ le

1. On a (prop. 1) : $\Gamma E + E\Delta > \Gamma\Delta$, d'où : $\Gamma E + E\Delta + \Delta B > \Gamma\Delta + \Delta B$ ou : $\Gamma E + EB > \Gamma\Delta + \Delta B$. D'autre part, on a : $BA + AE > EB$, d'où : $BA + AE + \Gamma E > EB + \Gamma E$ ou : $BA + A\Gamma > EB + \Gamma E$, d'où, en présence de l'inégalité précédente, on a, à fortiori : $BA + A\Gamma > \Gamma\Delta + \Delta B$.

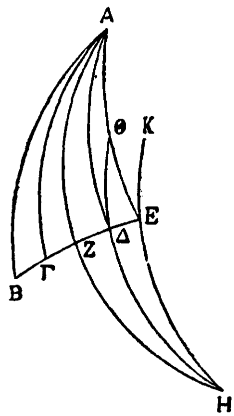
2. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 11 : « Dans la sphère, les cercles les plus grands se coupent mutuellement en deux parties égales ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 17.

cercle le plus grand ΕΔΖ (1) ; et puisque l'arc ΔΓ est égal à l'arc ΓΒ, et l'arc ΑΓ égal à l'arc ΓΕ, il s'ensuit que la droite menée du point Δ au point E est égale à la droite menée du point A au point B (2). En conséquence, l'arc BA est égal à l'arc ΔΕ (3). D'autre part, puisque deux côtés de tout trilatère sont plus grands que le côté restant, tandis que l'arc ΔΕ est égal à l'arc AB et l'arc ΕΓ égal à l'arc ΓΑ, il s'ensuit que la somme des arcs ΒΑ, ΑΔ est plus grande que le double de l'arc ΑΓ (4).



IV.

PROPOSITION 4. — Que quatre arcs de cercles les plus grands, AB, ΑΓ, ΑΔ, AE coupent un arc de cercle le plus grand BE ; que l'arc ΒΓ soit égal à l'arc ΔΕ, et que chacun des arcs AB, ΑΓ, ΑΔ, AE soit plus petit qu'un quadrant. On doit démontrer que la somme des arcs BA, AE est plus grande que la somme des arcs ΓΑ, ΑΔ.



Coupons l'arc ΓΔ en deux parties égales au point Z ; décrivons par les points A, Z le cercle le plus grand AZH, et posons l'arc ZH égal à l'arc AZ. Décrivons par les points H, E le cercle le plus grand HEK et, par les points H, Δ, le cercle le plus grand ΗΔΘ. Dès lors, puisque l'arc HZ est égal à l'arc ZA et l'arc ΔZ égal à l'arc ΖΓ, il

1. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 20: « Par deux points donnés qui sont situés sur une surface sphérique, décrire le cercle le plus grand ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 27.

2. THÉODOSE, *ibidem*, liv. III, prop. 3 : « Si deux cercles les plus grands se coupent mutuellement dans une sphère, et si l'on retranche sur chacun d'eux des arcs égaux consécutifs, de part et d'autre du point où ces cercles se coupent mutuellement, les droites qui relient les extrémités des arcs situés des mêmes côtés sont égales entre elles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 88.

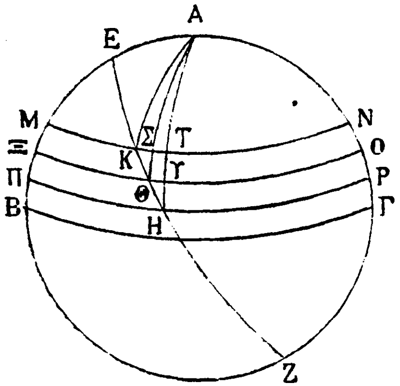
3. EUCLIDE, liv. III, prop. 28, énoncée p. 148, n. 3.

4. On a (prop. 1) : $ΑΔ + ΔΕ > ΑΕ$ ou : $ΑΔ + ΔΕ > ΑΓ + ΓΕ$. Or (EUCLIDE, voir note précédente), on a : $ΔΕ = ΑΒ$, et on a par construction : $ΑΓ = ΓΕ$; donc : $ΑΔ + ΑΒ > 2ΑΓ$.

s'ensuit que l'arc ΔH est aussi égal à l'arc ΓA ([1]). Pour la même raison, l'arc EH est aussi égal à l'arc BA. Or, puisque les deux arcs AΔ, ΔH sont établis intérieurement sur un des côtés HA du trilatère HEA ([2]), il s'ensuit que les arcs AΔ, ΔH sont plus petits que les arcs AE, EH ; de sorte que les arcs AE, EH sont plus grands que les arcs AΔ, ΔH. Or, l'arc EH est égal à l'arc AB et l'arc HΔ égal à l'arc AΓ ; par conséquent, la somme des arcs BA, AE est plus grande que la somme des arcs ΓA, AΔ ([3]) ; ce qu'il fallait démontrer.

V.

Proposition 5. — Ces choses étant démontrées au préalable, qu'il faille démontrer d'une autre manière le théorème 5 du livre III des *Sphériques* de Théodose ([4]).



Soit A le pôle de cercles parallèles situé sur la circonférence du cercle le plus grand ABΓ ; que ce cercle le plus grand soit coupé à angles droits par deux cercles les plus grands, dont l'un BΓ est un des parallèles et dont l'autre EZ est oblique sur les parallèles ; découpons sur le cercle EZ, d'un

1. Voir proposition 3, p. 373, n. 3.

2. C'est-à-dire : puisque les deux arcs de grand cercle AΔ, ΔH sont établis intérieurement sur un des côtés HZA du triangle sphérique dont les côtés sont HE, EA, AH.

3. On a (prop. 2) : $A\Delta + \Delta H < AE + EH$ ou, comme dit le texte : $AE + EH > A\Delta + \Delta H$. Or (prop. 3), on a : arc $EH =$ arc AB et arc $H\Delta =$ arc $A\Gamma$; donc : $AE + AB > A\Delta + A\Gamma$.

4. Théodose, les *Sphériques*, liv. III, prop. 5 dont l'énoncé, que Pappus se dispense de reproduire ici, est le suivant : « Si le pôle de cercles parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand ; si deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles, coupent ce grand cercle à angles droits ; si l'on découpe, sur le cercle oblique, des arcs égaux consécutifs, du même côté du plus grand des parallèles, et si, par les points ainsi déterminés, l'on décrit des cercles parallèles, ceux-ci découperont, dans leur intervalle, des arcs inégaux sur le cercle le plus grand primitif ; et l'arc plus rapproché du plus grand des parallèles sera continuellement plus grand que celui qui en est plus éloigné ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 93.

même côté (1), deux arcs égaux consécutifs ΗΘ, ΘΚ, et décrivons par les points Η, Θ, Κ les cercles ΜΝ, ΞΟ, ΠΡ parallèles au cercle ΒΓ. Il faut démontrer que l'arc ΠΞ est plus grand que l'arc ΜΞ.

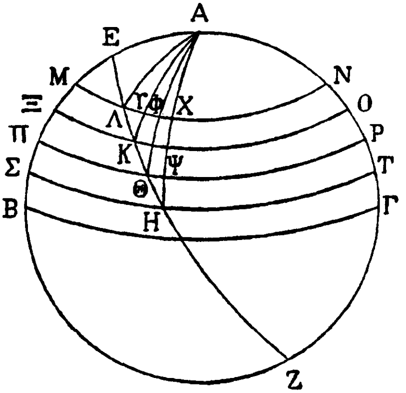
En effet, décrivons par le point Α et par chacun des points Κ, Η, Θ les cercles les plus grands ΑΚ, ΑΘ, ΑΗ. Dès lors, il est manifeste que chacun des arcs ΑΚ, ΑΘ, ΑΗ est plus petit qu'un quadrant (parce que l'arc qui va du point Α jusqu'au cercle le plus grand ΒΓ est un quadrant) (2). En conséquence, puisque les arcs ΑΚ, ΑΘ, ΑΗ de trois cercles plus grands coupent la circonférence du cercle le plus grand ΕΖ ; que l'arc ΚΘ est égal à l'arc ΘΗ, et que chacun des arcs ΑΚ, ΑΘ, ΑΗ est plus petit qu'un quadrant, il s'ensuit, en raison de ce qui a été démontré antérieurement (3), que la somme des arcs ΚΑ, ΑΗ est plus grande que le double de l'arc ΑΘ ; arcs sur lesquels la somme des arcs ΚΑ, ΑΤ est double de l'arc ΑΣ (car les trois arcs ΑΣ, ΑΚ, ΑΤ sont égaux entre eux, parce qu'ils passent par le pôle) ; donc, l'arc restant ΤΗ est plus grand que le double de l'arc ΣΘ. Or, l'arc ΣΘ est égal à l'arc ΤΥ (4) ; donc, l'arc ΗΥ est plus grand que l'arc ΤΥ. Or, l'arc ΗΥ est égal à l'arc ΠΞ, et l'arc ΥΤ égal à l'arc ΞΜ ; donc, l'arc ΠΞ est plus grand que l'arc ΞΜ (5) ; ce qu'il fallait démontrer.

1. C'est-à-dire d'un même côté du grand parallèle ΒΓ.
2. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 13 : « Lorsque, dans une sphère, un cercle le plus grand coupe un des cercles de la sphère à angles droits, il le coupe en deux parties égales et en passant par ses pôles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 19.
3. Voir proposition 3.
4. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 10 : « Si l'on a des cercles parallèles dans une sphère, et si l'on décrit, par leurs pôles, des cercles les plus grands, les arcs des cercles parallèles situés entre les cercles les plus grands sont semblables, et les arcs des cercles les plus grands situés entre les cercles parallèles sont égaux » Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 43.
5. On a par construction : arc $K\Theta =$ arc ΘH ; donc, considérant les trois arcs ΑΚ, ΑΘ, ΑΗ, plus petits qu'un quadrant, on a (prop. 3) : arc $AK +$ arc $AH > 2$ arcs $A\Theta$. Or, considérant les arcs de grand cercle menés du pôle du cercle ΜΝ jusqu'à la circonférence de ce cercle, on a : arc $AK =$ arc $A\Sigma =$ arc AT, d'où : arc $AK +$ arc $AT = 2$ arcs $A\Sigma$; donc : arc $AK +$ arc $AH -$ (arc $AK +$ arc AT) > 2 (arc $A\Theta -$ arc $A\Sigma$), ou comme le texte : arc $TH > 2$ arcs $\Sigma\Theta$. Or (Théodose, liv. II, prop. 10) on a : arc $\Sigma\Theta =$ arc $T\Upsilon$; donc : arc $TH > 2$ arcs $T\Upsilon$, d'où : arc $TH -$ arc $T\Upsilon >$ arc $T\Upsilon$ ou : arc $H\Upsilon >$ arc $T\Upsilon$. Or, arc $H\Upsilon =$ arc $\Pi\Xi$ et arc $T\Upsilon =$ arc ΞM ; donc, comme le texte : arc $\Pi\Xi >$ arc ΞM.

VI.

Proposition 6. — Mais, qu'il faille démontrer cela lorsque les arcs égaux ne sont pas consécutifs (car Théodose n'a pas démontré ce cas).

Soit la même figure, soient les arcs égaux ΗΘ, ΚΛ ; soient les cercles parallèles ΜΝ, ΞΟ, ΠΡ, ΣΤ, et décrivons, par le point Α et par chacun des points Η, Θ, Κ, Λ, les cercles les plus grands ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ (1). Ces arcs sont donc plus petits qu'un quadrant (2). De plus, en vertu du théorème IV qui précède, la somme des arcs ΛΑ, ΑΗ sera plus grande que la somme des arcs ΚΑ, ΑΘ ; tandis que la somme des arcs ΛΑ, ΑΧ est égale à la somme des arcs ΥΑ, ΑΦ (car ces arcs sont issus du pôle du cercle ΜΝ) ; par conséquent, l'arc restant ΧΗ est plus grand que la somme des arcs ΦΘ, ΥΚ. Or, l'arc ΦΘ est égal à l'arc ΧΨ ; donc, l'arc restant ΨΗ est plus grand que l'arc ΥΚ. Or, l'arc ΨΗ est égal à l'arc ΣΠ, et l'arc ΥΚ égal à l'arc ΜΞ ; donc, l'arc ΣΠ est plus grand que l'arc ΜΞ (3) ; ce qu'il fallait démontrer.



VII.

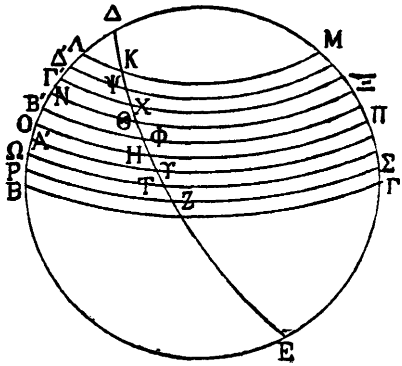
Proposition 7. — Qu'il faille maintenant démontrer la même chose d'une autre manière.

1. Le texte porte ici par négligence μέγιστοι κύκλοι, les cercles les plus grands, au lieu de περιφέρειαι τῶν μεγίστων κύκλων, c'est-à-dire les arcs de cercles les plus grands.

2. Voir proposition 5.

3. On a (proposition 4) : arc ΑΛ + arc ΑΗ > arc ΑΚ + arc ΑΘ. Or, les arcs menés du pôle Α à la circonférence du cercle ΜΝ étant égaux, on a : arc ΑΛ + arc ΑΧ = arc ΑΥ + arc ΑΦ ; donc : arc ΑΛ + arc ΑΗ — (arc ΑΛ + arc ΑΧ) > arc ΑΚ + arc ΑΘ — (arc ΑΥ + arc ΑΦ) ou, comme le texte : arc ΧΗ > arc ΥΚ + arc ΦΘ. Or, arc ΦΘ = arc ΧΨ ; donc : arc ΧΗ — arc ΧΨ > arc ΥΚ + arc ΦΘ — arc ΦΘ ou, comme le texte : arc ΨΗ > arc ΥΚ. Or, arc ΨΗ = arc ΣΠ et arc ΥΚ = arc ΜΞ ; donc : arc ΣΠ > arc ΜΞ.

Que le pôle de parallèles soit situé sur la circonférence du cercle le plus grand ΑΒΓ, et que deux cercles les plus grands ΔΕ, ΒΓ, dont l'un ΒΓ est un des parallèles et dont l'autre ΔΕ est oblique sur les parallèles, coupent ce cercle. Découpons des arcs égaux ΖΗ, ΘΚ sur le cercle ΔΕ, et décrivons les cercles parallèles ΛΜ, ΝΞ, ΟΠ, ΡΣ ; je dis que l'arc ΟΡ est plus grand que l'arc ΝΛ.



En effet, l'arc ΖΗ est commensurable avec l'arc ΗΘ ou il ne l'est pas. Qu'il soit d'abord commensurable. Or, l'arc ΗΖ est égal à l'arc ΘΚ ; donc, l'arc ΘΚ est aussi commensurable avec l'arc ΘΗ ; par conséquent, les trois arcs ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ sont commensurables entre eux. Divisons ces arcs en leurs parties (1) aux points Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, et décrivons par les points Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ les cercles parallèles ΩΤ, Α'Υ, ΦΒ', ΧΓ', ΨΔ'. Et puisque les arcs ΖΤ, ΤΥ, ΥΗ, ΗΦ, ΦΘ, ΘΧ, ΧΨ, ΨΚ sont égaux, il s'ensuit que les arcs ΡΩ, ΩΑ', Α'Ο, ΟΒ', Β'Ν, ΝΓ', Γ'Δ' sont inégaux à partir du plus grand arc ΡΩ (2). Or, le nombre des arcs ΡΩ, ΩΑ', Α'Ο est le même que le nombre des arcs ΝΓ', Γ'Δ', Δ'Λ ; donc (3), l'arc ΡΟ est plus grand que l'arc ΝΛ.

VIII.

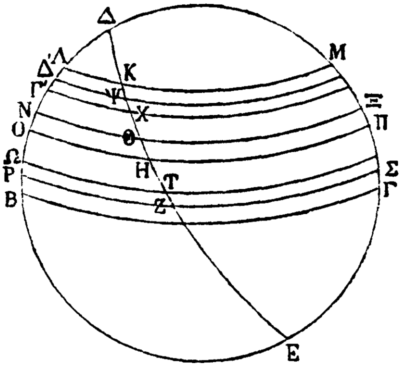
Proposition 8. — Mais, les mêmes choses étant posées, que l'arc ΖΗ ne soit pas commensurable avec l'arc ΗΘ ; je dis que l'arc ΡΟ est encore de même plus grand que l'arc ΛΝ.

En effet, s'il n'est pas plus grand, il est égal ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus petit. Posons l'arc ΝΓ' égal à l'arc ΡΟ

---

1. C'est-à-dire en parties égales qui divisent ces trois arcs un nombre entier de fois.
2. Voir proposition 5.
3. Euclide, liv. V, prop. 18, énoncée p. 190, n. 1.

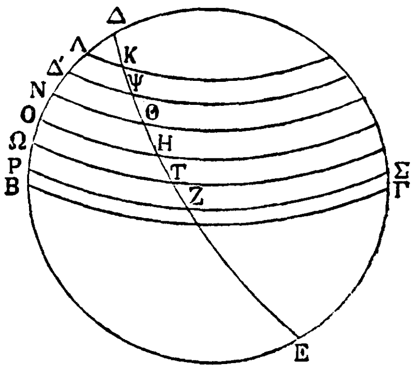
et, les trois lignes ΛN, NΓ′, NO étant homogènes (1), prenons-en une qui soit commensurable avec la ligne NO, plus grande que la ligne NΓ′, plus petite que la ligne NΛ, et que ce soit la ligne NΔ′. Soient, en outre, les cercles parallèles XΓ′, ΨΔ′ ; posons l'arc HT égal à l'arc ΨΘ, et soit le cercle parallèle TΩ. Dès lors, puisque chacun des arcs ΨΘ, HT est commensurable avec l'arc HΘ, l'arc ΩO est aussi plus grand que l'arc NΔ′ (2) ; par conséquent, l'arc PO est, à fortiori, plus grand que l'arc NΔ′. Mais, l'arc PO est égal à l'arc NΓ′ ; donc, l'arc NΓ′, qui est plus petit, est plus grand que l'arc NΔ′ qui est plus grand ; ce qui est impossible. En conséquence, l'arc PO n'est pas plus petit que l'arc NΛ.



IX.

Proposition 9. — Les mêmes choses étant posées, je dis aussi qu'il ne lui est pas égal (3).

En effet, qu'il lui soit égal, s'il se peut ; coupons les arcs HZ, ΘK en deux parties égales aux points T, Ψ, et soient les cercles parallèles TΩ, ΨΔ′. Dès lors, puisque les arcs TZ, TH sont égaux, les arcs PΩ, ΩO sont donc inégaux à partir du plus grand arc PΩ (4). Derechef, puisque les arcs ΘΨ, ΨK sont égaux, les arcs NΔ′, Δ′Λ sont donc inégaux à partir du plus grand arc NΔ′. En conséquence, puis-



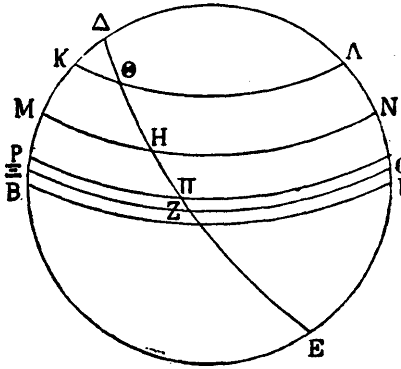
1. ὁμογενῶν, de même nature, ou homogènes, dans le sens d'être des parties d'une même circonférence de cercle.
2. En vertu des propositions 6 et 7.
3. C'est-à-dire que l'arc PO n'est pas égal à l'arc NΛ.
4. Voir proposition 5.

que l'arc PΩ est plus grand que l'arc ΩO, et l'arc NΔ' plus grand que l'arc Δ'Λ, il s'ensuit que l'arc PO est plus grand que le double de l'arc NΔ' ; ce qui est impossible (car on a démontré précédemment...) [1]. En conséquence, l'arc PO n'est pas égal à l'arc NΛ. Or, on a démontré qu'il n'est pas plus petit [2]; donc, l'arc PO est plus grand que l'arc NΛ [3].

X.

Proposition 10. — Soit de nouveau le pôle de parallèles situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand, et que les cercles [4] BΓ, ΔE coupent ce cercle à angles droits. Soient, en outre, les cercles parallèles KΛ, MN, ΞO, et que l'arc ΞM soit égal à l'arc MK; je dis que l'arc ZH est plus petit que l'arc HΘ.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, il est égal à cet arc ou plus grand que lui. D'une part, l'arc ZH n'est pas égal à l'arc HΘ; car, s'il l'est, l'arc ΞM est plus grand que l'arc MK [5]. Or, il n'en est pas ainsi [6]; donc, l'arc ZH n'est pas égal à l'arc HΘ. D'autre part, je dis qu'il n'est pas plus grand. En effet, qu'il soit plus grand, s'il se peut, et posons l'arc HΠ égal à l'arc ΘH [7]. Dès lors, puisque l'arc

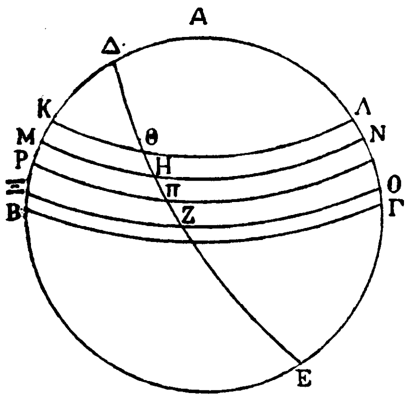


1. Lacune qui n'a pas été comblée d'une manière acceptable, d'abord par Commandin, puis par Hultsch, qui remanie trop le texte.
2. Voir proposition 8.
3. Explicitement : On a, par hypothèse de la proposition 7 : arc HZ = arc ΘK, d'où (prop. 6) : arc ΩO > arc NΔ' (I). Divisant les arcs HZ, ΘK en deux parties égales, on a : arc TZ = arc TH, et arc ΘΨ = arc ΨK, d'où (prop. 5) : arc PΩ > arc ΩO (II) et arc NΔ' > arc Δ'Λ (III). Dès lors, les inégalités (I) et (II) donnent : arc PΩ > arc NΔ', d'où, en présence de l'inégalité (I) on a : arc PΩ + arc ΩO>arc NΔ'+ arc NΔ' ou, comme le texte: arc PO > 2 arcs NΔ'; ce qui est contraire à l'hypothèse : arc PO = arc NΛ ; car l'inégalité (III) donne : arc NΔ'+arc NΔ'> arc Δ'Λ + arc NΔ' ou : 2 arcs NΔ'> arc NΛ.
4. Sous-entendu : μέγιστοι (les cercles) les plus grands.
5. Voir proposition 5.
6. Car on a par hypothèse : arc ΞM = arc MK.
7. Le texte sous-entend ici : καὶ γεγράφθω παράλληλος κύκλος ὁ PΠ, et soit décrit le cercle parallèle PΠ.

HΠ est égal à l'arc HΘ, il s'ensuit que l'arc PM est plus grand que l'arc MK; donc, l'arc ΞM est, à fortiori, plus grand que l'arc MK ([1]) ; ce qui est impossible, car on a supposé qu'il lui est égal. En conséquence, l'arc ZH n'est pas plus grand que l'arc HΘ. Or, on a démontré qu'il ne lui est pas égal ; donc, l'arc ZH est plus petit que l'arc HΘ ; ce qu'il fallait démontrer.

XI.

PROPOSITION 11. — On a donc démontré que, si l'on a un cercle ([2]) ABΓ ; si deux cercles les plus grands BΓ, ΔE coupent ce cercle à angles droits ([3]) ; si l'on découpe des arcs égaux ZH, HΘ, et si l'on décrit les cercles parallèles KΛ, MN, ΞO, on obtient un arc ΞM plus grand que l'arc MK. Mais, que l'arc ZH soit plus grand que l'arc HΘ ; je dis que l'arc ΞM est, à fortiori, plus grand que l'arc MK.



En effet, puisque l'arc ZH est plus grand que l'arc HΘ, posons l'arc HΠ égal à l'arc HΘ, et décrivons le cercle parallèle ΠP. Dès lors, puisque l'arc HΠ est égal à l'arc HΘ, l'arc PM est plus grand que l'arc MK ([4]) ; par conséquent, l'arc ΞM est, à fortiori, plus grand que l'arc MK ; de sorte que, si l'arc ZH est plus grand que l'arc ΘH, on obtient un arc ΞM plus grand que l'arc MK ; ce qu'il fallait démontrer.

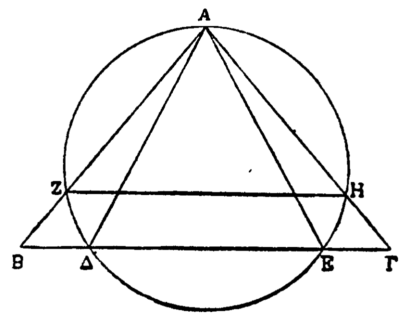
1. Voir proposition 5.
2. Sous-entendu : μέγιστος, le plus grand.
3. Le texte sous-entend ici évidemment : ὧν ὁ μὲν BΓ τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔE λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, c'est-à-dire : dont BΓ est l'un des parallèles et dont ΔE est oblique sur les parallèles.
4. Voir proposition 5.

LEMMES POUR LA DISCUSSION DU THÉORÈME 6 DU LIVRE III (1).

XII.

PROPOSITION 12. — Soit le triangle ΑΒΓ, et menons deux droites ΔΑ, ΑΕ établissant les angles égaux compris sous les droites ΒΑ, ΑΔ et sous les droites ΕΑ, ΑΓ, je dis que le carré de la droite ΑΓ est au carré de la droite ΑΒ comme le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ est au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΔ.

Circonscrivons un cercle autour du triangle ΑΔΕ, et menons la droite de jonction ΖΗ ; il s'ensuit que cette droite est parallèle à la droite ΒΓ, parce que l'arc ΖΔ est égal à l'arc ΕΗ (2). En conséquence, la droite ΑΒ est à la droite ΒΖ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΗ (3) ; donc, le carré de la droite ΑΒ est aussi au rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΖ comme le carré de la droite ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΗ (4). Or, le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΗ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ, et le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΖ équivaut au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΔ (5) ; par conséquent, le carré de la droite ΑΒ est au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΔ comme le carré de la droite ΑΓ est au rectangle compris



1. C'est-à-dire : lemmes qui seront utilisés pour démontrer divers cas du théorème 6 du livre III des *Sphériques* de Théodose. Voir l'énoncé de ce théorème, p. 369, n. 3. Pappus en donne d'ailleurs l'énoncé dans les mêmes termes que Théodose dans le préambule de la proposition 21.

2. On a par hypothèse : $\widehat{\text{ZA}\Delta} = \widehat{\text{HAE}}$; donc (EUCLIDE, liv. III, prop. 26, énoncée p. 148, n. 3) : arc ΖΔ = arc ΗΕ, d'où, menant la droite de jonction ΔΗ, non indiquée sur la figure, on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 27, énoncée p. 284, n. 1) : $\widehat{\text{H}\Delta\text{E}} = \widehat{\text{ZH}\Delta}$, d'où parallélisme des droites ΖΗ, ΒΓ.

3. EUCLIDE, liv. VI, prop. 2, énoncée p. 48, n. 1.

4. EUCLIDE, liv. VI, prop. 22, énoncée p. 125, n. 4.

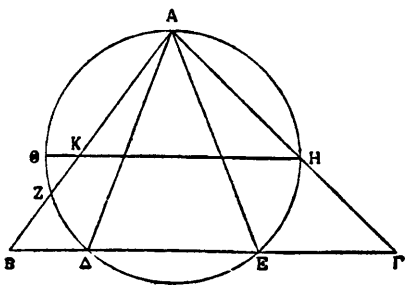
5. EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4.

sous les droites ΔΓ, ΓΕ; donc, par permutation, le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ est aussi au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΔ comme le carré de la droite ΑΓ est au carré de la droite ΑΒ (1).

XIII.

PROPOSITION 13. — Mais, que le rapport du rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΔ, c'est-à-dire du rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΗ au rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΖ, soit plus grand que le rapport du carré de la droite ΑΓ au carré de la droite ΑΒ; je dis que l'angle compris sous les droites ΕΑ, ΑΓ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΔ.

En effet, puisque le rapport du rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΗ au rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΖ est plus grand que celui [du carré] (2) de la droite ΑΓ au carré de la droite ΑΒ, par permutation, le rapport du rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΗ au carré de la droite ΑΓ est plus grand que celui du rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΖ au carré de la droite ΑΒ (3). Mais, la droite ΗΓ est à la droite ΑΓ comme le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΗ est au carré de la droite ΑΓ, et la droite ΖΒ est à la droite ΑΒ comme le rectangle compris sous les droites



1. On a, par similitude de triangles : $\frac{AB}{BZ} = \frac{A\Gamma}{\Gamma H}$, d'où : $\frac{\overline{AB}^2}{AB \times BZ} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{A\Gamma \times \Gamma H}$. Or, les sécantes du cercle donnent : $A\Gamma \times \Gamma H = \Delta\Gamma \times \Gamma E$ et $AB \times BZ = EB \times B\Delta$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{AB}^2}{EB \times B\Delta} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\Delta\Gamma \times \Gamma E}$ et $\frac{\Delta\Gamma \times \Gamma E}{EB \times B\Delta} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{AB}^2}$. Cette proposition reste vraie dans le cas où les droites ΑΔ, ΑΕ sont menées extérieurement au triangle en faisant des angles égaux avec les côtés ΑΒ, ΑΓ, et c'est ce cas qui sera invoqué plus loin, au cours des démonstrations des propositions 36 et 40 du livre VII.

2. Restauration de Hultsch au moyen de ἀπὸ (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 490, l. 19).

3. Transformation d'une expression d'inégalité que Pappus démontrera au liv. VII, prop. 5.

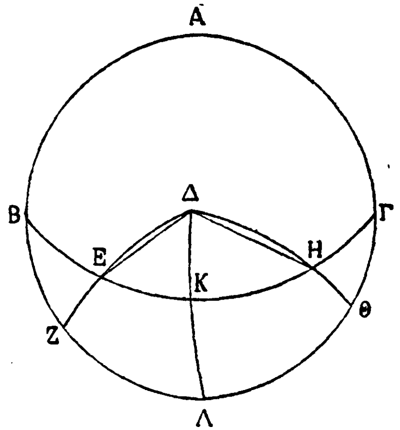
AB, BZ est au carré de la droite AB (1) ; par conséquent, le rapport de la droite ΑΓ à la droite ΓΗ est aussi plus petit que celui de la droite AB à la droite BZ. Dès lors, si nous faisons en sorte que la droite AB soit à quelqu'autre droite comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΗ, ce le sera à une droite plus grande que la droite BZ (2). Que ce le soit à la droite BK, et prolongeons la droite de jonction HK jusqu'au point Θ. La droite ΒΓ est donc parallèle à la droite ΗΘ (3) ; par conséquent, l'arc EH est égal à l'arc ΔΘ ; donc, l'arc EH est plus grand que l'arc ΔΖ ; de sorte que l'angle compris sous les droites ΓΑ, AE est aussi plus grand que l'angle compris sous les droites BA, ΑΔ (4) ; ce qu'il fallait démontrer (5).

XIV.

Proposition 14. — Que deux cercles les plus grands ΑΒΓ, ΒΕΓ se coupent mutuellement ; soit Δ le pôle du cercle ΑΒΓ ; décrivons les cercles les plus grands ΔΖ, ΔΘ (6), et que l'arc BE soit égal à l'arc ΓΗ. On démontrera que la droite menée du point Δ au point E est égale à celle qui est menée du point Δ au point H.

Coupons l'arc EH en deux parties égales au point K, et décrivons par les points Δ, K le cercle le plus grand ΔΚΛ. Et puisque l'arc BE est égal à l'arc ΗΓ et l'arc EK égal à l'arc KH,

1. Euclide, liv. VI, prop. 1 : « Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 290.
2. Euclide, liv. V, prop. 10, énoncée p. 36, n. 1.
3. Euclide, liv. VI, prop. 2, énoncée p. 48, n. 1.
4. Euclide, liv. VI, prop. 33, énoncée p. 181, n. 1.
5. On a par hypothèse : $\frac{\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{EB} \times \mathrm{B\Delta}} > \frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2}$ ou, considérant les sécantes du cercle : $\frac{\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma H}}{\mathrm{AB} \times \mathrm{BZ}} > \frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2}$, d'où : $\frac{\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma H}}{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2} > \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{BZ}}{\overline{\mathrm{AB}}^2}$. Or (Euclide, liv. VI, prop. 1) : $\frac{\mathrm{H\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{H\Gamma}}{\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2}$ et $\frac{\mathrm{ZB}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{ZB}}{\overline{\mathrm{AB}}^2}$; donc : $\frac{\mathrm{H\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} > \frac{\mathrm{ZB}}{\mathrm{AB}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}} < \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{ZB}}$. Soit $\mathrm{BK} > \mathrm{ZB}$, de telle sorte que l'on ait : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BK}}$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 2) parallélisme des droites ΒΓ, ΘΗ, d'où : arc EH = arc ΔΘ, d'où : arc EH > arc ΔZ, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 33): $\widehat{\mathrm{EA\Gamma}} < \widehat{\mathrm{\Delta AB}}$.
6. Sous-entendu : coupant le grand cercle ΒΕΓ aux points E, H.



l'arc entier BK est donc égal à l'arc ΓK. Dès lors, puisque le cercle le plus grand ΔKΛ est décrit par le point qui divise l'arc BΓ en deux parties égales et par les pôles du cercle ABΓ, il s'ensuit que le cercle ΔKΛ passera par les pôles du cercle BEH (1), et qu'il sera à angles droits sur ce cercle (2). En conséquence, puisqu'un segment de cercle perpendiculaire KΔ est élevé sur le diamètre partant du point K du cercle KBΓ ; que l'arc du segment ainsi élevé est divisé au point Δ, et que l'arc EK est égal à l'arc KH, il s'ensuit que la droite menée du point Δ au point E est égale à la droite menée du point Δ au point H (3) ; ce qu'il fallait démontrer.

XV.

Proposition 15. — Soient les cercles les plus grands ABΓ, BEHΓ ; soit Δ le pôle du cercle ABΓ, et décrivons les cercles les plus grands ΔEZ, ΔKΛ, ΔHΘ en ayant l'arc HKE divisé en deux parties égales au point K. Je dis que, si l'arc BE est égal à l'arc HΓ, l'arc ZΛ est aussi égal à l'arc ΛΘ ; que, si l'arc BE est plus grand que l'arc HΓ, l'arc ZΛ est aussi plus grand que l'arc ΛΘ, enfin que, si l'arc BE est plus petit que l'arc HΓ, l'arc ZΛ est aussi plus petit que l'arc ΛΘ.

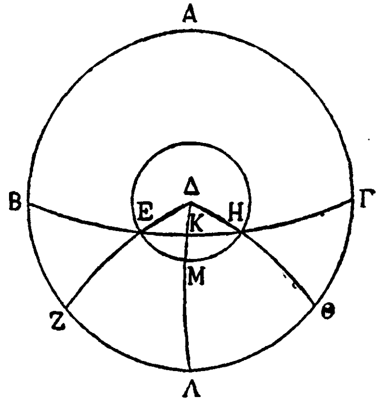
1. En invoquant réciproquement : Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 9 : « Lorsque deux cercles se coupent mutuellement dans une sphère, et que l'on décrit un cercle le plus grand par leurs pôles, il coupera en deux parties égales les segments isolément pris de ces cercles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 41.

2. Théodose, *ibidem*, liv. I, prop. 15 : « Lorsque, dans une sphère, un cercle le plus grand coupe un des cercles de la sphère en passant par ses pôles, il le coupe en deux parties égales et à angles droits ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 21.

3. Théodose, *ibidem*, liv. II, prop. 12 : « Si on élève des segments de cercles égaux et perpendiculaires sur les diamètres de cercles égaux ; si l'on retranche de ces segments, à partir de leurs extrémités, des arcs égaux plus petits que la moitié des arcs entiers, et si l'on découpe des arcs égaux sur les cercles, des mêmes côtés à partir des extrémités des diamètres, les droites qui relient les points ainsi déterminés seront égales entre elles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 47.

Que l'arc BE soit d'abord égal à l'arc HΓ ; je dis que l'arc ZΛ est aussi égal à l'arc ΛΘ.

En effet, puisque l'arc BE est égal à l'arc HΓ, la droite menée du point Δ au point E est aussi égale à la droite menée du point Δ au point H (1) ; par conséquent, le cercle décrit du pôle Δ et à la distance de l'une des droites ΔE, ΔH passera aussi par l'autre point. Décrivons-le, et que ce soit le cercle HME qui sera donc parallèle au cercle ABΓ (2). Dès lors, puisque deux cercles HME, EKH se coupent mutuellement, et que le cercle le plus grand ΔKΛ est décrit par les pôles de l'un de ces cercles et par le point de division en deux parties égales K (3), il s'ensuit que l'arc EM est égal à l'arc MH (4). Mais, l'arc EM est semblable à l'arc ZΛ et l'arc MH semblable à l'arc ΛΘ (5); donc, l'arc ZΛ est aussi semblable à l'arc ΛΘ. Or, ces arcs appartiennent au même cercle ; donc, l'arc ZΛ est égal à l'arc ΛΘ ; ce qu'il fallait démontrer.

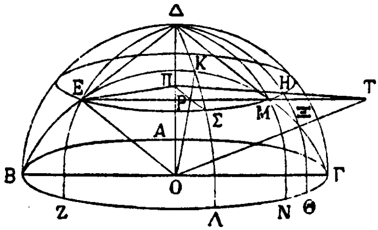


XVI.

Proposition 16. — Supposons la même figure (6) ; que l'arc BE soit plus grand que l'arc ΞΓ et l'arc EK égal à l'arc KΞ ; je dis que l'arc ZΛ est plus grand que l'arc ΛΘ.

1. Voir proposition 14.
2. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 1 : « Dans la sphère, les cercles parallèles sont situés autour des mêmes pôles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 33.
3. Cercle passant aussi par les pôles du cercle EKH.
4. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 9, énoncée p. 384, n. 1.
5. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 10, énoncée p. 375, n. 4.
6. La figure qui accompagne cette proposition dans les manuscrits est plane comme celle de la proposition précédente, mais, comme elle a le défaut de ne pas présenter clairement dans le plan du cercle ABΓ l'hémisphère avec les cercles et les droites complémentaires qui interviennent dans la démonstration, Commandin lui substitue dans sa version latine une figure stéréographique plus correcte et plus intuitive. C'est cette figure que Hultsch adopte dans son édition critique, (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 494), et que nous adoptons aussi dans notre traduction.

Posons l'arc ΓΜ égal à l'arc ΒΕ, et décrivons le cercle le plus grand ΔΜΝ. Dès lors, puisque l'arc ΒΕ est égal à l'arc ΜΓ, la droite menée du point Δ au point Ε est égale à la droite menée du point Δ au point Μ [1] ; par conséquent, le cercle décrit par le pôle Δ et à la distance de l'une des droites ΔΕ, ΔΜ passera aussi par l'autre point. Qu'il passe par ce point ; que ce soit le cercle ΕΣΜ ; prenons le centre Ο de la sphère, et menons la droite de jonction ΟΔ. Cette droite sera donc perpendiculaire sur le plan du cercle ΕΣΜ [2] (car le point Δ est le pôle de ce cercle), et le centre du cercle ΜΣΕ sera sur la droite ΔΟ. Que ce soit le point Π ; prolongeons la droite de jonction ΕΜ jusqu'au point Τ, la droite de jonction ΟΞ aussi jusqu'au point Τ [3], et menons les droites de jonction ΕΟ, ΟΡΚ, ΠΡ, ΡΣ, ΠΗ, ΗΤ. Et puisque le point Π est situé dans le plan du cercle ΜΣΕ, les points Ρ, Σ sont l'un et l'autre situés aussi dans le plan du cercle ΜΣΕ ; donc, on a trois points dans ce cercle. Derechef, puisque la droite ΟΔ est dans le plan du cercle ΔΚΛ, le point Π est donc aussi dans le plan du cercle ΔΚΛ. Et la droite ΟΡΚ est dans ce plan ; donc, le point Ρ est aussi dans le plan du cercle ΔΚΛ. Or, le point Σ est aussi dans ce même plan ; donc, ΠΡΣ est une droite [4]. Pour la même raison d'ailleurs, ΠΗΤ est aussi une droite (car les points Π, Τ sont dans le plan du cercle ΕΣΜ ; mais, ils sont aussi dans le plan du cercle ΔΗΞΘ, et le point Η est sur cette même section des plans du cercle ΕΣΜ



1. Voir proposition 14.

2. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 10 : « Si l'on a un cercle dans une sphère, la droite menée par les pôles de ce cercle est perpendiculaire sur le cercle, et elle passera par le centre du cercle et par celui de la sphère ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 15.

3. La droite ΟΞ est située dans le plan du cercle ΒΕΚΜΓ, et la droite ΕΜ est la section commune de ce cercle ΒΕΚΜΓ et du cercle ΕΣΜΗ ; donc, ces deux droites doivent se rencontrer en un point Τ.

4. Les points Π, Ρ, Σ appartenant simultanément aux plans des cercles ΕΣΜ, ΔΚΣΛ, ils appartiennent donc à la section commune de ces plans. Or, la section commune de ces plans est une droite (Euclide, liv. XI, prop. 3 : « Si deux plans se coupent mutuellement, leur section commune est une ligne droite ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 9).

et du cercle ΔΞΘ ; donc ΠΗΤ est une droite). Et puisque l'arc ΕΚ est égal à l'arc ΚΞ, l'angle compris sous les droites ΕΟ, ΟΚ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΚΟ, ΟΞ (1) ; donc, le rapport de la droite ΕΟ à la droite ΟΤ est le même que celui de la droite ΕΡ à la droite ΡΤ (2). Mais, puisque nous cherchons ce qu'est l'arc ΖΛ comparé à l'arc ΛΘ (3), c'est-à-dire ce qu'est l'arc ΕΣ comparé à l'arc ΣΗ, cherchons donc ce qu'est l'angle compris sous les droites ΕΠ, ΠΡ comparé à l'angle compris sous les droites ΡΠ, ΠΤ ; donc, ce qu'est le rapport de la droite ΕΠ à la droite ΠΤ comparé au rapport de la droite ΕΡ à la droite ΡΤ. Mais, le rapport de la droite ΕΡ à la droite ΡΤ est le même que celui de la droite ΕΟ à la droite ΟΤ; donc, cherchons ce qu'est le rapport de la droite ΕΟ à la droite ΟΤ comparé au rapport de la droite ΕΠ à la droite ΠΤ. En conséquence, cherchons ce qu'est le rapport du carré de la droite ΕΟ au carré de la droite ΟΤ comparé au rapport du carré de la droite ΕΠ au carré de la droite ΠΤ et, par permutation, ce qu'est le rapport du carré de la droite ΟΕ au carré de la droite ΕΠ comparé au rapport du carré de la droite ΟΤ au carré de la droite ΤΠ et, par division, ce qu'est le rapport du carré de la droite ΟΠ au carré de la droite ΠΕ comparé au rapport du carré de la droite ΟΠ au carré de la droite ΤΠ ; donc, ce qu'est le carré de la droite ΤΠ comparé au carré de la droite ΠΕ ; donc, ce qu'est la droite ΤΠ comparée à la droite ΠΕ (4). Mais, la droite ΠΕ est égale à la droite ΠΗ qui

1. Euclide, liv. III, prop. 27, énoncée p. 284, n. 1.

2. Euclide, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4.

3. τίς ἡ ΖΛ περιφέρεια τῇ ΛΘ, expression singulière employée ici pour exprimer, non pas le rapport habituel (λόγος) de grandeurs, mais la simple comparaison de grandeurs, c'est-à-dire pour exprimer : arc $\mathrm{Z\Lambda} \lesseqgtr$ arc $\Lambda\Theta$.

4. La première partie de la démonstration s'exprime en d'autres termes comme suit : La droite ΟΡ partage l'angle en Ο du triangle ΕΟΤ en deux parties égales ; donc (Euclide, liv. VI, prop. 3), on a : $\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PT}} = \frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OT}}$ (I). Or, pour démontrer que l'on a : arc $\mathrm{Z\Lambda} >$ arc $\Lambda\Theta$, on met en question l'expression : arc $\mathrm{Z\Lambda} \lesseqgtr$ arc $\Lambda\Theta$, ce qui revient à l'expression : arc $\mathrm{E\Sigma} \lesseqgtr$ arc $\Sigma\mathrm{H}$ ou à l'expression : $\widehat{\mathrm{E\Pi P}} \lesseqgtr \widehat{\mathrm{P\Pi T}}$, laquelle, établissant que l'angle en Π du triangle ΕΠΤ n'est pas divisé en deux parties égales, n'entraîne donc pas (Euclide, liv. VI, prop. 3) l'expression : $\frac{\mathrm{E\Pi}}{\mathrm{\Pi T}} = \frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PT}}$, mais met en question l'expression : $\frac{\mathrm{E\Pi}}{\mathrm{\Pi T}} \lesseqgtr \frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PT}}$, d'où, en présence de la relation (I), il vient : $\frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OT}} \lesseqgtr \frac{\mathrm{E\Pi}}{\mathrm{\Pi T}}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{EO}}^2}{\overline{\mathrm{OT}}^2} \lesseqgtr \frac{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi T}}^2}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{EO}}^2}{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2} \lesseqgtr \frac{\overline{\mathrm{OT}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi T}}^2}$, d'où :

admet comparaison, car il y a une droite plus grande qu'elle. En conséquence, puisque la droite ΤΠ est plus grande que la droite ΠΗ, c'est-à-dire plus grande que la droite ΠΕ, il s'ensuit que le rapport de la droite ΠΟ à la droite ΠΕ est plus grand que celui de la droite ΟΠ à la droite ΠΤ [1], et que le rapport du carré de la droite ΟΠ au carré de la droite ΠΕ est plus grand que celui du carré de la droite ΟΠ au carré de la droite ΠΤ. Or, le carré de la droite ΕΟ équivaut aux carrés des droites ΕΠ, ΠΟ (car l'angle compris sous les droites ΕΠ, ΠΟ est droit), et le carré de la droite ΤΟ équivaut aux carrés des droites ΤΠ, ΠΟ (car l'angle compris sous les droites ΤΠ, ΠΟ est droit) ; donc, le rapport du carré de la droite ΟΕ au carré de la droite ΕΠ est plus grand que celui du carré de la droite ΟΤ au carré de la droite ΤΠ et, par permutation, le rapport du carré de la droite ΕΟ au carré de la droite ΟΤ est plus grand que celui du carré de la droite ΕΠ au carré de la droite ΤΠ. Dès lors, puisque le rapport du carré de la droite ΟΕ au carré de la droite ΟΤ est plus grand que celui du carré de la droite ΕΠ au carré de la droite ΤΠ, il s'ensuit que le rapport de la droite ΕΟ à la droite ΟΤ est aussi plus grand que celui de la droite ΕΠ à la droite ΠΤ. Mais, la droite ΕΡ est à la droite ΡΤ comme la droite ΕΟ est à la droite ΟΤ ; par conséquent, le rapport de la droite ΕΡ à la droite ΡΤ est plus grand que celui de la droite ΕΠ à la droite ΠΤ. Il résulte donc de là que l'angle compris sous les droites ΕΠ, ΠΣ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΣΠ, ΠΤ ; donc, l'arc ΕΣ est plus grand que l'arc ΣΗ. Mais, l'arc ΕΣ est semblable à l'arc ΖΛ et l'arc ΣΗ semblable à l'arc ΛΘ ; donc, l'arc ΖΛ est plus grand que l'arc ΛΘ ; ce qu'il fallait démontrer [2].

$\frac{\overline{\mathrm{EO}}^2 - \overline{\mathrm{E\Pi}}^2}{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2} \lesseqgtr \frac{\overline{\mathrm{OT}}^2 - \overline{\mathrm{\Pi T}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi T}}^2}$ ou, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{O\Pi}}^2}{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2} \lesseqgtr \frac{\overline{\mathrm{O\Pi}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi T}}^2}$, d'où : $\overline{\mathrm{\Pi T}}^2 \lesseqgtr \overline{\mathrm{E\Pi}}^2$, d'où reste à comparer la droite ΠΤ avec la droite ΕΠ.

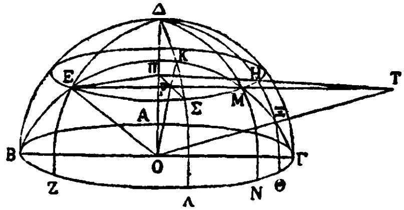
1. EUCLIDE, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6.

2. La dernière partie de la démonstration se déroule comme suit : Reste d'après la note avant-précédente, à comparer les droites ΠΤ et ΠΕ. Or, $\mathrm{\Pi T} > \mathrm{\Pi H}$ et, considérant des rayons du cercle ΕΣΜΗ, on a : $\mathrm{\Pi H} = \mathrm{\Pi E}$ donc : $\mathrm{\Pi T} > \mathrm{\Pi E}$. Dès lors, on a : $\frac{\mathrm{\Pi O}}{\mathrm{\Pi E}} > \frac{\mathrm{\Pi O}}{\mathrm{\Pi T}}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{\Pi O}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi E}}^2} > \frac{\overline{\mathrm{\Pi O}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi T}}^2}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{\Pi O}}^2 + \overline{\mathrm{\Pi E}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi E}}^2} > \frac{\overline{\mathrm{\Pi O}}^2 + \overline{\mathrm{\Pi T}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi T}}^2}$ ou, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{OE}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi E}}^2} > \frac{\overline{\mathrm{OT}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi T}}^2}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{OE}}^2}{\overline{\mathrm{OT}}^2} > \frac{\overline{\mathrm{\Pi E}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi T}}^2}$, d'où :

XVII.

PROPOSITION 17. — Mais, que l'arc ZΛ soit égal à l'arc ΛΘ ; je dis que l'arc EK est plus petit que l'arc KΞ (1).

En effet, puisque l'arc ZΛ est égal à l'arc ΛΘ, l'angle compris sous les droites EΠ, ΠΣ est égal à l'angle compris sous les droites ΣΠ, ΠT ; par conséquent, le rapport de la droite EΠ à la droite ΠT est le même que celui de la droite EP à la droite PT (2). Or, puisque nous cherchons ce qu'est l'arc EK comparé à l'arc KΞ, nous chercherons donc ce qu'est l'angle compris sous les droites EO, OK comparé à l'angle compris sous les droites KO, OT. En conséquence, cherchons ce qu'est le rapport de la droite EO à la droite OT comparé au rapport de la droite EP à la droite PT. Mais, le rapport de la droite EP à la droite PT est le même que celui de la droite EΠ à la droite ΠT ; par conséquent, cherchons ce qu'est le rapport de la droite EΠ à la droite ΠT comparé au rapport de la droite EO à la droite OT. Or, on a la comparaison de ces rapports (3). Donc, puisque le rapport de la droite EO à la droite OT est plus grand que celui de la droite EΠ à la droite ΠT (car cela a été démontré précédemment) ; mais que la droite EP est à la droite PT comme



$\frac{OE}{OT} > \frac{\Pi E}{\Pi T}$, d'où, en présence de l'expression (I) de la note avant-précédente, on a : $\frac{EP}{PT} > \frac{\Pi E}{\Pi T}$; expression qui n'entraîne donc pas la division en deux parties égales de l'angle en Π du triangle EΠT, d'où : arc $\widehat{E\Pi\Sigma} > \widehat{\Sigma\Pi T}$, d'où : arc EΣ > arc ΣH, d'où par similitude : arc ZΛ > arc ΛΘ.

1. Sous-entendu : toutes autres constructions restant les mêmes que dans la proposition précédente.

2. On a par hypothèse : arc ZΛ = arc ΛΘ, d'où égalité des arcs respectivement semblables EΣ, ΣH, d'où égalité des angles EΠΣ, ΣΠT, d'où, considérant le triangle EΠT dont l'angle en Π est divisé en deux parties égales, on a (EUCLIDE, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4) : $\frac{E\Pi}{\Pi T} = \frac{EP}{PT}$.

3. Voir proposition 16, p. 388, n. 2.

la droite EΠ est à la droite ΠT, il s'ensuit que le rapport de la droite EP à la droite PT est plus petit que celui de la droite EO à la droite OT. Donc, d'après cela, l'angle compris sous les droites EO, OK est plus petit que l'angle compris sous les droites KO, OT ; en conséquence, l'arc EK est plus petit que l'arc KΞ ; ce qu'il fallait démontrer (1).

XVIII.

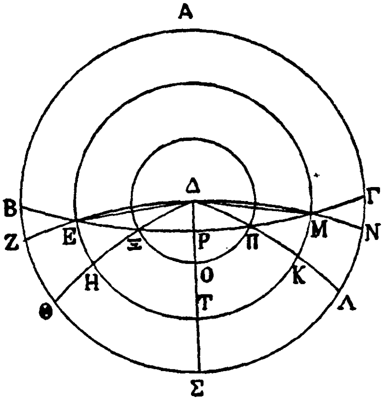
Proposition 18. — Que deux cercles les plus grands ABΓ, BPΓ se coupent mutuellement ; soit Δ le pôle du cercle ABΓ ; soient décrits les cercles les plus grands ΔZ, ΔΘ, ΔΛ, ΔN, et que l'arc EΞ soit égal à l'arc ΠM. Je dis que, si l'arc BE est égal à l'arc MΓ, l'arc ZΘ est aussi égal à l'arc ΛN ; que, si l'arc BE est plus grand que l'arc MΓ, l'arc ZΘ est aussi plus grand que l'arc ΛN, et que, si l'arc BE est plus petit que l'arc MΓ, l'arc ZΘ est aussi plus petit que l'arc ΛN.

Supposons que l'arc BE soit égal à l'arc MΓ ; il s'ensuit que la droite menée du point Δ au point M est égale à la droite menée du point Δ au point E (2) ; donc, le cercle décrit du pôle Δ à la distance de l'une des droites ΔE, ΔM passera aussi par l'autre

1. La démonstration se déroule explicitement comme suit : Pour démontrer que, dans l'hypothèse arc ZΛ = arc ΛΘ on a : arc EK < arc KΞ, mettons en question l'expression : $\widehat{EOK} \lesseqgtr \widehat{KOT}$; laquelle, établissant que l'angle en O du triangle EOT est divisé en parties inégales, n'entraîne pas l'expression (Euclide, liv. VI, prop. 3) : $\frac{OE}{OT} = \frac{EP}{PT}$, et met donc en question, comme dans le texte, l'expression : $\frac{OE}{OT} \lesseqgtr \frac{EP}{PT}$, d'où, en présence de la dernière expression de la note avant-précédente, il vient : $\frac{OE}{OT} \lesseqgtr \frac{E\Pi}{\Pi T}$. Or, $\Pi T > \Pi H$ et $E\Pi = \Pi H$; donc : $\Pi T > E\Pi$, d'où : $\frac{\Pi O}{E\Pi} > \frac{\Pi O}{\Pi T}$, d'où : $\frac{\overline{\Pi O}^2 + \overline{E\Pi}^2}{\overline{E\Pi}^2} > \frac{\overline{\Pi O}^2 + \overline{\Pi T}^2}{\overline{\Pi T}^2}$ ou : $\frac{\overline{OE}^2}{\overline{E\Pi}^2} > \frac{\overline{OT}^2}{\overline{\Pi T}^2}$, d'où : $\frac{OE}{E\Pi} > \frac{OT}{\Pi T}$, d'où, en présence de la dernière expression de la note avant-précédente, on a, comme le texte : $\frac{EP}{PT} < \frac{OE}{OT}$. Or, cette expression n'entraînant pas, comme l'expression $\frac{EP}{PT} = \frac{OE}{OT}$, que, par réciproque de la proposition 3 du livre VI d'Euclide, l'angle en O du triangle EOΞ soit divisé en deux parties égales, on a donc : $\widehat{EOK} < \widehat{KOT}$, d'où, comme le texte : arc EK < arc KΞ.

2. Voir proposition 14, p. 383.

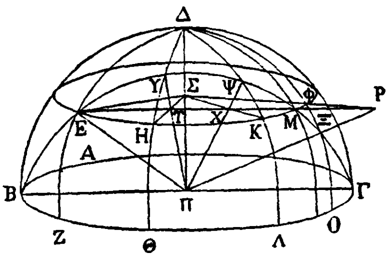
point. Décrivons-le, et que ce soit le cercle ETM. Coupons l'arc ΞΠ en deux parties égales au point P, et décrivons par les points Δ, P le cercle le plus grand ΔPΣ. Et puisque l'arc EΞ est égal à l'arc ΠM, mais que l'arc BE est aussi égal à l'arc MΓ, il s'ensuit que l'arc entier BΞ est égal à l'arc entier ΓΠ ; donc, la droite menée du point Δ au point Ξ est égale à la droite menée du point Δ au point Π (1). Décrivons donc le cercle ΞOΠ du pôle Δ à la distance de l'une des droites ΔΞ, ΔΠ.



Et puisque l'arc ΞO est égal à l'arc OΠ, mais que l'arc OΞ est semblable à l'arc ΘΣ et l'arc OΠ semblable à l'arc ΣΛ, il s'ensuit que l'arc ΘΣ est aussi semblable à l'arc ΣΛ. Or, ces arcs appartiennent au même cercle ; donc l'arc ΘΣ est égal à l'arc ΣΛ. Derechef, puisque l'arc EB est égal à l'arc ΓM, l'arc ZΣ est aussi égal à l'arc ΣN ; donc, l'arc restant ZΘ est égal à l'arc restant NΛ ; ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 19. — Mais, en supposant que la figure soit la même (2), que l'arc BE soit plus grand que l'arc ΓΞ, l'arc EΥ égal à l'arc ΞΨ, et décrivons par les points Δ, Ψ le cercle le plus grand ΔΨKΛ ; je dis que l'arc ZΘ est plus grand que l'arc ΛO.

En effet, construisons une figure analogue à celles qui précèdent, et puisque l'angle compris sous les droites EΠ, ΠT est égal à l'angle compris sous les droites XΠ, ΠP, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites TP, PX est au rectangle compris sous les droites XE, ET comme le carré de la droite PΠ est au



1. Voir proposition 14.
2. Voir p. 385, la note relative à la figure qui accompagne la proposition 16.

carré de la droite ΠΕ (1). Et puisque nous cherchons ce qu'est l'arc ΖΘ comparé à l'arc ΛΟ, c'est-à-dire l'arc ΕΗ comparé à l'arc ΚΦ, nous chercherons donc ce qu'est l'angle compris sous les droites ΕΣ, ΣΤ comparé à l'angle compris sous les droites ΧΣ, ΣΡ. En conséquence, nous chercherons ce qu'est le rapport du carré de la droite ΕΣ au carré de la droite ΣΡ comparé au rapport du rectangle compris sous les droites ΧΕ, ΕΤ au rectangle compris sous les droites ΤΡ, ΡΧ, c'est-à-dire au rapport du carré de la droite ΕΠ au carré de la droite ΠΡ. Or, ces rapports admettent comparaison, et le rapport du carré de la droite ΕΠ au carré de la droite ΠΡ est plus grand que celui du carré de la droite ΕΣ au carré de la droite ΣΡ ; car on le démontre de la même manière que précédemment (2). Mais, le rectangle compris sous les droites ΧΕ, ΕΤ est au rectangle compris sous les droites ΤΡ, ΡΧ comme le carré de la droite ΕΠ est au carré de la droite ΠΡ ; donc, le rapport du rectangle compris sous les droites ΧΕ, ΕΤ au rectangle compris sous les droites ΤΡ, ΡΧ est plus grand que celui du carré de la droite ΕΣ au carré de la droite ΣΡ. En conséquence, l'angle compris sous les droites ΕΣ, ΣΤ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΧΣ, ΣΡ ; donc, l'arc ΖΘ est plus grand que l'arc ΛΟ (3).

---

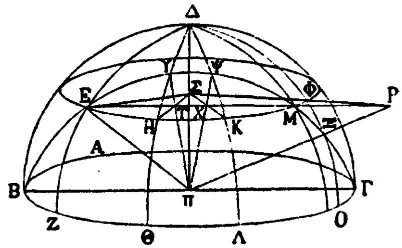
1. On a par hypothèse : arc ΕΥ = arc ΨΞ ; donc (EUCLIDE, liv. III, prop. 27, énoncée p. 284, n. 1) : $\widehat{E\Pi T} = \widehat{X\Pi P}$. Dès lors, considérant le triangle ΕΠΡ dans lequel les deux droites ΠΤ, ΠΧ sont menées sous des angles égaux, on a (voir prop. 12), comme le texte : $\frac{TP \times PX}{XE \times ET} = \frac{\overline{\Pi P}^2}{\overline{\Pi E}^2}$.

2. Voir proposition 16 et notes.

3. Explicitement : Pour démontrer que, dans l'hypothèse arc ΕΥ = arc ΨΞ, on a : arc ΖΘ > arc ΛΟ ou, considérant les arcs semblables, que l'on a : arc ΕΗ > arc ΚΦ, comparons les angles correspondants à ces arcs dans le cercle parallèle ΕΗΚΜΦ, c'est-à-dire mettons en question l'expression : $\widehat{E\Sigma T} \lessgtr \widehat{X\Sigma P}$. Or, considérant le triangle ΕΣΡ, dans lequel deux droites ΣΤ, ΣΧ sont menées sous des angles inégaux, la proposition 13 (voir p. 382), invoquée dans sa réciproque, met en question l'expression : $\frac{\overline{E\Sigma}^2}{\overline{\Sigma P}^2} \lessgtr \frac{XE \times ET}{TP \times PX}$, d'où, en présence de l'égalité de la note avant-précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{E\Sigma}^2}{\overline{\Sigma P}^2} \lessgtr \frac{\overline{\Pi E}^2}{\overline{\Pi P}^2}$, d'où : $\frac{E\Sigma}{\Sigma P} \lessgtr \frac{\Pi E}{\Pi P}$. Or, on a : ΣΡ > ΣΦ et ΣΦ = ΕΣ ; donc : ΣΡ > ΕΣ. Dès lors : $\frac{\Sigma P}{\Sigma\Pi} > \frac{E\Sigma}{\Sigma\Pi}$; d'où : $\frac{\overline{\Sigma P}^2}{\overline{\Sigma P}^2 + \overline{\Sigma\Pi}^2} > \frac{\overline{E\Sigma}^2}{\overline{E\Sigma}^2 + \overline{\Sigma\Pi}^2}$ ou : $\frac{\overline{\Sigma P}^2}{\overline{\Pi P}^2} > \frac{\overline{E\Sigma}^2}{\overline{E\Pi}^2}$, d'où, comme le texte :

Proposition 20. — Que l'arc ΛΟ soit maintenant égal à l'arc ΖΘ ; je dis que l'arc ΕΥ est plus petit que l'arc ΨΞ.

En effet, puisque l'arc ΖΘ est égal à l'arc ΛΟ, l'arc ΕΗ sera aussi égal à l'arc ΚΦ (car l'arc ΖΘ est semblable à l'arc ΕΗ et l'arc ΛΟ semblable à l'arc ΚΦ) ; de sorte que l'angle compris sous les droites ΕΣ, ΣΤ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΧΣ, ΣΡ. En conséquence, le rapport du carré de la droite ΣΕ au carré de la droite ΣΡ est le même que celui du rectangle compris sous les droites ΧΕ, ΕΤ au rectangle compris sous les droites ΤΡ, ΡΧ [1]. Or, puisque nous cherchons ce qu'est l'arc ΕΥ comparé à l'arc ΨΞ, nous chercherons donc ce qu'est le rapport du carré de la droite ΕΠ au carré de la droite ΠΡ comparé au rapport du rectangle compris sous les droites ΧΕ, ΕΤ au rectangle compris sous les droites ΤΡ, ΡΧ, c'est-à-dire au rapport du carré de la droite ΕΣ au carré de la droite ΣΡ. Or, ces rapports admettent comparaison. Dès lors, puisque le rapport du carré de la droite ΕΠ au carré de la droite ΠΡ est plus grand que celui du carré de la droite ΕΣ au carré de la droite ΣΡ, c'est-à-dire celui du rectangle compris sous les droites ΧΕ, ΕΤ au rectangle compris sous les droites ΤΡ, ΡΧ, le rapport du rectangle compris sous les droites ΧΕ, ΕΤ au rectangle compris sous les droites ΤΡ, ΡΧ est aussi plus petit que celui du carré de la droite ΕΠ au carré de la



$\frac{\overline{E\Pi}^2}{\overline{\Pi P}^2} > \frac{\overline{E\Sigma}^2}{\overline{\Sigma P}^2}$, d'où, en présence de l'égalité de la note avant-précédente : $\frac{XE \times ET}{TP \times PX} > \frac{\overline{E\Sigma}^2}{\overline{\Sigma P}^2}$; expression qui, en vertu de la proposition 13, donne : $\widehat{E\Sigma T} > \widehat{X\Sigma P}$, d'où : arc ΕΗ > arc ΚΦ, d'où, considérant les arcs semblables : arc ΖΘ > arc ΛΟ.

1. On a par hypothèse : arc ΛΟ = arc ΖΘ, d'où, considérant les arcs semblables : arc ΕΗ = arc ΚΦ ; donc (Euclide, liv. III, prop. 27, énoncée p. 284, n. 1), on a : $\widehat{E\Sigma T} = \widehat{X\Sigma P}$. Dès lors, considérant le triangle ΕΣΡ dans lequel les deux droites ΣΗ, ΣΚ sont menées sous des angles égaux on a (voir proposition 12, p. 381), comme le texte : $\frac{\overline{\Sigma E}^2}{\overline{\Sigma P}^2} = \frac{XE \times ET}{TP \times PX}$.

droite ΠΡ. En conséquence, l'angle compris sous les droites ΕΠ, ΠΤ est plus petit que l'angle compris sous les droites ΧΠ, ΠΡ ; donc, l'arc ΕΥ est plus petit que l'arc ΞΨ ; ce qu'il fallait démontrer [1].

XIX.

Ces choses étant donc démontrées, nous allons exposer ce en vue de quoi elles ont été admises : « Si le pôle de parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand ; si deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles, coupent ce cercle le plus grand ; si des arcs égaux consécutifs sont découpés sur le cercle oblique, d'un même côté du plus grand des parallèles, et si, par les points obtenus et par le pôle, on décrit des cercles les plus grands, ceux-ci découpent des arcs inégaux sur le plus grand des parallèles, et l'arc plus rapproché du cercle le plus grand primitif sera continuellement plus grand que celui qui en est plus éloigné [2] ».

D'aucuns pensent qu'il faut ajouter ici « à angles droits », parce que, dans les lemmes relatifs aux *Sphériques*, il est démontré

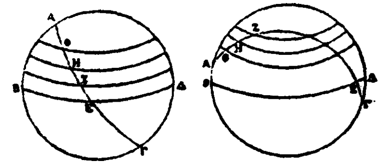
---

1. Explicitement : Pour démontrer que, dans l'hypothèse arc $\mathrm{\Lambda O} = $ arc $\mathrm{Z\Theta}$, on a : arc $\mathrm{E\Upsilon} <$ arc $\mathrm{\Psi\Xi}$, comparons les angles correspondants à ces arcs dans le grand cercle ΒΕΥΨΜΞΓ, c'est-à-dire mettons en question l'expression $\widehat{\mathrm{E\Pi T}} \lesseqgtr \widehat{\mathrm{X\Pi P}}$. Or, considérant le triangle ΕΠΡ dans lequel deux droites ΠΤ, ΠΧ sont menées sous des angles inégaux, la proposition 13, invoquée dans sa réciproque, met en question l'expression : $\frac{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi P}}^2} \lesseqgtr \frac{\mathrm{XE \times ET}}{\mathrm{TP \times PX}}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi P}}^2} \lesseqgtr \frac{\overline{\mathrm{\Sigma E}}^2}{\overline{\mathrm{\Sigma P}}^2}$, d'où : $\frac{\mathrm{E\Pi}}{\mathrm{\Pi P}} \lesseqgtr \frac{\mathrm{\Sigma E}}{\mathrm{\Sigma P}}$. Or, $\mathrm{\Sigma P} > \mathrm{\Sigma\Phi}$ et $\mathrm{\Sigma\Phi} = \mathrm{\Sigma E}$; donc : $\mathrm{\Sigma P} > \mathrm{\Sigma E}$, d'où : $\frac{\mathrm{\Sigma P}}{\mathrm{\Sigma\Pi}} > \frac{\mathrm{\Sigma E}}{\mathrm{\Sigma\Pi}}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{\Sigma P}}^2}{\overline{\mathrm{\Sigma P}}^2 + \overline{\mathrm{\Sigma\Pi}}^2} > \frac{\overline{\mathrm{\Sigma E}}^2}{\overline{\mathrm{\Sigma E}}^2 + \overline{\mathrm{\Sigma\Pi}}^2}$ ou : $\frac{\overline{\mathrm{\Sigma P}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi P}}^2} > \frac{\overline{\mathrm{\Sigma E}}^2}{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi P}}^2} > \frac{\overline{\mathrm{\Sigma E}}^2}{\overline{\mathrm{\Sigma P}}^2}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\mathrm{XE \times ET}}{\mathrm{TP \times PX}} < \frac{\overline{\mathrm{E\Pi}}^2}{\overline{\mathrm{\Pi P}}^2}$; expression qui, en vertu de la proposition 13 précitée donne : $\widehat{\mathrm{E\Pi T}} < \widehat{\mathrm{X\Pi P}}$; d'où : arc $\mathrm{E\Upsilon} <$ arc $\mathrm{\Psi\Xi}$.

2. Voir l'énoncé de la proposition 6 du livre III des *Sphériques* de Théodose que nous avons donné p. 369, n. 3. La discussion de Pappus porte donc sur un énoncé plus général en ce sens que le grand cercle équateur et le grand cercle oblique ne coupent plus nécessairement à angles droits le grand cercle qui passe par les pôles des cercles parallèles.

que l'on doit aussi ajouter « à angles droits » pour le théorème qui précède celui-ci ([1]).

Proposition 21. — En effet, si nous exposons le cercle ΑΒΓΔ passant par les pôles de la sphère, ainsi que deux cercles les plus grands ΒΕΔ, ΑΕΓ qui coupent ce cercle, dont l'un ΒΕΔ est un des parallèles, et dont l'autre ΑΕΓ est oblique sur les parallèles ; si nous découpons, sur le cercle ΑΕΓ, des arcs égaux ΖΗ, ΗΘ, et si nous décrivons par les points Ζ, Η, Θ des parallèles au cercle ΒΕΔ ; ceux-ci ne couperont pas toujours l'arc ΑΒ (à condition évidemment que l'arc ΑΕ ne soit pas plus grand que l'arc du tétragone) ([2]). On voit donc que « à angles droits » est ajouté dans les lemmes sur les *Sphériques* afin que cet arc soit un quadrant. Par conséquent, d'aucuns pensent que la même chose doit être ajoutée au sixième théorème, parce que, disent-ils, ce dernier est démontré à l'aide du théorème précédent ([3]), [et là « à angles droits » est utile] ([4]). Or, cela est de grande naïveté ; car on objectera : « Vous ne démontrez absolument pas ce théorème au moyen de celui qui le précède, où cette adjonction avait son utilité, et, en tout cas, une autre démonstration, qui ne s'appuie pas sur ce théorème précédent, démontre la proposition » ([5]).



1. Théodose, *Les Sphériques*, liv. III, prop. 5 : « Si le pôle de cercles parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand ; si deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles, coupent ce grand cercle à angles droits ; si l'on découpe, sur le cercle oblique, des arcs égaux consécutifs, du même côté du plus grand des parallèles et si, par les points ainsi déterminés, l'on décrit des cercles parallèles, ceux-ci découperont, dans leur intervalle, des arcs inégaux sur le cercle le plus grand primitif ; et l'arc plus rapproché du plus grand des parallèles sera continuellement plus grand que celui qui en est plus éloigné ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 93.

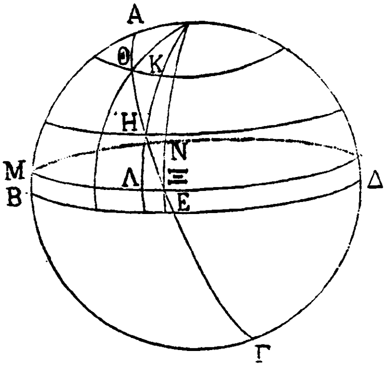
2. τετραγώνου, (arc) du tétragone, c'est-à-dire l'arc correspondant au côté du carré inscrit dans le cercle, ou arc de quadrant de cercle.

3. C'est-à-dire au moyen du théorème 5 du livre III des *Sphériques* de Théodose, dont nous avons donné l'énoncé dans la note 1 ci-dessus.

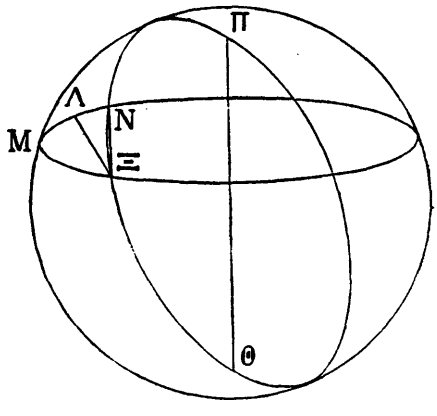
4. La phrase mise entre crochets est une interpolation (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 508, l. 5).

5. C'est-à-dire la proposition telle qu'elle est énoncée au début du chap. XIX, sans présenter la condition « à angles droits » que l'on trouve dans l'énoncé de la proposition de Théodose.

Cependant, d'aucuns croient que ces mots ont été ajoutés pour le motif suivant : Après avoir décrit les cercles parallèles, posé l'arc ΚΗ égal à l'arc ΗΛ, et décrit le cercle parallèle ΛΞ par le point Λ, ils disent : « Puisque les cercles ΑΕΓ, ΔΕΒ (1) coupent le cercle ΑΒΓΔ (2) à angles droits, l'arc ΕΒ est donc l'arc du tétragone ; par conséquent, l'arc ΛΞ est plus petit que l'arc du tétragone de son propre cercle », et ce, afin d'ajouter : « Puisque le segment ΞΛ, conjointement avec son complément (3), est élevé sur la droite issue du point Ξ (4), perpendiculairement au cercle ΞΘ ; que l'arc du segment ainsi élevé est divisé en parties inégales au point Λ, et que l'arc ΛΞ est plus petit que la moitié (5), il s'ensuit que la droite menée du point Ξ au point Λ est la plus petite de toutes » (6).

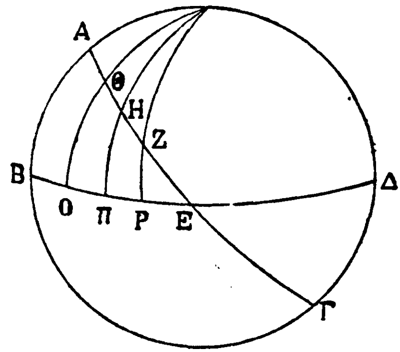


C'est en vue de cela qu'ils estiment utile d'ajouter « à angles droits », afin que l'arc ΞΛ soit plus petit que la moitié du segment élevé. Or, cela est absurde, car s'il est plus grand que la moitié ou plus petit que la moitié, on obtient ce qui a été proposé. En effet, si, dans un cercle tel que ΠΘ, on mène une droite parallèle au diamètre amené du point Θ, telle que la droite



1. C'est-à-dire les grands cercles.
2. C'est-à-dire le grand cercle.
3. C'est-à-dire le segment ΞΛΜΝ ; la partie ΛΜΝ du parallèle ΞΛ et les deux lettres Μ, Ν ayant été ajoutées dans la figure pour plus de clarté par Hultsch.
4. C'est-à-dire sur la droite qui relie les points Ξ, Ν d'intersection des circonférences des cercles ΑΗΞΓ, ΞΛΜΝ.
5. C'est-à-dire plus petit que la moitié de l'arc entier du segment ΞΛΜΝ.
6. La signification de cette droite sera donnée à la proposition suivante.

amenée du point Ξ, section commune des cercles ΠΞ, ΛΞ (1); si on élève, sur cette droite, un segment tel que ΞΛ (2), et si l'on y prend un point quelconque, tel que Λ, la droite menée du point Λ au point Ξ est plus petite que toutes les droites tombant du point Λ sur l'arc situé entre le diamètre et la droite qui lui est parallèle (3), ainsi que nous le démontrerons ci-après (4). Par conséquent, ce n'est pas davantage pour cette raison qu'on aurait ajouté « à angles droits », [mais parce qu'il se fait que, si l'arc AE est celui du tétragone, l'arc ΟΠ devient toujours plus grand que l'arc ΠΡ; tandis que s'il est plus grand ou plus petit (5), l'arc ΟΠ sera tantôt plus grand que l'arc ΠΡ, tantôt plus petit, tantôt égal à cet arc ; car cela sera montré dans la suite] (6).



XX.

Proposition *22.* — Qu'il faille démontrer maintenant le lemme qui a été invoqué ci-dessus (7).

Soit le cercle ΑΒΓ, le diamètre ΒΓ et la droite ΔΕ qui lui est parallèle. Élevons sur la droite ΔΕ le segment ΔΖΕ perpendicu-

1. C'est-à-dire la droite ΞΝ, section commune des plans des cercles ΠΝΞΘ et ΛΜΞΝ, en considérant les lettres M, N ajoutées à la figure par Hultsch.

2. C'est-à-dire le segment de cercle ΞΜΛΝ.

3. C'est-à-dire sur la portion d'arc située entre le diamètre ΘΠ et la droite ΞΝ qui lui a été menée parallèle.

4. Voir proposition 22.

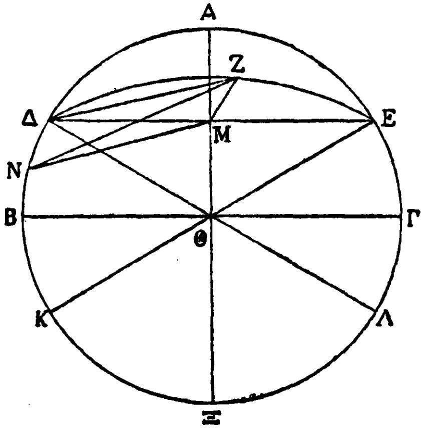
5. C'est-à-dire si l'arc AE est plus grand ou plus petit qu'un quadrant.

6. Voir propositions 23 à 27. Toute la phrase que nous mettons entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 510, ll. 21-24). L'obscurité qui règne d'ailleurs dans le texte de cette proposition résulte du fait qu'il est basé uniquement sur la figure assez simple, et pourvue d'un petit nombre de lettres qui accompagne la proposition 6 du livre III de Théodose. C'est pourquoi l'édition critique de Hultsch a remplacé cette figure unique des manuscrits par cinq autres figures plus intuitives, et qui permettent de mieux suivre le texte. Nous avons adopté ces figures dans notre traduction, et nous renvoyons en notes aux lettres indicatrices de ces figures non utilisées dans le texte.

7. Voir note 4 ci-dessus.

laire sur le cercle ΑΒΓ ; prenons, sur ce segment (1), un point quelconque Z, et menons la droite de jonction ZΔ. Je dis que la droite ZΔ est non seulement la plus petite de toutes celles qui tombent sur l'arc ΔB, mais que, si l'on mène les diamètres EΘK, ΔΘΛ, elle est encore la plus petite de toutes celles qui tombent sur l'arc ΔK.

En effet, menons une droite ZN, et menons du point Z la perpendiculaire sur le plan sous-jacent. Celle-ci tombera sur la section commune des plans (2). Qu'elle tombe au point M, et menons la droite de jonction MN. Dès lors, puisque nous cherchons si la droite ZN est plus grande que la droite ZΔ, nous chercherons si le carré de la droite NZ est plus grand que le carré de la droite ZΔ. Mais, les carrés des droites NM, MZ valent le carré de la droite NZ, et les carrés des droites ΔM, MZ valent le carré de la droite ΔZ ; donc, je dis que la droite NM est plus grande que la droite ΔM.



Prolongeons la droite de jonction MΘ jusqu'aux points Ξ, A ; la droite ΞA sera donc un diamètre du cercle ΑΒΓ, la droite MΞ sera la plus grande, MA la plus petite (3), et celle qui est plus rapprochée du centre sera plus grande que celle qui en est plus éloignée (4).

1. C'est-à-dire sur l'arc de ce segment de cercle.

2. C'est-à-dire sur la section commune du plan du segment de cercle ΔZE et du cercle ΑΒΓ. EUCLIDE, liv. XI, prop. 38 : « Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, et si d'un point pris dans un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l'autre plan, cette perpendiculaire tombe sur la section commune des plans ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 108.

3. Sous-entendu : de toutes les droites menées du point M à la circonférence du cercle ΑΒΓ.

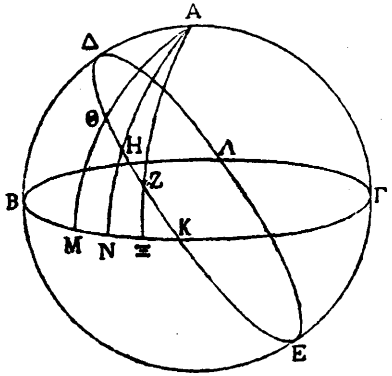
4. EUCLIDE, liv. III, prop. 7 : « Si, dans le diamètre d'un cercle, on prend un point qui ne soit pas le centre de ce cercle, et si de ce point on conduit des droites à la circonférence, la plus grande sera celle dans laquelle est le centre, et la plus petite la droite restante ; quant aux autres droites, la droite qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui en est plus éloignée, et du même point on ne peut mener à la circonférence que

En conséquence, la droite MN est plus grande que la droite MΔ ; ce qu'il fallait démontrer [1].

XXI.

Proposition 23. — Ces choses étant démontrées au préalable, qu'il faille démontrer le théorème dans lequel les cercles [2] sont décrits par le pôle et par les arcs égaux [3] découpés sur le cercle oblique [4].

Que, dans une sphère, deux cercles les plus grands ΒΓ, ΔΕ, dont l'un ΒΓ est un des parallèles et dont l'autre ΔΕ est oblique sur les parallèles, coupent à angles droits le cercle le plus grand ΑΒΓ. Découpons les arcs égaux ΖΗ, ΗΘ ; soit Α le pôle des parallèles, et décrivons les cercles les plus grands ΑΜ, ΑΝ, ΑΞ. Il faut démontrer que l'arc ΜΝ est plus grand que l'arc ΝΞ. [Il est ajouté : « à angles droits » pour que le problème se réalise] [5].



Complétons les cercles ΒΓ, ΔΕ du côté du point Λ. Dès lors, puisque l'arc ΔΚ est celui du tétragone et que l'arc ΔΛ l'est aussi, il s'ensuit que l'arc ΛΘ est plus grand que l'arc ΖΚ. En conséquence, puisque deux cercles les plus grands ΒΓΛ, ΕΔΛ se coupent mutuellement ; que le point Α est le pôle du cercle ΒΓΛ ; que des cercles les plus grands ΑΜ, ΑΝ, ΑΞ sont décrits, et que l'arc ΛΘ

deux droites égales de l'un et l'autre côté de la plus petite ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 128.

1. La droite ΖΜ étant perpendiculaire sur le plan du cercle ΑΒΓ, on a : $\overline{ZN}^2 = \overline{ZM}^2 + \overline{MN}^2$ et $\overline{Z\Delta}^2 = \overline{ZM}^2 + \overline{M\Delta}^2$. Or, $MN > M\Delta$; donc : $\overline{ZM}^2 + \overline{MN}^2 > \overline{ZM}^2 + \overline{M\Delta}^2$, d'où : $ZN > Z\Delta$.

2. C'est-à-dire les grands cercles.

3. C'est-à-dire par les extrémités des arcs égaux.

4. C'est-à-dire le théorème dont l'énoncé est donné au § XIX, et qui ne diffère de celui du théorème 6 du livre III des *Sphériques* de Théodose que par l'absence de la condition « à angles droits ». Voir p. 394, n. 2.

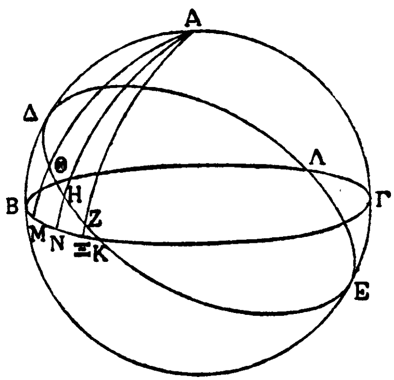
5. La phrase mise entre crochets doit, d'après Hultsch, avoir été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 512, l. 29).

est plus grand que l'arc ZK, tandis que l'arc ΘH est égal à l'arc HZ, il s'ensuit que l'arc MN est aussi plus grand que l'arc NΞ en raison de ce qui a été démontré précédemment (1) ; ce qu'il fallait démontrer.

XXII.

PROPOSITION 24. — Je dis maintenant que, si l'on n'ajoute pas « à angles droits » les choses ne se présentent pas [toujours] (2) conformément à la proposition.

Supposons les mêmes choses, et que l'arc KΔ soit plus petit que celui du tétragone ; je dis que le problème se réalise aussi de la même manière.



En effet, découpons les arcs égaux ZH, HΘ, et décrivons les cercles (3) AM, AN, AΞ. Dès lors, puisque l'arc KΔ est plus petit que celui du tétragone, et que l'arc KΛ est celui d'un demi-cercle, il s'ensuit que l'arc ΛΔ est plus grand que celui du tétragone ; par conséquent, l'arc ΛΘ est plus grand que l'arc KZ, et l'arc MN est donc plus grand que l'arc NΞ (4) ; ce qu'il fallait démontrer (5).

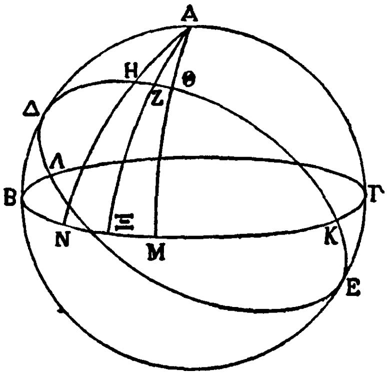
XXIII.

PROPOSITION 25. — Mais, supposons la même figure ; que l'arc KΔ soit plus grand que celui du tétragone, et découpons l'arc de tétragone KZ. Les arcs égaux seront découpés de chaque côté

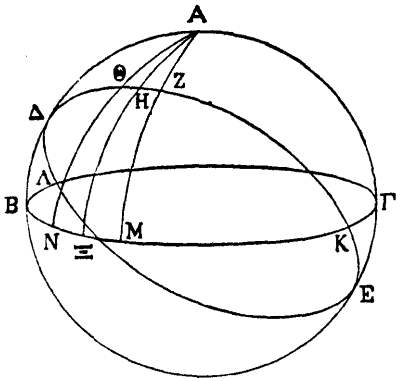
1. Voir proposition 16, p. 385.
2. πάντοτε, restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 514, l. 7).
3. C'est-à-dire les grands cercles.
4. Voir proposition 16, p. 385.
5. Le texte présente ici une interpolation de commentateur qui résume la démonstration : « Mais supposons maintenant que l'arc KΔ soit plus petit que celui d'un quadrant, et découpons des arcs égaux ZH, HΘ ; il s'ensuit que l'arc ΛΘ est plus grand que l'arc KZ, et l'arc MN plus grand que l'arc NΞ » (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 514, ll. 15-17).

du point Z, ou du côté des points Z, Δ, ou du côté des points Z, K.

Découpons les arcs (1) de chaque côté du point Z ; que ce soient les arcs ZH, ΘZ, et décrivons les cercles les plus grands (2), [et complétons les cercles ΓB, EΔ] (3). Et puisque l'arc KΛ est celui d'un demi-cercle et l'arc KZ celui d'un quart de cercle, l'arc restant ΛZ est donc celui d'un quart de cercle. Par conséquent, l'arc ΛZ est égal à l'arc ZK : arcs sur lesquels l'arc HZ est égal à l'arc ΘZ ; de sorte que l'arc restant ΛH est égal à l'arc restant ΘK. En conséquence, l'arc NΞ est aussi égal à l'arc ΞM (4) ; de sorte que, si l'arc KΔ est plus grand que celui du tétragone, si on en retranche l'arc de tétragone KZ et si on découpe des arcs égaux de part et d'autre du point Z, le problème ne se réalise pas.



XXIV.

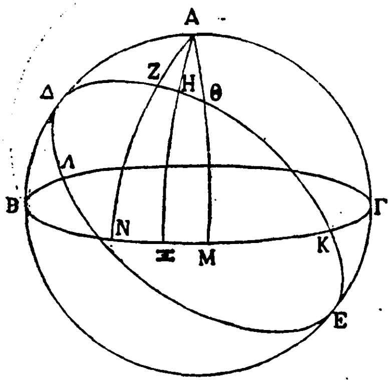


PROPOSITION 26. — Mais, supposons la même figure ; que l'arc KZ soit celui du tétragone, découpons les arcs égaux ZH, HΘ du côté des points Z, Δ, et décrivons les cercles les plus grands. Puisque l'arc KZ est celui du tétragone, il s'ensuit que l'arc KZ est plus grand que l'arc ΘΛ ; donc, l'arc ΞM est aussi plus grand que l'arc NΞ (5) ; ce qu'il fallait démontrer.

1. Sous-entendu ἴσαι, égaux.
2. C'est-à-dire les grands cercles passant par le pôle A et par les extrémités des arcs égaux ZH, HΘ.
3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 514, ll. 23-24).
4. Voir proposition 15, p. 384.
5. Voir proposition 16, p. 385.

XXV.

Proposition 27. — Mais, supposons la même figure ; découpons les arcs égaux ZH, HΘ du côté des points Z, K, et décrivons les cercles les plus grands AΘM, AZN, AHΞ. Et puisque KZ est un arc de tétragone, mais que [KΛ est un arc de demi-cercle, il s'ensuit que] (1) l'arc restant ZΛ est aussi celui du tétragone ; par conséquent, l'arc ZΛ est égal à l'arc ZK [arcs sur lesquels l'arc ΘH est égal à l'arc HZ] (2) ; donc, l'arc restant KΘ est plus petit que l'arc ZΛ ; donc, l'arc MΞ est aussi plus petit que l'arc NΞ (3) ; ce qu'il fallait démontrer.



XXVI.

On a démontré ainsi que, si les cercles se coupent à angles droits, les choses se présentent conformément à la proposition ; que, s'ils ne se coupent pas à angles droits, dans le cas où l'arc KΔ est plus petit que celui du côté du tétragone, les choses se présentent de nouveau toujours conformément à la proposition (4) ; tandis que, dans le cas où l'arc KΛ est plus grand que celui du côté du tétragone, il n'en est pas toujours ainsi. Mais, supposons que nous prenions l'arc de tétragone KZ, et, dans le cas où des arcs sont découpés à égale distance du point Z, les cercles les plus grands décrits découpent des arcs égaux dans leur inter-

1. Restauration due à Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 516, ll. 22-23).
2. Phrase considérée comme interpolation par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 516, l. 24).
3. Voir proposition 16.
4. Le texte ajoute ici les mots τοῦ στοιχείου mis entre crochets dans l'édition de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 518, l. 1). Ils ont probablement été interpolés par un scoliaste voulant préciser qu'il s'agit de la proposition de l'ouvrage de « principe » ou « d'Éléments » de Théodose.

valle [1] ; dans le cas où les arcs découpés égaux sont pris sur l'arc ZΔ, les cercles décrits par les pôles découpent l'arc plus rapproché du cercle le plus grand primitif plus petit que celui qui en est plus éloigné [2] ; enfin, dans le cas où les arcs découpés sont pris sur l'arc ZK, la chose se présente conformément à la proposition, c'est-à-dire que les cercles décrits par les pôles découpent un arc plus rapproché du cercle le plus grand primitif, plus grand que celui qui en est plus éloigné [3]. En conséquence, si les cercles ne se coupent pas à angles droits, les choses se présentent conformément à la proposition, mais pas dans tous les cas (lorsque les arcs découpés ne sont pas pris sur l'arc ZK) [4].

XXVII.

Attendu que trois positions différentes des cercles les plus grands sont les seules que l'on considère dans la sphère (car ces cercles doivent être perpendiculaires à l'axe, ou passer par les pôles, ou être inclinés sur l'axe), Autolycus rencontre ces trois cas dans ses démonstrations [5]. Et puisque ses premier, second

1. C'est-à-dire que les grands cercles menés par les pôles et par les extrémités des arcs égaux découpés sur le grand cercle oblique découpent, dans leur intervalle, sur le grand cercle parallèle, des arcs égaux.

2. C'est-à-dire que les choses se présentent comme dans la proposition 26.

3. C'est-à-dire que les choses se présentent comme dans la proposition 27.

4. Sous-entendu : et lorsque l'arc KΔ n'est pas plus petit qu'un quadrant.

5. Autolycus, de Pitane en Eolide, vécut environ 340 ans avant J.-C., et est considéré comme un contemporain d'Euclide. Il nous reste d'Autolycus deux petits traités de géométrie sphérique appliqués à l'astronomie : l'un *Sur la Sphère en mouvement* (περὶ κινουμένης σφαίρας), contenant douze propositions, l'autre en deux livres *Sur les levers et couchers des étoiles* (περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων), contenant treize et dix-huit théorèmes généraux qui ne peuvent servir à aucun calcul astronomique. Une version latine incomplète des ouvrages d'Autolycus parut en 1501, dans l'ouvrage de George Valla : *De expetendis et fugiendis rebus* ; une autre, faite sur l'arabe, fut donnée par Maurolycus, en 1558, et une version latine du traité : *Sur la Sphère en mouvement*, faite sur six manuscrits grecs de Rome, fut donnée par Joseph Auria, à Rome, en 1587. Quant au texte grec, les définitions et les énoncés des théorèmes seuls furent d'abord publiés par Dasypodius, en 1572, et par Richard Hoche, en 1877. La première traduction française, faite sur la version de Dasypodius, a été donnée sous le titre : *Deux livres d'Autolyce, l'un de la Sphère, et l'autre du Lever et du Coucher des étoiles non-errantes. Ensemble le livre de Théodose des Habitations, traduicts par Pierre Forcadel.* Paris, 1572, in-4° (ouvrage fort rare). Une édition critique du texte grec des ouvrages d'Autolycus a été donnée sous le titre : *De Sphaera quae movetur liber. De Ortibus et Occasibus libri duo. Una cum scholiis antiquis e libris manu scriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* Leipzig, Teubner, 1885, in-8°.

et troisième théorèmes considèrent les trois positions des cercles précitées, il a envisagé toute la sphère d'une manière générale et concise. En effet, si l'on suppose que [le cercle le plus grand] (1) est perpendiculaire à l'axe et que la sphère tourne, tous les points situés à la surface de la sphère décriront des parallèles ayant les mêmes pôles que la sphère. D'autre part, ces points parcourent en un même temps des arcs semblables de ces parallèles, et les arcs que ces points parcourent en un même temps sont semblables. La même chose se présentera si l'on suppose que le cercle le plus grand passe par les pôles de la sphère ou qu'il est oblique sur l'axe. C'est pour cette raison que, dans ces propositions, les démonstrations ont été établies pour la sphère entière.

Le quatrième théorème s'applique exclusivement à une seule position : celle où le cercle le plus grand est perpendiculaire à l'axe ; de sorte que tous les points que l'on prend sur la sphère n'ont ni lever ni coucher ; ce qui caractérise cette position et lui est particulier.

Le cinquième théorème caractérise la position du cercle passant par les pôles de la sphère, et ce qui est particulier à cette position ; il n'y a aucune des deux autres positions où tous les points de la surface de la sphère ont leur lever et leur coucher, mais le fait se produit dans cette seule position.

Le sixième théorème caractérise lui aussi la position restante qui est celle de l'obliquité sur l'axe ; car dans aucune autre position on n'a le cercle le plus grand tangent à deux cercles égaux et parallèles, tels que celui qui est situé dans l'hémisphère apparent soit toujours visible, et que celui qui est dans l'hémisphère non apparent soit toujours caché. En effet, dans la sphère, tout cercle le plus grand est tangent à deux cercles égaux et parallèles, mais qui ne sont pas toujours visibles (2) ni toujours cachés.

Après avoir exposé d'abord les théorèmes généraux d'une manière habile et méthodique, Autolycus expose ensuite les propriétés particulières et caractéristiques des susdites positions, telles qu'elles se présentent pour chacune d'elles, et il établit

1. Restauration de Commandin par les mots : maximum circulum (cfr. *loc. cit.*, p. 200, l. 41) et adoptée par Hultsch dans les mots : μέγιστον κύκλον (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 518, l. 23).

2. C'est-à-dire excepté dans le cas qui précède.

successivement tous les autres théorèmes qui ont une portée commune, en ne les réservant que pour une seule position (et parfois pour une deuxième) (1).

En effet, son septième théorème se réserve dans la position perpendiculaire du passage par les pôles et dans la position de l'obliquité sur l'axe ; car nous avons démontré nous-même comment ce théorème peut être réservé dans la position du passage par les pôles, tandis qu'il ne peut être réservé dans la position restante, parce que, dans celle-ci, il n'y a ni lever ni coucher.

Mais, la huitième proposition est énoncée exclusivement pour la position oblique sur l'axe ; car, dans la position du passage par les pôles de la sphère, les points qui apparaissent ensemble disparaissent aussi ensemble, et ceux qui disparaissent ensemble apparaissent aussi ensemble. En effet, dans ce cas, tous les cercles qui coupent l'horizon (2) sont coupés par lui en deux parties égales ; ils ont leurs demi-cercles au-dessus de l'horizon et en dessous de l'horizon, et c'est à cause de cela que les choses qui apparaissent ensemble disparaissent aussi ensemble, et vice versa.

Il évoque de même le neuvième théorème exclusivement pour la même position ; car il veut que les cercles qui sont tangents à un même cercle ne soient tangents à aucun autre si ce n'est à celui qui est continuellement visible.

D'autre part, le dixième théorème se réserve dans la position du passage par les pôles et dans celle de l'obliquité sur l'axe ; mais, il n'a songé qu'à la démonstration concernant la seule position de l'obliquité (3) ; tandis que nous avons démontré en plus que ce théorème se réserve aussi dans l'autre position. Nous

---

1. Le texte présente ici un petit commentaire interpolé : « ils sont considérés dans les trois premiers théorèmes qui se suivent » (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 520, ll. 25-26).

2. ὁρίζοντα, il s'agit ici du cercle qui sépare (ὁρίζειν) la partie apparente de la partie non apparente de la sphère.

3. La proposition X du traité d'Autolycus sur *La Sphère en mouvement* est énoncée (voir l'édition de Hultsch mentionnée p. 403, n. 5) : Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τὸν ἄξονα ὁρίζῃ τό τε φανερὸν τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἀφανές, ὁ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος ἐν μιᾷ περιφορᾷ τῆς σφαίρας δὶς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα, c'est-à-dire: « Lorsque, dans une sphère, un cercle le plus grand, oblique sur l'axe, sépare la partie apparente et la partie non apparente de la sphère, le cercle qui passe par les pôles de la sphère sera deux fois perpendiculaire sur l'horizon (littéralement : sur le cercle de séparation) au cours d'une révolution de la sphère ».

avons d'ailleurs dit comment il se fait que, dans la position perpendiculaire à l'axe, le cercle qui passe par les pôles de la sphère ne sera pas deux fois perpendiculaire à l'horizon, mais le sera toujours.

Dans le onzième théorème (1), il a envisagé la position la plus difficile de l'obliquité sur l'axe en disant : « oblique sur l'axe » et « touche des cercles plus grands que ceux que touchait le cercle primitif », n'ignorant pas que la démonstration relative à la position du passage par les pôles, qu'il a omise, est facile. Nous avons montré, en effet, comment il se fait que, dans cette position aussi, les levers et les couchers se produisent en tout lieu du cercle horizon entre les parallèles qu'il touche.

Enfin, en ce qui concerne le douzième théorème, il est clair qu'il se rapporte à la seule position oblique, et qu'il convient à celle-ci.

[On ne doit toutefois pas ignorer qu'on ne peut pas établir plusieurs cercles les plus grands perpendiculaires à l'axe, mais que ce cercle est seul et unique ; tandis que ceux qui passent par les pôles de la sphère et ceux qui sont obliques sur l'axe sont en nombre infini. Et tous ceux qui passent par les pôles de la sphère s'adaptent les uns sur les autres lorsque la sphère tourne (2) ; tandis que ceux qui sont obliques ne sont pas tous dans ce cas : cela ne se présente que pour ceux qui sont tangents à un même parallèle (ce parallèle est décrit autour des mêmes pôles que la sphère et est perpendiculaire à l'axe). C'est sans doute la raison pour laquelle, abordant l'exposé des particularités et des caractéristiques de chacune des positions, Autolycus a débuté par la

1. La proposition XI d'Autolycus (voir édit. de Hultsch) est énoncée : Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τὸν ἄξονα ὁρίζῃ τότε φανερὸν τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἀφανές, ἄλλος δέ τις λοξὸς μέγιστος κύκλος μειζόνων ἅπτηται ἢ ὧν ὁ ὁρίζων ἅπτεται, κατὰ πᾶσαν τὴν τοῦ ὁρίζοντος περιφέρειαν τὴν μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ὧν ἐφάπτεται τάς τε ἀνατολὰς καὶ τὰς δύσεις ποιεῖται, c'est-à-dire : « Lorsque, dans une sphère, un cercle le plus grand, oblique sur l'axe, sépare la partie apparente et la partie non apparente de la sphère, et qu'un autre cercle le plus grand oblique touche des cercles plus grands que ceux que touche le (cercle) horizon, les levers et les couchers se font suivant tout l'arc du (cercle) horizon situé entre les cercles parallèles qu'il touche ».

2. C'est-à-dire que, si un grand cercle qui passe par les pôles est supposé immobile pendant que la sphère tourne, tous les grands cercles passant par les pôles pouvant être décrits à la surface de la sphère viendront se confondre avec le grand cercle immobile.

position qui est la première et la plus simple : celle qui présente le cercle le plus grand perpendiculaire à l'axe. Or, comme nous l'avons dit, cette position est unique et n'admet aucun déplacement, quel qu'il soit. Il a ensuite ajouté à cette position celle qui lui succède en simplicité, c'est-à-dire celle du passage par les pôles de la sphère, pour laquelle, comme nous l'avons dit, des cercles peuvent être décrits en nombre infini par les pôles de la sphère, lesquels s'adaptent tous l'un sur l'autre, parce que les pôles sont fixes et ne sont pas constitués d'une autre manière. Enfin, l'autre position comporte cette particularité dans certains cas, comme nous l'avons dit, mais ne la comporte pas dans d'autres cas ; et c'est donc pour ce motif qu'il a mis cette position en troisième lieu, et la précédente en second lieu] (1).

XXVIII.

Tel est l'exposé sommaire de la question ; mais on recherchera dans le présent livre — ce qui réclamait une démonstration — comment les points non situés sur l'axe, mais à la surface de la sphère, décrivent des cercles lorsqu'ils se meuvent avec la sphère. En effet, si les points étaient immobiles et ne tournaient pas avec la sphère, on admettrait facilement que la ligne déterminée par un point dans la surface est une circonférence de cercle ; et si, au contraire, la sphère venant à tourner, le point se mouvait uniformément sur la sphère en tournant avec elle, mais avec plus de lenteur ou de célérité que la sphère, et dans le même sens, la proposition aurait, même dans ce cas, une certaine raison. En effet, si le point retardait sur la sphère, il déterminerait certainement une ligne dans la surface de la sphère en changeant de position d'une manière continue ; et si son mouvement était plus rapide, il en serait de même (2). Mais, si le point n'était ni en retard ni en avance, et s'il occupait toujours la même position dans la sphère, alors que celle-ci tourne, on se demanderait avec raison comment il pourrait décrire un cercle ; car, le point qui

1. Le long passage que nous avons mis entre crochets paraît être un verbiage interpolé de scoliaste (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 524, ll. 3-24).

2. Le texte présente ici l'interpolation : « il décrirait un cercle dans la surface de la sphère » (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 526, l. 6).

décrit doit décrire sur quelque chose d'immobile ; si, au contraire, ce sur quoi il décrit n'est pas fixe, comment décrira-t-il? Or, tout ce qui est dans la sphère n'est pas immobile alors que celle-ci tourne ; mais l'axe seul est immobile, et il est manifeste que des perpendiculaires peuvent toujours être menées, d'un point qui se meut, sur ce qui est fixe, et que celles-ci rencontrent l'axe en un certain point. En conséquence, il faut que le point où ces droites se rencontrent soit immobile, puisque l'axe est aussi immobile. Et puisque ce point est situé sur l'axe, et que la perpendiculaire qui a été menée est située dans la sphère, alors que la sphère tourne, la droite est entraînée circulairement conjointement avec l'une de ses extrémités située sur la surface de la sphère, tandis que l'autre extrémité, située sur l'axe, est immobile. Par conséquent, cette droite entraînée circulairement avec la sphère, se mouvant en tant que la sphère tourne, mais restant immobile quant à son extrémité, et sans varier dans ses extrémités, doit nécessairement se mouvoir suivant un plan. Or, ce plan dans lequel elle se meut est fixe (1) ; donc, puisqu'on a supposé un plan fixe dans lequel la droite que nous venons de dire se meut ; qu'on a pris deux points quelconques (2) dans ce plan, et qu'il est possible de décrire dans un plan un cercle de tout centre et à toute distance, il est clair que le cercle, décrit en prenant comme centre le point situé sur l'axe et à la distance du point situé sur la surface de la sphère, sera décrit dans le plan sur lequel la droite que nous avons dite se déplacera. En conséquence, le point fixe situé sur l'axe a été cause qu'un cercle soit décrit par le point situé sur la surface de la sphère (3). Le problème n'aurait donc pas pu se poser si une perpendiculaire n'eût été menée sur l'axe fixe.

[Et il faut encore savoir ceci : lorsqu'on mène une perpendiculaire sur l'axe, et qu'on étend le plan qui passe par l'axe et par cette perpendiculaire, cela se fait à la condition que la sphère

1. Le texte présente ici l'interpolation : « Or, ce plan n'est pas situé ailleurs que dans la sphère » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, p. 526, l. 26).

2. Le texte présente l'interpolation : « Les points extrêmes de la droite qui se meut, celui qui est situé sur l'axe et celui qui est situé sur la surface de la sphère » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 526, ll. 29-30).

3. Interpolation : « car il est impossible qu'il soit décrit sans que quelque chose soit fixe » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 528, l. 5).

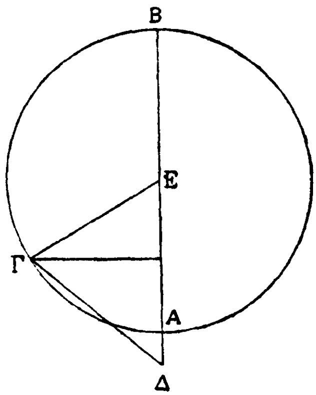
soit immobile ; car il est impossible de mener une perpendiculaire sur l'axe tandis que la sphère tourne. En effet, il faut qu'un plan ait été supposé au préalable, afin que, ayant une droite et un point quelconque dans ce plan, nous menions une perpendiculaire de ce point sur cette droite. D'autre part, si le point se meut tandis que la sphère tourne, passant ainsi dans des plans innombrables, et si la droite est fixe, il n'est pas possible de mener une perpendiculaire sur cette droite ; mais, quand le point et la droite sont fixes tout à la fois, si on les conçoit dans un plan, il est possible de mener une perpendiculaire du point sur la droite] (1).

XXIX.

Proposition 28. — Mais on démontre de la manière suivante que la droite menée perpendiculairement d'un point quelconque de la sphère sur l'axe rencontre cet axe à l'intérieur de la sphère.

Soit une sphère dont la droite AB est l'axe et dont les points A, B sont les pôles. Prenons un point quelconque Γ à la surface de la sphère, et menons la perpendiculaire sur la droite AB ; je dis qu'elle rencontre la droite AB à l'intérieur de la sphère.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, qu'elle rencontre la droite à l'extérieur, au point Δ, s'il se peut ; que la droite ΓΔ soit la perpendiculaire sur la droite AB ; prenons le point E, centre de la sphère, et menons la droite de jonction EΓ. Dès lors, puisque le point E est le centre de la sphère, la droite EΓ est égale à la droite EA ; par conséquent, la droite EΔ est plus grande que la droite EΓ. Et puisque EΓΔ est un triangle et que la droite EΔ est plus grande que la droite EΓ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites EΓ, ΓΔ est aussi plus grand que l'angle compris sous les droites EΔ, ΔΓ.



1. Tout le passage mis entre crochets est considéré par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 528, ll. 9-21).

Or, l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΓ est droit (1) ; donc, l'angle compris sous les droites ΕΓ, ΓΔ est plus grand qu'un angle droit ; donc, deux angles du triangle ΕΓΔ sont plus grands que deux angles droits ; ce qui est impossible. En conséquence, la droite menée perpendiculairement du point Γ sur la droite ΑΒ ne rencontre pas cette droite à l'extérieur de la sphère. On démontre de la même manière qu'elle ne tombe pas aux extrémités Α, Β de l'axe ; donc, elle le rencontre à l'intérieur. En conséquence, la droite menée perpendiculairement du point Γ sur la droite ΑΒ tombe à l'intérieur de la sphère ; ce qu'il fallait démontrer.

XXX.

Théodose est sujet à fausse interprétation dans son quatrième théorème (2) ; car, ayant démontré que le jour ΝΘ est plus long

1. Par hypothèse.

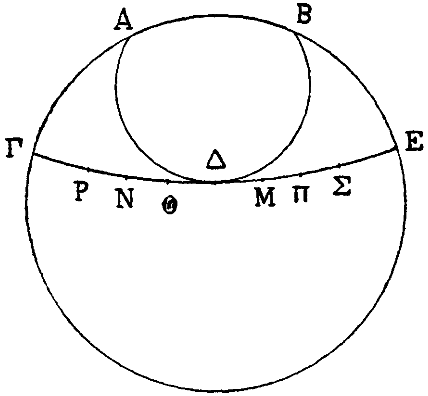
2. Il s'agit ici d'une proposition de l'un des deux ouvrages astronomiques de Théodose de Tripoli intitulé : *Des Jours et des Nuits* (περὶ Ἡμερῶν καὶ Νυκτῶν). Il se compose de deux livres dans lesquels il est admis, conformément à la conception des Anciens, que le soleil se meut uniformément, dans un sens contraire au mouvement diurne apparent de la sphère céleste, le long du « cercle des animaux », nommé aussi cercle héliaque ou solaire. On y considère que l'hémisphère visible a changé, lorsqu'un point de l'écliptique, qui était à l'horizon oriental, est arrivé à l'horizon occidental après avoir traversé l'hémisphère visible ; tandis que l'hémisphère invisible a changé quand le point de l'écliptique, qui était à l'horizon occidental, est arrivé à l'horizon oriental après avoir traversé tout l'hémisphère visible. On y considère enfin que le monde a fait un tour entier quand une étoile fixe a été de son lever à son lever suivant, soit de son coucher à son coucher suivant.

Cet ouvrage a été publié pour la première fois dans les seuls énoncés de ses propositions, en grec et en latin, par Conrard Dasypodius dans son ouvrage : *Sphaericae doctrinae propositiones graecae et latinae, nunc primum per M. Cunradum Dasypodium in lucem editae, quorum auctores sequens indicat pagina. Argentorati, excudebat Christianus Mylius*, 1572, *in-4°*. La seconde page de cet ouvrage porte au verso le sous-titre : *Theodosii de Sphaera libri tres ; de Habitationibus liber ; de Diebus et Noctibus libri duo. Autolici de Sphaera mobili liber, de Ortu et Occasu stellarum libri duo. Barleam monachi logisticae astronomicae libri sex.*

L'ouvrage de Théodose a été publié pour la seconde fois dans une traduction latine complète par Joseph Auria sous le titre : *Theodosii Tripolitae de Diebus et Noctibus libri duo, de Vaticana Bibliotheca deprompti, scholiis antiquis et figuris illustrati, et nunc primum de graeca in latinam conversi a J. Auria.* Romae, 1591, in-4°.

Le texte grec a fait l'objet de l'édition critique intitulée : *De habitationibus liber ; de diebus et noctibus libri duo. graece et latine edidit R. Fecht.* Berlin, 1927, in-8° (*Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, philologisch-historische Klasse*, neue Folge, Bd. XIX, 3). L'ouvrage n'a pas encore été traduit en langue vulgaire ; mais les seuls énoncés des diverses propositions ont été traduits que le jour ΜΠ, on présume de démontrer de la même manière que la nuit qui précède le jour ΝΘ est plus courte que la nuit qui succède au jour ΜΠ.

En effet, soit Ρ le coucher qui précède le lever Ν, et posons l'arc ΠΣ égal à l'arc ΡΝ [par hypothèse, et que le raisonnement se fasse sur la figure sous-jacente] (1). Dès lors, si l'arc ΝΘ était plus petit que l'arc ΜΠ, l'arc entier ΝΔ deviendrait par là même plus petit que l'arc entier ΔΠ, et les changements des arcs ΝΡ, ΠΣ s'accompliraient de la même manière. Or, maintenant, puisque l'arc ΘΔ est plus petit que l'arc ΔΜ, et que l'arc ΘΝ est plus grand que l'arc ΜΠ, il n'est pas manifeste que l'arc entier ΔΝ soit plus petit que l'arc entier ΔΠ ; car il est possible qu'il devienne égal et plus grand. Or, du moment que l'arc ΔΝ n'est pas plus petit, on ne pourra pas dire que l'arc ΝΡ se changera en non apparent en moins de temps que l'arc ΠΣ. En conséquence, Théodose devait démontrer d'abord que la somme des arcs des nuits et des jours (2) dans la partie ΔΓ est continuellement plus petite que la somme des arcs dans la partie ΔΕ, et il devait ajouter



en français par Delambre (*Histoire de l'Astronomie ancienne*, Paris, 1817, 2 vol., in-4°).

La proposition 4 du premier livre est énoncée comme suit d'après la traduction de Delambre (voir pp. 237 et suiv.) : « Si le soleil s'est levé et couché sur deux parallèles inégalement éloignés du tropique, le solstice n'aura point lieu à midi du jour qui tient le milieu, le jour du solstice sera encore le plus long de l'année. Les jours qui seront dans le demi-cercle où le soleil était plus près du tropique seront plus longs que les jours de l'autre demi-cercle. Ce sera le contraire pour le solstice d'hiver ».

C'est cette proposition que Pappus estime ne pas avoir été achevée par Théodose, en ce sens qu'elle omet de s'étendre à la durée des nuits qui précèdent et qui suivent immédiatement les deux jours considérés. Il va la compléter et y rattacher dix autres propositions astronomiques qui seront démontrées géométriquement.

1. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 530, l. 18).

2. C'est-à-dire la somme des arcs ΔΘ, ΘΝ.

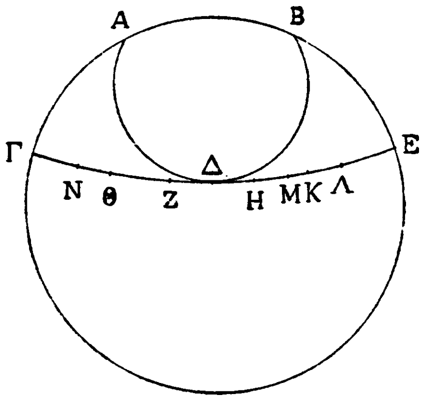
ainsi que les choses restantes seraient aussi démontrées de la même manière (1).

XXXI.

Quant à nous, c'est de la manière entièrement astronomique suivante que nous allons démontrer ce que Théodose a passé sous silence.

PROPOSITION 29. — Que le soleil se lève au point Z, se couche au point H, et que l'arc ΔZ soit plus petit que l'arc ΔH. D'autre part, soit Θ le coucher qui précède le lever Z, et soit N le lever qui précède le coucher Θ ; soit K le lever qui suit le coucher H ; soit Λ le coucher qui suit le lever K, et que la nuit ZΘ soit plus courte que la nuit HK, tandis que le jour ΘN est plus long que le jour KΛ. Je dis que l'arc entier ΔN est plus petit que l'arc entier ΔΛ.

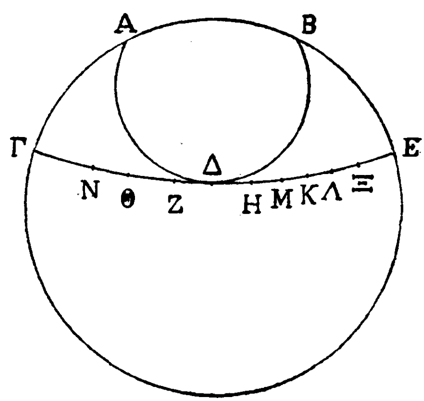
En effet, s'il n'en est pas ainsi, il lui est égal ou il est plus grand. Qu'il lui soit d'abord égal. Dès lors, puisque l'arc ΔZ est plus petit que l'arc ΔH (2) et que l'arc ZΘ est plus petit que l'arc HK (3), il s'ensuit que l'arc entier ΔΘ est plus petit que l'arc entier ΔK. Soit donc l'arc ΔM égal à l'arc ΔΘ. Or, l'arc entier NΔ est aussi égal à l'arc entier ΔΛ (4) ; donc, l'arc restant ΘN est égal à l'arc restant MΛ. En conséquence, puisque le soleil, levé au point N, se couche au point Θ, l'arc NΘ échange l'hémisphère éclairé dans le temps où le soleil parcourt l'arc ΘN. Or, le soleil parcourt en un même temps l'arc NΘ et l'arc MΛ qui lui est



1. Le texte présente ici la petite interpolation : « sur la figure sous-jacente » (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 532, l. 5).
2. Par hypothèse.
3. Par hypothèse.
4. En première hypothèse.

égal ; donc, le soleil parcourt l'arc MΛ, et l'arc ΘN échange l'hémisphère éclairé, en un même temps. Mais, l'arc ΘN et l'arc ΛM échangent l'hémisphère éclairé en un même temps (car ils sont égaux et également éloignés de la conjonction d'été) ; donc, le soleil parcourt l'arc MΛ, et l'arc MΛ échange l'hémisphère éclairé, en un même temps. Mais, le soleil parcourt l'arc MΛ dans le même temps où il parcourt chacun des arcs MK, KΛ (1) ; tandis que l'arc MΛ échange l'hémisphère éclairé dans le même temps où l'arc MK se lève et où l'arc KΛ échange l'hémisphère éclairé ; donc, le soleil parcourt chacun des arcs MK, KΛ dans le même temps où l'arc MK se lève et où l'arc KΛ échange l'hémisphère éclairé. Mais, le temps dans lequel le soleil parcourt l'arc KΛ est égal à celui dans lequel l'arc KΛ échange l'hémisphère éclairé [car il se lève au point K et se couche au point Λ] (2) ; par conséquent, le temps restant dans lequel le soleil parcourt l'arc MK est égal au temps dans lequel l'arc MK se lève. Or, cela est impossible, puisque le soleil parcourt tout l'arc en un temps plus long que celui dans lequel cet arc se lève et se couche de nouveau (car nous démontrerons cela dans la suite) (3). En conséquence l'arc NΔ n'est pas égal à l'arc ΔΛ.

Que l'arc NΔ soit, au contraire, plus grand que l'arc ΔΛ, et posons l'arc ΔΞ égal à l'arc ΔN. Or, on avait posé aussi l'arc ΔΘ égal à l'arc ΔM ; donc l'arc restant ΘN est égal à l'arc restant MΞ, et le soleil parcourt l'arc ΘN dans un temps égal à celui dans lequel l'arc ΘN échange l'hémisphère éclairé. Or, le soleil parcourt aussi l'arc MΞ dans le même temps où il parcourt l'arc ΘN, et l'arc MΞ échange aussi l'hémisphère éclairé dans le même temps où le fait l'arc ΘN ; par conséquent, le soleil parcourt



1. C'est-à-dire la somme des arcs MK, KΛ.
2. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 534, l. 5).
3. Voir proposition 35.

l'arc MΞ dans un temps égal à celui dans lequel l'arc MΞ échange l'hémisphère éclairé. Mais, le soleil parcourt l'arc MΞ dans le même temps qu'il parcourt chacun des arcs MK, KΛ, ΛΞ (1) ; tandis que l'arc MΞ, échange l'hémisphère éclairé dans le même temps que l'arc MK se lève, que l'arc KΛ échange, et que l'arc ΛΞ se couche (2). Mais, le temps dans lequel le soleil parcourt l'arc KΛ est égal à celui dans lequel l'arc KΛ échange l'hémisphère éclairé ; par conséquent, le temps restant dans lequel le soleil parcourt l'arc MK est égal à celui dans lequel l'arc MK se lève, et le temps dans lequel le soleil parcourt l'arc ΛΞ est égal à celui dans lequel l'arc ΛΞ se couche. Or, cela est impossible (car le soleil parcourt tout l'arc dans un temps plus long que celui dans lequel cet arc se lève et se couche de nouveau) (3) ; de sorte que l'arc NΔ n'est pas plus grand que l'arc ΔΛ. Or, on a démontré qu'il ne lui est pas égal ; donc, l'arc NΔ est plus petit que l'arc ΔΛ. On démontrera cela de la même manière en vertu de ce qui va suivre. Ces choses étant exposées au préalable, la démonstration de Théodose se poursuivra de la manière que nous avons dite.

XXXII.

Mais, démontrons maintenant que le soleil parcourt tout l'arc en un temps plus long que celui dans lequel cet arc se lève et se couche de nouveau. Il semblera à d'aucuns que ce qui suit est manifeste et n'a pas besoin d'être démontré : « En effet, puisque le soleil parcourt le cercle (4) en une année, et que ce cercle nous apparaît en nuits et jours, le temps dans lequel le soleil parcourt ce cercle est un multiple du temps dans lequel le cercle apparaît. Dès lors, puisque le soleil parcourt le cercle entier en un temps plus long que celui dans lequel ce cercle apparaît, le soleil parcourra les arcs partiels du cercle en un temps plus long que celui dans lequel ces arcs se lèvent ou se couchent ; de sorte que la

1. C'est-à-dire la somme des arcs MK, KΛ, ΛΞ.
2. Le texte porte ici l'interpolation : τὴν δὲ ΛΞ διαπορεύεται (et parcourt l'arc ΛΞ), que Commandin (*loc. cit.*, p. 204) et Hultsch (*loc. cit.*, vol. II, p. 534, l. 25) abandonnent dans leurs versions latines.
3. Ce qui sera démontré à la proposition 35.
4. C'est-à-dire le cercle du zodiaque.

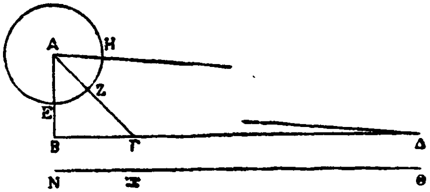
proposition est manifeste et ne mérite pas plus d'attention ». Il y a lieu d'objecter à cela que, si les arcs partiels du zodiaque, qui sont égaux, se levaient et se couchaient de nouveau en des temps égaux, ce que nous venons de dire serait manifeste pour nous ; car le cercle apparaîtra d'une manière uniforme, et les temps seront ainsi comparables entre eux, puisque le soleil, qui se meut ainsi d'une manière uniforme, parcourt les arcs égaux dans des temps égaux. Or, du moment que le soleil parcourt le cercle d'une manière uniforme, et que le cercle fait ses levers et ses couchers d'une manière non uniforme, comme le temps dans lequel le soleil parcourt le cercle est plus long que celui dans lequel le cercle lui-même apparaît, il ne nous est plus permis de dire que le temps partiel dans lequel le soleil parcourt un arc sera plus long que le temps dans lequel cet arc se lève ou se couche. Les choses étant telles, il n'est plus établi manifestement que le soleil parcourt toute la circonférence en un temps plus long que celui dans lequel cette circonférence apparaît et disparaît de nouveau. D'ailleurs, pourquoi ne pas dire qu'il parcourt tout le cercle dans un temps plus long que celui dans lequel ce cercle apparaît, tandis que les temps partiels dans lesquels le soleil parcourt chacun des arcs du cercle sont plus courts que les temps partiels dans lesquels chacun des arcs du cercle apparaît ? Il résulte en effet manifestement de ce qui suit que la chose peut se présenter dans certains mouvements.

PROPOSITION 30. — Soit le triangle rectangle ABΔ ayant l'angle en B droit [1] ; décrivons un cercle [2] autour du point A comme centre, et exposons une droite NΘ égale à la droite BΔ. Que le point N, mû d'une manière uniforme, parcoure la droite NΘ en dix heures, et que le point de conjonction B, où la droite AB

1. Comme la suite fera intervenir une donnée d'hypothèse qui aurait dû être posée dès le début, Commandin avait déjà supposé ici une lacune ou un oubli, en faisant la remarque : « Adde : sint autem duo latera AΔ, AB centupla ipsius AB ; hoc enim a Pappo inferius ponitur. » (Cfr. *loc. cit.*, p. 207, l. 17). Adoptant cette manière de voir, l'édition critique de Hultsch propose ici une reconstitution dans les termes : καὶ ἑκατονταπλασία συναμφότερος ἡ ΔΑ AB τῆς AB, c'est-à-dire : et (soit) la somme des droites ΔA, AB le centuple de la droite AB (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 538, l. 10).

2. C'est-à-dire le cercle EZH.

rencontre la droite ΒΔ, parcoure la droite ΒΔ en une heure ; coupons l'arc EH en deux parties égales au point Z et prolongeons la droite de jonction ΑΖΓ (1). Dès lors, puisque le point B parcourt la droite ΒΔ dans le même temps où le point E parcourt l'arc EH, tandis que le point B parcourt la droite ΒΓ dans le même temps où le point E parcourt l'arc EZ, et que le temps dans lequel le point E parcourt l'arc EH est double du temps dans lequel le point E parcourt l'arc EZ, il s'ensuit que le temps dans lequel le point B parcourt la droite ΒΔ est aussi double du temps dans lequel le point B parcourt la droite ΒΓ (2). Mais, le point B parcourt la droite ΒΔ en une heure (3) ; donc, le point B parcourra la droite ΒΓ en une demi-heure. Et puisque l'arc EZ est égal à l'arc ZH, l'angle compris sous les droites EA, AZ est égal à celui qui est compris sous les droites ZA, AH ; par conséquent, la droite ΔB est à la droite ΒΓ comme la somme des droites ΔA, AB est à la droite AB. Or, la somme des droites ΔA, AB est le centuple de la droite AB ; donc, la droite ΔB est aussi le centuple de la droite ΒΓ. Dès lors, si nous faisons en sorte que la droite ΘN soit à la droite NΞ comme la droite ΔB est à la droite ΒΓ, la droite NΘ sera donc aussi le centuple de la droite NΞ. Or, la droite ΒΔ est égale à la droite NΘ ; donc, la droite ΒΓ est aussi égale à la droite NΞ (4). En consé-



1. Plus correctement : prolongeons la droite de jonction AZ jusqu'au point de rencontre Γ avec la droite ΒΔ.

2. Il faut donc entendre qu'un point E′ se meut à partir du point E uniformément sur l'arc EH, de manière à arriver au point H dans le même temps qu'un point B′, partant du point B, parcourt la droite ΒΔ, de telle sorte que les points E′ et B′, qui déterminent les espaces parcourus de part et d'autre dans des temps égaux, sont toujours en ligne droite avec le point A.

3. Par hypothèse.

4. Explicitement, on a : arc EZ = arc ZH, d'où : $\widehat{\mathrm{EAZ}} = \widehat{\mathrm{ZAH}}$, d'où, considérant le triangle ΒΑΔ dans lequel la droite ΑΓ coupe l'angle A en deux parties égales, on a (Euclide, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4) : $\frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma} = \frac{\Delta\mathrm{A}}{\mathrm{AB}}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma + \mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma} = \frac{\Delta\mathrm{A} + \mathrm{AB}}{\mathrm{AB}}$ ou, comme le texte : $\frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{B}\Gamma} = \frac{\Delta\mathrm{A} + \mathrm{AB}}{\mathrm{BA}}$. Or, on a par hypo-

quence, puisque le point N, mû d'une manière uniforme, parcourt la droite NΘ en dix heures, il s'ensuit qu'il parcourra la centième partie de cette droite en un dixième d'heure ; tandis que le point B, mû d'une manière non uniforme, parcourt la droite BΓ en une demi-heure. Dès lors, ayant deux mouvements, l'un non uniforme, l'autre uniforme, le temps total dans lequel le point N parcourt la droite NΘ d'une manière uniforme est plus long que le temps total dans lequel le point B parcourt la droite BΔ d'une manière non uniforme ; tandis que le temps partiel dans lequel le point N parcourt la droite NΞ est plus court que le temps partiel dans lequel le point B parcourt la droite BΓ ; de sorte que rien ne s'oppose à ce que la même chose ne se présente pour le mouvement du soleil et pour l'apparition du cercle (1) ; c'est-à-dire que le soleil parcoure le cercle dans un temps plus long et que le cercle apparaisse dans un temps plus court, et, à nouveau, que, par contre, certains arcs du cercle apparaissent dans un temps plus long et que le soleil les parcoure dans un temps plus court. En effet, si la vitesse de l'apparition du cercle diminue, comment ne diminue-t-elle pas au point qu'un arc du cercle apparaisse dans un temps plus long que celui dans lequel le cercle parcourt cet arc ?

XXXIII.

Il faut donc que nous examinions si la vitesse du zodiaque est au nombre des choses qui croissent à l'infini et décroissent à l'infini, ou au nombre de celles qui croissent à l'infini et ne décroissent pas à l'infini, ou au nombre de celles qui décroissent à l'infini et ne croissent pas à l'infini, ou au nombre de celles qui ne décroissent pas à l'infini et ne croissent pas à l'infini ; car il est clair, d'après ce qui va suivre, que ces choses se présentent pour certaines grandeurs.

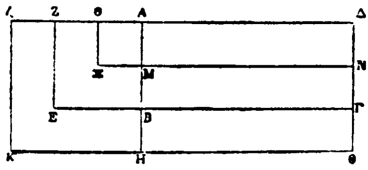
---

thèse (voir note 1, p. 415) : $\Delta A + AB = 100 AB$; donc : $\Delta B = 100 B\Gamma$. Posons : $\frac{\Theta N}{N\Xi} = \frac{\Delta B}{B\Gamma}$; donc : $\Theta N = 100 N\Xi$. Or, on a par hypothèse : $\Delta B = \Theta N$; donc, comme le texte : $B\Gamma = N\Xi$.

1. Sous-entendu : τοῦ ζῳδιακοῦ, du zodiaque.

Proposition 31. — Toutes les grandeurs qui interviennent dans les problèmes indéterminés deviennent plus grandes et, au contraire, plus petites que toute quantité proposée (1).

En effet, si on applique sur une droite donnée une aire augmentée d'un carré, il est possible de lui appliquer une aire plus grande et, au contraire, une aire plus petite, augmentées d'un carré ; et cela s'obtient à l'infini (2). [Dans ce cas, la grandeur appliquée augmente ou, au contraire, diminue donc à l'infini] (3).



Proposition 32. — Parmi les choses qui croissent à l'infini, mais qui ne décroissent pas à l'infini, il y a celle qui se présente dans le triangle décrit ci-contre.

En effet, si on a le triangle ΑΒΓ, si on coupe la droite ΑΓ en deux parties égales au point E, et si du point E l'on mène transversalement la droite ZEH, le triangle ZHB est plus grand que

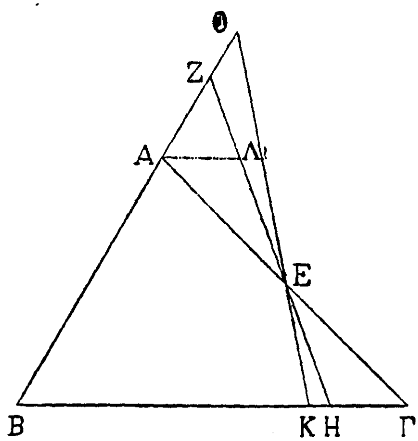
1. Examen du premier cas mentionné des grandeurs susceptibles de croître et de décroître tout à la fois à l'infini.

2. En d'autres termes, pour correspondre aux indications de la figure : Si, sur une droite donnée ΛΖΘΑΔ on construit un rectangle ΑΒΓΔ dont le grand côté est ΑΔ, et si on augmente ce rectangle d'un carré ΑΒΕΖ, il est possible de construire un rectangle plus grand ΑΗΘΔ augmenté d'un carré ΑΗΚΛ, et, au contraire, de construire un rectangle plus petit ΑΜΝΔ augmenté d'un carré ΑΜΞΘ, et ainsi de suite à l'infini.

Cette proposition est à rapprocher des deux suivantes : Euclide, liv. VI, prop. 29 : « Appliquer sur une droite donnée un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 363 ; Archimède, *Des Sphéroïdes et des Conoïdes*, prop. 2 : « Si des lignes en nombre quelconque sont égales entre elles, si à chacune d'elles on applique une certaine aire ayant comme excédent une figure carrée, tandis que les côtés des figures excédentes se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur égale au côté le plus petit et si, en outre, on a d'autres aires, en même nombre que les premières, dont chacune a même grandeur que la plus grande de celles-ci, le rapport de leur somme à la somme des premières aires sera moindre que celui d'une droite égale à la somme du côté de la plus grande figure excédente et d'une des droites égales entre elles à une droite égale à la somme du tiers du côté de la plus grande figure excédente et de la moitié d'une des droites égales entre elles ; tandis que le rapport de cette somme à ce qui reste de la somme des premières aires, après en avoir retranché la plus grande, sera plus grand que ce dernier rapport ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 145.

3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 542, l. 7).

le triangle ΑΒΓ (1). Et, derechef, si l'on mène transversalement la droite ΘΕΚ, le triangle ΒΘΚ est plus grand que le triangle ΖΒΗ. Et si l'on mène transversalement des droites (2) à l'infini, le triangle augmentera continuellement (3) ; tandis qu'une droite menée transversalement ne formera jamais un triangle plus petit que le triangle ΑΒΓ (4).



XXXIV.

Proposition 33. — Parmi les choses qui ne croissent pas à l'infini, mais qui décroissent à l'infini, il y a celle qui se rapporte à la droite appliquée dans le cercle (5).

En effet, il n'est pas possible d'appliquer dans un cercle une droite plus grande que toute droite proposée ; car la grandeur du diamètre étant une grandeur déterminée, on ne peut appliquer

1. Complétant les constructions de la figure du texte au moyen de la droite auxiliaire ΑΛ parallèle à la base ΒΓ, et considérant que par construction ΑΕ = ΕΓ, on a : triangle ΑΕΛ = triangle ΓΕΗ, d'où : triangle ΑΕΖ > triangle ΓΕΗ, d'où, comme le texte : triangle ΖΗΒ > triangle ΑΓΒ.

2. Sous-entendu : par le point Ε qui divise la droite ΑΓ en deux parties égales.

3. Une note de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 207) mentionne le cas du côté ΒΓ prolongé et de l'infinité de droites menées du point Ε au côté ΒΑ. D'autre part, le manuscrit du Vatican (codex Vaticanus graecus 218) porte en marge l'annotation : ὅτι ἡ διὰ τοῦ Ε μεταξὺ τῶν ΑΒ γενήσεται παράλληλος τῇ ΒΓ, au moyen de laquelle un scoliaste a voulu faire observer que, si des droites sont menées en nombre infini « par le point Ε, entre les points Α, Β, l'une de ces droites devient parallèle à la droite ΑΓ ».

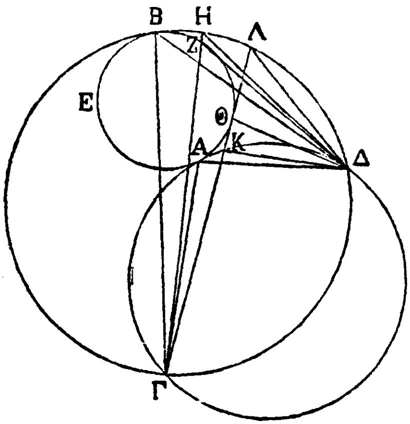
4. Le texte présente ici une interpolation (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 542, ll. 19-22), que nous traduisons : « Cette grandeur croît donc à l'infini et ne décroît pas ; mais il y a une grandeur plus petite que le triangle ΑΒΓ qui ne sera pas un triangle ».

5. La manière d'appliquer une droite donnée dans un cercle fait l'objet de la proposition 1re du livre IV d'Euclide : « Dans un cercle donné, adapter une droite égale à une droite donnée qui n'est pas plus grande que le diamètre », Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 196. La manière d'appliquer dans un cercle une droite donnée parallèle à un diamètre est indiquée par Pappus au livre III, proposition 43. Voir p. 97. Ces deux propositions sont à rapprocher de la proposition 7 du livre III d'Euclide, énoncée p. 398, n. 4.

une droite plus grande que ce diamètre, et cela peut d'autant moins être réalisé à l'infini. [Il est en effet possible d'en appliquer une plus petite que toute droite] ([1]).

Ce que nous venons de dire est aussi manifeste en raison de ce que toute aire donnée, si elle est défaillante d'un carré, ne s'appliquera pas sur une droite donnée. En effet, l'aire ainsi appliquée ne pourra pas croître à l'infini, parce qu'il y a une aire en présence de laquelle on ne pourra pas en appliquer une plus grande ([2]) ; tandis qu'en décroissance, on pourra en appliquer une plus petite que toute autre proposée. [Une telle grandeur d'application est donc considérée comme ne croissant pas à l'infini, mais comme décroissant à l'infini] ([3]).

Proposition 34. — Enfin, au nombre des choses qui ne peuvent ni croître à l'infini, ni décroître à l'infini ([4]), il y a celle qui est décrite ci-dessous.



Si l'on a deux cercles tangents entre eux au point A ; si un autre cercle touche l'un d'eux au point B et coupe l'autre aux points Γ, Δ, et si, des points Γ, Δ, on brise, sur les points de contact des cercles, les droites AΔ, ΓA, BΓ, BΔ, l'angle compris sous les droites ΓA, AΔ est le plus grand et l'angle compris sous les droites ΓB, BΔ est le

1. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 544, l. 7).

2. La condition d'applicabilité a été donnée par Euclide, liv. VI, prop. 28 : « A une droite donnée appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit défaillant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné : il faut que la figure rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de la droite donnée ; le défaut du parallélogramme appliqué à la moitié de cette droite et le défaut de celui qui doit être défaillant d'un parallélogramme semblable étant semblables entre eux ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 359.

3. Hultsch considère la phrase mise entre crochets comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 544, l. 14).

4. Le texte présente ici l'interpolation : ἀλλ' ἐπὶ τινα μεγέθη ὡρισμένα κατὰ πάντων τούτω (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 544, l. 18).

plus petit de tous les angles qui se brisent à la circonférence du cercle BEAZ (1). [Dans ce cas, si la grandeur de l'angle décroît, elle ne décroît pas à l'infini ; mais il y a une grandeur d'angle qui ne peut pas devenir plus petite. Et, au contraire, si l'angle croît, il ne croîtra pas à l'infini ; mais il y a une grandeur d'angle déterminée qui ne pourra pas devenir plus grande] (2).

XXXV.

PROPOSITION 35. — Ces choses étant exposées au préalable, nous allons démontrer maintenant que la vitesse décroissante du zodiaque n'est jamais plus petite que la vitesse du soleil ; mais que le soleil parcourt toujours un arc quelconque du zodiaque en un temps plus long que celui dans lequel cet arc se lève et se couche de nouveau.

Soit AB le cercle horizon (3) ; BEΔ le cercle du tropique (4) d'été ; ΔΘΛ le cercle du zodiaque, et KNM le plus grand des parallèles. Considérons le commencement (5) du Cancer (6) à son coucher, et découpons un arc quelconque ΔΘ du zodiaque ; je dis que le soleil parcourt l'arc ΔΘ en un temps plus long que celui dans lequel l'arc ΔΘ se couche.

En effet, décrivons par le point Θ le cercle le plus grand ΘΞ tangent au cercle arctique (7). Et puisque le carré du diamètre

1. En effet, si l'on considère d'autres angles, tels que ΓΖΔ, ΓΘΔ, ayant leur sommet à la circonférence du cercle BEAZ, on a : $\widehat{\Gamma Z\Delta} > \widehat{\Gamma H\Delta}$. Or, $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{\Gamma H\Delta}$; donc : $\widehat{\Gamma Z\Delta} > \widehat{\Gamma B\Delta}$, tandis que $\widehat{\Gamma Z\Delta} < \widehat{\Gamma A\Delta}$. D'autre part : $\widehat{\Gamma \Theta\Delta} > \widehat{\Gamma A\Delta}$. Or, $\widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{\Gamma B\Delta}$; donc : $\widehat{\Gamma \Theta\Delta} > \widehat{\Gamma B\Delta}$, tandis que $\widehat{\Gamma \Theta\Delta} < \widehat{\Gamma K\Delta}$. Or, $\widehat{\Gamma K\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}$; donc : $\widehat{\Gamma \Theta\Delta} < \widehat{\Gamma A\Delta}$. Enfin, on a : $\widehat{\Gamma \Theta\Delta} > \widehat{\Gamma Z\Delta}$; de sorte que, parmi les angles dont le sommet est à la circonférence du cercle BEAZ, celui dont le sommet est plus rapproché du point A est plus grand que celui dont le sommet est plus éloigné de ce point.

2. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 546, ll. 26 et suivantes).

3. ὁρίζων, c'est-à-dire le cercle qui sépare l'hémisphère éclairé de l'hémisphère non éclairé.

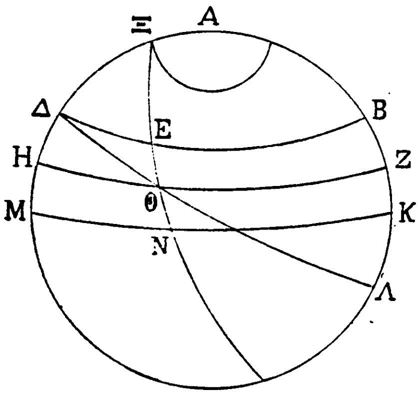
4. τροπικὸς, sous-entendu : κύκλος, c'est-à-dire le cercle d'où se fait le retour, ou cercle du tropique.

5. C'est-à-dire le point Δ.

6. καρκίνος, le cancre, signifiant ici le signe du zodiaque appelé le Cancer.

7. ἀρκτικὸς, (le cercle de la constellation de) l'ourse, ou cercle arctique.

de la sphère possède avec le carré du diamètre du cercle d'été ([1]) le rapport de 629 à 529 (parce que la droite menée du centre de la sphère au centre du cercle du tropique possède avec le rayon du cercle du tropique le rapport en longueur ([2]) de 10 à 23), il s'ensuit que le diamètre de la sphère est plus petit que le double du diamètre du cercle du tropique. En conséquence, le double du diamètre de la sphère est plus petit que le quadruple du diamètre du cercle du tropique ([3]). Or, le rapport du double du diamètre de la sphère au diamètre du cercle ΒΕΔ est plus grand que celui de l'arc ΜΝ à l'arc ΔΘ, conformément au théorème 12 du livre III des *Sphériques* ([4]) ; par conséquent, l'arc ΜΝ est, à fortiori, plus petit que le quadruple de l'arc ΔΘ ([5]). Et puisque



1. τοῦ θερινοῦ κύκλου, du cercle d'été, c'est-à-dire du cercle du tropique d'été.
2. C'est-à-dire à la première puissance.
3. Pappus emprunte ici aux tables de Claude Ptolémée le rapport :

$$\frac{\text{droite menée du centre de la sphère au centre du cercle tropique } B E \Delta}{\text{rayon du cercle tropique } B E \Delta} = \frac{10}{23},$$

et il en déduit :

$$\frac{(\text{dr. menée du centre de la sph. au centre du cercle } B E \Delta)^2 + (\text{rayon du cercle } B E \Delta)^2}{(\text{rayon du cercle } B E \Delta)^2} =$$

$$\frac{\overline{10}^2+\overline{23}^2}{\overline{23}^2} = \frac{100+529}{529} \text{ ou : } \frac{\text{carré du ray. de la sphère}}{\text{carré du ray. du cercle } B E \Delta} = \frac{\text{carré diam. sphère}}{\text{carré diam. cercle } B E \Delta} = \frac{629}{529},$$

d'où : $\frac{\text{diamètre sphère}}{\text{diamètre cercle } B E \Delta} = \frac{\sqrt{629}}{\sqrt{529}} = \frac{25{,}08}{23}$, d'où il conclut que l'on a : diamètre de la sphère $<$ 2 diamètres du cercle tropique ΒΕΔ, d'où : 2 diamètres de la sphère $<$ 4 diamètres du cercle tropique ΒΕΔ.

4. Théodose, *Les Sphériques*, liv. III, prop. 12 : « Si, dans une sphère, des cercles les plus grands sont tangents au même d'entre des parallèles, tout en découpant des arcs semblables de parallèles dans leur intervalle, et si un autre cercle le plus grand, oblique sur les parallèles, est tangent à des parallèles plus grands que ceux auxquels sont tangents les cercles primitifs, et coupe les cercles tangents au même d'entre les parallèles, dans l'intervalle du plus grand des parallèles et de celui auquel sont tangents les cercles primitifs, le rapport du double du diamètre de la sphère au diamètre du cercle auquel le cercle oblique est tangent est plus grand que le rapport de l'arc du plus grand des cercles parallèles, situé entre les cercles tangents au même d'entre les parallèles, à l'arc du cercle oblique situé entre ces derniers cercles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 115.
5. La proposition de Théodose énoncée dans la note précédente donne donc :

la vitesse du monde est plus grande que le quadruple de la vitesse du soleil, et que le monde est emporté suivant le cercle KNM, tandis que le soleil est emporté suivant le cercle ΔΘΛ, il s'ensuit que, dans le temps où le soleil parcourt l'arc ΘΔ, le point N franchit un arc plus grand que NM (parce que le point N est emporté avec la même vitesse que le monde). En conséquence, le soleil parcourt l'arc ΔΘ en un temps plus long que celui dans lequel le point N parvient au point M. Décrivons encore par le point Θ le cercle parallèle HΘZ. Or, c'est dans un même temps que le point N parvient au point M, et le point Θ au point H (car les arcs NM, ΘH sont semblables) (1) ; donc, le soleil parcourt l'arc ΔΘ dans un temps plus long que celui dans lequel le point Θ parvient au point H. Or, l'arc ΔΘ se couche dans le temps où le point Θ parvient au point H ; donc, le soleil parcourt l'arc ΔΘ dans un temps plus long que celui dans lequel l'arc ΔΘ se couche. Mais, l'arc ΔΘ se couche dans le même temps où se lève l'arc égal et opposé (2) qui vient après le Capricorne (3) et, ces arcs étant égaux, le soleil les parcourt dans un même temps ; de sorte que le soleil parcourt aussi l'arc qui vient après le Capricorne dans un temps plus long que celui dans lequel cet arc se lève. Nous avons du reste fait cet exposé sur ces arcs-ci du zodiaque, parce que l'un paraît se coucher dans le temps le plus long et l'autre se lever dans le temps le plus long (4). Mais, puisqu'il a été démontré que l'arc qui part du point de contact du Cancer (5) se couche dans un temps plus long que tous les autres arcs du

---

$$\frac{\text{2 diamètres de la sphère}}{\text{diamètre du cercle BE}\Delta} > \frac{\text{arc MN}}{\text{arc }\Delta\Theta}, \text{ d'où : } \frac{\text{2 diamètres de la sphère}}{\text{4 diamètres du cercle BE}\Delta} > \frac{\text{arc MN}}{\text{4 arcs }\Delta\Theta},$$
d'où, en présence de l'inégalité de la note 3, page 422, on a, comme le texte : arc MN $<$ 4 arcs ΔΘ.

1. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 13 : « Si l'on a des cercles parallèles dans une sphère, et si l'on décrit des cercles les plus grands tangents à l'un de ces cercles et coupant les autres, les arcs des cercles parallèles situés entre les demi-cercles non concourants des cercles les plus grands sont semblables, tandis que les arcs des cercles les plus grands situés entre les cercles parallèles sont égaux ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 48.

2. Euclide, *Les Phénomènes*, proposition 11, dont l'énoncé sera donné plus loin en texte grec et en traduction. Voir p. 475, n. 3.

3. αἰγόκερως, le Capricorne, signe du Zodiaque.

4. Euclide, *Les Phénomènes*, proposition 12 (voir texte grec et traduction de l'énoncé, p. 458, n. 2), et proposition 13 (voir texte grec et traduction de l'énoncé, p. 459, n. 3).

5. C'est-à-dire l'arc ΔΘ.

cercle du zodiaque, et qu'il a été démontré que cet arc se couche dans un temps plus court que celui dans lequel le soleil le parcourt, il s'ensuit, à fortiori, que les autres arcs se couchent dans un temps plus court que celui dans lequel le soleil les parcourt. Au contraire, puisque l'arc qui part du point de contact du Capricorne se lève dans un temps plus long que tous les autres arcs du zodiaque, et qu'il a été démontré que cet arc se lève dans un temps plus court que celui dans lequel le soleil le parcourt, il s'ensuit que les autres arcs du zodiaque se lèvent dans un temps, à fortiori, plus court que celui dans lequel le soleil les parcourt ; ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 36. — Mais, si le point Z est le coucher et le point H le lever, le temps de l'arc ZH durant lequel le soleil parcourt cet arc sera la nuit (1). Or, il est évident que, les arcs ZΔ, ΔH étant inégaux, le solstice (2) n'aura pas lieu au milieu de la nuit (3), et il est évident aussi que l'arc ZΔH est la nuit la plus longue de toutes celles de l'année dont le commencement est le solstice d'été, parce que l'arc ZΔH échange l'hémisphère obscur dans le temps le plus long (4). Il s'agit donc de démontrer encore ce qui se présente dans chaque cas (5).

Proposition 37. — Que l'arc ZΔ soit d'abord plus grand que l'arc ΔH ; soit Θ le lever qui précède le coucher Z, et que l'arc KH soit égal à l'arc ZΘ. Le soleil parcourt donc les arcs ZΘ, KH dans

1. Cette définition est conforme à celle qu'un commentateur introduit au début du livre I du traité *Des Jours et des Nuits* de Théodose : « Χρόνον ἡμέρας καλεῖ (Θεοδόσιος) τὸν ἀπὸ ἀνατολῆς ἕως δύσεως, νυκτὸς δὲ τὸν ἀπὸ δύσεως ἕως ἀνατολῆς, c'est-à-dire : « Théodose appelle jour le temps qui va du lever au coucher, et nuit celui qui va du coucher au lever ».

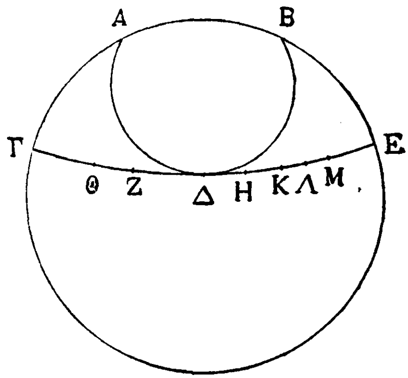
2. τροπή, mutation ou conversion, mot pris ici dans l'acception astronomique de solstice, c'est-à-dire le point de l'écliptique au moment de l'année où le soleil, parvenu à sa plus grande distance de l'équateur, sur l'un ou l'autre des cercles tropiques du Cancer ou du Capricorne, semble s'arrêter pour revenir en arrière.

3. Le texte présente ici la petite interpolation : « parce que le temps de l'arc ZΔ que parcourt le soleil est aussi inégal » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 550, l. 7).

4. L'évidence de ces faits est probablement admise ici en vertu de la démonstration de la proposition 4 du livre I du traité *Des Jours et des Nuits* de Théodose (Voir l'énoncé donné p. 420, n. 2).

5. C'est-à-dire les deux cas : $Z\Delta > \Delta H$ et $Z\Delta < \Delta H$.

des temps égaux. Mais, l'arc ZΘ échange l'hémisphère apparent dans le temps où le soleil parcourt l'arc ZΘ ; tandis que l'arc ZΘ échange l'hémisphère apparent dans un temps plus court que ne le fait l'arc KH ; donc, le soleil parcourt l'arc KH dans un temps plus court que celui dans lequel l'arc KH échange l'hémisphère apparent. En conséquence, le soleil parcourra un arc plus grand que l'arc KH dans le temps où l'arc KH échange l'hémisphère apparent. Qu'il parcoure l'arc HΛ.

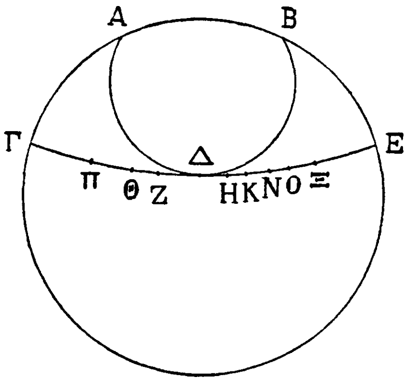


Dès lors, si le point K est au coucher, le soleil, étant au point Λ, est au-dessus de la terre ; par conséquent, pour parvenir au coucher, il parcourra en plus un certain arc. Qu'il parcoure en plus l'arc ΛM. En conséquence, le soleil parcourra aussi l'arc HM dans le même temps où l'arc HM échange l'hémisphère apparent. Et l'arc MH est plus grand que l'arc ZΘ, de sorte que, dans le demi-cercle ΔE, les jours sont plus longs que dans le demi-cercle ΓΔ. [Cela peut donc être démontré comme on le fait voir dans les *Éléments*. Mais puisque l'arc ZΔ est plus grand que l'arc ΔH et l'arc ZΘ plus petit que l'arc HM, l'arc ΘΔ est sans comparaison avec l'arc ΔM ; de sorte que la démonstration ne procédera pas de la même manière si nous ne montrons pas que la somme des jours et des nuits dans le segment ΔΓ est plus grande que la somme des jours et des nuits dans le segment ΔE] (1). Il nous faut donc utiliser la démonstration qui précède, afin que les nuits soient comparées aussi.

Proposition 38. — Soit donc Π le coucher qui précède le lever Θ ; posons l'arc ZΔ égal à l'arc ΔK et l'arc KΞ égal à

1. Le passage mis entre crochets étant sans pertinence à cet endroit, il aura probablement été interpolé. Quant aux *Éléments* auxquels ce passage renvoie, Commandin a fait la remarque suivante : « Per Elementum fortasse intelligit Theodosii libros de diebus et noctibus, vel potius Euclidis phaenomena » (Cfr. Commandin, *loc. cit.*, p. 210, l. 52).

l'arc ΠZ. Puisque l'arc ΠZ est égal à l'arc KΞ, le soleil parcourt donc chacun de ces arcs dans un même temps. Or, dans le temps où il parcourt l'arc ZΠ, il y a révolution du monde et coucher de l'arc ZΠ ; tandis que le temps dans lequel l'arc KΞ se lève est égal au temps dans lequel l'arc ΠZ se couche ; par conséquent, le temps dans lequel le soleil parcourt l'arc KΞ, temps d'une révolution du monde, est aussi celui du lever de l'arc KΞ. Mais, le temps dans lequel le soleil parcourt l'arc KH est plus long que le temps du lever de l'arc KH (1) ; donc, le temps dans lequel le soleil parcourt l'arc HΞ est plus long que celui de la révolution du monde et du lever de l'arc ΞH. En conséquence, pendant la révolution du monde et le lever de l'arc HΞ, le soleil parcourra un arc plus petit que l'arc ΞH. Qu'il parcoure l'arc HO. Dès lors, si le point Ξ est au lever, le soleil, étant au point O, y sera avant lever ; de sorte que, dans le temps où il sera au lever, il parcourra un arc plus petit que l'arc HO. Que cet arc soit HN ; de sorte que le point N sera le lever qui suit le lever H ; donc, la nuit dont le lever est le point N est plus courte que la nuit dont le coucher est le point Π (2). Les choses restantes se démontreront aussi de la même manière. [De même, s'il y a quelque hésitation au sujet de la figure dans laquelle le lever ou le coucher est au solstice d'été, on élucidera la chose de la même manière] (3).



XXXVII.

Aristarque fait les six hypothèses suivantes dans son livre *Sur les Grandeurs et les Distances* (4).

1. Voir proposition 35, p. 421.
2. C'est-à-dire que la nuit qui va jusqu'au lever N est plus courte que la nuit qui commence au coucher Π.
3. La phrase mise entre crochets est attribuée par Hultsch à un commentateur (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 554, ll. 3-5).
4. Le titre complet de l'ouvrage d'Aristarque de Samos, écrit deux cent

Premièrement, la lune reçoit sa lumière du soleil. En second lieu, la terre a le rapport d'un point et d'un centre avec la sphère (1) de la lune. En troisième lieu, lorsque la lune nous apparaît dichotome, elle dirige vers notre vue le cercle le plus grand qui sépare la partie opaque de la lune de sa partie brillante. En quatrième lieu, lorsque la lune nous apparaît dichotome, sa distance du soleil est plus petite qu'un quadrant de la trentième partie de ce quadrant [au lieu de dire que sa distance est de 87 degrés (2) ; car ceux-ci sont moindres que 90 degrés des 3 degrés constituant la trentième partie de 90 degrés] (3). En cinquième lieu, il suppose que la largeur de l'ombre est de deux lunes (4) et, en sixième lieu, que la lune sous-tend la quinzième partie d'un signe (5).

Les première, troisième et quatrième de ces hypothèses con-

---

soixante ans avant J.-C., est : περὶ μεγετῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης, Sur les Grandeurs et les Distances du Soleil et de la Lune.

L'ouvrage d'Aristarque a été publié pour la première fois dans une version latine, due à George Valla, à Venise, en 1498 ; cette édition est devenue presque introuvable. Une seconde version latine a été donnée par F. Commandin sous le titre : *Aristarchi de Magnitudinibus et Distantiis solis et lunae liber, cum Pappi Alexandrini explicationibus quibusdam. A Federico Commandino Urbinate in latinum conversus, ac commentariis illustratus.* Pisauri, 1572, in-8° (Voir les hypothèses, p. 1).

La première édition du texte grec a été publiée par Wallis, à Oxford, en 1688, avec une version latine; et la seconde parut à Paris, en 1810, avec un titre en français et une version latine par La Porte du Theil. Une édition critique a été publiée à Oxford, en 1913, avec une traduction anglaise, sous le titre : *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus. A History of Greek Astronomy to Aristarchus, together with Aristarchus's Treatise on the Sizes and Distances of the Sun and Moon; a new Greek text with translation and notes. By Sir Thomas Heath.*

La première et seule traduction française est intitulée : *Traité d'Aristarque de Samos, sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune; et fragments de Héron de Bizance sur les Mesures. Traduits du grec, pour la première fois, avec des commentaires et des observations, par M. le comte de Fortia d'Urban.* Paris 1823, in-8° (Voir les hypothèses, p. 5).

1. C'est-à-dire non pas avec la sphère en tant que figure propre de la lune, mais avec la sphère céleste dans la surface de laquelle la lune a son orbite.

2. μοίρας πζ', littéralement : 87 parties, c'est-à-dire 87 des 90 parties ou degrés qui divisent l'arc du quart de cercle.

3. La phrase mise entre crochets a probablement été interpolée ; car le texte de l'ouvrage d'Aristarque que Pappus reproduit ici dit simplement : « Lorsque la lune nous paraît dichotome, sa distance du soleil est moindre du quart de la circonférence de la trentième partie de ce quart » (Voir la traduction précitée de Fortia d'Urban, p. 5).

4. C'est-à-dire de deux diamètres de la lune.

5. C'est-à-dire que le diamètre de la lune sous-tend un arc qui est la quinzième partie d'un signe (ζῳδίου) du cercle zodiaque.

cordent à peu près avec celles d'Hypparque et de Ptolémée ; car la lune est éclairée en tout temps par le soleil, excepté en cas d'éclipse où elle devient obscure en tombant dans l'ombre de forme conique que produit le soleil lorsqu'il est masqué par la terre ; et elle offre à notre regard le cercle qui sépare la partie rendue laiteuse par l'éclairement du soleil de la partie cendrée qui est la couleur propre de la lune ; cercle qui ne diffère pas d'un cercle le plus grand (1) dans les dichotomies qui se présentent aux stations du soleil où l'on contemple celui-ci très près d'un quadrant (2) sur le zodiaque. En effet, si l'on étend le plan de ce cercle, il passera aussi par nos yeux quelle que soit la position de première ou de deuxième phase de dichotomie présentée par la lune (3). Mais, les mathématiciens précités ont conçu les hypothèses restantes d'une manière différente, parce que, d'après eux, la terre n'a pas le rapport d'un point et d'un centre avec la sphère de la lune (4), mais bien avec celle des fixes (5) ; la largeur de l'ombre n'est pas de deux diamètres de la lune, et le diamètre de la lune ne sous-tend pas, dans sa moyenne, un arc de cercle le plus grand constitué par la quinzième partie d'un signe, c'est-à-dire par deux degrés. En effet, d'après Hipparque (6), ce cercle (7) est mesuré six cent cinquante fois par le diamètre de la lune, et le cercle d'ombre deux fois et demie en moyenne distance dans les conjonctions (8). D'autre part, d'après Ptolémée, le diamètre de la lune sous-tend un arc de 0°31′20″ dans sa plus grande distance, et de 0°35′20″ dans sa plus petite distance ; tandis que le diamètre du cercle d'ombre est de 0°40′40″ (9) dans

1. Sous-entendu : τῆς σελήνης, de la lune.
2. C'est-à-dire à une hauteur qui approche fort celle d'un quadrant ou de 90 degrés.
3. C'est-à-dire la position de premier ou de deuxième quartier de lune.
4. C'est-à-dire avec la sphère orbitaire de la lune.
5. τῶν ἀπλανῶν, (avec la sphère) des (astres ou étoiles) fixes.
6. Voir : *Astronomie solaire d'Hipparque par J. B. P. Marcos*. Paris, 1828, in-8°.
7. C'est-à-dire le cercle du zodiaque.
8. *Composition mathématique de Claude Ptolémée, ou astronomie ancienne, traduite pour la première fois du grec en français sur les manuscrits de la Bibliothèque du Roi, par Halma, (avec le texte grec) et suivie des notes de M. Delambre*. Paris, 1816, 2 vol. in-4°. Voir p. 265.
9. ἑξηκοστὰ μ′ μ″, littéralement 40 40 soixantièmes, c'est-à-dire 0°40′40″.

la plus grande distance de la lune, et de 0°46′ (1) dans sa plus petite distance (2). C'est pour ce motif que ces derniers déduisirent des rapports différents pour les distances et les grandeurs du soleil et de la lune.

Aristarque émet d'ailleurs les hypothèses précitées en s'exprimant littéralement comme suit : « C'est en raison de l'hypothèse relative à la lune dichotome (3) que l'on conclut que la distance du soleil à la terre est plus grande que dix-huit fois et plus petite que vingt fois la distance de la lune, et que le diamètre du soleil a cette même proportion avec le diamètre de la lune. D'autre part, c'est en raison du rapport trouvé pour les distances, de l'hypothèse relative à l'ombre (4), et de ce que la lune sous-tend la quinzième partie d'un signe (5), que l'on conclut que le diamètre du soleil est au diamètre de la terre dans un rapport plus grand que celui de 19 à 3 et plus petit que celui de 43 à 6 ». Il a dit, d'ailleurs : « On conclut que les distances, etc. », parce qu'il se proposait de démontrer ces choses après avoir exposé les lemmes qui mènent à leurs démonstrations. C'est de tout cela qu'il a conclu que le rapport du soleil à la terre est plus grand que celui de 6859 à 27 et plus petit que celui de 79507 à 216 (6) ; que le diamètre de la terre est au diamètre de la lune dans un rapport plus grand que celui de 108 à 43 et plus petit que celui de 60 à 19 (7) ; enfin, que la terre est à la lune dans un rapport plus grand que celui de 1259712 à 79507 et plus petit que celui de 216000 à 6859 (8).

1. ἑξηκοστὰ μϛ′, 46 soixantièmes, c'est-à-dire 0°46′.
2. Voir édition précitée de la traduction de Ptolémée par Halma, p. 343.
3. Voir quatrième hypothèse.
4. Voir sixième hypothèse.
5. Voir édition précitée de la version latine de Commandin, p. 1, verso, et traduction française précitée de Fortia d'Urban, p. 44, où ce passage est traduit fort librement toutefois.
6. ARISTARQUE, *Sur les Grandeurs et les Distances du Soleil et de la Lune*, prop. 17 : « Le soleil est à la terre en proportion plus grande que celle de 6859 à 27, et moindre que celle de 79507 à 216 ». Voir trad. précitée de Fortia d'Urban, p. 39.
7. ARISTARQUE, *ibidem*, prop. 18 : « Le diamètre de la terre est au diamètre de la lune en plus grand rapport que celui de 108 à 43, moindre que celui de 60 à 19 ». Voir trad. de Fortia d'Urban, p. 39.
8. ARISTARQUE, *ibidem*, prop. 19 : « La terre est à la lune en proportion plus grande que celle de 1259712 à 79507 et moindre que celle de 216000 à 6859 ». Voir trad. de Fortia d'Urban, p. 40.

On trouvera un exposé intéressant de la méthode et des calculs d'Aristarque

D'autre part, Ptolémée a démontré dans le cinquième livre de sa *Composition* (1) que, si l'on considère le rayon de la terre comme étant l'unité, la plus grande distance de la lune dans les conjonctions est de $64\frac{10}{60}$ unités et celle du soleil de 1210 unités ; tandis que le rayon de la lune est de $\frac{17}{60}\ \frac{33}{60\times 60}$ unités et le rayon du soleil de $5\frac{30}{60}$ unités ; en sorte que, si l'on considère le diamètre de la lune aussi comme unité, il s'ensuit que le diamètre de la terre est de 3 plus $\frac{2}{5}$ unités et celui du soleil de 18 plus $\frac{4}{5}$ unités. En conséquence, le diamètre de la terre est trois et deux cinquièmes fois le diamètre de la lune et celui du soleil dix-huit et quatre cinquièmes fois celui de la lune ; tandis qu'il est cinq fois et demie celui de la terre (2). En raison de ce qui précède, le rapport des corps solides est manifeste aussi. En effet, puisque le cube de 1 est 1 ; que le cube de 3 plus $\frac{2}{5}$ est au plus près 39 plus $\frac{1}{4}$, et que le cube de 18 plus $\frac{4}{5}$ est de même au plus près 6644 plus $\frac{1}{2}$ (3), si l'on considère la grandeur de la lune comme étant l'unité, on en déduira que celle de la terre est de $39\frac{1}{4}$ de ces unités, celle du soleil de $6644\frac{1}{2}$ unités, et que, par suite, la grandeur du soleil est au plus près cent septante fois celle de la terre (4).

Nous en avons d'ailleurs dit assez au sujet de la comparaison des grandeurs et des distances dont il a été question, et nous allons exposer un lemme digne d'investigation parmi ceux qui ont trait au quatrième théorème du livre (5).

Proposition 39. — Soit le cercle ΑΒΓ, son diamètre prolongé ΑΓΔ et son centre Ε. Menons du point Ε la droite ΒΕΖ à

---

dans l'étude de Paul Tannery: *Aristarque de Samos* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2e série, 1883, t. 5, pp. 237-258, ou bien : *Mémoires scientifiques de P. Tannery*, vol. I, pp. 371-396).

1. Cl. Ptolémée, *Composition mathématique*, trad. précitée de Halma, chap. 15 et suivants.

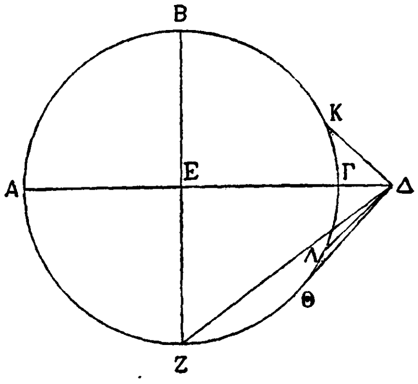
2. C'est-à-dire que l'on a : diamètre de la terre = $3\frac{2}{5}$ diamètre de la lune, et diamètre du soleil = $18\frac{4}{5}$ diamètre de la lune = $5\frac{1}{2}$ diamètre de la terre.

3. $(3\frac{2}{5})^3 = 39\frac{38}{125} > 39\frac{38}{152} = 39\frac{1}{4}$, et $(18\frac{4}{5})^3 = 6644\frac{84}{125} > 6644\frac{84}{168} = 6644\frac{1}{2}$.

4. Les relations des deux notes précédentes donnent : vol. terre = $39\frac{1}{4}$ vol. lune, et vol. soleil = $6644\frac{1}{2}$ vol. lune = $(5\frac{1}{2})^3$ vol. terre = $166\frac{3}{8}$ vol. terre < 170 vol. terre.

5. C'est-à-dire au théorème 4 de l'ouvrage précité d'Aristarque, énoncé : « Dans la lune, le plus petit cercle possible sépare la partie obscure de la partie éclairée, lorsque le cône qui comprend le soleil et la lune a son sommet à notre vue ». Voir trad. de Fortia d'Urban, p. 11.

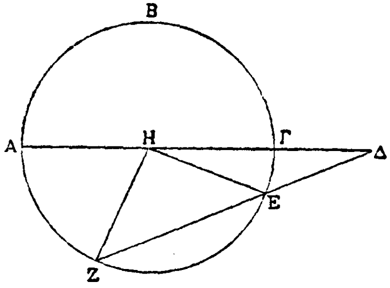
angles droits sur la droite ΑΓΔ et, du point Δ, la droite ΔΘ tangente au cercle ΑΒΓ. Posons de part et d'autre du point Γ les arcs ΚΓ, ΓΛ, moitiés de l'arc ΖΘ, et menons les droites de jonction ΚΔ, ΔΛ, ΖΔ ; je dis que l'angle compris sous les droites ΚΔ, ΔΛ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΖΔ, ΔΘ. Mais exposons au préalable les choses suivantes :



XXXVIII.

Proposition 40. — Soit le cercle ΑΒΓ, le diamètre ΑΓΔ prolongé et menons du point Δ une droite ΔΕΖ ; je dis que l'arc ΑΖ est plus grand que l'arc ΓΕ.

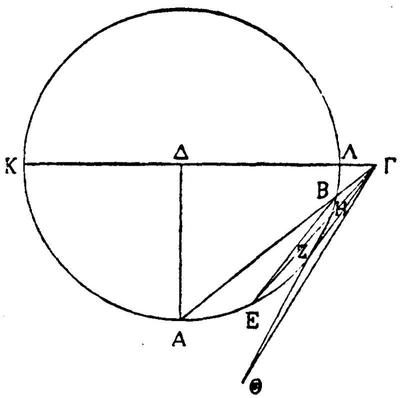
En effet, prenons le point Η, centre du cercle, et menons les droites de jonction ΗΖ, ΗΕ. L'angle situé au point Ζ est donc égal à l'angle situé au point Ε. Et puisque ΗΖΔ est un triangle ; que l'angle extérieur compris sous les droites ΑΗ, ΗΖ est plus grand que l'angle intérieur et opposé situé au point Ζ, c'est-à-dire l'angle situé au point Ε ; mais que l'angle situé au point Ε est plus grand que l'angle compris sous les droites ΔΗ, ΗΕ comme étant situé à l'extérieur du triangle ΔΗΕ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΑΗ, ΗΖ est aussi plus grand que l'angle compris sous les droites ΕΗ, ΗΔ. Or, ces angles sont situés au centre ; donc, l'arc ΑΖ est aussi plus grand que l'arc ΓΕ ; ce qu'il fallait démontrer.



XXXIX.

Proposition 41. — Soit le cercle AB dont le centre est le point Δ, et soit un point Γ extérieur au cercle. Menons la droite ΓΛΔΚ, la droite ΓΖ tangente au cercle et, par le centre Δ, la droite ΔΑ à angles droits sur le diamètre ΚΛ. Coupons l'arc ΑΖ en deux parties égales au point Ε et menons les droites de jonction ΓΒΑ, ΓΗΕ ; je dis que l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΕ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΕΓ, ΓΖ.

Menons les droites de jonction ΕΒ, ΖΗ. Puisque la droite ΕΒ est plus grande que la droite ΖΗ, et que la droite ΒΓ est plus petite que la droite ΓΗ, la droite ΕΒ est à la droite ΒΓ dans un rapport plus grand que celui de la droite ΖΗ à la droite ΓΗ. Faisons donc en sorte que la droite ΗΘ soit à la droite ΗΓ comme la droite ΕΒ est à la droite ΒΓ, et menons la droite de jonction ΘΓ. Dès lors, puisque les angles compris sous les droites ΑΒ, ΒΕ et sous les droites ΕΗ, ΗΖ sont égaux entre eux (parce que l'arc ΑΕ est égal à l'arc ΕΖ), les



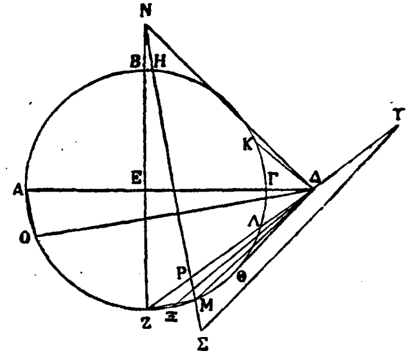
angles restants sont aussi égaux entre eux, c'est-à-dire les angles compris sous les droites ΕΒ, ΒΓ et sous les droites ΖΗ, ΗΓ. De plus, les côtés situés autour des angles égaux sont proportionnels ; donc, le triangle ΕΒΓ est équiangle avec le triangle ΗΘΓ. En conséquence, les angles compris sous les droites ΑΓ, ΓΕ et sous les droites ΗΓ, ΓΘ sont égaux ; donc, l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΕ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΕΓ, ΓΖ (1).

1. On a : ΕΒ > ΖΗ et ΒΓ < ΓΗ, d'où : $\frac{ΕΒ}{ΒΓ} > \frac{ΖΗ}{ΓΗ}$. Prolongeons ΖΗ de manière à avoir : $\frac{ΗΘ}{ΓΗ} = \frac{ΕΒ}{ΒΓ}$. Dès lors, on a par construction : arc ΑΕ = arc ΕΖ;

XL.

Proposition 39*bis*. — Soit enfin une figure identique à la première [1], et que les données soient les mêmes ; je dis que l'angle compris sous les droites ΚΔ, ΔΛ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΖΔ, ΔΘ.

Coupons l'arc ΖΘ en deux parties égales au point Μ et menons la droite de jonction ΜΔ. Il est clair, en vertu de ce qui vient d'être démontré [2], que l'angle compris sous les droites ΖΔ, ΔΜ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΜΔ, ΔΘ. Prolongeons les droites ΖΕΒ, ΔΛ jusqu'aux points Ν, Ξ ; posons la droite ΝΖ égale à la droite ΑΔ, et menons les droites de jonction ΝΜ, ΝΔ, ΖΜ. Et puisque ΑΒΓ est un cercle ; que la droite ΑΓΔ est son diamètre prolongé, et que la droite ΔΛΞ est amenée du point Δ sur l'arc concave, il s'ensuit que l'arc ΑΞ est plus grand que l'arc ΓΛ [3]. Mais, l'arc ΓΛ est égal à l'arc ΖΜ



(car chacun de ces arcs est la moitié de l'arc ΖΘ) ; par conséquent, l'arc ΑΞ est aussi plus grand que l'arc ΖΜ. Posons donc l'arc ΑΟ égal à l'arc ΖΜ, et menons les droites de jonction ΑΟ, ΟΔ. Dès lors, puisque l'arc de demi-cercle ΑΘΓ est égal à l'arc de demi-cercle ΖΓΒ, arcs dans lesquels l'arc ΑΟ est égal à l'arc ΜΖ, il s'ensuit que l'arc restant ΟΓ est égal à l'arc restant ΜΒ. Et l'angle compris sous les droites ΔΑ, ΑΟ s'appuie sur l'arc ΟΓ, tandis que l'angle compris sous les droites ΝΖ, ΖΜ s'appuie sur l'arc ΜΒ ; par conséquent, l'angle compris sous les droites ΔΑ, ΑΟ est égal

---

donc (Euclide, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2) : $\widehat{ABE} = \widehat{EHZ}$, d'où : $\widehat{EB\Gamma} = \widehat{ZH\Gamma}$; d'où (Euclide, liv. VI, prop. 6, énoncée p. 158, n. 2) similitude des triangles ΕΒΓ, ΗΘΓ qui ont un angle égal à un angle et les côtés proportionnels autour de ces angles, d'où : $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{H\Gamma\Theta}$, d'où, comme le texte : $\widehat{A\Gamma E} > \widehat{E\Gamma Z}$.

1. Voir la figure de la proposition 39, p. 431.
2. Voir proposition 41, p. 432.
3. Voir proposition 40, p. 431.

à l'angle compris sous les droites NZ, ZM [1] (et chacun d'eux est plus petit qu'un angle droit) [2]. Et puisque la droite AΔ est égale à la droite ZN [3], et la droite AO égale à la droite ZM [4], les deux droites ΔA, AO sont donc égales aux deux droites NZ, ZM. Et l'angle compris sous les droites ΔA, AO est égal à l'angle compris sous les droites NZ, ZM ; donc, la base OΔ est égale à la base NM. Et les angles sont égaux ; donc, l'angle compris sous les droites AΔ, ΔO est égal à l'angle compris sous les droites ZN, NM [5]. Derechef, puisque l'arc ZAB est celui du demi-cercle, l'arc ZABH est donc plus grand que celui du demi-cercle. Et l'angle compris sous les droites ZM, MH s'appuie sur cet arc ; donc, l'angle compris sous les droites ZM, MH est plus grand qu'un angle droit [6]. Et la droite ZP sous-tend cet angle, tandis que la droite PM sous-tend l'angle aigu compris sous les droites PZ, ZM ; par conséquent, la droite ZP est plus grande que la droite PM [7]. Prolongeons donc la droite PM jusqu'au point Σ, et posons la droite PΣ égale à la droite ZP. Et puisque la droite entière AΓΔ est égale à la droite entière ZBN, et que la droite AE est égale à la droite ZE, la droite restante EΔ est donc égale à la droite restante EN, et l'angle compris sous les droites EΔ, ΔN est donc égal à l'angle compris sous les droites EN, NΔ. En conséquence, l'angle compris sous EΔ, ΔN est plus grand que celui qui est compris sous ΔN, NP, et le côté NP est donc plus grand que le côté PΔ [8]. Prolongeons la droite PΔ jusqu'au point Υ ;

1. Euclide, liv. III, prop. 27, énoncée p. 284, n. 1.
2. Euclide, liv. III, prop. 31, énoncée p., 155, n. 3.
3. Par construction.
4. Euclide, liv. III, prop. 29 : « Dans des cercles égaux, les arcs égaux sont sous-tendus par des droites égales ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 173.
5. Le texte établit ici que les triangles ΔAO, NZM sont semblables et égaux dans des termes qui font soupçonner le remaniement d'un commentateur qui reproduit partiellement les termes de la proposition 4 du livre I d'Euclide : « Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 11.
6. Euclide, liv. III, prop. 31, énoncée p. 155, n. 3.
7. Euclide, liv. I, prop. 19 : « Dans tout triangle, un plus grand côté sous-tend un plus grand angle ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 33.

8. On a démontré : $\widehat{E\Delta N} = \widehat{EN\Delta}$; donc : $\widehat{E\Delta N} > \widehat{\Delta NP}$; d'où, à fortiori : $\widehat{P\Delta N} > \widehat{\Delta NP}$, d'où : NP > PΔ.

posons la droite ΡΥ égale à la droite PN, et menons la droite de jonction ΥΣ. Dès lors, puisque la droite ZP est égale à la droite ΡΣ et la droite PN égale à la droite ΡΥ, les deux droites ZP, PN sont égales aux deux droites ΣP, ΡΥ. Et l'angle compris sous les droites ZP, PN est égal à l'angle compris sous les droites ΣP, ΡΥ (car ils sont disposés suivant le sommet) ; donc, la base NZ est égale à la base ΣΥ. Et les angles restants sont égaux aux angles restants ; donc, l'angle compris sous PZ, ZN est égal à l'angle compris sous ΡΣ, ΣΥ (1). Mais, l'angle compris sous PM, MΔ est plus grand que celui qui est compris sous ΡΣ, ΣΥ (car il est extérieur au triangle) (2) ; donc, l'angle compris sous PM, MΔ est aussi plus grand que celui qui est compris sous PZ, ZN. Or, l'angle compris sous ZP, PN est aussi égal à celui qui est compris sous MP, PΔ ; donc, l'angle restant compris sous ZN, NP est plus grand que l'angle restant compris sous PΔ, ΔM (3). Mais, on a démontré que l'angle compris sous ZN, NP est égal à l'angle compris sous ΑΔ, ΔO ; donc, l'angle compris sous ΑΔ, ΔO est aussi plus grand que l'angle compris sous PΔ, ΔM. En conséquence, l'angle compris sous ΑΔ, ΔΞ est, à fortiori, plus grand que l'angle compris sous PΔ, ΔM. Mais, l'angle compris sous ΚΔ, ΔΛ est le double de l'angle compris sous ΑΔ, ΔΞ, et l'on a démontré que l'angle compris sous ΖΔ, ΔΘ est plus petit que le double de l'angle compris sous PΔ, ΔM ; donc, l'angle compris sous ΚΔ, ΔΛ est plus grand que celui qui est compris sous ΖΔ, ΔΘ (4).

---

1. Il y a ici même prolixité que dans le passage plus haut (voir note) pour établir, qu'en vertu de la proposition 4 du livre I d'Euclide, les triangles ZPN, ΣΡΥ sont égaux et semblables.

2. Il y a ici erreur probablement imputable à un commentateur qui semble avoir remanié plusieurs passages de cette démonstration, et qui aura confondu le quadrilatère ΜΣΥΔ avec le triangle ΜΣΔ, dont l'angle extérieur est ΡΜΔ.

3. On a : $\widehat{ZPN} + \widehat{PZN} + \widehat{ZNP} = \widehat{MP\Delta} + \widehat{PM\Delta} + \widehat{P\Delta M}$. Or, on a : $\widehat{ZPN} = \widehat{MP\Delta}$ et on a démontré que l'on a : $\widehat{PM\Delta} > \widehat{PZN}$; donc, comme le texte : $\widehat{ZNP} > \widehat{P\Delta M}$.

4. On a eu plus haut : $\widehat{ZNP} = \widehat{A\Delta O}$, d'où, en présence de l'inégalité de la note précédente : $\widehat{A\Delta O} > \widehat{P\Delta M}$, d'où, à fortiori : $\widehat{A\Delta\Xi} > \widehat{P\Delta M}$. Or, par hypothèse, on a : arc $K\Lambda = 2$ arcs $\Gamma\Lambda$; donc : $\widehat{K\Delta\Lambda} = 2\widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = 2\widehat{A\Delta\Xi}$, d'où : $\widehat{K\Delta\Lambda} > 2\widehat{P\Delta M}$. D'autre part, on a démontré (prop. 41) que l'on a : $\widehat{M\Delta\Theta} < \widehat{P\Delta M}$, d'où : $2\widehat{M\Delta\Theta} < 2\widehat{P\Delta M}$, d'où, à fortiori : $\widehat{M\Delta\Theta} + \widehat{P\Delta M} < 2\widehat{P\Delta M}$ ou, comme le texte : $\widehat{Z\Delta\Theta} < 2\widehat{P\Delta M}$; donc, à fortiori, comme le texte : $\widehat{K\Delta\Lambda} > \widehat{Z\Delta\Theta}$.

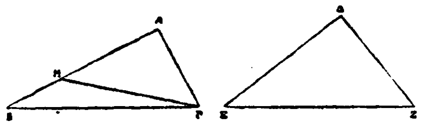
XLI (1).

Si une droite tombant de l'œil au centre d'un cercle n'est pas perpendiculaire au plan de ce cercle, ni égale à son rayon, mais est plus grande ou plus petite que celui-ci, les diamètres du cercle paraîtront inégaux (2).

Exposons d'abord ce qui suit en vue de ce théorème :

PROPOSITION 42. — Soient deux triangles rectangles ΑΒΓ, ΔΕΖ ayant les angles droits aux points Α, Δ, et que le rapport de la droite ΒΓ à la droite ΓΑ soit plus grand que celui de la droite ΕΖ à la droite ΖΔ ; je dis que l'angle compris sous les droites ΒΓ, ΓΑ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΕΖ, ΖΔ.

En effet, puisque le rapport de la droite ΒΓ à la droite ΓΑ est plus grand que celui de la droite ΕΖ à la droite ΖΔ, il s'ensuit qu'en puissance, puis par division, puis en longueur, le rapport de la droite ΒΑ à la droite ΑΓ est plus grand que celui de la droite ΕΔ à la droite ΔΖ (3).



1. On trouve, en marge d'un manuscrit, l'annotation suivante qui indique le sujet de ce chapitre et des suivants : Εἰς τὰ ὀπτικὰ Εὐκλείδου. (Lemmes) relatifs aux (propositions) optiques d'Euclide.

2. *Euclidis Optica, Opticorum recensio Theonis, Catoptrica, cun scholiis antiquis edidit J. L. Heiberg. Lipsiae, aedibus B. G. Teubneri*, 1895, in-8°. Voir proposition 35, p. 64, dont l'énoncé, un peu différent de celui de Pappus, est : Ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου προσπίπτουσα μήτε πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου, μήτε τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση, μήτε ἴσας γωνίας περιέχουσα, αἱ διάμετροι ἄνισοι φανήσονται πρὸς ἃς ποιεῖ ἀνίσους γωνίας. C'est-à-dire : Si une droite tombant de l'œil au centre d'un cercle n'est pas perpendiculaire au plan du cercle, ni égale au rayon, et ne fait pas des angles égaux, les diamètres avec lesquels elle fait des angles inégaux apparaîtront inégaux.

On pourra consulter les deux traductions suivantes de l'*Optique* d'Euclide ; elles sont fort libres et basées sur des textes qui ont perdu de leur autorité en présence de l'édition critique précitée de Heiberg : *La perspective d'Euclide, traduite en français sur le texte grec original de l'auteur, et démonstrée par R. Fréart de Chantelou, sieur de Chambray*. Au Mans, de l'imprimerie de Jacques Ysambart, 1663, in-4° ; *La prospettiva di Euclide, nella quale si tratta di quelle cose che per raggi diritti si vegono, etc. trad. dal R. P. M. Egnatio Danti, insieme con la prospettiva di Eliod. Larisseo*. Fiorenza, 1573, petit in-4°.

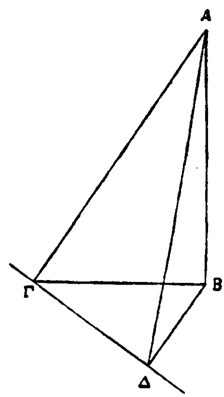
3. On a par hypothèse : $\frac{B\Gamma}{\Gamma A} > \frac{EZ}{Z\Delta}$, d'où : $\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{\Gamma A}^2} > \frac{\overline{EZ}^2}{\overline{Z\Delta}^2}$, d'où : $\frac{\overline{B\Gamma}^2 - \overline{\Gamma A}^2}{\overline{\Gamma A}^2} > \frac{\overline{EZ}^2 - \overline{Z\Delta}^2}{\overline{Z\Delta}^2}$

ou : $\frac{\overline{BA}^2}{\overline{\Gamma A}^2} > \frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{Z\Delta}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{BA}{\Gamma A} > \frac{E\Delta}{Z\Delta}$.

Faisons en sorte qu'une droite HA soit à la droite ΑΓ comme la droite ΕΔ est à la droite ΔΖ ; il est donc évident que la droite HA sera plus petite que la droite AB. Menons la droite de jonction ΗΓ. Dès lors, le triangle ΑΗΓ est semblable au triangle ΔΕΖ. En conséquence, l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΗ est égal à l'angle compris sous les droites ΔΖ, ΖΕ ; donc, l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΔΖ, ΖΕ (1).

XLII.

Proposition 43. — Menons, d'un point élevé A, la perpendiculaire AB sur un plan sous-jacent, et qu'elle le rencontre au point B. Soit une droite ΓΔ dans ce plan ; menons, du point B, la perpendiculaire ΒΔ sur la droite ΓΔ, et menons la droite de jonction ΑΔ ; je dis que la droite ΑΔ est perpendiculaire sur la droite ΓΔ (2).



Prenons un point quelconque Γ sur la droite ΓΔ, et menons les droites de jonction ΑΓ, ΓΒ. Dès lors, puisque la droite AB est perpendiculaire sur le plan sous-jacent, l'angle compris sous les droites AB, ΒΓ est droit ; donc, le carré de la droite ΑΓ équivaut aux carrés des droites AB, ΒΓ. Or, le carré de la droite ΒΓ équivaut aux carrés des droites ΒΔ, ΔΓ ; donc, le carré de la droite ΑΓ

1. Soit la droite HA < BA telle que l'on ait : $\frac{\text{HA}}{\Gamma\text{A}} = \frac{\text{E}\Delta}{\text{Z}\Delta}$; d'où similitude des triangles rectangles ΑΗΓ, ΔΕΖ, d'où : $\widehat{\text{A}\Gamma\text{H}} = \widehat{\Delta\text{ZE}}$, d'où : $\widehat{\text{A}\Gamma\text{B}} > \widehat{\Delta\text{ZE}}$.

La démonstration de la proposition 44 invoquera la réciproque de ce lemme, qui s'énoncerait : Si on a les triangles rectangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et si $\widehat{\text{A}\Gamma\text{B}} > \widehat{\Delta\text{ZE}}$, on aura : $\frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\text{A}} > \frac{\text{EZ}}{\text{Z}\Delta}$. Commandin a donné une démonstration de cette proposition réciproque (Cfr. *loc. cit.*, p. 216, ll. 5-18).

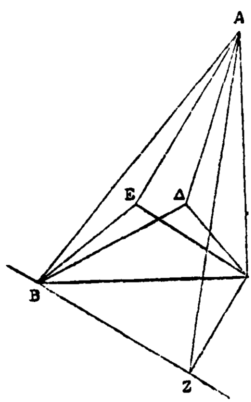
2. Ce petit lemme sera invoqué plus loin au cours des démonstrations des propositions 8 et 15 du livre VIII relatif à la mécanique. Il est rappelé dans la proposition 8 comme λῆμμα σφαιρικῶν, c'est-à-dire lemme (relatif) aux (propositions) sphériques, bien qu'il eût mieux été désigné par λῆμμα ὀπτικῶν, c'est-à-dire lemme (relatif) aux (propositions) optiques, en raison de la partie de l'ouvrage où il se présente ici.

équivaut aux carrés des droites AB, BΔ, ΓΔ. Or, les carrés des droites AB, BΔ valent le carré de la droite AΔ ; donc, le carré de la droite AΓ équivaut aux carrés des droites AΔ, ΔΓ. En conséquence, l'angle compris sous les droites AΔ, ΔΓ est droit (1) ; donc, la droite AΔ est perpendiculaire sur la droite ΓΔ ; ce qu'il fallait démontrer.

XLIII.

PROPOSITION 44. — D'un point élevé A, menons sur le plan sous-jacent une droite AB non perpendiculaire à ce plan, et menons du point A une perpendiculaire à ce plan ; qu'elle le rencontre au point Γ, et menons la droite de jonction ΓB. Je dis que l'angle compris sous les droites AB, BΓ est le plus petit de tous ceux qui sont compris sous la droite AB et quelqu'une des droites menées du point B dans le plan sous-jacent ; que l'angle plus rapproché de cet angle est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné, et que deux angles égaux ne s'établissent que de part et d'autre de cet angle.

En effet, menons une droite quelconque BΔ dans le plan sous-jacent ; menons du point Γ la droite ΓΔ perpendiculaire sur cette droite, et menons la droite de jonction AΔ. La droite AΔ est donc perpendiculaire sur la droite BΔ en raison de ce qui a été démontré précédemment (2). Et puisque l'angle compris sous les droites AΓ, ΓΔ est droit, la droite ΔA est plus grande que la droite AΓ ; par conséquent, le rapport de la droite BA à la droite AΓ est plus grand que celui de la droite BA à la droite AΔ. Et les angles compris sous les droites BΓ, BA et sous les droites BΔ, ΔA sont droits ; donc, l'angle compris sous les



1. Le triangle rectangle ABΓ donne : $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2$, et le triangle BΔΓ, rectangle par construction, donne : $\overline{B\Gamma}^2 = \overline{B\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2$; donc, $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{B\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2$. Or (EUCLIDE, liv. XI, déf. 3, énoncée p. 382, n. 4), on a : $\overline{AB}^2 + \overline{B\Delta}^2 = \overline{A\Delta}^2$; donc, $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{A\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2$, d'où le triangle AΔΓ est rectangle en Δ.

2. Voir proposition 43, p. 437.

droites BA, AΓ est plus grand que celui qui est compris sous les droites BA, AΔ en vertu de ce qui a été démontré dans l'avant-dernier lemme (1) ; en sorte que l'angle restant compris sous AB, BΓ est plus petit que l'angle compris sous AB, BΔ. On démontrera pareillement que l'angle compris sous AB, BΓ est plus petit que tous les autres (2) ; donc, l'angle compris sous AB, BΓ est le plus petit.

Je dis aussi que l'angle plus rapproché de cet angle est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné.

En effet, menons une droite BE dans le plan sous-jacent (3) ; menons du point Γ la perpendiculaire ΓE sur cette droite, et menons la droite de jonction AE. La droite AE est donc aussi perpendiculaire sur la droite BE. (4) Et puisque l'angle droit compris sous les droites BΔ, ΔΓ est égal à l'angle droit compris sous les droites ΓE, EB ; mais que l'angle compris sous les droites BΓ, ΓΔ est aussi plus grand que l'angle compris sous les droites BΓ, ΓE, il s'ensuit que le rapport de la droite EΓ à la droite ΓB est plus grand que celui de la droite ΔΓ à la droite ΓB ; donc, à fortiori, la droite EΓ est plus grande que la droite ΓΔ (5). Et la droite ΓA est à angles droits sur chacune des droites ΓΔ, ΓE ; donc, la droite EA est aussi plus grande que la droite AΔ ; donc, le rapport de la droite BA à la droite AΔ est plus grand que son rapport à la droite AE (6). Et les angles situés aux points Δ, E sont

---

1. Les triangles rectangles BΓA, BΔA donnent (prop. 42) : $\widehat{BA\Gamma} > \widehat{BA\Delta}$. Or, $\widehat{AB\Gamma} = 1$ angle droit $- \widehat{BA\Gamma}$ et $\widehat{AB\Delta} = 1$ angle droit $- \widehat{BA\Delta}$; donc : angle $AB\Gamma <$ angle $AB\Delta$.

2. Sous-entendu : τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῆς AB καὶ ἑκάστης τῶν ἀπὸ τοῦ B σημείου διαγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, qui sont compris sous (la droite) AB et quelqu'une des droites menées du (point) B dans le plan sous-jacent.

3. C'est-à-dire une droite BE telle que l'on ait : angle $E B\Gamma >$ angle $\Delta B\Gamma$.

4. Voir proposition 43, p. 437.

5. On a par construction : $\widehat{\Gamma BE} > \widehat{\Gamma B\Delta}$. Or, les triangles BEΓ, BΔΓ sont droits en E et Δ ; donc : $\widehat{B\Gamma\Delta} > \widehat{B\Gamma E}$. Dès lors, la réciproque de la proposition 42 (voir p. 437, n. 1) donne : $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} > \frac{B\Gamma}{\Gamma E}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Gamma E}{B\Gamma} > \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$, d'où (EUCLIDE, liv. V, prop. 10, énoncée p. 36, n. 1) : $\Gamma E > \Gamma\Delta$.

6. Les triangles rectangles AΓE, AΓΔ donnent : $\overline{\Gamma E}^2 = \overline{EA}^2 - \overline{A\Gamma}^2$ et $\overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{A\Delta}^2 - \overline{A\Gamma}^2$, d'où en présence de la dernière inégalité de la note précédente : $\overline{EA}^2 - \overline{A\Gamma}^2 > \overline{A\Delta}^2 - \overline{A\Gamma}^2$, d'où : $EA > A\Delta$, d'où (EUCLIDE, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6) : $\frac{BA}{A\Delta} > \frac{BA}{EA}$.

droits ; donc, l'angle compris sous les droites BA, AΔ est plus grand que celui qui est compris sous les droites BA, AE. En conséquence, l'angle compris sous les droites AB, BΔ est plus petit que l'angle compris sous les droites AB, BE (1). On démontrerait pareillement que l'angle plus rapproché de l'angle compris sous les droites AB, BΓ est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné.

Enfin, je dis que deux angles égaux ne s'établissent que de chaque côté de l'angle.

Établissons sur la droite ΓB, en son point B, dans le plan sous-jacent, un angle compris sous les droites ΓB, BZ égal à l'angle compris sous les droites ΔB, BΓ ; menons du point Γ la perpendiculaire ΓZ sur la droite BZ, et menons la droite de jonction AZ. Puisque l'angle compris sous les droites ΓB, BΔ est égal à celui qui est compris sous les droites ΓB, BZ ; que l'angle droit compris sous les droites ΓΔ, ΔB est égal à l'angle droit compris sous les droites ΓZ, ZB, et que la droite ΓB est le côté commun des triangles, il s'ensuit que la droite BΔ est égale à la droite BZ et la droite ΓΔ égale à la droite ΓZ (2). Et la droite AΓ est perpendiculaire sur chacune des droites ΔΓ, ΓZ (3) ; donc, la droite AΔ est aussi égale à la droite AZ. Dès lors, puisque la droite ΔB est égale à la droite BZ ; que la droite BA est commune et que la base ΔA est égale à la base AZ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites AB, BΔ est égal à l'angle compris sous les droites AB, BZ (4). On démontrera pareillement qu'il ne s'établit pas un autre angle égal à celui qui est compris sous les droites AB, BΔ.

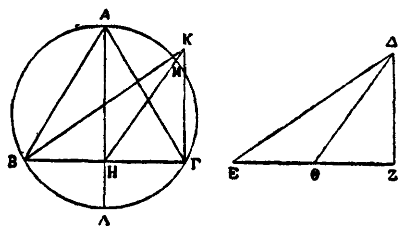
L'angle compris sous les droites AB, BΓ est donc le plus petit ; l'angle qui en est plus rapproché est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné, et deux angles égaux ne s'établissent que de part et d'autre de cet angle.

1. Voir proposition 42, p. 436.
2. Euclide, liv. I, prop. 26, énoncée p. 284, n. 1.
3. Euclide, liv. XI, déf. 3, énoncée p. 328, n. 4.
4. Euclide, liv. I, prop. 8 : « Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 18.

XLIV.

Proposition 45. — Soient deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ ayant les droites ΒΓ, ΕΖ égales, et coupons les droites ΒΓ, ΕΖ en deux parties égales aux points Η, Θ. Menons les droites de jonction ΑΗ, ΔΘ ; que ces droites soient égales entre elles ; que la droite ΑΗ soit perpendiculaire sur la droite ΒΓ, tandis que la droite ΔΘ n'est pas perpendiculaire sur la droite ΕΖ, et que la droite ΑΗ soit plus grande que la droite ΗΒ. Je dis que l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ.

Circonscrivons le cercle ΑΒΓ autour du triangle ΑΒΓ et prolongeons la droite ΑΗ jusqu'au point Λ. Puisque la droite ΑΗ est plus grande que la droite ΗΒ, et que la droite ΑΛ est un diamètre, il s'ensuit que le centre du cercle est situé entre les points Α, Η (car cela sera démontré dans la suite) (1). En conséquence, la droite ΑΗ est la plus longue (2) et celle qui en est plus rapprochée est continuellement plus longue que celle qui en est plus éloignée (3). Établissons un angle compris sous les droites ΓΗ, ΗΜ égal à celui qui est compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ ; la droite ΑΗ, c'est-à-dire la droite ΔΘ (4), est donc plus grande que la droite ΗΜ. Posons la droite ΗΚ égale à la droite ΔΘ, et menons les droites de jonction ΚΒ, ΚΓ ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ est égal à celui qui est compris sous les droites ΒΚ, ΚΓ (5). Or, l'angle compris sous les droites ΒΑ,

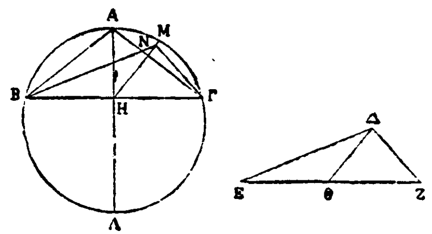


1. Voir plus loin, proposition 47.
2. C'est-à-dire la plus longue de toutes les droites menées du point Η à la circonférence du cercle.
3. Euclide, liv. III, prop. 7, énoncée p. 398, n. 4.
4. Par construction.
5. On a par construction : ΗΓ = ΘΖ, ΗΚ = ΘΔ et $\widehat{\mathrm{KH\Gamma}} = \widehat{\Delta\Theta \mathrm{Z}}$, d'où, (Euclide, liv. I, prop. 4, énoncée p. 434, n. 5) égalité des triangles ΗΚΓ, ΘΔΖ. Or, on a : ΒΗ = ΕΘ, d'où égalité des triangles ΕΔΖ, ΒΚΓ, d'où, comme le texte : $\widehat{\mathrm{E}\Delta \mathrm{Z}} = \widehat{\mathrm{BK}\Gamma}$.

ΑΓ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΒΚ, ΚΓ, et l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ est donc plus grand que celui qui est compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ [1].

Proposition 46. — Les mêmes choses étant supposées, que la droite ΗΑ soit plus petite que la droite ΗΒ ; je dis que l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ est plus petit que celui qui est compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ.

Construisons donc l'angle compris sous les droites ΓΗ, ΗΜ égal à celui qui est compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ. Et puisque la droite ΑΗ est plus petite que la droite ΗΒ, et que la droite ΑΛ est un diamètre, il s'ensuit que le centre du cercle est situé entre les points Λ, Η [2]. En conséquence, la droite ΑΗ est la plus courte [3] ; donc, la droite ΗΜ est plus grande que la droite ΗΑ, c'est-à-dire que la droite ΔΘ. Posons la droite ΗΝ égale à cette droite, et menons les droites de jonction ΝΒ, ΝΓ ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ est égal à celui qui est compris sous les droites ΒΝ, ΝΓ. Mais, l'angle compris sous les droites ΒΝ, ΝΓ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ [4] ; donc, l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ [5] ; ce qu'il fallait démontrer.

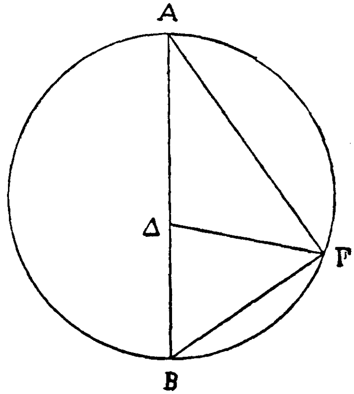


XLV.

Proposition 47. — Soit le cercle ΑΒΓ dont le diamètre est ΑΒ. Prenons un point quelconque Δ sur ce diamètre ; menons

1. Si l'on mène les droites de jonction ΒΜ, ΓΜ on a (Euclide, liv. III prop. 21, énoncée p. 141, n. 2) : $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = \widehat{\mathrm{BM\Gamma}}$. Or (Euclide, liv. I, prop. 21, énoncée p. 83, n. 4), on a : $\widehat{\mathrm{BM\Gamma}} > \widehat{\mathrm{BK\Gamma}}$; donc, comme le texte : $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} > \widehat{\mathrm{BK\Gamma}}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} > \widehat{\mathrm{E\Delta Z}}$.
2. Ce qui sera démontré à la proposition 47.
3. C'est-à-dire la plus courte de toutes celles menées du point Η à la circonférence du cercle.
4. Voir proposition 45, note 1 ci-dessus.

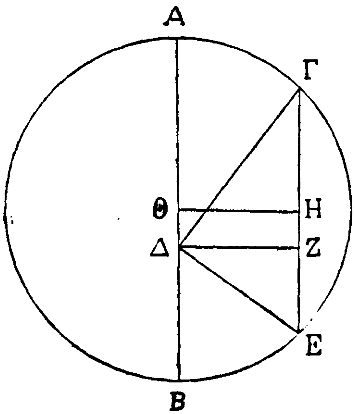
la droite ΓΔ comme on voudra, et que la droite ΑΔ soit plus grande que la droite ΔΓ ; je dis que la droite ΑΔ est aussi plus grande que la droite ΔΒ.



Menons les droites de jonction ΑΓ, ΓΒ. Puisque l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΔ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΓΑ, ΑΔ, il s'ensuit que l'angle restant compris sous les droites ΔΓ, ΓΒ est plus petit que l'angle restant compris sous les droites ΔΒ, ΒΓ ; donc, la droite ΓΔ est plus grande que la droite ΔΒ. Or, la droite ΑΔ est aussi plus grande que la droite ΔΓ ; donc, la droite ΑΔ est, à fortiori, plus grande que la droite ΔΒ (1).

On démontrera pareillement que, si la droite ΑΔ est plus petite que la droite ΔΓ, elle est aussi plus petite que la droite ΔΒ.

XLVI.



Proposition 48. — Soit le cercle ΑΒΓ dont le diamètre est ΑΒ. Prenons un point Δ sur ce diamètre ; menons des droites ΔΓ, ΔΕ, et que la droite ΓΔ soit plus grande que la droite ΔΕ ; je dis que la droite ΑΔ est plus grande que la droite ΔΒ.

Menons la droite de jonction ΓΕ et la perpendiculaire ΔΖ ; la droite ΓΖ est donc plus grande que la droite ΖΕ (2). Coupons la droite ΓΕ en deux

1. Le triangle rectangle ΑΓΒ donne : $\widehat{\text{ΑΓΒ}} = \widehat{\text{ΑΓΔ}} + \widehat{\text{ΔΓΒ}} = \widehat{\text{ΓΑΔ}} + \widehat{\text{ΔΒΓ}}$. Or (Euclide, liv. I, prop. 18 : « Dans tout triangle un plus grand côté est opposé à un plus grand angle ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 32), on a : $\widehat{\text{ΑΓΔ}} > \widehat{\text{ΓΑΔ}}$; donc, comme le texte : $\widehat{\text{ΔΓΒ}} < \widehat{\text{ΔΒΓ}}$, d'où (Euclide, liv. I, prop. 19, énoncée p. 434, n. 7) : ΓΔ > ΔΒ. Or, on a par construction : ΑΔ > ΓΔ ; donc, à fortiori : ΑΔ > ΔΒ.

2. On a : $\overline{\text{ΔΓ}}^2 = \overline{\text{ΔΖ}}^2 + \overline{\text{ΓΖ}}^2$ et $\overline{\text{ΔΕ}}^2 = \overline{\text{ΔΖ}}^2 + \overline{\text{ΖΕ}}^2$. Or, par construction : ΔΓ > ΔΕ ; donc, comme le texte : ΓΖ > ΖΕ.

parties égales au point H, et menons par le point H la droite HΘ parallèle à la droite ΔZ ; il s'ensuit que la droite ΘH est à angles droits sur la droite ΓE. Mais elle coupe aussi cette droite en deux parties égales ; donc, le centre est situé sur la droite HΘ (1). Or, il est situé aussi sur la droite AB ; donc, le point Θ est le centre du cercle ; par conséquent, la droite AΔ est plus grande que la droite ΔB.

XLVII.

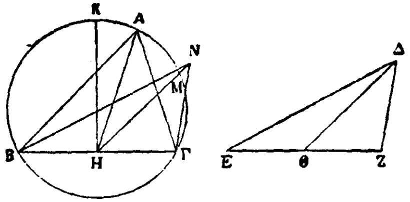
Proposition 49. — Soient de nouveau deux triangles ABΓ, ΔEZ ayant les côtés BΓ, EZ égaux. Coupons les droites BΓ, EZ en deux parties égales aux points H, Θ ; menons les droites de jonction AH, ΔΘ ; que celles-ci soient égales ; que les droites AH, ΔΘ ne soient ni l'une ni l'autre perpendiculaires sur la base, et que l'angle compris sous les droites AH, HΓ soit plus grand que celui qui est compris sous les droites ΔΘ, ΘZ. Je dis que, si la droite AH est plus grande que la droite HΓ, l'angle compris sous les droites BA, AΓ est plus grand que celui qui est compris sous les droites EΔ, ΔZ et que, si la droite HA est plus petite que la droite HΓ, l'angle compris sous les droites BA, AΓ est aussi plus petit que celui qui est compris sous les droites EΔ, ΔZ.

Menons du point H la droite HK à angles droits sur la droite BΓ ; cette droite est donc un diamètre du cercle. Que la droite HA soit d'abord plus grande que la droite HΓ ; il s'ensuit, en vertu de ce qui a été démontré précédemment (2), que la droite HK est plus grande que la droite HA [car la droite KH est la plus grande, et celle qui en est plus rapprochée est continuellement plus grande que celle qui en est plus éloignée] (3).

Établissons un angle compris sous les droites ΓH, HM égal à celui qui est compris sous les droites ΔΘ, ΘZ ; la droite HA, c'est-à-dire la droite ΔΘ, est donc plus grande que la droite HM. Posons la droite HN égale à la droite ΘΔ et menons les

1. Euclide, liv. III, prop. 1, corollaire, énoncé p. 318, n. 5.
2. Voir proposition 45.
3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 580, ll. 4-5).

droites de jonction NB, NΓ. En conséquence, l'angle compris sous les droites BN, NΓ est égal à celui qui est compris sous les droites EΔ, ΔZ ; donc, l'angle compris sous les droites BA, AΓ est plus grand que celui qui est compris sous les droites EΔ, ΔZ (1).

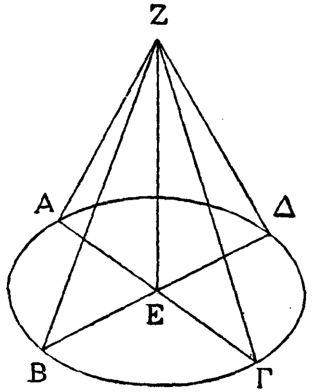


On démontrera pareillement que, si la droite AH est plus petite que la droite HΓ, l'angle compris sous les droites BA, AΓ est plus petit que celui qui est compris sous les droites EΔ, ΔZ ; ce qu'il fallait démontrer.

XLVIII.

Proposition 50. — Soit le cercle ABΓ dont le centre est le point E, et que la droite EZ soit menée à angles droits du point E sur le plan du cercle ; je dis que, si l'œil est placé sur la droite EZ, les diamètres du cercle apparaissent égaux.

La chose est manifeste, attendu que toutes les droites qui tombent du point Z à la circonférence du cercle sont égales entre elles et comprennent des angles égaux.

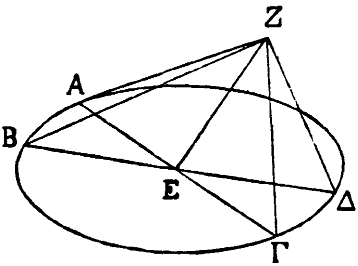


Mais, que la droite EZ ne soit pas perpendiculaire au plan du cercle, et qu'elle soit égale au rayon du cercle ; je dis que si l'œil est placé au point Z, les diamètres se montrent encore égaux.

En effet, menons deux diamètres AΓ, BΔ, et menons les droites de jonction ZA, ZB, ZΓ, ZΔ. Puisque les trois droites EA, EΓ, EZ sont égales, l'angle compris sous les droites AZ, ZΓ est donc droit (2). Pour la même raison d'ailleurs, l'angle compris sous les droites BZ, ZΔ est droit aussi ; par conséquent, les diamètres AΓ, BΔ se

1. Même raisonnement que dans la *proposition 45 (Voir notes).*
2. Euclide, *liv. III, prop. 31, énoncé* [illegible]

montrent égaux. On démontrera pareillement pour tous les diamètres.

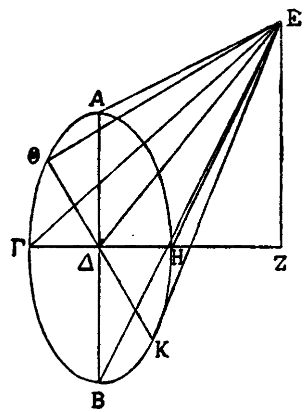


En conséquence, il est manifeste que (1), si l'on a un cercle le plus grand dans une sphère, et si l'œil se transporte n'importe où (2) à la surface de la sphère en regardant la circonférence du cercle, les diamètres seront vus égaux.

IL.

PROPOSITION 51. — Si l'on a un cercle, si on élève de son centre une droite qui ne soit ni à angles droits sur le plan du cercle, ni égale au rayon du cercle, et si l'œil est placé à l'extrémité de la droite ainsi élevée, les diamètres seront vus inégaux (3).

Soit le cercle ΑΒΓ dont le centre est le point Δ ; élevons du point Δ une droite ΔΕ qui ne soit ni à angles droits sur le plan du cercle, ni égale au rayon du cercle, et que l'œil soit placé au point Ε. Que la droite ΔΕ soit d'abord plus grande que le rayon du cercle ΑΒ ; menons du point Ε la perpendiculaire ΕΖ sur le plan du cercle ; amenons la droite de jonction ΖΗΔ jusqu'au point Γ, et menons par le point Δ



1. Le texte présente ici une répétition inutile que Hultsch attribue à un interpolateur : « Si l'on a un cercle ; si, de son centre, on mène une droite à angles droits sur le plan du cercle, et si l'œil est posé où l'on voudra sur la droite ainsi menée, les diamètres du cercle seront vus égaux ; tandis que si la droite élevée du centre n'est pas à angles droits sur le plan du cercle, et est égale au rayon, les diamètres seront pareillement vus égaux de l'extrémité de cette droite. Il est donc manifeste que... » (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 582, ll. 1-8).

2. Exception faite du cas où l'œil est placé sur la circonférence même du grand cercle de la sphère.

3. Cette proposition doit être rapprochée de la proposition 36 de l'*Optique* d'Euclide : Τῶν ἁρμάτων οἱ τροχοὶ ποτὲ μὲν κυκλοειδεῖς φαίνονται, ποτε δὲ παρεσπασμένοι (Voir p. 80 de l'édition critique de l'*Optique* d'Euclide mentionnée p. 436, n. 2). Nous traduisons cet énoncé : Les roues des chars paraissent tantôt de forme circulaire, tantôt contractées.

la droite AB à angles droits sur la droite HΓ. Je dis que la droite AB sera vue la plus grande, la droite HΓ la plus petite, que celle qui est plus rapprochée de la droite HΓ sera continuellement vue plus petite que celle qui en est plus éloignée, et que deux droites égales se verront seulement de part et d'autre de la droite HΓ.

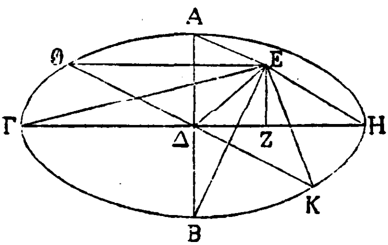
Il est évident que la droite EΔ est perpendiculaire sur la droite AB (1) ; car la droite EZ est amenée du point élevé E perpendiculairement sur le plan du cercle, la droite AB est menée quelconque (2), la droite ΔZ est menée du point Z perpendiculairement sur celle-ci, et on a mené la droite de jonction ΔE. Il est d'ailleurs évident aussi, en vertu des choses précédemment dites (3), que l'angle compris sous les droites EΔ, ΔZ est le plus petit ; que celui qui en est plus rapproché est continuellement plus petit que celui qui en est plus éloigné, et que deux angles égaux ne s'établissent que de part et d'autre de cet angle.

Menons maintenant une droite quelconque ΘΔK (4) ; la droite EΔ n'est donc plus perpendiculaire sur la droite ΘK ; car si elle lui était perpendiculaire, mais étant aussi perpendiculaire sur la droite AB, la droite EΔ serait donc perpendiculaire sur le plan du cercle (5) ; ce qui ne peut être. En conséquence, la droite EΔ n'est pas perpendiculaire sur la droite ΘK. Menons les droites de jonction EA, EB, EΘ, EK, EH, EΓ. Puisqu'on a deux triangles AEB, EΘK ayant les bases AB, ΘK égales, divisées toutes deux en deux parties égales au point Δ ; que la droite EΔ, perpendiculaire sur la droite AB et non sur la droite ΘK, est la même dans chacun des triangles, et que la droite EΔ est plus grande que la droite ΔA (6), il s'ensuit que l'angle compris sous les droites AE, EB est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΘE, EK (7). On démontrera pareillement qu'il est plus grand que tous les angles établis de la même manière ; par conséquent, la droite AB est vue la plus grande.

1. Voir proposition 43, p. 437.
2. Dans le plan du cercle AHBΓ.
3. Voir proposition 44, p. 438.
4. C'est-à-dire un diamètre quelconque ΘΔK.
5. EUCLIDE, liv. XI, prop. 4, énoncée p. 103, n. 7.
6. Par hypothèse.
7. Voir proposition 45, p. 441.

Au contraire, puisqu'on a deux triangles ΕΗΓ, ΕΘΚ ayant les bases égales (1) et la droite ΕΔ commune ; que la droite ΕΔ n'est perpendiculaire sur aucune des droites ΘΚ, ΗΓ ; que l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΘ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΕΔ, ΔΗ (car il a été démontré que l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΗ est le plus petit) (2), et que la droite ΕΔ est plus grande que la droite ΔΘ (3), il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΘΕ, ΕΚ est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΗΕ, ΕΓ (car cela a été démontré aussi) (4). On démontrera pareillement que l'angle compris sous les droites ΗΕ, ΕΓ est le plus petit de tous ; par conséquent, la droite ΗΓ est vue la plus petite.

Il est manifeste aussi que deux droites égales ne seront vues que de part et d'autre de la droite ΗΓ, parce que deux angles égaux ne s'établissent que de part et d'autre de l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ (5).



On démontrera pareillement que, si la droite ΕΔ est plus petite que la droite ΔΑ, la droite ΗΓ sera vue comme étant la plus grande et la droite ΑΒ comme étant la plus petite (6) ; que celle qui est plus rapprochée de la droite ΑΒ est continuellement vue plus petite que celle qui en est plus éloignée, et que deux droites égales ne seront vues que de part et d'autre de la droite ΗΓ (ou de la droite ΑΒ) (7).

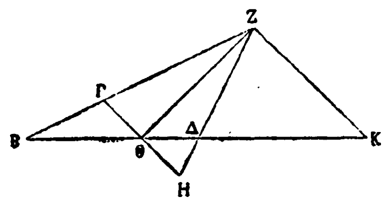
1. Le texte sous-entend ici la phrase du passage précédent : ὧν ἑκατέρα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ, dont chacune est divisée en deux parties égales au (point) Δ.
2. Voir proposition 44. p. 438.
3. Par hypothèse.
4. Voir proposition 49, p. 444.
5. Voir proposition 44, p. 438.
6. La proposition ayant considéré les deux cas du rayon visuel plus grand et plus petit que le rayon du cercle contemplé, elle peut être rapprochée de la proposition 37 de l'*Optique* d'Euclide (voir p. 80 de l'édition critique mentionnée p. 436, n. 2) : Ἔστι τόπος, οὗ τοῦ ὄμματος μένοντος, τοῦ δὲ ὁρωμένου μεθισταμένου, ἴσον ἀεί τὸ ὁρώμενον φαίνεται. « Il y a un lieu où l'œil restant fixe et la chose regardée se déplaçant, la chose regardée paraîtra toujours égale. »
7. Les mots ἢ τῆς ΑΒ, mis entre parenthèses, ont probablement été interpolés (Cfr. Hultsch, loc. cit., vol. II, p. 586, l. 12).

L.

Puisque le cercle semble donc présenter à l'œil l'apparence d'une ellipse, et son centre passer pour être le centre de cette ellipse, cette considération donne lieu à une objection peu commune. Il est, en effet, possible de démontrer que c'est un certain autre point qui est vu dans le cercle comme étant le centre de la ligne telle qu'elle nous apparaît [1]. Mais, nous exposerons d'abord le petit lemme suivant :

Proposition 52. — Que la droite BΘ soit à la droite ΔΘ comme la droite BK est à la droite KΔ ; que l'angle compris sous les droites BZ, ZΘ soit égal à celui qui est compris sous les droites ΘZ, ZΔ, et menons la droite de jonction KZ ; je dis que l'angle compris sous les droites ΘZ, ZK est droit.

Menons par le point Θ la droite ΓΘH parallèle à la droite KZ et prolongeons la droite ZΔ jusqu'au point H. Dès lors, puisque la droite BΘ est à la droite ΘΔ comme la droite BK est à la droite KΔ ; que, par permutation, la droite KΔ est à la droite ΔΘ comme la droite BK est à la droite BΘ, mais que la droite ZK est à la droite ΓΘ comme la droite BK est à la droite BΘ, il s'ensuit que la droite KΔ est à la droite ΔΘ comme la droite ZK est à la droite ΓΘ. Or, la droite KZ est à la droite ΘH comme la droite KΔ est à la droite ΔΘ (car les triangles ZΔK, ΔHΘ sont équiangles) ; donc, la droite ZK a même rapport avec chacune des droites ΓΘ, ΘH ; donc, la droite ΓΘ est égale à la droite ΘH [2].



1. C'est-à-dire de la ligne circulaire ou circonférence du cercle apparaissant sous la forme d'une ellipse.

2. On a par hypothèse : $\frac{B\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{BK}{K\Delta}$, d'où : $\frac{K\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{BK}{B\Theta}$. Or, la similitude des triangles BZK, BΓΘ donne : $\frac{ZK}{\Gamma\Theta} = \frac{BK}{B\Theta}$; donc : $\frac{K\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{ZK}{\Gamma\Theta}$. Or, la similitude des triangles ZΔK, HΔΘ donne : $\frac{ZK}{\Theta H} = \frac{K\Delta}{\Delta\Theta}$; donc, comme le texte : $\frac{ZK}{\Theta H} = \frac{ZK}{\Gamma\Theta}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 9, énoncée p. 33, n. 2) : $\Gamma\Theta = \Theta H$.

De plus, la droite ΓZ est à la droite ZH comme la droite ΓΘ est à la droite ΘH ; donc, la droite ΓZ est aussi égale à la droite ZH (1). Et puisque la droite ΓΘ est égale à la droite ΘH ; que la droite ZΘ est commune, et que la base HZ est égale à la base ΓZ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΓΘ, ΘZ est égal à l'angle compris sous les droites ZΘ, ΘH ; donc, chacun de ces angles est droit. En conséquence, l'angle compris sous les droites ΘZ, ZK est droit aussi ; parce que les droites ΓH, ZK sont parallèles (2).

LI.

Proposition 53. — Cela étant exposé au préalable, soit le cercle ΑΒΓΔ décrit autour du centre E, et que l'œil soit au point Z non situé dans le plan du cercle. Que la perpendiculaire ZH amenée du point Z sur le plan du cercle ne tombe pas au centre E ; prolongeons la droite de jonction HE jusqu'aux points B, K, et menons, du point Z aux points B, Δ, les droites de jonction ZΔ, ZB. Coupons l'angle compris sous les droites BZ, ZΔ en deux parties égales par la droite ZΘ ; menons la droite ΑΘΓ à angles droits sur la droite BΔ, et menons les droites AK, KΓ tangentes au cercle. Je dis que, si l'œil est placé

---

1. On a par construction $\widehat{BZ\Theta} = \widehat{\Theta Z\Delta}$; donc, le triangle ΓZH a l'angle en Z partagé en deux parties égales, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4) : $\frac{\Gamma Z}{ZH} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta H}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente, on a, comme le texte : ΓZ = ZH.

2. Les dernières égalités des deux notes précédentes et le côté commun ZΘ donnent (Euclide, liv. I, prop. 8, énoncée p. 440, n. 4) : triangle ΓZΘ = triangle HZΘ, d'où : $\widehat{Z\Theta\Gamma} = \widehat{Z\Theta H}$ = angle droit, d'où (Euclide, liv. I, prop. 29, énoncée p. 105, n. 5) : $\widehat{\Theta ZK}$ = angle droit.

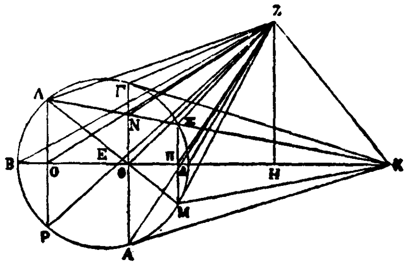
Cette proposition comporte une première réciproque que Pappus invoquera ci-après dans les démonstrations des propositions 53 et 54. Elle s'énoncerait : Si l'on a : $\frac{B\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{BK}{K\Delta}$ et $\widehat{\Theta ZK}$ = angle droit, et si l'on mène les droites BZ, ZΔ, on aura : $\widehat{BZ\Theta} = \widehat{\Theta Z\Delta}$.

La proposition comporte une seconde réciproque que Pappus invoquera à la fin de la démonstration de la proposition 156 du livre VII. Elle s'énoncerait : Si l'on a : $\widehat{\Theta ZK}$ = angle droit et $\widehat{BZ\Theta} = \widehat{\Theta Z\Delta}$, on aura : $\frac{BK}{K\Delta} = \frac{B\Theta}{\Theta\Delta}$.

Commandin a donné les démonstrations de ces deux propositions réciproques en notes de sa version latine (Cfr. *loc. cit.*, p. 225).

au point Z, le cercle ΑΒΓΔ apparaîtra tel qu'une ellipse ayant comme centre le point Θ (non le point E comme certains le pensent), et comme axes conjugués les droites ΓΑ, ΒΔ ; que les droites menées d'une manière ordonnée sur la droite ΒΔ seront et paraîtront parallèles à la droite ΑΓ ; que les droites menées d'une manière ordonnée sur la droite ΑΓ seront amenées du point K, mais paraîtront parallèles à la droite ΒΔ ; enfin, je dis, en ce qui concerne la vue de l'ellipse, que les choses qui apparaîtront seront les mêmes que celles qui se présentent dans cette section de cône.

En effet, menons les droites de jonction AZ, ZΓ ; l'angle compris sous les droites AZ, ZΘ est donc égal à celui qui est compris sous les droites ΘZ, ZΓ (1). Or, l'angle compris sous les droites ΘZ, ZB est aussi égal à celui qui est compris sous les droites ΘZ, ZΔ (2) ; donc la droite ΑΘ apparaît égale à la droite ΘΓ et la droite ΒΘ égale à la droite ΘΔ (3).



Je dis maintenant que, si l'on mène tranversalement une droite telle que ΛΘΜ, elle apparaîtra coupée en deux parties égales au point Θ.

En effet, menons les droites de jonction ΛΚ, ΚΜ, ΜΞ, puis MZ, ZΞ, ZN, ZΛ, et enfin ZK. Dès lors, puisque, à cause des tangentes, la droite ΒΘ est à la droite ΘΔ comme la droite BK est à la droite ΚΔ (4), et que l'angle compris sous les droites BZ, ZΘ est égal à celui qui est compris sous les droites ΘZ, ZΔ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΘZ, ZK est droit (car cela a été démontré antérieurement) (5). Et puisque le plan passant

1. Par hypothèse, la droite ZΘ est perpendiculaire sur la droite ΑΓ.
2. Par construction.
3. Euclide, *Optique*, 7. Voir édition mentionnée à la page 436, n. 2.
4. On a : $\overline{K\Gamma}^2 = \overline{\Theta K}^2 + \overline{\Theta\Gamma}^2 = \Theta K\,(\Theta\Delta + K\Delta) + B\Theta \times \Theta\Delta = \Theta K \times K\Delta + \Theta\Delta\,(\Theta K + B\Theta) = \Theta K \times K\Delta + \Theta\Delta \times BK$ (I). D'autre part, on a : $\overline{K\Gamma}^2 = BK \times K\Delta = (B\Theta + \Theta K)\,K\Delta = B\Theta \times K\Delta + \Theta K \times K\Delta$ (II). De (I) et (II) on tire : $\frac{B\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{BK}{K\Delta}$; relation qui fait remonter aux Anciens la connaissance des propriétés du pôle et de la polaire dans le cercle.
5. Voir proposition 52, p. 449.

par les points B, Z, K est perpendiculaire au plan passant par les points A, Z, Γ (car la droite ΑΓ est aussi perpendiculaire au plan passant par les points B, Z, K, et la droite ZK est menée perpendiculaire à la section commune ΘZ dans un des plans) ([1]), il s'ensuit que la droite ZK est perpendiculaire au plan qui passe par les points A, Z, Γ. En conséquence, l'angle compris sous les droites NZ, ZK est droit ([2]). Et la droite ΛN est à la droite NΞ comme la droite ΛK est à la droite KΞ ([3]) ; donc, l'angle compris sous les droites ΛZ, ZN est égal à celui qui est compris sous les droites NZ, ZΞ ([4]) ; donc, la droite ΛN apparaît égale à la droite NΞ. Et la droite ΛN est à la droite NΞ comme la droite ΛZ est à la droite ZΞ, mais la droite ZΞ est égale à la droite ZM (car la droite de jonction MΞ est parallèle à la droite ΑΓ) et la droite ΛΘ est à la droite ΘM comme la droite ΛN est à la droite NΞ ; donc, l'angle compris sous les droites ΛZ, ZΘ est égal à celui qui est compris sous les droites ΘZ, ZM ([5]) ; donc, la droite ΘΛ apparaît égale à la droite ΘM.

---

1. EUCLIDE, liv. XI, déf. 4 : « Un plan est perpendiculaire à un plan, lorsque les perpendiculaires menées dans un des plans à leur commune section, sont perpendiculaires à l'autre plan ». Voi trad. de Peyrard, vol. III, p. 1.
2. EUCLIDE, liv. XI, déf. 3, énoncée p. 328, n. 4.
3. En géométrie moderne, si l'on considère le pôle K et la polaire ΓA du cercle, la sécante quelconque KΞΛ donne aussitôt la relation du texte : $\frac{\Lambda N}{N\Xi} = \frac{\Lambda K}{K\Xi}$. Toutefois, pour la démontrer à la manière d'Euclide, comme à l'époque de Pappus, considérons la droite ΑΓ coupée en deux parties égales en Θ et en deux parties inégales en N, et l'on a (EUCLIDE, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $\Gamma N \times NA + \overline{N\Theta}^2 = \overline{\Gamma\Theta}^2$, d'où : $\Gamma N \times NA + \overline{N\Theta}^2 + \overline{\Theta K}^2 = \overline{\Gamma\Theta}^2 + \overline{\Theta K}^2$ ou : $\Gamma N \times NA + \overline{NK}^2 = \overline{\Gamma K}^2$. Or (EUCLIDE, liv. III, prop. 35, énoncée p. 149, n. 5), on a : $\Gamma N \times NA = \Lambda N \times N\Xi$, et (EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4), on a : $\overline{\Gamma K}^2 = \Lambda K \times K\Xi$; donc : $\Lambda N \times N\Xi + \overline{NK}^2 = \Lambda K \times K\Xi$ ou : $\Lambda N\,(NK - K\Xi) + NK\,(\Lambda K - \Lambda N) = \Lambda K\,(NK - N\Xi)$ ou: $\Lambda N \times K\Xi = \Lambda K \times N\Xi$, d'où, comme le texte : $\frac{\Lambda N}{N\Xi} = \frac{\Lambda K}{K\Xi}$.
4. On a démontré : $\widehat{NZK}$ = angle droit, d'où, en présence de la relation de la note précédente, la proposition 52 (voir première réciproque, p. 450, n. 2) donne : $\widehat{\Lambda Z N} = \widehat{N Z \Xi}$.
5. Considérant l'angle ΛZΞ partagé en deux parties égales par la droite NΞ, on a (EUCLIDE, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4) : $\frac{\Lambda N}{N\Xi} = \frac{\Lambda Z}{Z\Xi}$. Or, le parallélisme des droites MΞ, ΑΓ donne : $Z\Xi = ZM$; donc : $\frac{\Lambda N}{N\Xi} = \frac{\Lambda Z}{ZM}$. Or, le parallélisme des droites NΘ, MΞ donne : $\frac{\Lambda\Theta}{\Theta M} = \frac{\Lambda N}{N\Xi}$; donc: $\frac{\Lambda\Theta}{\Theta M} = \frac{\Lambda Z}{ZM}$, d'où (EUCLIDE, liv. VI, prop. 3) : $\widehat{\Lambda Z\Theta} = \widehat{\Theta ZM}$.

Pareillement, si quelqu'autre droite est menée par le point Θ, elle apparaîtra aussi coupée en deux parties égales au point Θ. En conséquence, le point Θ apparaît comme étant le centre de l'ellipse, les droites ΑΓ, ΒΔ apparaissent comme étant ses axes conjugués, les droites parallèles à la droite ΑΓ seront coupées en deux parties égales par la droite ΒΔ, et les droites amenées du point K paraîtront découpées en deux parties égales par la droite ΑΓ, ainsi qu'on l'a démontré pour la droite ΛΞ.

Je dis maintenant que les droites amenées du point K apparaissent comme étant parallèles à la droite ΒΔ.

En effet, menons par exemple la droite ΛΚ et la perpendiculaire ΛΟ, que nous prolongeons jusqu'au point Ρ, et menons les droites de jonction ΘΖ, ΖΠ, ΖΡ. Dès lors, puisque la droite ΛΖ est à la droite ΞΖ comme la droite ΛΚ est à la droite ΚΞ, c'est-à-dire comme la droite ΡΛ est à la droite ΞΜ; que la droite ΛΖ est égale à la droite ΖΡ et la droite ΞΖ égale à la droite ΖΜ [1], il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΛΖ, ΖΡ est égal à celui qui est compris sous les droites ΞΖ, ΖΜ, et que l'angle compris sous les droites ΛΖ, ΖΟ est égal à celui qui est compris sous les droites ΞΖ, ΖΠ [2]. En conséquence, la droite ΟΛ apparaît comme étant égale à la droite ΠΞ ; en sorte que les droites ΛΞ, ΒΔ apparaissent comme étant parallèles [3], [puisque les perpendi-

1. Le manuscrit du Vatican (Codex Vaticanus graecus 218) porte en marge la remarque suivante d'un scoliaste : ἰσοσκελῆ γὰρ τρίγωνα πάντα γίνονται κορυφὴν κοινὴν τὸ Ζ ἔχοντα, βάσεις δὲ παρὰ τὴν ΑΓ ; « car tous les triangles qui ont comme sommet commun le (point) Ζ, et les bases parallèles à la (droite) ΑΓ, deviennent isocèles.

2. On a démontré (voir p. 452, note 3) que l'on a : $\frac{\Lambda N}{N\Xi}=\frac{\Lambda K}{K\Xi}$. Or, considérant le triangle ΛΖΞ, dont l'angle Ζ est coupé en deux parties égales par la droite ΝΖ, on a (Euclide, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4) : $\frac{\Lambda Z}{\Xi Z}=\frac{\Lambda N}{N\Xi}$; donc : $\frac{\Lambda Z}{\Xi Z}=\frac{\Lambda K}{K\Xi}$. Or, $\frac{\Lambda K}{K\Xi}=\frac{\Lambda O}{\Xi\Pi}=\frac{P\Lambda}{\Xi M}$; donc, comme le texte : $\frac{\Lambda Z}{\Xi Z}=\frac{P\Lambda}{\Xi M}$. Or, on a : $\Lambda Z = ZP$ et $\Xi Z = ZM$; donc : $\frac{ZP}{ZM}=\frac{P\Lambda}{\Xi M}$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 5 : « Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles, et ils auront les angles sous-tendus par les côtés homologues égaux entre eux ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 301) : similitude des triangles isocèles ΛΖΡ, ΞΖΜ, d'où : $\widehat{\Lambda ZP} = \widehat{\Xi ZM}$, d'où, en moitiés : $\widehat{\Lambda ZO} = \widehat{\Xi Z\Pi}$.

3. Sous-entendu : ces droites étant vues du point Ζ.

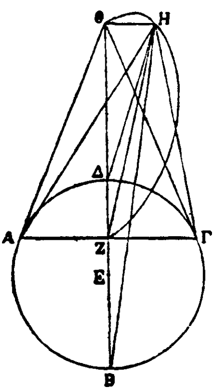
culaires situées dans leur intervalle apparaissent comme étant égales] (1).

LII.

PROPOSITION 54. — Cela étant démontré, il est possible de faire voir un problème plus étonnant que nous proposons de la manière suivante :

Un cercle étant donné de position et un point étant donné dans son plan, à l'intérieur de sa circonférence, trouver pour l'œil le lieu d'où il verra le cercle comme étant une ellipse ayant comme centre le point donné à l'intérieur de la circonférence.

Soit donné le cercle ΑΒΓΔ décrit autour du centre E ; soit donné le point Z à l'intérieur du cercle, et qu'il faille trouver le lieu d'où le cercle apparaîtra comme étant une ellipse ayant comme centre le point Z. Prolongeons de part et d'autre la droite de jonction ZE et menons-lui, du point Z, la perpendiculaire ΑΓ. Menons des points A, Γ les tangentes ΑΘ, ΘΓ dans le plan du cercle, et décrivons sur la droite ZΘ le demi-cercle ZHΘ perpendiculaire sur le plan du cercle ΑΒΓΔ. Je dis que, si l'on prend un point quelconque sur l'arc entier ZHΘ (2), et si on y place l'œil, le cercle sera vu comme étant une ellipse ayant le point Z comme centre.



En effet, prenons un point H et menons les droites de jonction HB, HZ, HΔ, HΘ. Dès lors, puisque, en raison des tangentes, la droite BZ est à la droite ZΔ comme la droite BΘ est à la droite ΘΔ, et que l'angle compris sous les droites ZH, HΘ est droit, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites BH, HZ est égal à celui qui est compris sous les droites ZH, HΔ (3) ; donc,

1. La phrase mise entre crochets doit avoir été interpolée (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 592, l. 16).

2. Exception faite pour les points Θ, Z, situés dans le plan même du cercle ΑΒΓΔ.

3. La droite ΑΓ reliant les points de contact des tangentes coupe le diamètre prolongé qui lui est perpendiculaire dans le rapport : $\frac{BZ}{Z\Delta}=\frac{B\Theta}{\Theta\Delta}$ (voir prop. 53, p. 451, n. 4). Or, l'angle ΘHZ inscrit dans un demi-cercle est droit ; donc (prop. 52,

la droite BZ apparaît comme étant égale à la droite ZΔ. Il est clair, d'ailleurs, que la droite AZ apparaît aussi comme étant égale à la droite ZΓ [1], et on démontrera comme précédemment que le point Z est le centre de l'ellipse apparente, et que les droites AΓ, BΔ sont ses axes conjugués.

LIII [2].

Dans le second théorème des *Phénomènes* d'Euclide [3], on a [4] également passé sous silence dans la démonstration combien de fois le zodiaque se trouvera à angles droits sur l'horizon [5] au cours d'une seule révolution [6], lorsque le pôle de l'horizon est situé entre les tropiques, ou sur l'un d'eux. C'est pour ce motif que nous allons démontrer que, si le pôle de l'horizon est situé sur l'un des tropiques, le zodiaque sera une seule fois perpendiculaire à l'horizon au cours d'une révolution, et que, si le pôle est situé entre les tropiques, le zodiaque sera deux fois perpendiculaire.

PROPOSITION 55. — Soient ABΘ l'horizon, ΓH le tropique d'été, BΘ celui d'hiver, AΔE le méridien [7], BZH le zodiaque, et que le pôle de l'horizon soit le point Δ situé sur le tropique d'été ; je dis que le cercle BZH sera une seule fois perpendiculaire à l'horizon ABΘ au cours d'une révolution.

En effet, puisque, au cours d'une révolution, le point H parcourt l'arc HΓ et son complément qui est sous la terre, puis

invoquée dans sa première réciproque, voir p. 450, n. 2) : comme le texte : $\widehat{BHZ} = \widehat{ZH\Delta}$.

1. Sous-entendu : si l'on mène les droites de jonction HA, HΓ.

2. La dernière partie du livre VI est précédée du titre suivant sur l'un des manuscrits: Εἰς τὰ φαινόμενα Εὐκλείδου, Sur les *Phénomènes* d'Euclide (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 594, l. 27).

3. EUCLIDE, les *Phénomènes*, prop. 2, énoncée p. 370, n. 1.

4. C'est-à-dire les commentateurs qui se sont déjà occupés de ce théorème, et auxquels Pappus a fait allusion dans le préambule du livre VI. Voir p. 370.

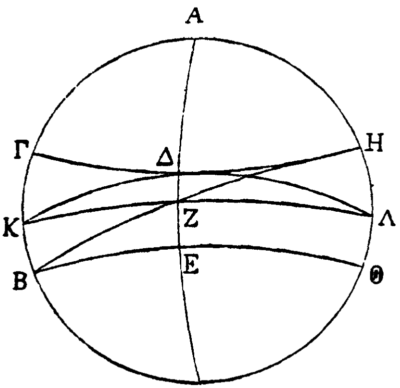
5. ὁρίζων, le cercle qui sépare la partie éclairée de la partie non éclairée de la sphère. Voir p. 370, n. 3.

6. Sous-entendu : κόσμου, du monde.

7. μεσημβρινὸς, sous-entendu : κύκλος μέγιστος, le cercle le plus grand du midi, ou cercle méridien.

revient au point H ; que, d'autre part, au cours du trajet que nous venons de dire, le point H arrive une seule fois sur le pôle Δ, et que le zodiaque prend position sur le cercle ΚΔΛ, il ne sera qu'une fois perpendiculaire à l'horizon, [car il passe par ses pôles] (1).

Pareillement aussi, si le pôle de l'horizon, tel que le point E, est sur le cercle (2) d'hiver, le zodiaque sera une seule fois perpendiculaire à l'horizon. [En effet, il est manifeste que les deux pôles de l'horizon ne sont pas sur le tropique d'été ou d'hiver, car un cercle plus petit qu'un cercle le plus grand n'admet pas le diamètre de la sphère ; en sorte que les tropiques ne passant pas par le centre de la sphère, n'admettent ni l'un ni l'autre les deux pôles de l'horizon. En conséquence, le point H, arrivé sous la terre, ne passe pas par l'autre pôle de l'horizon, mais chaque tropique admet un seul pôle. En effet, puisque le point H est opposé au point B suivant un diamètre, et que le point H prend position au pôle au point Δ, il s'ensuit que le point B, arrivé sous la terre, prendra, dans le tropique d'hiver, position à l'autre pôle de l'horizon, lequel est opposé au point Δ suivant un diamètre (parce que le point H est opposé au point B suivant un diamètre). En conséquence, les deux pôles de l'horizon ne sont dans aucun des tropiques, mais chacun d'eux est dans l'un ou l'autre des tropiques] (3).



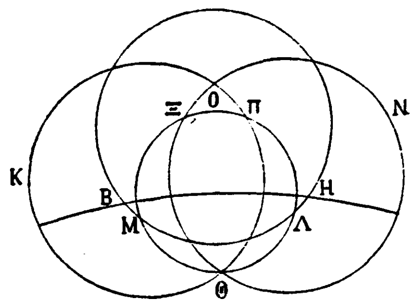
LIV.

PROPOSITION 56. — Que le pôle soit maintenant situé entre les tropiques, comme le point Θ (4) ; je dis que le zodiaque devient

1. La phrase mise entre crochets, authentique ou interpolée, renvoie donc à la proposition 15 du livre I des *Sphériques* de Théodose. Voir l'énoncé p. 384, n. 2.
2. Sous-entendu τροπικοῦ, du tropique (d'hiver).
3. Le long passage un peu diffus mis entre crochets est considéré par Hultsch comme une interpolation de scoliaste (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 596, ll. 17-30).
4. La figure relative à cette proposition est fort altérée dans tous les manuscrits. Celle qui accompagne le texte de l'édition critique de Hultsch est à peu près

deux fois perpendiculaire à l'horizon au cours d'une seule révolution.

En effet, décrivons le cercle du zodiaque ; que ce soit le cercle BMH, et soit MΛO le cercle parallèle dans lequel se meut le point Θ. Dès lors, le point Λ, arrivé au pôle Θ, le zodiaque BMH, prenant position sur le cercle NΘΞ, devient une première fois perpendiculaire à l'horizon (1). D'autre part, le point M ayant parcouru la circonférence MOΘ au cours d'une révolution, et étant arrivé au pôle Θ, le zodiaque, prenant position sur le cercle KΘΠ, sera pour la seconde fois perpendiculaire à l'horizon. [En effet, les points M, Λ sont les seuls qui appartiennent au cercle du zodiaque et au parallèle (les points M, Λ se mouvant suivant le cercle MOΛ) (2), et qui font que le cercle du zodiaque n'est que deux fois perpendiculaire à l'horizon en passant par le pôle Θ au cours d'une seule révolution du monde. Car chacun des points M, Λ parcourt le cercle entier MOΛ au cours d'une révolution ; de sorte que tous les points qui sont sur la circonférence du cercle passent aussi par les points M, Λ au cours d'une révolution, et par suite, le point Θ passe aussi par chacun des points M, Λ au cours d'une révolution] (3).



LV.

Euclide dit, dans le théorème XII : « Les arcs égaux du demi-cercle qui vient après le Cancer se couchent dans des temps inégaux ; ceux qui sont près des points de contact des tropiques se couchent dans des temps plus longs ; ceux qui sont près du

conforme à celle que Commandin avait déjà reconstituée dans sa version latine (Cfr. COMMANDIN, édit. précitée, p. 227).

1. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 15, énoncée p. 384, n. 2.

2. Hultsch a proposé l'abandon de cette phrase inutile, probablement interpolée.

3. D'après Hultsch, tout ce passage diffus a été interpolé par un commentateur (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 598, ll. 12-20).

cercle équinoxial (1) dans les temps les plus courts, et ceux qui sont également éloignés du cercle équinoxial dans des temps égaux» (2). Rercherchons pourquoi il dit cela du coucher de ces arcs et non pas de leur lever ; car la question a été étendue (3) aux distinctions orientales (4), et son traitement complet est le suivant :

Trouvons, par exemple, la région (5) dans laquelle le Cancer se lève dans un même temps que le Lion.

Dans son livre *Sur les Ascensions des douze Signes* (6), Hipparque fait voir au moyen de nombres que les arcs égaux du demi-cercle qui vient après le Cancer, lesquels ont entre eux un certain rapport de temps, ne se couchent pas de la même manière qu'ils se lèvent ; car il y a certaines régions dans lesquelles les arcs égaux du demi-cercle qui vient après le Cancer, plus rapprochés du cercle équinoxial, se lèvent continuellement dans un temps plus long que ceux qui sont aux points de contact des tropiques. C'est donc pour ce motif, qu'en ce qui concerne les arcs également distants du cercle équinoxial, il a déclaré aussi que leurs levers se font dans des temps égaux, et que cela résulte d'ailleurs clairement des choses qui ont été démontrées dans les *Phénomènes*.

---

1. ἰσημερινὸς, sous-entendu κύκλος, c'est-à-dire (cercle) équinoxial.

2. Euclide, les *Phénomènes*, prop. 12 (voir p. 63 de l'édition critique du texte grec de Heiberg, mentionnée p. 436, n. 2) : Τοῦ μετὰ τὸν Καρκίνου ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις δύνουσιν, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλάσσονι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ δύνουσι καὶ ἀνατέλλουσιν. C'est-à-dire : « Les arcs égaux du demi-cercle qui vient après le Cancer se couchent dans des temps inégaux ; ceux qui sont près des points de contact des tropiques, dans des temps les plus longs ; ceux qui suivent ces derniers, dans des temps plus courts ; ceux qui sont près du (cercle) équinoxial, dans les temps les plus courts, et ceux qui sont également éloignés du (cercle) équinoxial se couchent et se lèvent dans un même temps ».

Il y a donc lieu de remarquer que l'énoncé rapporté par Pappus n'est pas aussi complet que celui d'Euclide.

3. Le texte présente ici la petite interpolation : καὶ ἀνετράπη, et renversée (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 600, l. 6).

4. εἰς τοὺς ἀνατολικοὺς διορισμούς, aux distinctions orientales, c'est-à-dire aux distinctions de temps relatives aux levers des arcs ou signes du Zodiaque.

5. οἴκησις, habitation ou séjour, dans le sens astronomique d'une région déterminée du ciel. Ailleurs le texte emploie le mot κλίμα, climat.

6. περὶ τῆς τῶν ιβ' ζῳδίων ἀναφορᾶς. *Sur les Ascensions des douze Signes du Zodiaque* ; titre de l'un des six ouvrages de l'astronome Hipparque qui ne nous sont pas parvenus.

De même, il dit encore (1) que « les arcs égaux du demi-cercle qui vient après le Capricorne se lèvent dans des temps inégaux ; ceux qui sont près des points de contact (2) dans des temps plus longs, ceux qui suivent ceux-ci dans des temps plus courts ; ceux qui sont près du cercle équinoxial dans les temps les plus courts ; enfin, ceux qui sont également éloignés du cercle équinoxial dans des temps égaux » (3). Il ne dit toutefois rien du coucher de ces arcs ; car le raisonnement de la démonstration retombe sur les distinctions relatives aux levers, et un ouvrage, sur lequel nous émettrons plus tard certaines considérations (4), a déjà été écrit sur ce sujet par Ménélaüs d'Alexandrie.

Proposition 57. — Cependant, si l'horizon passe par les pôles des parallèles, les choses se démontreront de la manière suivante :

Soient ΑΒΓΔΖΘ le cercle horizon passant par les pôles des parallèles, ΒΞΗ le demi-cercle du zodiaque qui vient après le Cancer et ΘΞΕ le plus grand des parallèles. Divisons le quadrant ΒΝΞ en parties égales aux points Μ, Ν, et décrivons des cercles les plus grands par le point Α et par chacun des points Μ, Ν. Ils passeront donc aussi par l'autre pôle. Que ce soient les cercles ΑΜΖ, ΑΝΖ, et menons par les points Μ, Ν les cercles parallèles ΔΝΚ, ΓΜΛ. Et puisque chacun des demi-cercles ΑΜΖ, ΑΝΖ accompagne le demi-cercle ΑΔΖ qui est au coucher (car l'arc ΜΒ et l'arc ΓΜ se couchent ensemble, et le point Μ aura parcouru l'arc ΜΓ dans le temps où l'arc ΜΓ se couche) (5), il s'ensuit que l'arc ΜΒ se couche dans le temps où le point Μ parcourt l'arc ΜΓ.

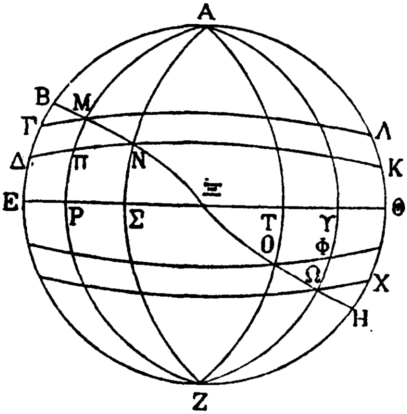
1. C'est-à-dire : Euclide dit encore ailleurs dans ses *Phénomènes*.

2. Sous-entendu : τῶν τροπικῶν, des tropiques.

3. Euclide, *Les Phénomènes*, prop. 13 (voir p. 79 de l'éd. du texte grec de Heiberg mentionnée p. 436, n. 2) : Τοῦ μετὰ τὸν Αἰγόκερων ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατελλουσιν, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλάττοσι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων ἐν ἐλαχίστοις δὲαἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ, ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ δυνόυσι καὶ ἀνατέλλουσιν. C'est-à-dire : « Les arcs égaux du demi-cercle qui vient après le Capricorne se lèvent dans des temps inégaux ; ceux qui sont près des points de contact des tropiques, dans des temps plus longs ; ceux qui suivent ces derniers, dans des temps plus courts ; ceux qui sont près du (cercle) équinoxial, dans les temps les plus courts, et ceux qui sont également éloignés du (cercle) équinoxial se couchent et se lèvent dans des temps égaux ».

4. Les considérations annoncées ici sur l'ouvrage de l'astronome Ménélaüs d'Alexandrie ne se rencontrent pas dans le présent ouvrage de Pappus.

5. Même considération pour le demi-cercle ΑΝΖ.



Derechef, le demi-cercle AMZ prenant la position de l'horizon, les points M, Π sont ensemble sur l'horizon, et le point N étant arrivé sur l'horizon, les arcs ΠN, NM se seront couchés ; par conséquent, l'arc NΠ et l'arc NM se couchent ensemble. Or, le point N aura parcouru l'arc NΠ dans le temps où l'arc ΠN se couche ; donc, l'arc NM se couche dans le temps où le point N parcourt l'arc NΠ. Pareillement aussi, l'arc ΞN se couche dans le temps où le point Ξ parcourt l'arc ΞΣ. Mais, puisque des cercles les plus grands sont décrits par les pôles des parallèles, ils découpent, dans leur intervalle, des arcs semblables de cercles parallèles [1] ; par conséquent, l'arc MΓ est semblable à l'arc ΔΠ et à l'arc PE, et l'arc NΠ semblable à l'arc ΣP. Or, puisque les arcs BM, MN, NΞ sont égaux [2], et que des cercles les plus grands sont décrits par les pôles, il s'ensuit que l'arc EP est plus grand que l'arc ΣP et l'arc PΣ plus grand que l'arc ΣΞ [3]. En conséquence, le point P parcourt l'arc PE dans un temps plus long que celui dans lequel le point Σ parcourt l'arc ΣP, et le point Σ parcourt l'arc ΣP dans un temps plus long que celui dans lequel le point Ξ parcourt l'arc ΞΣ. Mais, le point M parcourt aussi l'arc MΓ dans le temps où le point P parcourt l'arc PE, et le point N parcourt l'arc NΠ dans le temps où le point Σ parcourt l'arc ΣP ; par conséquent, le point M parcourt l'arc MΓ dans un temps plus long que celui dans lequel le point N parcourt l'arc NΠ, et le point N parcourt l'arc NΠ dans un temps plus long que celui dans lequel le point Ξ parcourt l'arc ΞΣ. Mais l'arc MB se couche dans le temps où le point M parcourt l'arc MΓ; l'arc MN se couche dans le temps où le point N parcourt l'arc NΠ, et l'arc NΞ se couche dans le temps où le point Ξ parcourt

1. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 10, énoncée p. 375, n. 4.
2. Par hypothèse de construction.
3. Voir proposition 21, p. 395, et Théodose, *Les Sphériques*, liv. III, prop. 6, énoncée p. 369, n. 3.

l'arc ΞΣ ; par conséquent, l'arc MB se couche dans un temps plus long, l'arc MN dans un temps plus court et l'arc NΞ dans le temps le plus court (1).

[Les choses se démontrent de la même manière en ce qui concerne le quadrant ΞH, et on démontrera comme suit que l'arc MB se lève dans un temps plus long que l'arc MN, et l'arc MN dans un temps plus long que l'arc NΞ. Découpons le quadrant ΞH aux points O, Ω de la même manière que le quadrant ΞB (2), et décrivons les cercles les plus grands ZOA, ZΩA par le pôle A et les points O, Ω. Dès lors, on démontrera pareillement que l'arc ΘΥ est plus grand que l'arc semblable à l'arc ΥT, et l'arc ΥT plus grand que l'arc semblable à l'arc TΞ. Et ces arcs appartiennent au plus grand des parallèles (3) ; par conséquent, l'arc XΩ est plus grand que l'arc semblable à l'arc ΦO, et l'arc ΦO plus grand que l'arc semblable à l'arc TΞ ; donc, le point Ω parcourt l'arc ΩX dans un temps plus long que celui dans lequel le point O parcourt l'arc OΦ, et le point O parcourt l'arc OΦ dans un temps plus long que celui dans lequel le point Ξ parcourt l'arc ΞT (4). Mais, l'arc ΩH se lève dans le temps où le point Ω parcourt l'arc ΩX, l'arc ΩO se lève dans le temps où le point Φ parcourt un arc égal à l'arc ΦO (5), et l'arc ΞO se lève dans le temps où le point Ξ parcourt un arc égal à l'arc TΞ (6) ; par conséquent, l'arc HΩ se lève dans un temps plus long que celui dans lequel se lève l'arc ΩO, et l'arc ΩO dans un temps plus long que celui dans lequel se lève l'arc OΞ. Mais, les arcs HΩ, ΩO, OΞ se lèvent respectivement dans le même temps que les arcs BM, MN, NΞ (l'arc HΩ dans le même temps que l'arc BM, l'arc ΩO

1. Le texte doit avoir perdu ici une seconde partie de la proposition démontrant par analogie que, parmi les arcs égaux du demi-cercle venant après le Capricorne , celui qui est plus rapproché du point de contact du tropique d'hiver se lève dans un temps plus long que celui qui en est plus éloigné. Pappus rappelle d'ailleurs cette seconde partie de la démonstration au chapitre suivant.

2. C'est-à-dire : découpons le quadrant ΞH en trois parties égales aux points O, Ω, comme le quadrant BΞ a été découpé aux points M, N.

3. Phrase dont le texte corrompu signifie que les arcs ΘΥ, ΥT, TΞ sont découpés sur le grand parallèle EΘ, conformément à la proposition 21 (voir p. 395).

4. Le texte aurait dû dire plus correctement : « le point X parcourt l'arc XΩ », et ainsi de même pour le point Φ.

5. Le texte devait dire simplement : « où le point Φ parcourt l'arc ΦO ».

6. Même remarque que dans la note précédente.

dans le même temps que l'arc MN, et l'arc ΞO dans le même temps que l'arc NΞ ; car cela est démontré aussi dans les *Éléments*) (1) ; par conséquent, l'arc MB se lève dans le temps le plus long et l'arc NΞ dans le temps le plus court] (2).

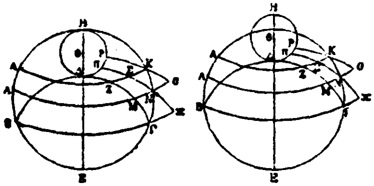
LVI.

Il est donc démontré d'une part que, parmi les arcs égaux du demi-cercle venant après le Cancer, celui qui est plus rapproché du point de contact du tropique d'été se couche dans un temps plus long que celui qui en est plus éloigné, et d'autre part que, parmi les arcs égaux du demi-cercle venant après le Capricorne, celui qui est plus rapproché du point de contact du tropique d'hiver se lève dans un temps plus long que celui qui en est plus éloigné. Si l'on demande maintenant en plus si, par contre, il ne se fait pas que ceux des arcs égaux du demi-cercle venant après le Cancer, plus rapprochés du point de contact du tropique d'été, se lèvent continuellement dans un temps plus long que ceux qui en sont plus éloignés, nous dirons qu'il est impossible que cela se présente dans toute région ; car nous démontrerons que, dans certains horizons, la Vierge fait ascension plus droite que le Lion, tandis que, au contraire, le Lion se lève dans un temps plus long que la Vierge, et que, d'autre part, le Lion fait ascension plus droite et se lève dans un temps plus long que le Cancer.

Proposition 58. — Au reste, on démontrera comme suit que, dans tout climat (3) où il y a lever et coucher des douze signes, la Vierge fait ascension plus droite que le Lion.

1. Il doit être fait allusion ici à une proposition des *Phénomènes* d'Euclide.
2. Le long passage que nous avons mis entre crochets, défectueux d'ailleurs en plusieurs endroits, est considéré à juste titre par Hultsch comme une interpolation de commentateur, qui aura tenté de suppléer à la perte de la seconde partie de la démonstration (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 604, l. 25 à p. 608, l. 3).
3. κλίμα, inclinaison (d'un plan sur l'horizon) ; mot ayant ici la signification astronomique de zone céleste analogue à celles qui partagent actuellement la surface de chaque hémisphère terrestre et auxquelles on a conservé le même nom, notamment : la première zone s'étendant de l'équateur jusqu'au parallèle auquel le plus long jour est de douze heures et demie ; la seconde zone s'étendant de ce parallèle jusqu'à celui auquel le plus long jour est de treize heures ; la troisième zone s'étendant de ce parallèle jusqu'à celui auquel le plus long jour

Soit ABΓ l'horizon ; soit ΔH le tropique d'été ; qu'il soit tangent à l'horizon dans le premier [cas] (1) ; qu'il coupe l'horizon dans le second cas ; que son pôle soit le point Θ, et décrivons, par le point Θ et les pôles de l'horizon, le cercle le plus grand HΘE. Ce cercle sera donc méridien et perpendiculaire à l'horizon (2), [car il est décrit par ses pôles] (3). Décrivons encore par le point Δ le cercle zodiaque BΔΓ, et soit BΓ le cercle équinoxial. Dès lors, puisque les cercles ΔH, BΔΓ sont tangents entre eux, et que, par leur point de contact Δ et par les pôles de l'un d'eux ΔH, on a décrit le grand cercle méridien HΘΔE, ce dernier passera aussi par les pôles de l'autre cercle BΔΓ (4) et lui sera perpendiculaire (5) ; de sorte que le zodiaque sera aussi perpendiculaire au méridien, et il passera donc aussi par ses pôles.



[D'ailleurs, l'horizon et le cercle équinoxial passent par les pôles du méridien ; en sorte que la section commune des trois cercles, horizon, zodiaque et équinoxial, est constituée par les points B, Γ qui sont opposés suivant un diamètre ; de manière que BΓ est le cercle équinoxial] (6). Divisons l'arc ΔΓ (7) en trois parties égales aux points Z, M, et, par les points Z, M, décrivons les cercles parallèles AZK, ΛMO ; il s'ensuit que le Cancer occupera

est de treize heures et demie, et ainsi de suite de manière à compter dans chaque hémisphère vingt-quatre climats de l'équateur au cercle polaire.

Dans les propositions qui vont suivre, Pappus s'en rapporte sans changement aux sept climats d'Ératosthène, au sujet desquels on pourra consulter l'ouvrage récent suivant : *Die Sieben Klimata und die πόλεις ἐπίσημοι, eine Untersuchung zur Geschichte der Geographie und Astrologie im Altertum und Mittelalter von Ernst Honigmann*. Heidelberg, 1929.

1. πτώσεως, cas, lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 610, l. 1).

2. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 15, énoncée p. 384, n. 2.

3. La phrase mise entre crochets est une interpolation renvoyant à la proposition de Théodose rappelée dans la note précédente.

4. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 5 : « Si, dans une sphère, deux cercles sont tangents entre eux, le cercle le plus grand décrit par les pôles de l'un des cercles et par le point de contact passera aussi par les pôles de l'autre cercle ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 37.

5. THÉODOSE, *ibidem*, liv. I, prop. 15, énoncée p. 384, n. 2.

6. La phrase mise entre crochets est une interpolation évidente ; car le cercle équinoxial est une donnée de construction (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 610, ll. 13-17).

7. C'est-à-dire l'arc de quadrant ΔΓ.

l'arc ΔZ comme douzième partie (1), le Lion l'arc ZM et la Vierge l'arc MΓ. Maintenant, si l'arc MΓ se lève, le zodiaque aura une certaine position. Qu'il ait la position de l'arc ΠΝΞ. Si, d'autre part, l'arc ZM se lève, le zodiaque aura une certaine position. Qu'il ait la position de l'arc PKO. Dès lors, en vertu du vingt-et-unième théorème du second livre des *Sphériques* de Théodose (2), le zodiaque, occupant la position de l'arc ΒΔΓ, sera plus droit, c'est-à-dire plus élevé sur l'horizon et, s'il est plus rapproché du point de contact Δ du tropique d'été, il sera continuellement moins incliné que s'il en est plus éloigné (3). En conséquence, le cercle ΠΝΞ est plus droit que le cercle PKO. Et [puisque] (4) l'arc ΝΞ, douzième partie (5) qui est celle de la Vierge, se lève en occupant la position ΠΝΞ du zodiaque, et que l'arc KO, qui est celui du Lion, se lève en occupant la position PKO du zodiaque, il s'ensuit que la Vierge fait ascension plus droite que le Lion dans les régions où toutes les parties du zodiaque se lèvent et se couchent. Et il est clair que les positions du cercle du zodiaque (6) se présentent droites en vertu de la douzième proposition du second livre (7) ; car les arcs ΔΠ, ΖΣ, MN, ΓΞ sont

1. L'arc ΔZ, qui est le tiers du quadrant ΔΓ par construction, est donc la douzième partie de la circonférence entière du cercle zodiaque.

2. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 22 (dans les éditions critiques au lieu de 21 dans les textes à l'époque de Pappus) : « Si, dans une sphère, un cercle le plus grand est tangent à l'un des cercles de la sphère, et coupe un autre cercle qui, parallèle au premier, est situé entre le centre de la sphère et le cercle auquel le cercle le plus grand est tangent ; si le pôle du cercle le plus grand est situé entre ces parallèles, et si l'on décrit des cercles les plus grands tangents au plus grand de ces parallèles : ils seront inclinés sur le plus grand ; le plus relevé sera celui qui est tangent au point qui divise le grand segment en deux parties égales ; le plus abaissé sera celui qui est tangent au point qui divise le petit segment en deux parties égales, et, parmi les autres, ceux qui sont également éloignés de l'un et l'autre point de division en deux parties égales seront semblablement inclinés, tandis que celui dont le point de contact est plus éloigné du point qui divise le grand segment en deux parties égales sera continuellement plus incliné que celui dont le point de contact est plus rapproché. Enfin, les pôles de ces cercles les plus grands seront situés sur un seul et même cercle parallèle, plus petit que celui auquel le cercle le plus grand du début est tangent ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 71.

3. C'est-à-dire que, si le plan du cercle zodiaque fait un angle plus grand avec le plan du cercle horizon, il sera continuellement moins incliné sur ce plan que s'il fait avec lui un angle plus petit.

4. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 612, l. 5).

5. C'est-à-dire douzième partie du cercle zodiaque.

6. Telles qu'elles viennent d'être décrites.

7. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 13 (dans les éditions actuelles au lieu de 12 dans les textes à l'époque de Pappus). Voir l'énoncé p. 423, n. 1.

semblables, et les arcs ΠΣ, PK, ΣN, KO sont égaux ; de sorte que, dans la révolution de la sphère, les points s'adaptent sur les points dans un même temps (1), comme cela est également démontré dans le livre *De la Sphère en mouvement* (2), et les arcs égaux situés dans l'intervalle (3) s'adaptent sur les arcs égaux (4). D'ailleurs, il faut que, se levant, l'arc égal à MΓ soit de nouveau entre les mêmes parallèles, parce que l'ascension que fait l'arc MΓ est la même que celle de l'arc NΞ, et ce théorème ne s'étend pas à une élévation plus grande lorsque l'horizon touche des cercles plus grands que ceux que touche le zodiaque.

LVII.

Proposition 59. — Qu'il faille trouver maintenant les horizons des régions dans lesquelles les douzièmes parties (5) du zodiaque qui font ascension plus droite se lèveront dans un temps plus court que celles qui font ascension plus oblique.

Exposons le cercle le plus grand ΑΒΓΔ comme étant l'horizon qui passe par les pôles des parallèles. Soient A, Γ les pôles et ΑΘΓ le cercle le plus grand, c'est-à-dire le méridien, passant par ces pôles. Soient EH le demi-cercle d'été (6) et KZ le demi-cercle d'hiver (7) ; que la position du zodiaque soit tantôt celle du cercle ΕΘΖ, tantôt celle du cercle ΗΘΚ, en ayant ses parties

1. C'est-à-dire que les points Π, Σ, N, Ξ s'adaptent sur les points Δ, Z, M, Γ dans le même temps.

2. Autolycus de Pitane, *De la Sphère mobile* (περὶ κινουμενής σφαίρας), proposition 2 : « Ἐαν σφαῖρα στρέφηται ὁμαλῶς περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα, πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σημεῖα ἐν τῷ ἴσω χρόνῳ τὰς ὁμοίας περιφερείας διεξέρχεται τῶν παραλλήλων κύκλων καθ᾽ ὧν φέρεται. A défaut de pouvoir renvoyer à une traduction française, nous traduisons cet énoncé : « Lorsqu'une sphère tourne d'une manière uniforme autour de son axe, tous les points situés à la surface de la sphère parcourent dans le même temps les arcs semblables des cercles parallèles sur lesquels ils se meuvent ».

3. C'est-à-dire les arcs égaux situés dans l'intervalle des cercles parallèles.

4. Le texte présente ici l'interpolation : καὶ μεταξὺ περιφέρεια ὁ τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου (et l'arc situé dans l'intervalle du cercle zodiaque). D'après Hultsch, cette interpolation doit être attribuée à un commentateur qui a voulu plutôt écrire : καὶ τοῦ ζῳδιακοῦ τὰς μεταξὺ τῶν παραλλήλων (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 612, l. 17).

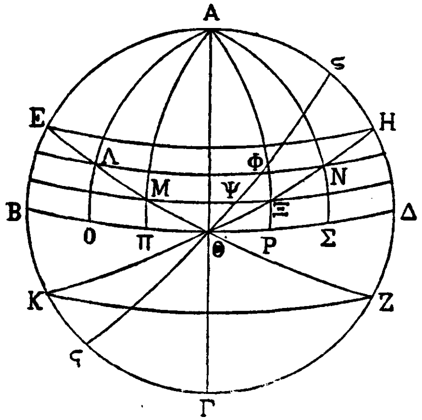
5. C'est-à-dire les douze signes du zodiaque.

6. C'est-à-dire le demi-cercle du tropique d'été.

7. C'est-à-dire le demi-cercle du tropique d'hiver.

orientales aux points H, Δ, Z, et divisons le quadrant EΘ en signes [aux] (1) points Λ, M (2). [Je dis que l'arc MΘ fait ascension plus droite que l'arc ΛM] (3).

En effet, puisque l'horizon passe par les pôles de la sphère, c'est-à-dire par ceux du cercle équinoxial, il est donc perpendiculaire à celui-ci ; [en sorte que le cercle équinoxial est aussi perpendiculaire à l'horizon] (4) ; donc, le cercle équinoxial passe aussi par les pôles de l'horizon. Or, le méridien passe aussi par les pôles de l'horizon ; par conséquent, les pôles de l'horizon constituent (5) la section commune du cercle équinoxial et du méridien. Et le cercle équinoxial se meut en passant continuellement par les pôles de l'horizon, et le zodiaque ne passe par la section commune du cercle équinoxial et du méridien qu'en deux seuls points, [les commencements du Bélier et de la Balance] (6) ; en sorte que, de l'horizon jusqu'au pôle, il y a un arc de quadrant [ou de nonante degrés] (7). Et les points E, H, K, Z des tropiques, à partir desquels il y a un quadrant jusqu'au méridien, sont sur l'horizon ; par conséquent, il y a un quadrant à



1. Restauration de Commandin au moyen de κατὰ (Cfr. *loc. cit.*, p. 234, l. 5).

2. C'est-à-dire, divisons le quadrant EΘ en trois parties égales aux points Λ, M, ou en trois des douze signes du zodiaque.

3. Restauration conjecturale de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 614, l. 24).

4. La phrase tautologique que nous mettons entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 614, l. 28).

5. εἴσιν expression négligée pour signifier que la droite menée par les pôles du cercle horizon est la commune section du cercle équinoxial et du cercle méridien, tous deux perpendiculaires sur le cercle horizon et perpendiculaires entre eux.

6. Les mots que nous mettons entre crochets sont admis par Commandin qui traduit : « quae sunt principia Arietis et Librae » (Cfr. *loc. cit.*, p. 232), mais ils sont considérés par Hultsch comme ayant éte interpolés (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 614, l. 34).

7. Interpolation exprimée dans un manuscrit dans la forme $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\overline{\varsigma}$, et dans un autre manuscrit par les mots μοιρῶν ἐννενήκοντα, nonante parties (ou degrés). (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, p. 616, l. 1).

partir des points E, H, K, Z jusqu'au point Θ qui est commun aux cercles équinoxial et méridien, et qui est le pôle de l'horizon. Menons encore par les points Λ, M, Θ les cercles parallèles ΛN, MΞ, BΘΔ ; il s'ensuit que BΘΔ sera le cercle équinoxial, comme nous l'avons dit plus haut. Menons, par le pôle A et par chacun des points Λ, M, Ξ, N, les cercles les plus grands AO, AΠ, AP, AΣ. Et puisque, en vertu du douzième théorème du deuxième livre des *Sphériques* (1), les arcs EΛ, HN sont égaux, ainsi que les arcs ΛM, NΞ et les arcs MΘ, ΞΘ, et que ces arcs ont été divisés égaux, ils seront divisés en signes et sont égaux entre eux (2). [Et le point E est le commencement du Cancer qui précède le demi-cercle (3), et le point H est le commencement du Cancer qui vient à la suite du demi-cercle (4) ; par conséquent, les points Λ, M, Θ suivent le point E, et les points Θ, Ξ, N précèdent le point H ; de sorte qu'on a des signes (5) situés dans la même zone (6), et le point Θ est le commencement du Bélier du côté du point H et le commencement de la Balance du côté du point E] (7). En conséquence, l'arc BO est plus grand que l'arc OΠ, tandis que l'arc OΠ est plus grand que l'arc ΠΘ et, pareillement, l'arc ΔΣ est aussi plus grand que l'arc ΣP, tandis que l'arc ΣP est plus grand que l'arc PΘ ; donc, l'arc OΘΣ est plus grand que le double de l'arc ΠΘP, c'est-à-dire, qu'à similitude, l'arc ΛN est plus grand que le double de l'arc MΞ (8). Soit, à similitude, l'arc ΛΦ

1. Les arcs EΛ, ΛM, MΘ résultent, par construction, de la division en trois parties égales du quadrant EΘ du zodiaque et les arcs HN, NΞ, ΞΘ résultent également de la division en trois parties égales du quadrant HΘ du zodiaque.

2. C'est-à-dire que les arcs en question étant tous des tiers de quadrant ou des douzièmes de circonférence du zodiaque, ils correspondent ainsi à six des douze signes du zodiaque, et ils sont égaux entre eux.

3. C'est-à-dire que le point E est le commencement de la constellation du Cancer, situé à l'origine de la demi-circonférence EZ du zodiaque dans la position EΘZ.

4. C'est-à-dire que le point H est le commencement de la constellation du Cancer, situé à la fin de la demi-circonférence KH du zodiaque dans la position KΘH.

5. C'est-à-dire que l'on a deux signes du zodiaque.

6. ὁμόζωνα (ζῴδια), littéralement : (signes) homozones, expression que Commandin a préféré conserver en grec dans sa version latine (Cfr. *loc. cit.*, p. 233, l. 13).

7. La phrase que nous mettons entre crochets nous paraît avoir été interpolée, car c'est une digression inutile séparant la phrase précédente de la conclusion directe exprimée dans la phrase suivante.

8. On a par construction : arc EΛ = arc ΛM = arc MΘ et arc HN = arc NΞ = arc ΞΘ ; donc (prop. 21, p. 395, et THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. III, prop. 6,

égal au double de l'arc MΞ, et menons par les points Φ, Θ le cercle plus grand ϚΦΘϘ. Ce cercle est donc perpendiculaire à l'horizon ΑΒΓΔ (car le point Θ est le pôle de l'horizon).

Dès lors, je dis que, si l'on suppose que l'horizon est le cercle ϚΦΘϘ ou bien le cercle ΗΘΚ (lequel est tangent au tropique d'été dans la région qui tombe entre les points Ϛ, Η), on démontrera que la Vierge fait ascension plus droite que le Lion et que [le Lion] (1) se lève dans un temps plus long que la Vierge.

Puisque (2) nous avons supposé qu'un tel horizon n'est pas tangent à des cercles plus grands que ne le sont les tropiques, il est clair, d'après ce que nous avons démontré plus haut (3), que la Vierge fera ascension plus droite que le Lion. Supposons en premier lieu que l'horizon soit le cercle ΗΘΚ ; que son demi-cercle plus oriental soit ΗΘΚ, et que le méridien ΑΒΓΔ soit perpendiculaire aux parallèles et au cercle ΗΘΚ. Dès lors, le tropique d'été ΕΗ est le commencement de l'horizon ΗΘΚ, et l'arc ΕΛ sera la douzième partie (4) occupée par le Cancer, l'arc ΛΜ celle occupée par le Lion et l'arc ΜΘ celle occupée par la Vierge ; par conséquent, l'arc ΜΘ fait ascension plus droite que l'arc ΛΜ.

Je dis que l'arc ΛΜ se lève dans un temps plus long que l'arc ΜΘ.

En effet, puisqu'il a été démontré que l'arc ΛΝ est, à similitude, plus grand que le double de l'arc MΞ (5) ; que l'arc ΛΘ se lève dans le temps où le point Λ parcourt l'arc ΛΝ (car lorsque le point Λ commence à parcourir l'arc ΝΛ à partir du point Ν de l'horizon oriental, l'arc ΛΘ se lèvera, puisque le point Θ est dans l'horizon oriental), et que l'arc ΜΘ se lève dans le temps

---

énoncée p. 369, n. 3) on a : arc ΒΟ > arc ΟΠ > arc ΠΘ et arc ΔΣ > arc ΣΡ > arc ΡΘ; donc arc ΟΠ + arc ΠΘ = arc ΟΘ > 2 arcs ΠΘ, d'où : 2 arcs ΟΘ > 4 arcs ΠΘ. Or, arc ΟΘ = arc ΘΣ et arc ΠΘ = arc ΘΡ ; donc : arc ΟΘΣ > 2 arcs ΠΘΡ. Or (Théodose, liv. II, prop. 10, énoncée p. 375, n. 4), l'arc ΛΝ est semblable à l'arc ΟΘΣ, et l'arc MΞ semblable à l'arc ΠΘΡ ; donc, comme le texte :

$$\frac{\text{arc } \Lambda N}{\text{circonférence de son parallèle}} > \frac{2 \text{ arcs } M\Xi}{\text{circonférence du parallèle de cet arc}}.$$

1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 233, l. 20).
2. Hultsch abandonne ici, à l'exemple de Commandin, les mots ἐν πλείονι χρόνῳ (dans un temps plus long), lesquels constituent une interpolation intempestive (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 618, l. 8).
3. Voir proposition 58.
4. Douzième partie du cercle du zodiaque attribuée à un signe de constellation.
5. Voir note 8, page 467.

où le point M parcourt l'arc ΞM (pour les mêmes raisons), il est manifeste que l'arc ΛΘ se lève dans un temps plus long que le double de celui dans lequel se lève l'arc MΘ ; de sorte que le temps d'ascension de l'arc ΛM est plus long que celui de l'arc MΘ (car, si du temps de l'arc ΛΘ on retranche le temps de l'arc MΘ, lequel est plus court que de moitié, parce que le temps de l'arc ΛΘ est plus long que le double du temps de l'arc MΘ, il reste le temps de l'arc ΛM plus long que la moitié du temps de l'arc ΛΘ ; moitié plus longue que le temps de l'arc MΘ, lequel est plus court que la moitié du temps de l'arc ΛΘ) (1).

Que l'horizon soit, au contraire, l'autre cercle ϚΦΘϞ, le méridien ΑΒΓΔ étant perpendiculaire aux parallèles et à l'horizon ϚΦΘϞ (parce que le point Θ est le pôle du méridien ; en sorte que les cercles sont perpendiculaires entre eux). Je dis que (2) l'arc ΛM fait ascension dans un temps plus long que l'arc MΘ.

En effet, puisqu'on a découpé à similitude (3) l'arc ΛΦ double de l'arc MΞ, il est manifeste, qu'à similitude, l'arc ΛΦ est plus grand que le double de l'arc MΨ (il est clair d'ailleurs que le point Ψ est situé entre les points M, Ξ, car il est clair que l'arc ΘΦϚ ne passe pas par les points M, Ξ, sinon les arcs ΘM, ΞΘ, plus petits que les demi-cercles entiers EMΘZ, HΞΘK, seraient affectés de diamètres de cercles les plus grands ; ce qui est impossible. Mais, le point Ψ n'est pas en dehors des points M, Ξ, car le cercle décrit par les points Θ, Ψ passe aussi par le point Φ, comme on l'a supposé, sinon il couperait les cercles les plus grands EΛZ, HΞK en un point différent, et la section commune, venant du point E, serait plus petite qu'un demi-cercle ; ce qui est impossible. Par conséquent, le point Ψ est situé entre les points

1. En autres termes : On a démontré que l'on a : temps du lever de l'arc ΛΘ $>$ 2 temps du lever de l'arc MΘ ; d'où : temps du lever de l'arc MΘ $< \frac{1}{2}$ temps du lever de l'arc ΛΘ ; donc : temps du lever de l'arc ΛΘ — temps du lever de l'arc MΘ $> \frac{1}{2}$ temps du lever de l'arc ΛΘ ou : temps du lever de l'arc ΛM $> \frac{1}{2}$ temps du lever de l'arc ΛΘ, d'où, à fortiori, comme le texte qui précède la phrase mise entre parenthèses : temps de lever de l'arc ΛM $>$ temps de lever de l'arc MΘ.

2. Sous-entendu : de même que dans le premier cas qui vient d'être examiné.

3. Voir plus haut, p. 467, n. 8.

4. C'est-à-dire en un point autre que Θ.

M, Ξ) (1). Mais, l'arc ΛΘ se lève dans le temps où le point Λ parcourt l'arc ΦΛ en partant du point Φ du levant de l'horizon, et l'arc ΜΘ se lève dans le temps où le point Μ parcourt l'arc ΜΥ en partant du point Υ du levant de l'horizon ; par conséquent, il est manifeste que l'arc ΛΜ se lève dans un temps plus long que l'arc ΜΘ, comme on l'a démontré plus haut.

Nous suivrions la même manière pour dire que l'arc ΕΛ se lève dans un temps plus long que l'arc ΛΜ, et que l'arc ΛΜ, qui appartient au Lion, fait ascension plus droite que l'arc ΕΛ qui appartient au Cancer.

Les choses proposées sont donc démontrées, et c'est en concordance avec elles que, d'après Ptolémée (2), il se fait que, dans la sphère droite et dans les premier et deuxième climats, le Cancer se lève dans un temps plus long que le Lion ; tandis que, au delà d'une hauteur de pôle de 16 $\frac{27}{60}$ degrés du deuxième climat jusqu'au troisième climat (3), le Lion se lève dans un temps plus long que le Cancer ; en sorte qu'il y a désaccord. Quant à l'arc du Lion faisant ascension plus droite que celui du Cancer, cela se démontrerait de nouveau en vertu du vingt et unième théorème du deuxième livre des *Sphériques* [comme au lemme précédent] (4).

LVIII.

PROPOSITION 60. — Soit le cercle ΑΒΓΔ passant par les pôles de la sphère (5) ; soient Α, Β les pôles de la sphère, et soit ΓΔ

1. Le texte de cette longue phrase incidente paraît avoir été fortement altéré, ou avoir été interpolé par un commentateur peu clair. La version latine de Commandin est d'ailleurs peu compréhensible aussi dans ce passage (Cfr. Commandin, *loc. cit.*, p. 233, l.l 41-47).

2. C'est-à-dire d'après les tables manuelles de Claude Ptolémée relatives aux ascensions des signes du zodiaque. Voir éd. précitée de la trad. de Halma, pp. 103-108.

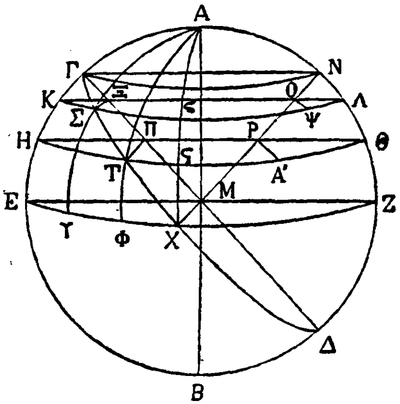
3. Le second des dix climats considérés par Ptolémée correspond en effet à la latitude de 16°27′. Or, comme le troisième climat commence donc à cette latitude, l'expression ἕως τοῦ γ′ κλίματος (jusqu'au troisième climat) doit avoir été altérée, et Hultsch a proposé la restauration : ἕως τοῦ ι′ κλίματος (jusqu'au dixième climat) ; ce qui correspond aux latitudes attribuées au Cancer et au Lion pour les climats successifs dans les tables de Ptolémée (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, *appendix*, p. 1255).

4. Interpolation visant la proposition 58.

5. Commandin a fait remarquer dans la note suivante que cette proposition est en quelque sorte superflue : « Hoc theorema videtur quodammodo supervacaneum ; quod enim in eo demonstratur, satis superque demonstratum jam fuit » (Cfr. *loc. cit.*, p. 236, l. 5).

un autre cercle le plus grand, oblique sur les parallèles et perpendiculaire au cercle ΑΒΓΔ. Divisons le quadrant ΓΧ en trois parties égales aux points Σ, Τ ; décrivons des cercles parallèles par les points Σ, Τ, Χ, et que les sections communes de ces cercles et du cercle ΑΒΓΔ soient les droites ΔΓ, ΛΚ, ΗΘ, ΕΖ (qui sont donc aussi des diamètres). Que la droite ΓΝ soit parallèle à la droite ΚΛ (le cercle parallèle décrit autour de la droite ΓΝ est donc perpendiculaire au cercle ΑΒΓΔ et la droite ΓΝ [est leur section commune] (1) ; car le cercle est tangent au point Γ) (2), et menons la droite de jonction ΜΝ. Je dis que l'arc mené sur la droite ΞΟ (c'est-à-dire l'arc ayant la base égale à la droite ΞΟ) est plus grand que le double de celui qui est mené en similitude sur la droite ΠΡ dans le cercle ΗΘ (3).

En effet, imaginons les sections communes de tous les cercles ; il s'ensuit que les droites ΣΞ, ΠΤ, ΧΜ seront perpendiculaires sur la droite ΓΔ, sur la droite ΚΛ, la droite ΗΘ et la droite ΕΖ (4). Décrivons maintenant, par les points Σ, Τ, Χ et par le point Α, les arcs de cercles les plus grands ΑΥ, ΑΦ, ΑΧ. Dès lors, il est évident que l'arc ΑΧ coupe en deux parties égales les demi-cercles isolément pris (5) des cercles parallèles (6). Menons



1. Le texte présente ici une lacune que Hultsch comble conjecturalement par les mots καὶ κοινὴ τομὴ (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 624, l. 3).

2. Une note de Hultsch propose avec raison de substituer la restauration : κατὰ τὰ Γ, Ν, c'est-à-dire aux (points) Γ, Ν, aux mots du texte : κατὰ τὸ Γ, c'est-à-dire : au point Γ (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, apparat critique au bas de la page 625).

3. L'énoncé de la proposition suppose donc que le centre de la sphère et du grand cercle ΑΓΒΔ est le point Μ, et que Ξ, Π, Ρ, Ο sont les points d'intersection des droites ΓΜ, ΜΝ, ΚΛ, ΗΘ dans le plan du cercle ΑΓΒΔ.

4. Euclide, liv. XI, prop. 19 : « Si deux plans qui se coupent mutuellement sont perpendiculaires à un plan, leur commune section sera aussi perpendiculaire à ce plan » (Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 39 et Euclide, liv. XI, déf. 4, énoncée p. 452, n. 1).

5. C'est-à-dire les demi-cercles ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΓΝ découpés par le grand cercle ΑΓΒΔ.

6. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 9, énoncée p. 384, n. 1.

encore, des points O, P, à angles droits sur les droites ΚΛ, ΗΘ, la droite ΟΨ et la droite ΡΑ' dans les plans des demi-cercles. Ces droites seront donc égales aux droites ΣΞ, ΠΤ (1) ; en sorte que les arcs ΣΨ et ΤΑ' seront menés sur les droites ΟΞ, ΠΡ (2). Dès lors, je dis que l'arc ΣΨ est, en similitude, plus grand que le double de l'arc ΤΑ' ; donc, sa moitié, l'arc ϚΣ, est aussi, en similitude, plus grande que le double de l'arc ΤϞ. Et l'arc ΣϚ est semblable à l'arc ΥΧ, tandis que l'arc ΤϞ est semblable à l'arc ΦΧ (3) ; donc (4), l'arc ΥΧ est, en similitude, plus grand que le double de l'arc ΦΧ. Or, il en est ainsi, parce que l'arc ΣΤ est égal à l'arc ΤΧ (5), et que des cercles les plus grands sont décrits par le pôle et par les points Τ, Χ ; car cela est démontré dans les *Sphériques* (6).

LIX.

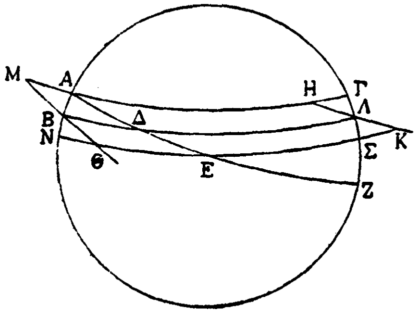
Voici maintenant ce qui a été passé sous silence pour les théorèmes XII et XIII (7).

PROPOSITION 61. — N'importe quel arc du demi-cercle, venant après le Cancer, se lève dans un temps plus long qu'il ne se couche, et n'importe lequel, dans l'autre demi-cercle, venant après le Capricorne, se couche dans un temps plus long qu'il ne se lève.

En effet, soit, dans la sphère, l'horizon ΑΒΓ et, dans l'hémisphère apparent, le demi-cercle ΑΔΖ du zodiaque qui vient après le Cancer (le point A est donc le commencement du Cancer pré-

1. Les parties ΞΟ et ΠΡ des diamètres ΚΛ, ΗΘ des cercles parallèles ΚΣΨΛ, ΗΤΑ'Θ sont coupées en deux parties égales par le rayon ΑΜ de la sphère, en des points qui sont les centres de ces cercles; donc, les perpendiculaires ΞΣ, ΟΨ d'une part, et ΠΤ, ΡΑ' d'autre part, sont également éloignées du centre du cercle, d'où (EUCLIDE, liv. III, prop. 14, énoncée p. 148, n. 4) : ΞΣ = ΟΨ et ΠΤ = ΡΑ'.
2. C'est-à-dire que les arcs ΣΨ, ΤΑ' seront sous-tendus par des droites égales aux droites ΞΟ, ΠΡ.
3. Le texte présente ici l'interpolation ἡ δὲ ΥΧ τῆς ΤϞ μείζων, et (l'arc) ΥΧ est plus grand que (l'arc) ΤϞ (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 626, l. 5).
4. Sous-entendu : je dis que.
5. Par hypothèse de construction.
6. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. III, prop. 6, énoncée p. 369, n. 3, et prop. 21, p. 395.
7. C'est-à-dire ce qui a été passé sous silence par les commentateurs pour les démonstrations des propositions 12 et 13 des *Phénomènes* d'Euclide, dont il a été question plus haut dans les considérations qui précèdent la proposition 57. Voir p. 458, n. 2, et p. 459, n. 3.

cédant le demi-cercle à son coucher). Soit le segment ΑΗΓ du tropique d'été qui est au-dessus de la terre, et découpons un arc ΕΔ du zodiaque (1) ; je dis que l'arc ΔΕ se lève dans un temps plus long que celui dans lequel il se couche.



En effet, décrivons par les points Δ, Ε les cercles parallèles ΒΔΛ, ΝΘΕΚ, [donc, l'arc ΔΛ devient, à similitude, plus grand que l'arc ΣΕ, et l'arc ΕΝ plus grand que l'arc ΔΒ] (2). Dès lors, le point Δ précédant le point Ε qui le suit, et partant du point Λ, se lève avant le point Ε qui part du point Σ ; en sorte que l'arc ΔΛ est, en similitude, plus grand que l'arc ΕΣ, parce que le temps est plus long aussi (3) ;

1. D'après la figure, peu intuitive, qui accompagne le texte de l'édition de Hultsch, conforme du reste à celle que présentent les manuscrits, le point Δ est pris entre les points Α, Ε.

2. La phrase que nous mettons entre crochets est une conclusion qui semble prématurée et, d'après Hultsch, elle aurait été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 628, l. 4). Le manuscrit du Vatican (Codex Vaticanus graecus 218) porte d'ailleurs en marge, en regard de cette phrase, une annotation de scoliaste qui vise à justifier cette conclusion par la remarque : διὰ τὸ ια′ τοῦ γ′ σφαιρικῶν, c'est-à-dire : en vertu du (théorème) 11 du (livre) 3 des *Sphériques*. Cette proposition de Théodose est énoncée comme suit : « Si le pôle de parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand, que coupent à angles droits deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles ; et si un autre cercle le plus grand, passant par les pôles des parallèles, coupe le cercle oblique entre le plus grand des parallèles et celui qui touche le cercle oblique, le rapport du diamètre de la sphère au diamètre du cercle que touche le cercle oblique est plus grand que celui de l'arc du plus grand des parallèles, situé entre le cercle le plus grand primitif et le cercle consécutif passant par les pôles, à l'arc du cercle oblique situé entre ces derniers cercles » (Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 111). Comme cette proposition ne correspond cependant pas à la conclusion en question, Hultsch a supposé qu'il y a eu erreur de copie, et qu'au lieu de ια′ (11) il faut lire ιδ′ (14), c'est-à-dire que la proposition invoquée par le scoliaste serait la quatorzième du livre III de Théodose, énoncée comme suit : « Si, dans une sphère, un cercle le plus grand touche un des cercles de cette sphère, si un autre cercle le plus grand, oblique sur les parallèles, touche des cercles plus grands que ceux que touche le cercle primitif, ces cercles les plus grands découperont, dans leur intervalle, des arcs dissemblables sur les cercles parallèles, et les arcs plus rapprochés de chacun des pôles seront continuellement plus grands que les arcs semblables à ceux qui en sont plus éloignés » Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 118.

3. Cette conclusion, que l'interpolation mentionnée dans la note précédente avait déjà tirée prématurément en se basant sur une proposition des *Sphériques*

donc, l'arc ΒΔ est, en similitude, plus petit que l'arc ΕΝ (1). Décrivons maintenant par les points Β, Λ les cercles les plus grands ΘΒΜ, ΚΛΗ tangents au cercle ΑΗΓ (2) ; il s'ensuit que l'arc ΔΕ, occupant la position de l'arc ΚΛ, se lève dans le temps où le point Κ parcourt l'arc ΚΣ et, occupant la position de l'arc ΒΘ, se couche dans le temps où le point Θ parcourt l'arc ΘΝ (car les arcs ΑΔΕ, ΜΒΘ, ΗΛΚ sont des positions du même cercle du zodiaque, ayant dans leurs intervalles les arcs semblables ΑΗ, ΔΛ, ΕΚ et ΜΑ, ΒΔ, ΘΕ (3) ; en sorte que l'arc ΔΛ est, en similitude, plus grand que l'arc ΕΣ et l'arc ΕΝ plus grand que l'arc ΒΔ, comme on l'a déjà démontré). Et les arcs ΗΚ, ΑΕ, ΜΘ sont égaux (car chacun des arcs ΜΘ, ΗΚ est égal à l'arc ΑΕ) ; en sorte que ces arcs s'ajustent et que les points Κ, Λ, Η arrivent ensemble (4) sur les points Ε, Δ, Α. Et pareillement, les points Ε, Δ, Α arrivent aussi ensemble sur les points Θ, Β, Μ, [car les arcs ΚΛ, ΕΔ, ΘΒ sont aussi égaux ; en sorte que les arcs ΚΛ, ΕΔ, ΘΒ s'ajustent] (5). Je dis que l'arc ΚΣ est plus grand que l'arc ΝΘ.

En effet, puisque l'arc ΔΛ est semblable à l'arc ΕΚ et l'arc ΔΒ semblable à l'arc ΕΘ, l'arc entier ΛΒ sera aussi semblable à l'arc entier ΘΚ. Or, l'arc ΛΒ est plus grand que l'arc semblable à l'arc ΣΝ (6) ; donc, l'arc ΘΚ est aussi plus grand que l'arc

---

de Théodose, semble s'appuyer ici sur la proposition 3 du traité *De la Sphère mobile* d'Autolycus, dont l'énoncé est : Ἐὰν σφαῖρα στρέφηται ὁμαλῶς περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα, ἃς ἐν ἴσῳ χρόνῳ περιφερείας διεξέρχεται σημειά τινα τῶν παραλλήλων κύκλων καθ' ὧν φέρεται, αὗται ὅμοιαί εἰσιν. Le premier alinéa du chapitre XXVII (voir p. 404) rappelle d'ailleurs ce même énoncé en d'autres termes en disant que « lorsque la sphère tourne autour de son axe, les arcs de parallèles parcourus dans un même temps par des points de la sphère sont semblables ».

1. Cette conclusion, qui découle de celle qui précède, est inutilement précédée ici d'une phrase que Hultsch considère comme ayant été interpolée, et que nous traduisons : « et parce que le point Δ se couche avant le point Ε au point Β en partant du point Δ, et que le point Ε se couche aussi au point Ν en partant du point Ε, il s'ensuit... » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 628, ll. 8-11).

2. Le cercle ΑΗΓ est le tropique d'hiver auquel on considère que le zodiaque est tangent dans les trois positions ΚΛΗ, ΖΕΔΑ et ΘΒΜ, comme le dira plus loin une phrase mise entre parenthèses.

3. Théodose, *Les Sphériques*, liv. II, prop. 13, énoncée p. 423, n. 1.

4. ἅμα, ensemble, c'est-à-dire au même moment.

5. La phrase mise entre crochets est une remarque rendue inutile par la considération qui précède, et Hultsch la regarde comme interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 628, l. 24).

6. Considérant que le grand cercle ΑΒΝΖΣΛΓ coupe les parallèles ΜΓ, ΒΛ, ΝΣ de la sphère sans passer par leurs pôles, ce qui ne s'aperçoit pas dans la figure

semblable à l'arc ΝΣ (1). Or, ces arcs appartiennent au même cercle ; donc, l'arc ΚΘ est plus grand que l'arc ΝΣ. Retranchons de part et d'autre l'arc ΘΣ, il s'ensuit que l'arc restant ΚΣ est plus grand que l'arc restant ΘΝ. [C'est-à-dire que le temps du lever de l'arc ΔΕ est plus long que celui de son coucher] (2). Et puisque, en vertu du théorème XI des *Phénomènes* d'Euclide (3), l'un des arcs égaux (4) opposés suivant un diamètre se lève dans le temps où l'autre se couche, et que l'un se couche dans le temps où l'autre se lève, il s'ensuit que l'arc égal à l'arc ΔΕ, opposé suivant un diamètre, s'obtiendra dans l'autre demi-cercle qui commence après le Capricorne ; et l'on démontrera que cet arc se couche dans un temps plus long qu'il ne se lève, [car le temps du lever de l'autre demi-cercle est plus long que celui dans lequel couche] (5).

LX.

Les mêmes choses étant posées, soit, dans le second cas du théorème, l'arc ΑΕΖ qui appartient, au-dessus de la terre, au demi-cercle qui vient après le Capricorne, et découpons un arc quelconque ΔΕ ; je dis que l'arc ΔΕ se couche dans un temps plus long qu'il ne se lève.

En effet, faisons les mêmes constructions. Dès lors, puisque le point Α est le commencement du Cancer qui suit le demi-cercle,

---

peu intuitive qui accompagne le texte, on a : arc ΑΒ > arc semblable à l'arc ΣΝ, en vertu de la proposition 20 du livre II des *Sphériques* de Théodose, énoncée : « Lorsque, dans une sphère, un cercle le plus grand coupe des cercles parallèles de cette sphère sans passer par leurs pôles, les arcs qui, découpés dans l'un des hémisphères, sont plus rapprochés du pôle apparent seront continuellement plus grands que les arcs semblables à ceux qui sont plus éloignés de ce pôle » Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 66.

1. Car on a : arc ΘΚ semblable à arc ΑΒ.

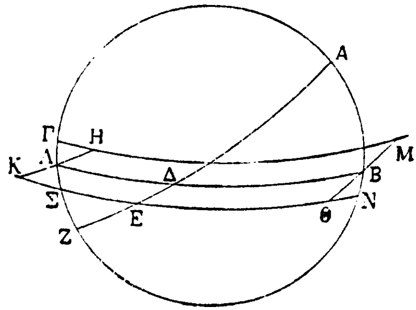
2. Phrase considérée comme une interpolation par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 630, l. 9).

3. EUCLIDE, *Les Phénomènes*, prop. 11 : Τοῦ τῶν ζῳδίων κύκλου τῶν ἴσων τε καὶ ἀπεναντίον περιφερειῶν ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει, ἡ ἑτέρα δύνει, καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα δύνει, ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει (voir p. 58 de l'édition critique de Heiberg mentionnée p. 370, n. 1). Nous traduisons donc cet énoncé : « L'un des arcs égaux et opposés du cercle du zodiaque se lève dans le temps où l'autre se couche, et l'un se couche dans le temps où l'autre se lève.

4. Sous-entendu : τοῦ τῶν ζῳδίων κύκλου, du cercle du zodiaque.

5. Phrase interpolée d'après Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 630, l. 16).

et que le point Z est le commencement du Capricorne qui précède le demi-cercle, il s'ensuit que le point Z est au couchant et le point A au levant. En conséquence, l'arc ΔE, occupant la position de l'arc BΘ, se lève quand le point Θ parcourt l'arc NΘ (1) et, occupant la position de l'arc ΛK, il se couche quand le point K parcourt l'arc KΣ (2). Or, on a démontré plus haut que l'arc ΣK est plus grand que l'arc NΘ ; donc, le temps du coucher de l'arc EΔ est plus long que celui du lever, le temps du coucher de l'arc ΣK étant plus long que celui du lever de l'arc ΘN.



Ce qui précède suffit cependant pour ce qui concerne uniquement le traité des *Phénomènes* d'Euclide, et je pense que vous n'ignorez pas que ce qui se rapporte aux levers et aux couchers des douzièmes parties (3) du zodiaque y a été établi d'une manière imparfaite. D'ailleurs il vous sera loisible de prendre connaissance de ces choses d'une manière complète et exempte de difficultés en lisant les ouvrages que Ptolémée a composés à leur sujet.

---

1. Le texte présente ici une phrase que Hultsch place entre crochets à titre d'interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 632, ll. 5-9) ; elle fait remarquer inutilement que les points Δ, E participent au lever de l'arc ΔE.

2. Le texte présente ici encore une phrase que Hultsch place entre crochets à titre d'interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 632, ll. 10-12) ; elle fait remarquer inutilement que les points Δ, E participent au coucher de l'arc ΔE.

3. τῶν τοῦ ζῳδιακοῦ δωδεκατημορίων, des douzièmes parties du zodiaque, c'est-à-dire des douze signes du zodiaque.

LIVRE VII DE LA COLLECTION DE PAPPUS D'ALEXANDRIE

contenant les lemmes du lieu résolu (1).

Le champ de l'analyse, tel que je le conçois, mon fils Hermodore, est la matière particulière dont disposent ceux qui, après avoir acquis les éléments vulgaires, veulent puiser dans les lignes la puissance de trouver les problèmes qui leur sont proposés. C'est en suivant la voie de l'analyse (2) et de la synthèse (3) que cette matière a été traitée par trois hommes : Euclide, auteur des *Éléments*, Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien. L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse.

---

1. ὁ ἀναλυόμενος (sous-entendu τόπος), le lieu résolu ou analysé ; expression que la première version latine de Commandin rend par la périphrase : « locus qui vocatur ἀναλυόμενος, hoc est resolutus » (cfr. *loc. cit.*, p. 240, l. 8), que la seconde version latine de Hultsch se borne à rendre par : « locus qui ἀναλυόμενος dicitur » (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 635, l. 3), et que nous rendons par « domaine ou champ de l'analyse ».
2. ἀνάλυσις, la résolution ou analyse (d'une *proposition*).
3. σύνθεσις la construction ou *synthèse* (d'une *proposition*).

Il y a deux genres d'analyses : celle qui est propre à la recherche (1), qu'on appelle théorétique (2), et celle qui s'applique à trouver ce qui est proposé (3), qu'on appelle problématique (4). Dans le genre théorétique, on considère comme établi et vrai ce que l'on cherche, puis, par les conséquences qui en découlent, admises comme vraies et comme répondant à l'hypothèse, on aboutit à une chose qui est déjà accordée ; et si cette chose accordée est vraie, ce que l'on cherche est vrai aussi, et la démonstration sera l'inverse de cette analyse ; tandis que, si l'on aboutit à une chose accordée qui est fausse, ce qui est cherché sera faux aussi. D'autre part, dans le genre problématique, on admet que la proposition est connue ; puis, au moyen des conséquences qui en ressortent et admises comme vraies, on arrive à quelque chose d'accordé ; et si ce qui est accordé peut être réalisé ou est déjà acquis (ce que les mathématiciens appellent donné), la proposition pourra être réalisée aussi, et la démonstration sera de nouveau l'inverse de l'analyse ; tandis que, si l'on tombe sur quelque chose d'accordé qui est impossible, le problème sera impossible aussi.

[La détermination (5) est le fait d'examiner au préalable quand, comment, et de combien de manières un problème est possible] (6).

Voilà donc ce qui en est concernant l'analyse et la synthèse.

---

1. ζητητικὸν (analyse) propre à la recherche, à l'invention de solutions, c'est-à-dire l'analyse zététique, d'après le néologisme inauguré déjà par Viète dans son ouvrage : *Les cinq livres de Zététique de Fr. Viète, mis en françois par J. L. Sieur de Vaulezard*, Paris 1630. Cette analyse zététique, qui a pour objet l'invention de solutions, répond à la méthode analytique moderne, où l'on suppose la question résolue, et où l'on établit les relations des conditions entre quantités connues et inconnues pour aboutir à une relation finale.

2. Θεωρητικόν (analyse) spéculative ou théorétique, d'après le néologisme inauguré par Paul Tannery (*Mémoires Scientifiques*, vol. III, p. 166).

3. ποριστικὸν (analyse) acquisitive, propre à trouver (une démonstration pour une solution), c'est-à-dire l'analyse poristique, d'après le néologisme de Paul Tannery (*Mémoires Scientifiques*, vol. III, p. 163). Cette analyse poristique a pour but l'invention, non pas d'une solution, mais d'une démonstration pour une solution, ou pour une proposition énoncée, en supposant vraie cette solution ou proposition, et en transformant la relation qu'elle fournit jusqu'à obtenir une identité ou une proposition déjà connue.

4. προβληματικόν (analyse) qui débat, ou problématique.

5. διορισμὸς, la détermination (des conditions de possibilité d'une proposition), c'est-à-dire la discussion d'une proposition.

6. La phrase mise entre crochets étant hors de sujet, est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 636, l. 15).

Les livres dont il a été question comme appartenant au champ de l'analyse se présentent dans l'ordre suivant : le livre unique des *Données* d'Euclide ; les deux livres de la *Section de Rapport*, les deux livres de la *Section d'Aire*, les deux livres de la *Section déterminée* et les deux livres des *Contacts* d'Apollonius ; les trois livres des *Porismes* d'Euclide ; les deux livres des *Inclinaisons* d'Apollonius ; les deux livres des *Lieux plans* et les huit livres des *Coniques* du même ; les cinq livres des *Lieux solides* d'Aristée ; les deux livres des *Lieux à la Surface* d'Euclide et les deux livres des *Médiétés* d'Ératosthène (1). On obtient ainsi trente-trois livres au sujet desquels j'ai présenté à ton examen : des sommaires qui s'étendent jusqu'aux *Coniques* d'Apollonius ; la quantité de lieux, de déterminations et de cas pour chaque livre et, en outre, les lemmes cherchés (2) ; croyant ainsi n'avoir laissé de côté aucune information au cours du traitement de ces livres.

Le premier livre, relatif aux *Données*, contient en tout quatre-vingt-dix théorèmes (3), dont les vingt-trois premiers concernent les grandeurs en général, et dont le vingt-quatrième a trait aux droites proportionnelles non données de position (4). Les quatorze suivants concernent des droites données de position. Les dix qui suivent ceux-ci se rapportent aux triangles donnés d'espèce et non de position. Les sept qui suivent ceux-ci sont relatifs à des aires rectilignes quelconques données d'espèce et non de position. Les six qui suivent ceux-ci concernent des parallélogrammes et des applications d'aires données d'espèce. Le premier des cinq théorèmes suivants est déjà écrit (5), et les quatre autres, ayant

1. Ces divers ouvrages d'analyse géométrique des Grecs constituent ce qu'on appelle la *Collection analytique* des Anciens.

2. τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα, les lemmes cherchés, c'est-à-dire qui ont été recherchés par divers géomètres mentionnés par Pappus, tels que Héraclite, Périclès, Charmandros, et par Pappus lui-même, à titre de commentaires des propositions plus ou moins concises ou difficiles des ouvrages en question.

3. Le livre des *Données* d'Euclide contient en réalité quatre-vingt-dix propositions dans l'édition critique précitée des œuvres d'Euclide par J. L. Heiberg et Menge, et il en contient quatre-vingt-quinze dans la traduction française de Peyrard, à laquelle nous avons renvoyé plusieurs fois dans les notes précédentes.

4. C'est-à-dire données de grandeur seulement.

5. τὸ πρῶτον γραφόμενόν εστιν, le premier est écrit, c'est-à-dire que le premier (de ces cinq théorèmes suivants) rentre dans ceux dont Pappus vient de parler. Et, en effet, le premier de cette série de cinq théorèmes correspond à la proposition 62 des *Données*, laquelle a un rapport intime avec la proposition précé-

trait à des aires de triangles, démontrent que les carrés des côtés ont un rapport donné avec ces aires de triangles. Les sept théorèmes suivants jusqu'au soixante-treisième, relatifs à deux parallélogrammes, démontrent que les angles sont entre eux dans un rapport donné en raison des hypothèses émises à leur sujet, et certains de ces théorèmes comportent des conclusions semblables dans le cas de deux triangles. Parmi les six figures suivantes jusqu'à la soixante-dix-neuvième, deux concernent les triangles et quatre ont trait à un grand nombre de lignes proportionnelles. Les trois figures suivantes concernent deux droites (1) qui comprennent une aire donnée. Enfin, dans chacune des huit figures jusqu'à la quatre-vingt-dixième, les démonstrations sont relatives à des cercles donnés de grandeur seulement ou bien de position aussi. [Les lignes prises sur celles qui sont menées par un point donné sont données] (2).

La proposition unique des deux livres de *La Section de Rapport* (3) s'y trouve subdivisée ; c'est pourquoi nous énoncerons cette proposition unique de la manière suivante : « Mener par un point donné une ligne droite qui découpe sur deux droites données de position, et ce jusqu'à des points donnés sur ces droites, des segments ayant même rapport que celui qui est donné ». Or, il se fait qu'étant subdivisée, cette proposition donne lieu à des figures différentes, et qu'elle en comporte un grand nombre en

dente 61, qui rentre dans la série des six relatives aux parallélogrammes et aux applications d'aires. Le mot γραφόμενόν a été traduit par Hultsch de la manière peu acceptable : in lineis, en lignes ; ce qui signifierait, d'après lui, que le premier de ces cinq théorèmes concerne des lignes, comme si le texte avait dit ἐν γραμμαῖς. (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 638, l. 11). Heiberg a d'ailleurs fait remarquer, à l'encontre de cette interprétation de Hultsch, que le texte aurait dû dire alors, au moins : ἐν εὐθείαις, en lignes droites (J. L. HEIBERG, *Literargeschichtliche Studien über Euklid*. Leipzig, 1882, p. 222).

1. Le texte porte ici les mots ἀνάλογον οὐσῶν (qui sont proportionnelles), considérés par Hultsch comme ayant été interpolés (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 638, l. 20).

2. La phrase mise entre crochets doit être attribuée à un interpolateur qui vise ici trois propositions dans l'édition des *Données* d'Euclide considérée à l'époque de Pappus, et qui répondent toutefois aux propositions 92, 93 et 95 des copies postérieures de l'ouvrage d'Euclide qui nous sont parvenues.

3. λόγου ἀποτομῆς (βιβλία β'), (les deux livres) de la Section de raison ou de rapport ; titre d'un ouvrage d'Apollonius dont le texte grec est perdu, mais dont on possède une version arabe plus ou moins résumée, qui fut traduite en latin par Halley dans son ouvrage que nous avons mentionné dans notre introduction.

raison des positions que les droites données présentent entre elles, des différents cas relatifs au point donné, et des analyses, synthèses et déterminations (1) concernant ces cas. En effet, le premier livre de *La Section de Rapport* comporte sept lieux, vingt-quatre cas et cinq déterminations, dont trois sont maxima et deux minima. La détermination est maxima dans le troisième cas du cinquième lieu, et minima dans le second cas du sixième lieu et dans le second cas du septième lieu ; tandis que les déterminations sont maxima dans les quatrièmes cas des sixième et septième lieux. D'autre part, le second livre de *La Section de Rapport* comporte quatorze lieux, soixante-trois cas et des déterminations qui sont celles résultant du premier livre ; car l'ensemble ramène à ce premier livre.

Les deux livres de *La Section de Rapport* comportent vingt lemmes (2) ; ces mêmes deux livres de *La Section de Rapport* contiennent cent quatre-vingt-un théorèmes, et plus encore d'après Périclès.

Les livres de *La Section d'Aire* (3) sont au nombre de deux, et l'on y a aussi un problème unique qui se divise en deux autres. La proposition unique de ces livres, semblable pour le reste à la première (4), n'en diffère qu'en raison de ce que, dans celle-là, il faut faire en sorte que les droites découpées aient un rapport donné et, dans celle-ci, faire en sorte que ces droites comprennent une aire (5) donnée. Cette proposition s'énonce : « Mener par un point donné une ligne droite qui découpe sur deux droites données de position, et ce jusqu'à des points donnés sur ces droites, des segments qui comprennent une aire équivalente à une aire donnée ». Cette proposition est affectée d'un grand nombre de figures pour les mêmes raisons que plus haut. Le premier livre de *La Section*

1. C'est-à-dire, des déterminations des conditions de possibilité.

2. La question est douteuse de savoir si les vingt lemmes qui vont être démontrés dans la suite faisaient partie de l'ouvrage perdu d'Apollonius, où s'ils appartiennent en propre à Pappus, qui les destinerait ainsi à éclaircir les cent quatre-vingt et une propositions du traité d'Apollonius.

3. τῆς δ'ἀποτομῆς τοῦ χωρίου βιβλία β', les deux livres de la section d'espace ou d'aire ; titre du second ouvrage entièrement perdu d'Apollonius, dont nous avons mentionné trois essais de reconstitution dans notre introduction.

4. C'est-à-dire semblable à la proposition unique du traité de *La Section de Rapport*.

5. C'est-à-dire une aire rectangulaire.

d'Aire comprend sept lieux, vingt-quatre cas et sept déterminations, dont quatre sont maxima et trois minima. La détermination est maxima dans le second cas du premier lieu, dans le premier cas du second lieu, dans le second cas du quatrième lieu et dans le troisième cas du sixième lieu ; tandis qu'elle est minima dans le troisième cas du troisième lieu, dans le quatrième cas du quatrième lieu et dans le premier cas du sixième lieu. D'autre part, le second livre de *La Section d'Aire* contient trente lieux, soixante cas et les déterminations qui découlent du premier livre ; car c'est à ce dernier livre qu'il ramène.

Le premier livre comprend quarante-huit théorèmes, et le second livre soixante-seize.

Les deux livres de *La Section déterminée* ont été publiés à la suite des livres ci-dessus, et leur proposition unique peut, de même que dans les livres précédents, s'énoncer ainsi : « Couper une droite indéfinie en un point tel que le carré construit sur une des droites ainsi découpées jusqu'à des points donnés sur cette droite, ou le rectangle compris sous les droites découpées, ait un rapport donné soit avec le carré d'une des droites découpées (2), [soit avec le rectangle compris sous l'une des droites découpées] (3) et une droite donnée ailleurs, soit avec le rectangle compris sous deux droites découpées de l'un ou de l'autre côté qu'on voudra des points donnés ». Comme cette proposition est deux fois disjointe, et qu'elle présente des déterminations très arides, sa démonstration a dû nécessairement être obtenue à l'aide de beaucoup d'autres. [Apollonius la démontre de nouveau en s'y efforçant par la voie plus suivie des seules droites, comme dans le second livre des premiers *Éléments* d'Euclide ; puis il l'a traitée encore une fois d'une façon plus appropriée quant aux figures, en

1. τῆς διωρισμένης τομῆς βιβλία β', les deux livres de *La Section déterminée* ; titre d'un ouvrage perdu d'Apollonius, dont nous avons mentionné les divers essais de reconstitution dans notre introduction.

2. C'est-à-dire le carré de la droite découpée restante, conformément à l'interprétation donnée par Robert Simson dans son essai de reconstitution : « vel ad quadratum ex reliqua intercepta » (Cfr. *Opera quaedam reliqua*, etc. Glasguae, 1776, p. IV).

3. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 642, l. 26) conformément à l'interprétation de ce passage donnée par Snellius dans son essai de reconstitution du traité de *La Section déterminée* (*Apollonius Batavus, seu exsuscitata Apollonii Pergaei geometrica*. Lugduni Batavorum, 1608).

la démontrant parfaitement au moyen des demi-cercles] ([1]). Le premier livre contient six problèmes, seize injonctions ([2]), quinze déterminations, dont quatre sont maxima et une minima. Les déterminations sont maxima dans la deuxième injonction du second problème, dans la troisième injonction du quatrième problème, dans la troisième injonction du cinquième problème et dans la troisième injonction [du sixième problème ; tandis que la détermination est minima dans la troisième] ([3]) injonction du troisième problème. Le deuxième livre de *La Section déterminée* contient trois problèmes, neuf injonctions, trois déterminations, lesquelles sont minima dans la troisième injonction du premier problème et dans la troisième injonction du second problème ; tandis que la détermination est maxima dans la troisième injonction du troisième problème.

Le premier livre comporte vingt-sept lemmes, le second, vingt-quatre, et les deux livres de *La Section déterminée* contiennent quatre-vingt-trois théorèmes.

Les deux livres *Des Contacts* ([4]) viennent à la suite des ouvrages précédents. Les propositions qu'ils contiennent semblent être nombreuses ; mais, pour elles aussi, nous en posons une seule qui s'énonce de la manière suivante : « Trois éléments quelconques étant successivement donnés de position parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle qui, passant par chacun des points donnés (dans le cas de points donnés), soit tangent à chacune des lignes données ». Cette proposition donne nécessairement lieu à dix propositions particulières différentes, à cause

---

1. La phrase mise entre crochets est une mauvaise interpolation (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 644, ll. 4-8).

2. ἐπίταγμα, expression singulière que les versions latines de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 243, l. 26) et de Hultsch (cfr. *loc cit.*, vol. II, p. 644, l. 9) ont hésité à rendre, se bornant à la latiniser dans le mot *epitagma*. Michel Chasles (*Aperçu historique*), se ralliant en cela au sentiment de Simson et de Halley, a admis que l'expression désigne les différents cas introduits par les variations de position des points donnés dans ces propositions du traité de *La Section déterminée*. Cependant, comme le mot « cas » n'implique pas le sens impératif du mot grec, nous proposons de traduire par le mot « injonction », c'est-à-dire une disposition imposée des points dans la figure de la proposition.

3. Lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 644, ll. 13-14).

4. τῶν ἐπαφῶν βιβλία δύο, les deux livres des (points de) contacts ; titre d'un ouvrage entièrement perdu d'Apollonius, dont divers essais de reconstitution ont été mentionnés dans notre introduction.

du nombre des éléments semblables ou dissemblables fournis dans les hypothèses. En effet, les triades [1] différentes inordonnées qui résultent des trois triades de genres dissemblables sont au nombre de dix [2] ; car on donne : trois points, ou trois droites, ou deux points et une droite, ou deux droites et un point, ou deux points et un cercle, ou deux cercles et un point, ou deux droites et un cercle, ou deux cercles et une droite, ou un point, une droite et un cercle, ou trois cercles. Les deux premières propositions sont démontrées dans le quatrième livre des *Premiers Éléments* [3], et nous nous dispenserons de les exposer. D'ailleurs, par le fait que trois points non situés sur une droite sont donnés, la proposition revient à décrire un cercle autour d'un triangle donné [4] et, par le fait que trois droites non parallèles sont données (mais trois droites qui se rencontrent), la proposition revient à inscrire un cercle dans un triangle donné [5] ; car le cas d'avoir deux droites parallèles et une autre qui les rencontre est traité en tête de tous ces problèmes comme étant une partie du second problème subdivisé. Suivent encore six problèmes dans le premier livre [6], et les deux problèmes restants : celui des deux droites et du cercle donnés, ainsi que celui des trois cercles donnés, sont seuls contenus dans le second livre, parce que les positions relatives des cercles et des droites sont multiples et nécessitent de nombreuses déterminations.

Beaucoup de problèmes de contacts du genre que nous venons de dire ont été omis par les éditeurs, et nous les avons rétablis en tête des deux livres en question ; car, ce qui a été ajouté est

1. τριάς, ensemble de trois éléments, ou triade.

2. Si l'on considère m éléments différents (ici points, droite et cercle), le nombre des combinaisons possibles de ces éléments pris n à n avec répétition est donné par la formule: $\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2.3\dots n}$ qui, pour $m = n = 3$, donne, comme le texte : 10 triades.

3. C'est-à-dire les *Éléments* d'Euclide.

4. Euclide, liv. IV, prop. 5 : « Circonscrire un cercle à un triangle donné ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 204.

5. Euclide, liv. IV, prop. 4 : « Inscrire un cercle dans un triangle donné. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 202.

6. C'est-à-dire qu'outre les deux premiers cas des trois points donnés, des trois droites données et du troisième cas des trois droites données dont deux sont parallèles, le premier livre contient encore six cas venant en troisième, quatrième, cinquième, sixième, huitième et neuvième lieux dans l'ordre où le texte les mentionne.

facile à comprendre, de nature à faire pénétrer dans la matière d'une manière plus avantageuse, et à compléter le genre des contacts. Nous renfermons de nouveau toutes ces propositions en une seule, affectée de moins d'hypothèses, mais féconde en injonctions, et qui s'énonce de la manière suivante : « Deux éléments quelconques étant donnés parmi des points, des droites, et des cercles, décrire un cercle donné de grandeur qui passe par un point donné, ou par les points donnés (dans le cas des points donnés), et tangent à chacune des lignes données » [1]. Les problèmes renfermés dans cette proposition sont au nombre de six. En effet, les différentes paires [2] inordonnées qui résultent de trois paires de genres dissemblables sont au nombre de six [3] ; car il faut, comme on l'a dit, amener le cercle donné de grandeur lorsque deux points sont donnés, ou lorsque deux droites sont données, ou lorsque deux cercles sont donnés, ou lorsque un point et une droite, soit un point et un cercle, soit une droite et un cercle sont donnés. L'analyse, la synthèse et les déterminations de ces propositions doivent du reste se faire selon ces cas.

Le premier livre des *Contacts* contient sept problèmes, et le second contient quatre problèmes. Les deux livres comportent vingt et un lemmes, et leurs théorèmes sont au nombre de soixante.

Après les *Contacts* viennent les *Porismes*, qui sont répartis en trois livres constituant la collection la plus étendue en fait d'art pour la résolution de problèmes plus importants ; porismes dont la nature est telle qu'on ne peut évaluer la quantité de genres qu'ils présentent. [On n'a rien ajouté à ceux qui ont été donnés

1. Il résulterait donc de ce passage que Pappus aurait publié une récension du traité *Des Contacts* d'Apollonius, et qu'il aurait ajouté en tête des deux livres du traité une série de propositions du même genre qu'il résume dans un énoncé général. Ces propositions ne nous sont pas parvenues. La proposition générale lui appartiendrait donc en propre. Voir au sujet de ce problème : W. Berkhan, *Das Problem des Pappus von den Berührungen*, Halae, 1857, et. C Hellwig, *Das Problem des Apollonius*, Halae, 1856.

2. δύας, dualité ou paires.

3. Si l'on considère des groupes de deux éléments d'entre des points, des droites et des cercles, la formule de récurrence de la note 2, p. 484, dans laquelle $m = 3$ et $n = 2$, donne 6 comme nombre des combinaisons avec répétition de ces trois éléments pris deux à deux. Ce passage, et celui que nous relevons dans la note 2 de la page précédente, méritent de retenir l'attention ; car ils révèlent que les mathématiciens grecs ne sont pas restés étrangers au calcul combinatoire, bien que n'ayant transmis aucun écrit à ce sujet.

d'abord par Euclide, si ce n'est que certains de nos prédécesseurs peu expérimentés ont émis des secondes rédactions (1) au regard d'un petit nombre de ces propositions, parce que chacune d'elles est susceptible d'un nombre déterminé de démonstrations ; tandis qu'Euclide ne présente jamais qu'une seule rédaction, comme nous le faisons voir, et qu'il donne ainsi à entendre que cette rédaction est la meilleure. Au reste, les porismes comportent une théorie subtile, particulière à leur nature, leur constituant une nécessité, et dont le caractère est très général et fort agréable pour ceux qui sont capables d'apercevoir et de se procurer quelque chose (2)] (3). Tous les genres de porismes n'appartiennent cependant pas aux genres des théorèmes ni à ceux des problèmes ; mais ils possèdent en quelque sorte une forme intermédiaire à celle de ces derniers [de façon que leurs propositions peuvent avoir l'apparence de théorèmes ou de problèmes] (4). C'est pourquoi, chez beaucoup de géomètres qui ne s'en rapportent qu'à la forme de la proposition, les uns pensent que les porismes sont des théorèmes quant au genre, et les autres, que ce sont des problèmes. Il résulte cependant clairement des définitions mêmes, que les Anciens ont mieux connu ce qui différencie ces trois choses ; car ils ont dit que le théorème est une proposition faite en vue d'une démonstration de ce qui est proposé ; que le problème est une proposition faite en vue d'une construction de ce qui est proposé, et que le porisme est une proposition faite en vue de l'acquisition de ce qui est proposé (5). [Cette définition

1. δευτέρας γραφὰς, secondes rédactions, contrairement à l'interprétation de A. Vincent : « doubles rédactions ». Voir : *Considérations sur les Porismes en général et sur ceux d'Euclide en particulier. Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Breton de Champ aux textes de Pappus et de Proclus, par A.-J.-H. Vincent,* dans *Journal de mathématiques pures et appliquées publié par Liouville,* deuxième série, tome IV, année 1859, pp. 9-46.

2. Phrase que Michel Chasles interprète librement en disant : « et d'une étude très agréable à ceux qui savent voir et trouver ». Voir : *Les trois livres des Porismes d'Euclide rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions, par M. Chasles.* Paris, 1860, in-8°, p. 15, l. 2.

3. Le passage mis entre crochets est attribué par Hultsch à un commentateur (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 648, l. 21 à p. 649, l. 8).

4. La phrase mise entre crochets est aussi attribuée par Hultsch à un commentateur (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 649, ll. 10-11).

5. Notre traduction littérale s'écarte de l'interprétation donnée par Michel Chasles (*Les trois livres des Porismes*, etc., p. 15) : « Le porisme est une proposi-

du porisme a été modifiée par des auteurs récents qui, ne pouvant pas se procurer toutes les choses [1], bien que faisant usage des principes qui précèdent, se bornent à démontrer que la chose cherchée existe, sans cependant la procurer, et qui sont ainsi contredits par la définition même et par ce qui nous a été enseigné [2]. C'est d'ailleurs d'une façon fortuite qu'ils ont rédigé cette définition comme suit : « Le porisme est ce qui est en défaut d'une hypothèse par rapport à un théorème de lieu » [3]. Or, les lieux [4] constituent la forme d'un genre de porismes, et ils abondent dans le champ de l'analyse [5]. Cette forme a été séparée des porismes ; elle a reçu un titre [6] et nous a été transmise ainsi parce qu'elle est plus répandue que les autres formes. En effet, il y a parmi les lieux ceux qui sont plans, ceux qui sont solides, ceux qui sont grammiques et, en outre, ceux qui se rapportent aux médiétés [7]] [8]. Les porismes ont d'ailleurs encore le caractère

tion où l'on demande de trouver ce qui est proposé », et de l'interprétation de Vincent (*Considérations sur les Porismes*, etc., p. 23) : « Le porisme est une chose proposée en vue du parti à tirer de ce qui est proposé », et enfin de l'interprétation de Robert Simson : « Porisma vero esse quo aliquid propositum est investigandum » (*Roberti Simsonii opera quaedam reliqua post auctoris mortem in lucem edita cura Jacobi Clow.* Glasguae, 1776, in-4°, p. 347).

1. Vincent interprète ici : « ne pouvant pas tout pénétrer (pour aller au delà). Voir *Considérations sur les Porismes*, etc., p. 23.

2. καὶ ἐλεγχομένων ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων. Hultsch donne de cette phrase une version latine un peu libre : « sed eos errare et ipsa definitio et omnis mathematica disciplina evincit » (Cfr. *loc cit.*, vol. II, p. 651, dernière ligne) ; Commandin traduit : « cumque et ex definitione ipsa et iis, quae nobis tradita sunt redurgueuntur » (Cfr. *loc. cit.*, p. 245, l. 17). D'autre part, Chasles a traduit peu exactement : « et quoiqu'ils fussent condamnés tant par la définition que par les propositions mêmes » (*Les trois livres des Porismes*, etc., p. 16) ; tandis que Vincent a interprété : « convaincus par la définition (précitée) et par ce qui est enseigné » (*Considérations sur les Porismes*, etc., p. 23).

3. Chasles interprète librement cette définition : « ce qui constitue le porisme est ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local (en d'autres termes, le porisme est inférieur, par hypothèse, au théorème local, c'est-à-dire que, quand quelques parties d'une proposition locale n'ont pas dans l'énoncé la détermination qui leur est propre, cette proposition cesse d'être regardée comme un théorème, et devient un porisme) ». Voir : *Les trois livres des Porismes*, etc., p. 16. D'autre part, Vincent fait des considérations encore plus développées sur cette définition controversée du porisme (*Considérations sur les Porismes*, etc., pp. 32-34).

4. C'est-à-dire les lieux géométriques.

5. C'est-à-dire dans les ouvrages relatifs au « lieu résolu » (τὸπος ἀναλυόμενυς), ou consacrés au champ de l'analyse.

6. C'est-à-dire que ce genre de porismes considéré à part a reçu le nom de lieux géométriques.

7. C'est-à-dire ici aux moyennes proportionnelles.

8. La longue phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 650, l. 20 à p. 652, l. 8).

d'avoir leurs propositions concises et de sous-entendre beaucoup de choses en raison de leur allure contournée, et il s'ensuit que beaucoup de géomètres ne les comprennent que partiellement et ignorent ainsi les indications les plus indispensables qu'ils fournissent. Il est rare que l'on puisse renfermer un grand nombre de porismes dans une seule proposition, attendu qu'Euclide n'en donne pas lui-même beaucoup de chaque espèce ; mais il en met quelques-uns à titre d'exemples au commencement de son premier livre, lesquels, dans leur grand nombre, sont analogues entre eux, notamment dix qui appartiennent tous au genre de lieux le plus abondant. Et comme nous avons observé que l'on peut renfermer ces porismes dans une seule proposition, nous l'avons énoncée de la manière suivante : « Si trois points situés sur une seule droite d'une figure [1] convexe ou non convexe [2] [ou deux points en cas de parallélisme] [3] sont donnés, et si les points restants, à l'exception d'un seul [4], sont liés [5] à des droites données de position [6], ce seul point est aussi lié à une droite donnée de position » [7].

---

1. C'est-à-dire d'une figure quadrilatère dont les côtés prolongés donnent lieu à six points d'intersection, comme cela résulte du contexte.

2. ὕπτιον ἢ παρύπτιον (sous-entendu σχῆμα, figure), expression singulière qui se rendrait en latin par « figura supina vel praetersupina », figure au-dessous ou quasi au-dessous, c'est-à-dire une figure polygonale (un quadrilatère dans le présent cas) dont tous les côtés sont au-dessous de l'un des côtés prolongé, ou dont les côtés sont en partie au-dessous de ce côté prolongé ; en d'autres termes : « un quadrilatère convexe ou non convexe ». On arrive d'ailleurs à la même signification en donnant au mot ὕπτιον le sens de renversement ou de mise à rebours des angles ou sommets du quadrilatère, qui est alors convexe, et en donnant au mot παρύπτιον (dans la composition duquel παρὰ détruit la force du mot simple) le sens de non-renversement, ou le sens de situation en même direction d'angles ou de sommets du quadrilatère, qui devient ainsi un « quadrilatère rentrant ou concave ». En d'autres termes, l'expression de Pappus désigne un système de quatre droites qui se coupent deux à deux, figure qu'on appelle un quadrilatère complet.

3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 652, l. 21).

4. C'est-à-dire si deux des trois autres points d'intersection du quadrilatère complet.

5. C'est-à-dire liés sans être fixés, ou pouvant se déplacer sur ces droites, ou bien les décrire.

6. C'est-à-dire si l'un de ces deux points est lié à une droite donnée de position et l'autre point lié à une autre droite de position.

7. Cette proposition est énoncée librement comme suit par Michel Chasles (*Les trois livres des Porismes*, etc., p. 16) : « Étant données quatre droites se coupant deux à deux, si trois des points d'intersection situés sur l'une d'elles, ou deux

Ce que nous venons de dire ne se rapporte qu'à quatre droites, dont deux tout au plus passent par un même point ; mais d'aucuns ignorent que la proposition reste vraie pour toute quantité de droites proposée ; ce qui s'énonce de la manière suivante : « Si tant de droites qu'on voudra se coupent entre elles sans être plus de deux à passer par un même point ; si tous les points situés sur l'une de ces droites sont donnés (1), et si ceux qui sont situés sur les autres droites sont liés respectivement à une droite donnée de position », ou bien, d'une manière plus générale : « Si tant de droites qu'on voudra se coupent entre elles sans être plus de deux à passer par un même point ; si tous les points situés sur l'une de ces droites sont donnés, et si le nombre de points restants constitue un nombre triangulaire (2) dont le côté contient les points liés respectivement à une droite donnée de position, sans que trois de ces points soient situés aux angles d'une aire triangulaire (3), les points restants seront liés respectivement à une droite donnée de position (4) ». Il n'est cependant pas vraisem-

seulement dans le cas du parallélisme, sont donnés (c'est-à-dire restent fixes), et que des trois autres deux soient assujettis à rester chacun sur une droite donnée, le dernier sera aussi situé sur une droite donnée de position.

1. C'est-à-dire restent fixes.

2. τρίγονος ἀριθμός, nombre trigone ou triangulaire, représenté algébriquement par l'expression : $\frac{1}{2}(n^2+n)$, ou $\frac{n(n+1)}{2}$. Outre les titres de quelques ouvrages perdus et quelques fragments, l'Antiquité grecque nous a transmis deux ouvrages assez étendus sur la théorie des nombres polygones. Le premier est celui de Nicomaque de Gérase, composé vers la fin du premier siècle de notre ère, sous le titre : *Introduction Arithmétique*. On y trouve une table des nombres polygones et plusieurs théorèmes, notamment celui que l'on attribue à Théon, démontrant que la somme de deux nombres triangulaires successifs forme un carré. (*Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae libri II, recensuit Richardus Hoche. Accedunt codicis cizencis problemata arithmetica*. Lipsiae, 1865, in-8°. Voir liv. II, p. 97). La première traduction en langue vulgaire de l'ouvrage de Nicomaque a été donnée en anglais sous le titre : *Nicomachus of Gerasa. Introduction to Arithmetic, translated into English by Martin Luther D'Ooge, with studies in greek arithmetic by Frank Egleston Robbins and Louis Charles Karpinsky*. New-York, 1926, in-4° (Voir liv. II, p. 239). Le second ouvrage est celui de Diophante intitulé : *Le Livre des nombres polygones* (*Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke*. Bruges, 1926, gr. in-8°. Voir pp. 277-282).

3. C'est-à-dire que trois points ne peuvent pas être les sommets d'un triangle dont l'aire est comprise sous les droites mêmes dont ces points sont les intersections, mais qu'ils doivent donc être tous trois situés sur une même droite.

4. Cet énoncé général de Pappus a été exprimé plus librement comme suit par Michel Chasles : « Si plusieurs droites en nombre quelconque se rencontrent,

blable que l'auteur des *Éléments* (1) ait ignoré cela ; mais il n'en aura posé que le principe, et il paraît du reste n'avoir consigné que des principes et des germes [de nombreuses et importantes questions] (2) dans tous ses porismes, dont les genres ne doivent pas être distingués d'après les différences présentées par les hypothèses, mais bien d'après les choses qu'on y rencontre ou qu'on y cherche. [Les hypothèses étant plus génériques, elles diffèrent toutes entre elles et, parmi les choses qui se révèlent ou que l'on cherche, une même chose se présentera d'une manière distincte dans beaucoup d'hypothèses différentes] (3).

Voici comment doivent être établis dans le premier livre les genres des choses cherchées dans ces propositions (4) :

Si des droites menées de deux points donnés se brisent sur une droite donnée de position, et si l'une découpe un segment sur une droite donnée de position, à partir d'un point donné sur cette droite, l'autre découpe aussi sur une autre droite un segment ayant un rapport donné (5).

---

mais pas plus de deux en un même point ; que tous les points situés sur une d'elles soient donnés, et que chacun de ceux qui appartiennent à une autre se trouvent sur (décrive) une droite donnée de position ; ou plus généralement, si plusieurs droites, en nombre quelconque, se rencontrent, mais pas plus de deux en un même point ; que tous les points situés sur une de ces droites soient donnés, et que parmi les points d'intersection des autres, lesquels forment un nombre triangulaire, il s'en trouve autant qu'il y a d'unités dans le côté de ce nombre triangulaire, assujettis à rester situés chacun sur une droite donnée de position, pourvu que de ces points il n'y en ait pas trois qui soient les sommets d'un triangle (formé par les droites mêmes dont ces points sont les intersections), chacun des autres points restera situé aussi sur (décrira) une droite donnée de position » (*Les trois livres des Porismes, etc.*, p. 17). Chasles a donné une démonstration analytique dc ce théorème général (*Ibidem*, p. 130).

1. Euclide.

2. L'édition critique de Hultsch met ces mots entre crochets pour marquer le doute sur leur authenticité (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 654, l. 18).

3. La phrase mise entre crochets est suspecte d'interpolation ; elle semble vouloir renforcer d'une manière peu claire le sens de la phrase précédente (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 654, ll. 21-24).

4. Le texte présente ici l'interpolation probable : ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζ' διάγραμμα τοῦτο, c'est-à-dire : Il y a cette figure-ci au commencement du septième (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 654, l. 26).

5. Tel est, dans la traduction littérale de son énoncé concis, le seul porisme d'Euclide dont Pappus nous ait conservé le texte complet. Bien qu'il soit suffisamment clair, Chasles l'a exprimé librement comme suit : « Si de deux points donnés on mène deux droites se coupant sur une droite donnée de position, dont l'une intercepte sur une droite donnée de position un segment compté à partir d'un point donné, l'autre formera aussi sur une autre droite un segment ayant avec le premier une raison donnée » (Voir : *Les trois livres de porismes, etc.*, p. 18).

Puis, dans les propositions suivantes :

Que tel point est lié à une droite donnée de position.

Que le rapport de telle droite à telle droite est donné.

Que le rapport de telle droite à un segment est donné.

Que telle droite est donnée de position.

Que telle droite est inclinée vers un point donné (1).

Que le rapport de telle droite à une droite menée de tel point jusqu'à un point donné est donné.

Que le rapport de telle droite à une droite amenée de tel point est donné.

Que le rapport de telle aire (2) à celle qui est comprise sous une droite donnée et telle droite est donné.

Qu'une partie de telle aire (3) est donnée, et que l'autre partie a un rapport donné avec le segment (4).

Que telle aire, ou telle aire conjointement avec une certaine

---

1. C'est-à-dire que telle droite passe par un point donné. Cette chose à chercher dans l'un des porismes d'Euclide a donné lieu à une première restauration conjecturale de ce porisme de la part de R. Simson (cfr. *Opera quaedam reliqua, etc.*, p. 418) : Prop. XXXIV énoncée : Quae est Porisma, unum scilicet ex iis inter Porismata Lib. I Euclidis, quae Pappus tradit hisce verbis : Quod haec ad datum punctum vergit. Elle a donné lieu également à une reconstitution de la part de Chasles (Cfr. *Les trois livres de Porismes, etc.*, y. 141). Enfin, Poncelet a fait remarquer que ce porisme d'Euclide, auquel se rapporte la mention que fait Pappus de la chose à chercher, fournit un mode de transformation des figures analogue à la méthode des polaires réciproques (*Journal des Mathématiques de Crelle*, t. VIII, année 1832, p. 408).

2. C'est-à-dire de telle aire rectangulaire.

3. C'est-à-dire : « qu'une portion rectangulaire de telle aire rectangulaire ».

4. Le sens de cette phrase obscure a donné lieu à des interprétations assez différentes. La version latine de Commandin dit : « Quod hujus spatii alterum quidem est datum, alterum proportionem habet ad aptomen » (Cfr. *loc. cit.*, p. 246, l. 25). Simson a donné l'interprétation difficilement acceptable : « Quod hujus rectanguli unum latus datum est, alterum vero rationem habet ad rectam abscissam » (Cfr. *Opera quaedam, etc.*, p. 418). Hultsch a traduit : « Hujus rectanguli partem quandam (ipsam quoque rectangulam) datam esse, alteram partem ad segmentum proportionem datam habere » (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 657, l. 17). Breton a donné l'interprétation : « Que tel rectangle équivaut à un rectangle constant, plus un autre rectangle qui varie proportionnellement à une certaine abscisse. (*Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide par M. P. Breton de Champ. Journal de mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville*, tome XX, année 1855, p. 217). Vincent interprète : « Que tel espace est décomposable en deux parties dont l'une est donnée et dont l'autre est (à la première) dans un rapport d'apotome » (Voir : *Considérations sur les Porismes, etc.*, p. 26). Enfin, Chasles a forcé le texte encore davantage en disant : « Que tel rectangle équivaut à un rectangle donné plus le rectangle formé sur telle abscisse et sur une droite donnée » (Voir : *Les trois livres de Porismes, etc.*, p. 19).

aire donnée, est donnée, et qu'elle a un rapport donné avec un segment (1).

Que telle droite, conjointement avec une autre avec laquelle telle autre a un rapport donné, a un rapport (2) avec une droite menée de tel point jusqu'à un point donné (3).

Que ce qui est compris sous un point donné et telle droite équivaut à ce qui est compris sous un point donné et la droite menée de tel point à un point donné (4).

---

1. Phrase obscure dont le texte présente probablement quelque lacune. Commandin traduit : « Quod hoc spatium vel hoc una cum aliquo spatio dato est, illud autem proportionem habet ad apotomen » (Cfr. *loc. cit.*, p. 246, l. 25). Hultsch traduit : « Hoc rectangulum vel hoc cum quodam spatio dato (datum) esse, illud autem proportionem (datam) habere ad segmentum » (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 657, l. 20). Vincent a donné l'interprétation suivante : « Que tel espace pris seul ou avec un certain espace (est décomposable en deux parties dont l'une est donnée et dont) l'autre est (à un espace donné) dans un rapport d'apotome » (*Considérations sur les Porismes, etc.*, p. 26). Enfin, Chasles ne s'est pas prononcé sur le sens de la phrase dans laquelle il suppose une lacune, en disant : « Que tel rectangle, pris seul ou avec un certain espace donné est..., l'autre a un rapport donné avec telle abscisse » (*Les trois livres de Porismes, etc.*, p. 19).

2. Sous-entendu : δοθέντα, donné.

3. Phrase non moins obscure que celle qui précède. Commandin a traduit d'une manière imprécise : « Quod haec cum qua ad quam haec proportionem habet datam, proportionem habet ad aliquam ab hoc, est dato » (Cfr. *loc. cit.*, p. 246, l. 27). Hultsch a traduit : « Hanc (rectam), quae (conjuncta) cum altera ad eandem (alteram) habet proportionem datam, (etiam) ad quandam (rectam, quae) ab hoc (puncto) ad datum (punctum pertinet), habere proportionem (datam) » (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 657, l. 23). Vincent a interprété comme suit : « Que telle droite plus une autre droite avec laquelle telle autre droite est dans un rapport donné, est elle-même dans un certain rapport avec un certain segment compris entre tel point et un point donné » (*Considérations sur les Porismes, etc.*, p. 26). Enfin, Chasles a rendu en disant : « Que telle droite, plus une autre avec laquelle telle autre droite est dans une raison donnée, a un rapport donné avec un segment formé par tel point à partir d'un point donné » (*Les trois livres de Porismes, etc.*, p. 19).

4. Commandin a traduit peu clairement : « Quod id quod sub dato et haec aequale est ei quod sub dato et ab hoc sub dato » (Cfr. *loc. cit.*, p. 245, l. 28). D'autre part, Breton, Vincent et Chasles s'accordent à voir dans « ce qui est compris sous un point donné et telle droite » l'aire du triangle ayant comme sommet un point donné et telle droite comme base. C'est en conformité avec cette interprétation que Hultsch a traduit ce texte obscur comme suit : « Triangulum, cujus vertex est datum (punctum) et basis haec (recta), aequale esse triangulo, cujus vertex datum (punctum) et basis est abscissa inde ab hoc (puncto) ad datum (punctum) » (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 659, ll. 1-4) ; ce qui reproduit l'interprétation donnée par Chasles : « Que le triangle qui a pour sommet un point donné et pour base telle droite est équivalent au triangle qui a pour sommet un point donné et pour base le segment compris entre tel point et un point donné » (*Les trois livres de Porismes, etc.*, p. 19). C'est d'après ce treizième genre de chose cherchée, interprété de cette manière, que Chasles a reconstitué conjecturalement deux porismes d'Euclide (*Ibidem*, pp. 170-171).

Que le rapport de telle droite, augmentée de telle droite, à une droite allant de tel point à un point donné est donné (1).

Que telle droite découpe sur des droites données de position des droites comprenant une aire donnée (2).

Dans le deuxième livre, les hypothèses sont différentes, et les choses cherchées sont pour la plupart les mêmes que dans le premier livre. Voici les plus notoires de ces choses cherchées :

Que telle aire, ou telle aire conjointement avec une aire donnée, a un rapport donné avec un segment.

Que le rapport de l'aire comprise sous telles droites à un segment est donné.

Que le rapport de l'aire comprise sous la somme de telles droites et la somme de telles droites à un segment est donné.

Que l'aire comprise sous telle droite et la somme de telle droite et de telle autre avec laquelle telle droite a un rapport donné, conjointement avec l'aire comprise sous telle droite et telle autre avec laquelle telle droite a un rapport donné, a un rapport donné avec un segment (3).

Que le rapport de la somme de ces deux aires (4) à une droite allant de tel point jusqu'à un point donné est donné.

Que l'aire comprise sous telles droites est donnée.

---

1. Commandin traduit inexactement : « Quod proportio hujus et hujus ad ad aliquam ab hac ut dato » (Cfr. *loc. cit.*, p. 246, l. 29) ; et Hultsch rend par : « Proportionem summae hujus (rectae) et hujus ad portionem quandam, (quae) ab hoc (puncto) ad datum (punctum pertinet, datam esse » (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 659, ll. 5-7).

2. Cette quinzième indication de la chose cherchée a donné lieu à la reconstitution d'un porisme d'Euclide, d'abord par Simson (*loc. cit.*, p. 431, prop. 41), puis par Chasles (*loc. cit.*, p. 174, prop. 76).

3. Chasles exprime cette phrase librement en ces termes : « Qu'un rectangle qui a pour côtés telle droite et une autre droite augmentée d'une seconde qui a un rapport donné avec telle autre droite, et le rectangle construit sur telle droite et telle autre qui a un rapport donné avec telle droite, ont leur somme dans un rapport donné avec une certaine abscisse » (Cfr. *loc. cit.*, p. 20).

4. συναμφοτέρου (sous-entendu τοῦδε τοῦ χωρίου), la somme de ces deux aires (rectangulaires), leçon donnée par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 659, n. 3) conformément au sentiment de Breton (cfr. *loc. cit.*, p. 217), ainsi que de Chasles qui interprète la phrase en disant : « Que la somme de ces deux rectangles est dans un rapport donné avec le segment compris entre tel point et un point donné » (Cfr. *loc. cit.*, p. 20). Halley avait supposé, au contraire, qu'il fallait sous-entendre τῆςδε, et, par conséquent, comprendre : « Que la somme de telles (droites), etc. » (HALLEY, *Pappi Alexandrini praefatio ad VIImum Collectionis mathematicae in Apollonii Pergaei de sectione rationis libri duo ex arabico manuscripto latine versi.* Oxoniae, 1706).

Dans le troisième livre, les hypothèses les plus nombreuses concernent les demi-cercles, et celles qui concernent le cercle et les segments sont en petit nombre. Quant aux choses cherchées, beaucoup ressemblent aux précédentes, et les plus notoires sont :

Que le rapport de l'aire comprise sous telles droites à l'aire comprise sous telles droites est donné.

Que le rapport du carré de telle droite à tel segment est donné.

Que l'aire comprise sous telles droites équivaut à celle qui est comprise sous une droite donnée et celle qui va de tel point jusqu'à un point donné.

Que le carré de telle droite équivaut à l'aire comprise sous une droite donnée et la droite découpée sur une perpendiculaire jusqu'à un point donné.

Que la somme de [telle droite] (1) et de telle autre avec laquelle telle droite a un rapport donné a un rapport donné avec un segment (2).

Qu'il y a tel point donné d'où les droites de jonction menées sur tels [cercles] (3) comprennent un triangle donné d'espèce.

Qu'il y a tel point donné d'où les droites de jonction menées à tel [cercle] (4) découpent des arcs égaux.

Que telle droite est de juxtaposition (5), ou comprend un angle donné, avec telle droite inclinée vers un point donné.

1. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 660, l. 7).

2. La restauration de Hultsch se conforme avec l'interprétation de Halley, pour qui il s'agit ici de droites et non pas d'aires rectangulaires comme l'ont compris Breton (cfr. *loc. cit.*, p. 218), Vincent (cfr. *loc cit.*, p. 27) et enfin, Chasles qui dit : « Que le rectangle qui a pour côtés la somme de deux droites et une droite en rapport donné avec telle autre droite, est dans un rapport donné avec telle abscisse » (Cfr. *loc. cit.*, p. 21).

3. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 661, l. 15) conformément à l'interprétation de Robert Simson (*Opera quaedam reliqua, etc.*, p. 455), et contrairement à l'interprétation de Halley, qui vise des points au lieu de cercles, laquelle a été suivie par Vincent (cfr. *loc. cit.*, p. 27) et par Chasles (cfr. *loc. cit.*, p. 21) qui dit : « Qu'il existe un point tel que les droites menées de ce point comprennent un triangle donné d'espéce ».

4. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 661, l. 4) conformément au sentiment de R. Simson (cfr. *loc. cit.*, p. 463) et contrairement à l'interprétation de Vincent : « Qu'il existe un point donné tel que les droites menées de ce point à deux points donnés interceptent des arcs égaux » (Cfr. *loc. cit.*, p. 27). Cette dernière interprétation est d'ailleurs suivie aussi par Chasles (Cfr. *loc. cit.*, p. 21).

5. παραθέσει, de juxtaposition, c'est-à-dire parallèle à une droite donnée de position.

Les trois livres des *Porismes* comportent trente-huit lemmes, et leurs théorèmes sont au nombre de cent soixante et onze.

LES DEUX LIVRES DES LIEUX PLANS.

Parmi les lieux en général, les uns sont éphectiques [1], et Apollonius dit, dans le préambule de ses propres *Éléments* [2], que tels sont le point lieu d'un point, la ligne lieu d'une ligne, la surface lieu d'une surface et le solide lieu d'un solide; d'autres sont diexodiques [3], tels qu'une ligne lieu d'un point, une surface lieu d'une ligne, un solide lieu d'une surface; et d'autres sont anastrophiques [4], tels qu'une surface lieu de points et un solide lieu de lignes. [Parmi les lieux que l'on trouve dans le champ de l'analyse, ceux des données de position sont éphectiques [5], tandis que les lieux dits plans, solides et grammiques [6] sont des lieux diexodiques de points, et que les lieux en surface [7] sont anastrophiques de points et diexodiques de lignes. Cependant les lieux grammiques se démontrent d'après les lieux en surface. D'une manière générale, les lieux sont appelés plans, ceux-mêmes

1. ἐφεκτικοί (τόποι), les lieux éphectiques, c'est-à-dire les lieux restreints. Le sens de cette expression a fait hésiter Commandin et Hultsch, qui ont conservé le mot grec dans leur version latine avec une paraphrase. Le premier dit : ἐφεκτικοί, hoc est in seipsis tantum consistantes (cfr. *loc. cit.*, p. 247, l. 11) ; tandis que Hultsch dit : ἐφεκτικοί sive fixi (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 661, l. 25). Or, le contexte donne au mot ἐφεκτικὸς un sens nettement restrictif.

2. C'est-à-dire dans son traité perdu des *Lieux plans*, dont nous avons mentionné les divers essais de restauration dans notre introduction.

3. διεξοδικοί (τόποι), les (lieux) diexodiques (d'après le néologisme proposé par Paul Tannery), c'est-à-dire les lieux géométriques «progressants», engendrés par le déplacement d'un point, d'une ligne ou d'une surface. Le mot grec a été conservé dans les versions latines de Commandin et de Hultsch. Le premier y ajoute la paraphrase : « hoc est sese extra tendentes » (cfr. *loc cit.*, p. 247, l. 14), et le second y ajoute : « sive progredientes » (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 663, l. 2).

4. ἀναστροφικοί (τόποι), les (lieux) anastrophiques (d'après le néologisme proposé par Paul Tannery), c'est-à-dire, d'après l'étymologie du terme grec : les lieux enveloppants.

5. C'est-à-dire que les points, lignes et surfaces déterminés de position dans les *Données* d'Euclide doivent être rangés parmi les lieux éphectiques ou restreints.

6. γραμμικοί (τόποι), les (lieux) grammiques, ou linéaires, constitués par des lignes transcendantes ou courbes de degré supérieur au second.

7. C'est-à-dire les surfaces considérés comme lieux géométriques dans l'ouvrage perdu d'Euclide intitulé : *Les Lieux à la Surface* (τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ).

dont nous allons traiter, en tant qu'ils sont constitués par des lignes droites ou des cercles, et ils sont appelés solides en tant qu'ils sont constitués par des sections de cônes, c'est-à-dire par des paraboles, des ellipses ou des hyperboles. Enfin, les lieux sont appelés grammiques en tant qu'ils sont constitués par des lignes qui ne sont ni des droites, ni des cercles, ni l'une des sections coniques que nous venons de dire. D'autre part, les lieux qui ont été dénommés « aux médiétés » par Ératosthène [1] sont du genre de ceux qui précèdent ; mais ils s'en séparent en raison de la nature particulière des hypothèses] [2].

Dans la composition des *Éléments*, les Anciens ont eu égard à l'ordre qui affecte les lieux plans. Leurs successeurs, ayant négligé cela, ont ajouté d'autres lieux, comme si ceux-ci n'étaient pas en nombre infini pour qui voudrait consigner tous les lieux qui dépendent de cet ordre. Nous donnerons donc postérieurement les lieux qui ont été ajoutés, et nous donnerons d'abord ceux qui rentrent dans l'ordre, tout en les résumant dans la proposition unique suivante : Si, d'un point donné, ou de deux [3], l'on mène deux droites ; si celles-ci constituent une seule droite, ou sont parallèles, ou comprennent un angle donné [4] ; si elles ont entre elles un rapport [5], ou comprennent une aire donnée [6], et si l'extrémité de l'une de ces droites appartient à un lieu plan donné de position [7], l'extrémité de l'autre droite appartiendra aussi à un lieu plan donné de position, du même genre que le premier

1. Il est fait ici allusion aux deux livres d'analyse géométrique qui auraient été composés sur les *Médiétés* (περὶ μεσοτήτων) par Ératosthène au troisième siècle avant J.-C. Cet ouvrage comportait probablement l'étude des lieux dits des moyennes raisons, ou lieux des points tels que leurs distances à trois droites données formassent une des trois médiétés arithmétique, géométrique ou harmonique, les seules considérées jusqu'alors. Ces lieux étant évidemment constitués par des coniques, appartenaient donc au genre de lieux dits solides.

2. Hultsch a mis le passage qui précède entre crochets pour marquer l'interpolation probable (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 662, ll. 5-18). Bien que le passage soit un peu corrompu, nous inclinons cependant pour son authenticité.

3. Sous-entendu : δεδομένων σημείων, (de deux) points donnés.

4. C'est-à-dire si, issues d'un point donné, les deux droites sont dans une même direction ou, si, issues de deux points donnés, elles sont parallèles, ou se rencontrent sous un angle donné.

5. C'est-à-dire un rapport donné.

6. C'est-à-dire si les droites constituent les côtés d'un parallélogramme rectangle de surface donnée.

7. C'est-à-dire une droite ou un cercle.

ou d'un genre différent, et qui sera disposé semblablement au premier par rapport à la droite (1), ou disposé d'une manière opposée (2). Ces choses auront lieu d'ailleurs d'après les différences que présentent les hypothèses.

Il y a trois propositions qui cadrent avec ces dernières, et qui ont été ajoutées en tête par Charmandros (3) :

Si l'une des extrémités d'une droite donnée de grandeur est donnée, l'autre extrémité est liée (4) à une circonférence (5) concave donnée de position.

Si, de deux points donnés, des droites se brisent (6) en comprenant un angle donné, leur point commun est lié à une circonférence concave donnée de position (7).

Si la base d'un triangle de surface donnée de grandeur est donnée de position et de grandeur, son sommet est lié à une droite donnée de position.

Les autres propositions sont du genre ci-après :

Si une extrémité d'une droite donnée de grandeur et menée parallèlement à une droite donnée de position est liée à une droite donnée de position, l'autre extrémité est aussi liée à une droite donnée de position.

Si l'on amène d'un point à deux droites données de position

---

1. C'est-à-dire par rapport à la droite qui relie les deux points donnés.

2. Cet énoncé a été développé par Robert Simson au cours de seize propositions dans son essai de reconstitution du traité *Des Lieux Plans* d'Apollonius, publié sous le titre : *Apollonii Pergaei locorum planorum libri II restituti a Rob. Simson*. Glasguae, 1749, in-4° (pp. 3-33). Cet ouvrage fut traduit en allemand par Camerer sous le titre : *Apollonius von Perga ebene Oerter. Wiederhergestellt von Robert Simson. Aus dem Lateinischen übersetzt von Johann Camerer*. Lipsiae, 1796, in-8° (pp. 36-72).

3. Le géomètre Charmandros n'est connu que par la mention que Pappus en fait ici. Le commentaire ou le complément que cet auteur aurait écrit sur le traité *Des Lieux Plans* d'Apollonius ne nous est pas parvenu. Cet auteur doit peut-être être confondu avec Charimander qui, d'après Sénèque, aurait écrit un ouvrage sur les comètes. Voir : *Œuvres de Sénèque le Philosophe, traduction de Lagrange, avec des notes critiques d'histoire et de littérature*. Tours, an III, 8 vol. in-8°, vol. 7, *Questions naturelles*, liv. VII, chap. V, p. 202, l. 14.

4. ἅψεται, liée (à une ligne) de manière à pouvoir se déplacer sur cette ligne ou la parcourir.

5. Sous-entendu τοῦ κύκλου, de cercle.

6. κλασθῶσιν, se brisent, c'est-à-dire : si les droites menées de deux points donnés se rencontrent, ou se coupent, sous un angle donné.

7. En d'autres termes, le lieu des points de rencontre des droites qui, menées de deux points fixes, comprennent un angle constant est la circonférence de cercle capable de l'angle donné.

des droites parallèles, ou se rencontrant sous des angles donnés, ou ayant entre elles un rapport donné, ou dont l'une, augmentée de celle avec laquelle l'autre a un rapport donné, est donnée, le point est lié à une droite donnée de position (1).

Et si, ayant autant de droites données de position qu'on voudra, on mène d'un point quelconque sur celles-ci des droites sous des angles donnés ; si le rectangle compris sous une droite donnée et une droite menée, conjointement avec le rectangle compris sous cette droite donnée et une autre des droites menées, équivaut au rectangle compris sous cette droite donnée et encore une autre des droites menées, et s'il en est de même pour les droites restantes, le point sera lié à une droite donnée de position.

Si l'on amène d'un point quelconque sur des parallèles données de position des droites sous des angles donnés ; et si elles découpent sur ces parallèles, à partir de points donnés sur celles-ci, des droites ayant un rapport (2), ou comprenant une aire (3) donnée, ou qui sont telles que la somme des figures données construites sur ces droites menées, ou la différence de ces figures, équivaut à une aire donnée, le point sera lié à une droite donnée de position (4).

Le second livre contient ceci :

Si des droites menées de deux points se brisent (5), et si les carrés construits sur ces droites diffèrent d'une aire donnée, le point (6) est lié à une droite donnée de position (7).

---

1. La démonstration des divers cas de cette proposition a été reconstituée par Robert Simson (Voir pp. 35-48 de l'ouvrage mentionné dans la note 2 de la page 497, ou la traduction de cet ouvrage par Camerer, pp. 74-91).

Breton de Champ a énoncé cette proposition librement comme suit : « Si d'un point on mène à deux droites données des obliques, sous des angles donnés, et que ces obliques soient entre elles dans un rapport constant, ou bien qu'en ajoutant à l'une d'elles une longueur en raison constante avec la seconde, on obtienne une somme constante, le lieu de ce point sera une ligne droite donnée de position » (*Recherches nouvelles sur les Porismes, etc.*, p. 300).

2. Sous-entendu δεδομένον, donné.

3. C'est-à-dire une aire rectangulaire.

4. La démonstration de cette proposition a été reconstituée par R. Simson (*loc. cit.*, pp. 35-48, ou trad. de Camerer, pp. 74-91), et Breton de Champ a consacré une note intéressante à cette proposition (Voir *Recherches nouvelles, etc.*, p. 301).

5. C'est-à-dire se rencontrent en un point.

6. C'est-à-dire le point de rencontre des droites menées.

7. Voir la reconstitution de la démonstration de cette proposition dans l'ouvrage précité de R. Simson (p. 118), ou dans la traduction de Camerer (p. 209).

D'autre part, si ces droites sont dans un rapport donné, le point sera lié soit à une droite, soit à une circonférence [1].

Si l'on a une droite donnée de position et un point donné sur celle-ci, si l'on mène de ce point une droite terminée ; si, de son extrémité, on abaisse une droite à angles droits sur la droite [donnée] [2] de position, et si le carré de la droite menée équivaut au rectangle compris sous une droite donnée et la droite découpée [3] à partir d'un point donné, ou à partir d'un autre point donné sur la droite donnée de position, l'extrémité de la droite menée sera liée à une circonférence donnée de position [4].

Si des droites menées de deux points donnés se brisent, et si le carré de l'une est à l'égard du carré de l'autre plus grand d'une aire donnée qu'en raison [5], le point [6] est lié à une circonférence donnée de position [7].

Si des droites menées d'autant de points qu'on voudra se brisent sur un seul point, et si les figures [8] décrites sur toutes

---

1. Sous-entendu θέσει δεδομένης, donnée de position. Voir la reconstitution de la démonstration dans l'ouvrage de R. Simson (pp. 120-124), ou dans la trad. de Camerer (pp. 211-222).

Michel Chasles a énoncé cette proposition de lieu librement comme suit : « Si de deux points donnés on mène des droites qui se rencontrent en un point, et que ces droites soient entre elles dans une raison donnée : ce point est sur une droite ou sur une circonférence donnée de position » ; et il rapproche cet énoncé de ceux relatifs à la même proposition démontrée par Eutocius dans son commentaire sur les *Coniques* d'Apollonius, et par Hassan ben Haithem dans son ouvrage intitulé : *Les Connues géométriques*, traduit par L.-A. Sédillot (Voir CHASLES, *Les trois livres de Porismes, etc.*, pp. 269-272).

2. Lacune comblée par Hultsch au moyen du mot δεδομένην (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 666, l. 22).

3. C'est-à-dire découpée par le pied de la perpendiculaire.

4. Voir la démonstration reconstituée de cette proposition dans l'ouvrage précité de R. Simson (pp. 125-134), ou dans la traduction de cet ouvrage par Camerer (pp. 223-233).

5. μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, expression singulière empruntée à la *Définition* 11 des *Données* d'Euclide; définition énoncée p. 92, n. 1. Cette expression se traduit par la formule : $\frac{\text{carré de l'une des droites — aire donnée}}{\text{carré de l'autre droite}} = \text{rapport donné.}$ Breton de Champ a donné l'interprétation suivante de cette expression : Le premier carré doit être plus grand d'un espace donné que le carré qui est au second carré dans la raison donnée » (*Recherches nouvelles sur les Porismes, etc.*, p. 302).

6. C'est-à-dire le point d'intersection des droites menées.

7. Voir la reconstitution d'une démonstration de cette proposition dans l'ouvrage précité de R. Simson (pp. 136-144), ou dans la traduction de Camerer (pp. 236-243).

8. C'est-à-dire les aires données d'espèce.

ces droites sont équivalentes à une aire donnée, le point sera lié à une circonférence donnée de position (1).

Si des droites menées de deux points se brisent ; si la droite de juxtaposition (2) menée du point (3) découpe (4) sur une droite donnée de position (5), à partir d'un point donné, et si la somme des figures (6) décrites sur les droites brisées équivaut au rectangle compris sous une droite donnée et la droite découpée, le point de bris est lié à une circonférence donnée de position (7).

Si l'on donne un point dans un cercle donné de position ; si l'on mène une droite par ce point ; si l'on prend sur cette droite un point situé à l'extérieur (8), et si le carré construit sur la droite qui va de ce point jusqu'au point donné à l'intérieur, carré pris seul ou augmenté du rectangle compris sous les deux segments intérieurs, équivaut au rectangle compris sous cette droite entière et celle qui est découpée à l'extérieur (9), le point extérieur sera lié à une droite donnée de position (10).

Si ce point appartient à une droite donnée de position, et si le cercle n'est pas supposé, les points situés de part et d'autre

1. Voir la reconstitution d'une démonstration de cette proposition dans l'ouvrage de R. Simson (pp. 159-177), ou dans la traduction de Camerer (pp. 263-287).

2. C'est-à-dire menée parallèlement à une droite donnée de position.

3. C'est-à-dire du point de bris ou de rencontre des droites amenées des deux points donnés.

4. Sous-entendu : ἀποτομὴν, un segment.

5. C'est-à-dire sur une droite donnée de position autre que la droite à laquelle on a mené une parallèle par le point de rencontre des droites menées des deux points donnés.

6. C'est-à-dire des aires données de figure ou d'espèce.

7. Voir une reconstitution de la démonstration de cette proposition dans l'ouvrage précité de Robert Simson (pp. 182-193), ou dans sa traduction de Camerer (pp. 310-321).

Breton de Champ a énoncé cette proposition librement en disant : « Le lieu du point tel que la somme des aires des polygones, respectivement semblables à deux polygones donnés, construits sur les droites menées de ce point à deux points fixes, soit égale au rectangle construit sur une droite donnée et sur la distance du pied de la perpendiculaire abaissée du même point sur une droite fixe à un point donné sur cette droite, est une circonférence de cercle donnée de position » (Voir : *Recherches nouvelles sur les Porismes*, p. 302).

8. C'est-à-dire à l'extérieur du cercle.

9. C'est-à-dire découpée à l'extérieur du cercle sur la droite entière qui relie les points extérieur et intérieur donnés.

10. Voir une reconstitution de la démonstration de cette proposition dans l'ouvrage de Robert Simson (pp. 194-201), ou dans la traduction de Camerer (pp. 322-331).

du point donné sont liés à la même circonférence donnée de position [1].

Les deux livres des *Lieux plans* contiennent cent quarante-sept théorèmes ou figures et huit lemmes.

LES DEUX LIVRES DES INCLINAISONS [2].

Une droite est dite s'incliner [3] vers un point lorsque, prolongée, elle arrive sur ce point. [D'une manière générale, il revient au même de dire qu'une droite s'incline vers un point donné, ou qu'un point est donné sur cette droite, ou que celle-ci passe par un point donné, et on exprime [4] les inclinaisons de l'une des manières que nous venons de dire] [5]. Or, comme le problème général s'énonce : « deux lignes étant données de position, poser dans leur intervalle une droite de grandeur donnée qui soit inclinée vers un point donné », et comme, en ce qui concerne cette droite, parmi les problèmes qui comportent des suppositions différentes, les uns sont plans, d'autres solides et d'autres encore grammiques, on a démontré les suivants d'entre les problèmes plans qui présentent le plus d'utilité pour de nombreuses questions :

Étant donnés de position un demi-cercle et une droite à angles droits sur sa base [6], ou bien deux demi-cercles ayant les bases sur une même droite, poser dans l'intervalle de ces deux lignes une droite donnée de grandeur et inclinée vers l'angle du demi-cercle [7].

---

1. Breton de Champ a signalé les difficultés d'interprétation de cet énoncé obscur (Voir ouvrage précité, p. 302). Robert Simson a néanmoins donné une démonstration relative à son interprétation conjecturale (Voir ouvrage précité de Simson, pp. 201 et suiv., ou traduction de Camerer, p. 331).

2. Le traité d'Apollonius intitulé *Des Inclinaisons* est entièrement perdu. Il a fait l'objet de plusieurs essais de reconstitution que nous avons mentionnés dans notre Introduction.

3. νεύειν, s'incliner vers, c'est-à-dire se diriger vers un point, ou passer par ce point.

4. Sous-entendu : indifféremment.

5. La phrase placée entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 670, ll. 5-8).

6. C'est-à-dire une perpendiculaire sur le diamètre ou sur le prolongement de ce diamètre.

7. C'est-à-dire dirigée vers, ou passant par, une extrémité du diamètre, base du demi-cercle.

Puis, un rhombe étant donné, et l'un de ses côtés étant prolongé, ajuster dans l'angle extérieur une droite donnée de grandeur et inclinée vers l'angle situé à l'opposite.

Puis, un cercle étant donné de position, lui insérer une droite donnée de grandeur et inclinée vers un point donné.

Parmi ces problèmes, celui qui se rapporte au demi-cercle et à la droite et comportant quatre cas [1], celui qui se rapporte au cercle et comportant deux cas, et celui qui se rapporte au rhombe et comportant deux cas, sont démontrés dans le premier livre ; tandis que le problème qui se rapporte aux deux demi-cercles, et dont l'hypothèse comporte dix cas [2], est démontré dans le second livre ; et de nombreuses sous-divisions déterminatives [3] se présentent dans ces cas en raison de la grandeur donnée de la droite. [Ces problèmes plans appartiennent donc au champ de l'analyse, et ce sont également ceux qui ont été démontrés les premiers, exception faite pour les *Médiétés* d'Ératosthène ; car celles-ci viennent en dernier lieu. Mais, il est de règle de considérer les problèmes solides à la suite des problèmes plans. Or, les problèmes qu'on appelle solides ne sont pas ceux qui sont proposés dans des figures solides, mais bien ceux qui, à défaut de pouvoir être démontrés au moyen de plans [4], le sont au moyen des trois lignes coniques ; de sorte qu'il faut nécessairement traiter au sujet de ces lignes en premier lieu, et c'est ainsi que les cinq livres des *Éléments des Coniques* d'Aristée l'Ancien ont été publiés

1. Horsley démontre, dans son remarquable essai de reconstitution du traité *Des Inclinaisons* d'Apollonius, cinq cas du problème relatif à la droite passant par l'extrémité du diamètre et découpée sur une longueur donnée dans l'intervalle du cercle et d'une perpendiculaire au diamètre. Estimant que le cinquième cas n'a pu échapper à Apollonius, il opine que les manuscrits portent probablement par erreur ou altération τέσσαρας (quatre) au lieu de πέντε (cinq) (*Apollonii Pergaei inclinationum libri duo. Restituebat Sam. Horsley*. Oxonii, 1770, in-4°, pp. 3-5).

2. L'ouvrage de reconstitution de Horsley mentionné dans la note précédente énumère comme suit les dix cas signalés par Pappus (p. 3) : 1° Les deux demi-cercles sont tangents intérieurement ; 2° Ils sont tangents extérieurement ; 3° L'un est intérieur à l'autre sans le toucher ; 4° L'un est extérieur à l'autre sans le toucher ; 5° Ils se coupent. A ces cinq premiers cas qui visent les demi-cercles placés du même côté de la droite en prolongement de laquelle ils ont leurs diamètres, viennent s'ajouter les cinq cas dans la situation des demi-cercles de part et d'autre de cette droite.

3. διοριστικαί, déterminatives (des conditions de possibilité).

4. C'est-à-dire au moyen de lignes qui trouvent leur origine dans les plans, lignes susceptibles d'être tracées par la règle et le compas.

d'abord d'une manière abrégée à l'usage de ceux qui désirent s'assimiler les problèmes en question] (1).

Les deux livres *Des Inclinaisons* contiennent cent vingt-cinq théorèmes ou figures et trente-huit lemmes.

LES HUIT LIVRES DES CONIQUES.

Apollonius nous a transmis huit livres sur les coniques en ayant complété les quatre livres des *Coniques* d'Euclide, et y ayant ajouté quatre autres livres. Aristée, auteur des cinq volumes qui avaient été publiés jusqu'alors sur les *Lieux Solides* en corrélation avec les coniques, avait toutefois [comme les prédécesseurs d'Apollonius] (2) appelé l'une des sections coniques la section de cône (3) acutangle, l'autre la section de cône rectangle et l'autre encore la section de cône obtusangle (4). Or, comme ces trois lignes surgissent dans chacun des trois cônes lorsqu'on les coupe d'une manière différente, Apollonius a, paraît-il, cherché finalement à savoir pourquoi ses devanciers ont appelé, en choisissant ainsi au hasard, section de cône acutangle une section qui peut aussi être celle du cône rectangle et du cône obtusangle ; section de cône rectangle une section qui peut aussi être celle du cône acutangle et du cône obtusangle, et section de cône obtusangle une section qui peut aussi être celle du cône acutangle et du cône rectangle ; et, après avoir modifié les noms, il a dénommé ellipse la section dite de cône acutangle, parabole celle dite de cône rectangle et hyperbole celle dite de cône obtusangle, dénommant de cette manière chacune de ces sections en raison d'une propriété particulière. En effet, dans la section de cône

1. La longue phrase mise entre crochets est attribuée par Hultsch à un commentateur (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 672, ll. 4-14).

2. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 672, l. 22).

3. C'est-à-dire le cône droit, le seul qui ait été considéré par Aristée et par Euclide.

4. Ces trois dénominations sont encore les seules que l'on rencontre dans les œuvres d'Archimède, antérieures à celles d'Apollonius, pour désigner l'ellipse, la parabole et l'hyperbole à une branche engendrées par la section plane, perpendiculaire à une génératrice, des cônes droits acutangle, rectangle et obtusangle (Voir : *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, Introduction, p. xxxv, et livre *Des Conoïdes et Sphéroïdes*, pp. 137-236).

acutangle, une certaine aire (1) appliquée suivant une certaine droite (2), devient déficiente (3) d'un tétragone (4), tandis que, dans la section de cône obtusangle, cette aire excède (5) d'un tétragone (6) et que, dans la section de cône rectangle, cette

1. C'est-à-dire une aire rectangulaire.
2. C'est-à-dire suivant la droite que nous appelons le paramètre.
3. ἐλλεῖπον γίνεται, devient de manque, ou déficiente de; expression d'où Apollonius tire le nom d'ellipse (ἔλλειψις).
4. C'est-à-dire un parallélogramme rectangle qui doit d'ailleurs être semblable au rectangle ayant pour côtés le paramètre et le diamètre de la courbe, et être semblablement placé. Le mot τετράγωνος, qui désigne ordinairement le carré, est donc pris ici dans le sens de quadrilatère rectangle.

C'est dans la proposition 13 du premier livre des *Coniques* qu'Apollonius définit pour la première fois l'ellipse d'après sa principale propriété mise en évidence par l'équation cartésienne de la courbe rapportée à un diamètre et à la tangente correspondant à ce diamètre pris comme axes obliques des coordonnées. La proposition est énoncée : « Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan qui, rencontrant chacun des côtés du triangle passant par l'axe, n'est pas mené parallèlement ni antiparallèlement à la base du cône; si, de plus, le plan de base du cône et le plan sécant se rencontrent suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe, ou perpendiculaire au prolongement de cette base, le carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune des plans, jusqu'au diamètre de la section, sera équivalent à une aire appliquée suivant une certaine droite, avec laquelle le rapport du diamètre de la section est le même que le rapport du carré de la droite menée, du sommet du cône, parallèlement au diamètre de la section, jusqu'à la base du triangle, au rectangle délimité sous les droites que découpe cette dernière droite sur les côtés du triangle; aire ayant comme largeur la droite découpée sur le diamètre par cette première droite, du côté du sommet de la section, et diminuée d'une figure semblable au rectangle délimité par le diamètre et par le paramètre, et semblablement placée. Nous appelons une telle section une ellipse » Voir : *Les Coniques*, trad. de P. Ver Eecke, p. 28.

5. ὑπερβάλλει, excède; expression d'où Apollonius a tiré le nom d'hyperbole (ὑπερβολή).
6. C'est dans la proposition 12 du livre Ier des *Coniques* qu'Apollonius définit pour la première fois l'hyperbole d'après sa principale propriété mise en évidence par l'équation cartésienne de la courbe rapportée aux axes obliques de coordonnées constitués par un diamètre et la tangente à son extrémité. La proposition est énoncée : « Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe; si, de plus, le diamètre prolongé de la section rencontre l'un des côtés du triangle passant par l'axe au delà du sommet du cône, le carré de toute droite menée de la section, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône, jusqu'au diamètre de la section, sera équivalent à une aire, appliquée suivant une certaine droite, avec laquelle le rapport de la droite située dans le prolongement du diamètre de la section, et sous-tendant l'angle extérieur du triangle, est le même que le rapport du carré de la droite menée du sommet du cône, parallèlement au diamètre de la section, jusqu'à la base du triangle, au rectangle délimité sous les segments de la base, déterminés par la droite menée; aire ayant comme largeur la droite découpée sur le diamètre par cette première droite, du côté du sommet de la section, et augmentée d'une figure qui, semblable au rectangle délimité par la droite sous-

aire (1) n'est ni déficiente ni excédente. [Mais, cela provient de ce qu'Aristée n'avait pas encore remarqué que c'est dans un cas particulier du plan coupant le cône (et engendrant les trois lignes) (2) que surgissent respectivement dans les cônes (3) une autre et une autre des lignes qu'il dénomme d'après la nature particulière du cône ; car, si le plan est mené parallèlement à un côté du cône, il ne surgit qu'une seule des trois lignes, toujours la même, qu'Aristée dénomme section du cône même qui a été coupé] (4).

Au reste, c'est dans le préambule du premier livre, là où il en donne d'abord le résumé, qu'Apollonius dit ce que contiennent les huit livres qu'il a publiés sur les coniques : « Le premier livre concerne la génération des trois sections (5) et des sections opposées (6), ainsi que leurs principales propriétés, exposées d'une manière plus développée et plus générale que chez d'autres qui ont écrit sur la matière. Le second livre concerne les propriétés

---

tendant l'angle extérieur du triangle, et par le paramètre, est semblablement placée. Nous appelons une telle section une hyperbole » Voir : *Les Coniques*, trad. de P. Ver Eecke, p. 24.

1. C'est-à-dire l'aire appliquée (παραβαλλόμενον) ; expression d'où Apollonius a tiré la dénomination de parabole (παραβολή), et c'est dans la proposition 11 du livre Ier des *Coniques* qu'il définit pour la première fois cette courbe de la manière suivante : « Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe ; si, de plus, le diamètre de la section est parallèle à l'un des côtés du triangle passant par l'axe, le carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône, jusqu'au diamètre de la section, équivaut au rectangle délimité par la droite qu'elle découpe sur le diamètre, du côté du sommet de la section, et par une certaine droite dont le rapport à la droite située entre l'angle du cône et le sommet de la section est le même que celui du carré de la base du triangle passant par l'axe au rectangle délimité par les deux côtés restants du triangle. Nous appellerons une telle section une parabole ». Voir trad. précitée de P. Ver Eecke, p. 21.

2. La phrase entre parenthèses paraît être une petite sous-interpolation.

3. C'est-à-dire chacun des trois cônes droits rectangle, acutangle et obtusangle.

4. Toute la phrase mise entre crochets est une redite interpolée (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 674, ll. 12-19).

5. Sous-entendu : τῶν κώνων, de cônes, c'est-à-dire l'ellipse, la parabole et la branche unique de l'hyperbole considérée jusqu'alors.

6. καὶ τῶν ἀντικειμένων, littéralement : et des opposées, c'est-à-dire l'hyperbole à deux branches opposées, engendrée par la section plane des deux nappes du cône et, qu'à la différence de ses prédécesseurs, Apollonius considère pour la première fois comme ne formant qu'une seule et même courbe centrée.

des diamètres et des axes des sections [et des sections opposées] (1), celles des asymptotes, et il concerne d'autres choses qui sont d'un usage général et nécessaires pour les déterminations (2). C'est dans ce livre que tu apprendras ce que j'appelle les diamètres et les axes. Le troisième livre renferme de nombreux et curieux théorèmes qui sont utiles dans la construction des lieux solides (3) et dans les déterminations. La plupart et les plus beaux de ces théorèmes sont nouveaux. C'est d'ailleurs en concevant ces théorèmes que j'ai remarqué que, chez Euclide (4), le lieu, établi par rapport à trois et à quatre lignes (5), n'est guère construit, si ce n'est dans une mesure accidentelle et d'une façon qui n'est pas heureuse ; car il n'était pas possible d'en épuiser la construction sans mes découvertes complémentaires (6). Le quatrième livre comporte de combien de manières les sections de cônes se rencontrent entre elles et se rencontrent avec la circonférence du cercle. Ce livre comporte, en outre, ce dont aucun de mes prédécesseurs n'a traité, en combien de points une section de cône rencontre une circonférence de cercle, et des sections opposées rencontrent des sections opposées (7). Les livres restants sont beaucoup plus riches ; car, il y a d'une part celui qui est

---

1. La phrase placée entre crochets doit avoir été interpolée, car elle est absente dans le texte du préambule d'Apollonius dont Pappus donne ici un extrait (Voir *Les Coniques*, trad. de P. Ver Eecke, p. 2, l. 6, ou édition précitée du texte grec de Heiberg, vol. I, p. 4, l. 6).

2. πρὸς τοὺς διορισμούς, pour les déterminations ou distinctions des cas de possibilité, c'est-à-dire pour les discussions.

3. τῶν στερεῶν τόπων, des lieux solides, c'est-à-dire des lieux géométriques dans la construction desquels interviennent des courbes du second degré ou sections planes de solides tels que le cône et le cylindre.

4. L'ouvrage d'Euclide sur les *Lieux solides* est perdu, de même que celui qu'Aristée avait écrit sur le même sujet.

5. Apollonius désigne ici par lieux trilinéaires et quadrilinéaires ceux qui sont constitués par des points dont l'assujettissement par rapport à trois ou à quatre lignes droites est celui que Pappus déterminera plus loin.

6. Le texte de l'édition de Hultsch (*loc. cit.*, vol. II, p. 676, l. 9) présente ici la leçon τῶν προειρημένων, (sans les choses) dites antérieurement, à laquelle nous substituons: τῶν προσευρημένων ἡμῖν, c'est-à-dire : « (sans) mes découvertes complémentaires » ; ce qui est la véritable expression employée par Apollonius (cfr. éd. Heiberg, vol. I, p. 4, l. 16), inexactement rapportée par Pappus.

7. Pappus reproduit ici inexactement le texte d'Apollonius qui dit : « en combien de points une section de cône ou une circonférence de cercle rencontre des sections opposées ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 3, l. 5, ou bien le texte grec de l'édition de Heiberg, vol. I, p. 4, l. 21.

consacré d'une manière plus développée aux minima et maxima [1], d'autre part celui qui concerne les sections de cône égales et semblables, celui qui se rapporte aux théorèmes qui servent aux déterminations et, enfin, celui qui est relatif aux problèmes de déterminations sur les coniques ».

Voilà donc ce que dit Apollonius ; mais, ce lieu à trois et à quatre lignes qu'il déclare, dans son troisième livre, n'avoir pas été traité complètement par Euclide, il n'aurait pu l'épuiser lui-même, et aucun autre ne l'aurait pu, [ni aurait pu ajouter quoi que ce soit à ce qui en avait été publié par Euclide] [2], avec le seul secours de ce qui avait été déjà démontré sur les coniques jusqu'à l'époque d'Euclide ; ce dont Apollonius témoigne d'ailleurs lui-même, en disant qu'il eût été impossible de traiter complètement ce lieu à défaut de ce qu'il avait été obligé de démontrer personnellement au préalable. [Au reste, Euclide, estimant qu'Aristée était digne d'éloges en raison de ce qu'il avait publié jusque-là sur les coniques, c'est, sans prendre les devants ni vouloir recommencer le même ouvrage, étant d'ailleurs très loyal, bienveillant comme on doit l'être à l'égard de tous ceux qui sont à même d'enrichir la science mathématique jusqu'à un certain point, ne blessant en aucune manière, correct et dépourvu de vanité comme lui, qu'il a écrit tout ce qu'il pouvait démontrer concernant ce lieu à l'aide des *Coniques* d'Aristée, et sans prétendre être parvenu au bout de la démonstration. On aurait pu le blâmer alors, tandis qu'on ne le peut plus maintenant, puisque Apollonius lui-même, en ayant laissé la plupart des questions incomplètes dans les coniques, n'a pas été appelé à en rendre compte. Il a toutefois pu ajouter certaines choses qui manquaient encore à ce lieu, parce qu'il avait eu l'imagination préalablement frappée par ce qui avait déjà été publié sur ce lieu par Euclide, et qu'il avait longtemps consacré ses loisirs aux disciples d'Euclide à Alexandrie, d'où il avait acquis une disposition d'esprit non dépourvue d'expérience] [3]. Voici du reste en quoi consiste ce

1. C'est-à-dire les lignes les plus courtes et les plus longues que l'on puisse mener d'un point donné à une section conique.

2. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 676, ll. 21-22.)

3. Le long passage un peu diffus que nous mettons entre crochets est une

lieu à trois et à quatre lignes auquel il est si fier d'avoir ajouté quelque chose, et dont il aurait dû savoir gré à celui qui l'a traité le premier : Si l'on mène d'un même point des lignes droites sous des angles donnés à la rencontre de trois lignes données de position, et si le rapport du rectangle compris sous deux des droites ainsi menées au carré de la dernière droite est donné, le point appartiendra à un lieu solide donné de position, c'est-à-dire à l'une des trois lignes coniques ([1]). D'autre part, si les droites sont menées sous des angles donnés à la rencontre de quatre droites données de position, et si le rapport du rectangle compris sous deux des droites menées au rectangle compris sous les deux droites menées restantes est donné, le point appartiendra pareillement à une section de cône donnée de position ([2]). [Car si elles sont amenées à la rencontre de deux droites seulement, il a été démontré que le lieu est plan ([3])] ([4]). Mais, si les droites sont amenées à la rencontre de plus de quatre droites ([5]), le point appartiendra à des lieux dont on n'a plus connaissance, et qui sont simplement appelés des lignes [sans en savoir davantage sur ce qu'elles sont ni sur les propriétés qu'elles possèdent] ([6]), dont on n'a fait la synthèse d'aucune, pas même de la première ([7]) qui, après qu'on eut montré qu'elle est utile, a semblé être la plus remarquable ([8]).

---

dissertation oiseuse que Hultsch attribue à un scoliaste assez versé cependant dans l'histoire des mathématiques (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 676, l. 25, à p. 678, l. 15).

1. Le lieu dit à trois droites s'exprime plus simplement comme étant celui des points tels que le produit de leurs distances à deux droites données soit équivalent au carré de leur distance à une troisième droite donnée.

2. Le lieu dit à quatre droites se dit plus simplement comme étant celui des points tels que le produit de leurs distances à deux droites données soit équivalent au produit de leurs distances à deux autres droites données.

3. Cas démontré par Apollonius dans une proposition de son traité des *Lieux plans;* proposition que Pappus a énoncée plus haut (voir p. 497).

4. La phrase mise entre crochets est une interpolation (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, pp. 678, l. 25).

5. Sous-entendu : ἐν δεδομέναις γωνίαις, sous des angles donnés.

6. La phrase mise entre crochets a été interpolée (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 678, l. 28).

7. La première qui suit la ligne constituant le lieu à quatre droites, c'est-à-dire celle du lieu à cinq droites.

8. Nous avons à justifier la manière dont nous rendons cette phrase. Elle se présente comme suit dans les manuscrits : ὧν μίαν οὐδὲ τὴν πρώτην καὶ συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν συντεθείκασιν ἀναδείξαντες χρησίμην οὖσαν. Commandin l'interprète : « earum unam, neque primam, et quae manifestatissima videtur,

Les propositions relatives à ces derniers lieux sont les suivantes :

Si l'on mène d'un point des droites sous des angles donnés à la rencontre de cinq droites donnés de position, et si le rapport du parallélipipède solide rectangle, compris sous trois des droites menées ainsi, au parallélipipède rectangle, compris sous deux des droites menées restantes et une droite donnée, est donné, le point sera lié à une ligne donnée de position. Et si c'est à la rencontre de six droites, et que le rapport donné est celui du solide que nous avons dit compris sous trois droites au solide compris sous les trois droites restantes, le point sera de nouveau lié à une ligne donnée de position. Enfin, si c'est à la rencontre de plus de six droites, il n'est plus permis de dire : « si le rapport de ce qui est compris sous quatre droites à ce qui est compris sous les droites restantes », parce qu'il n'y a rien qui soit compris sous plus de trois dimensions. Cependant, ceux qui nous précèdent de peu se sont autorisés à s'exprimer de cette manière ; mais, quand ils énoncent que le rectangle compris sous telles droites est multiplié par le carré de telle droite, ou par le rectangle compris sous telles autres droites, ils ne désignent rien moins qu'une chose inintel-

composuerunt, ostendentes utilem esse » (Cfr. *loc. cit.*, p. 251, ll. 34-35). Or, en faisant porter la négation οὐδέ uniquement sur τὴν πρώτην καὶ, et non pas sur μίαν, il est en contradiction avec le contexte dans lequel Pappus dit plus loin : « Mais, comme nous l'avons dit, la synthèse permettant de reconnaître la ligne n'a pas été faite pour un seul des lieux qui suivent celui à quatre droites » D'autre part, le sens de τὴν πρώτην a échappé à Hultsch, et il y voit une altération du mot τινα (celle qui) qui aurait d'abord été écrit par erreur τὴν ᾱ (la 1re), puis par nouvelle erreur, en toutes lettres : τὴν πρώτην (la première). Cette correction constitue une critique arbitraire qui a le défaut d'ailleurs de ne pas justifier l'abandon du mot καὶ. Et même, avec cette correction conjecturale à rejeter, la manière dont Hultsch traduit la phrase présente le contresens fait par Commandin, en disant : « Quarum unam quandam, quae nequaquam inter maxime conspicuas esse videtur, composuerunt, ejusque utilitatem demonstraverunt », c'est-à-dire : «dont ils ont construit une seule, qui n'est nullement parmi les plus remarquables, et ils ont montré son utilité ». Nous ajouterons encore, au sujet de cette simple phrase, que Paul Tannery a été amené à la citer dans une étude relative au problème du lieu à cinq droites résolu par Descartes, et qu'il l'interprète aussi dans le sens doublement négatif, tout en adoptant la correction arbitraire τινα de Hultsch ; mais il la traduit avec une liberté inadmissible en disant : « dont on n'a construit ni employé une seule, pas même celle qui pourrait sembler la plus clairement indiquée » (*Pour l'Histoire des lignes et surfaces courbes dans l'Antiquité*, dans *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883, t. VII, pp. 278-291 ; 1884, t. VIII, pp. 19-30 et 1884, t. VIII, pp. 101-112, ou bien : *Mémoires scientifiques* de Paul Tannery, t. II, pp. 1-47).

ligible [1]. Toutefois, pour ce qui concerne les propositions dont il a été question plus haut, il était loisible de les énoncer et de les démontrer en général au moyen des rapports composés, en s'exprimant comme suit pour ces dernières propositions : Si d'un point on amène sur des droites données de position des droites sous des angles donnés, et si l'on donne le rapport composé de celui d'une droite amenée à une droite amenée et de celui d'une autre droite amenée à une autre droite amenée et de celui d'une autre à une autre et de celui de la dernière à une droite donnée, dans le cas où les droites sont au nombre de sept, et de celui de la dernière à la dernière, dans le cas où les droites sont au nombre de huit, le point sera lié à une ligne donnée de position. Et il en sera de même quelle que soit la quantité paire ou impaire de droites [2]. Mais, comme nous l'avons dit, la synthèse [3] permettant de reconnaître la ligne n'a pas été faite pour un seul des lieux qui viennent après celui à quatre droites.

[Ceux qui examinent ces propositions y mettent peu d'application, comme les Anciens et ceux qui les ont le mieux traitées en particulier dans leurs écrits. Or, après avoir observé que la plupart sont attirés vers les éléments des mathématiques et les questions matérielles que présente la nature [4], j'en suis resté confus, et j'ai démontré des choses qui sont pour le moins beaucoup plus relevées et offrent une grande utilité .... [5] ; mais, afin de ne pas abandonner ce discours en déclarant cela les mains vides, je vais présenter au lecteur les choses suivantes :

Le rapport des révolutionnés parfaits [6] se compose du rap-

1. Première allusion à une géométrie pluridimensionnelle dont l'application à l'espace physique dépasse notre faculté représentative.

2. Sous-entendu : θέσει δεδομένων (données de position).

3. C'est-à-dire la construction géométrique.

4. C'est-à-dire les questions de physique.

5. Le texte présente ici une lacune. La phrase manquante faisait probablement allusion à un ouvrage particulier dans lequel l'interpolateur du passage que nous plaçons entre crochets, avait démontré la proposition remarquable dont il ne donne ici qu'un énoncé un peu obscur, mais dans lequel on reconnaît la proposition connue sous le nom de théorème de Guldin.

6. τῶν τελείων ἀμφοιστικῶν λόγος, le rapport des révolutionnés parfaits, c'est-à-dire le rapport de solides engendrés par la révolution complète d'une aire plane, limitée par des lignes polygonales ou courbes, autour d'un axe situé dans le même plan.

port des révolutionnants [1] et de celui des droites semblablement abaissées [2], des points barycentriques [3] situés dans ces révolutionnants, sur les axes [4], et le rapport des révolutionnés imparfaits [5] se compose du rapport des révolutionnants et de celui des arcs que décrivent les points barycentriques situés dans ces révolutionnants ; alors que le rapport de ces arcs se compose manifestement du rapport des droites abaissées et de celui des angles que comprennent les extrémités de celles-ci, en tant qu'il s'agisse des extrémités auprès des axes des révolutionnés [6]. Ces propositions, qui n'en constituent pour ainsi dire qu'une seule, embrassent des théorèmes aussi nombreux que variés sur les lignes, les surfaces et les solides, tous susceptibles d'une même démonstration, lesquels n'avaient jamais encore été démontrés, et qui le sont maintenant comme ceux qui se trouvent

---

1. τῶν ἀμφοισμάτων (λογος), le rapport des révolutionnants, c'est-à-dire le rapport d'aires planes, limitées par des lignes polygonales ou courbes, en révolution autour d'axes.

2. C'est-à-dire abaissées perpendiculairement sur les axes de rotation.

3. κεντροβαρικὰ σημεῖα, les points barycentriques, ou centres de gravité des aires planes en révolution.

4. Soient A, B les volumes de solides de révolution engendrés par les aires planes S, S', et soient α, β les distances des centres de gravité des aires S, S' aux axes de rotation, on a : $A = S \times 2\pi\alpha$ et $B = S' \times 2\pi\beta$, d'où : $\frac{A}{B} = \frac{S \times 2\pi\alpha}{S' \times 2\pi\beta}$, ou, comme l'énonce le texte : $\frac{A}{B} = \frac{S}{S'} \times \frac{\alpha}{\beta}$.

5. τῶν ἀτελῶν (αμφοιστικῶν λόγος), le rapport des révolutionnés imparfaits, c'est-à-dire les secteurs solides ou fuseaux engendrés par la révolution incomplète d'aires planes autour d'axes extérieurs situés dans leur plan.

6. Soient A, B les volumes des solides ou fuseaux engendrés par la révolution incomplète des aires planes S, S', et soient α, β les distances des centres de gravité de ces aires aux axes de rotation, on a : $A = S \times \frac{2\pi}{n}\alpha$ et $B = S' \times \frac{2\pi}{n'}\beta$, d'où : $\frac{A}{B} = \frac{S \times \frac{2\pi}{n}\alpha}{S' \times \frac{2\pi}{n'}\beta}$ ou, comme l'exprime le texte : $\frac{A}{B} = \frac{S}{S'} \times \frac{\text{arc décrit à la distance } \alpha}{\text{arc décrit à la distance } \beta}$.

Ces expressions du rapport des volumes de corps de révolution complète ou partielle font présumer que les Anciens ont connu et peut-être démontré dans un ouvrage perdu le théorème dit de Guldin énonçant que le volume d'un solide de révolution est égal à l'aire de la section génératrice, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité autour de l'axe fixe ; théorème de cubature qui se base lui-même sur le théorème de quadrature énonçant que l'aire d'une surface de révolution est égale à la longueur de la génératrice, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de cette génératrice autour de l'axe de révolution.

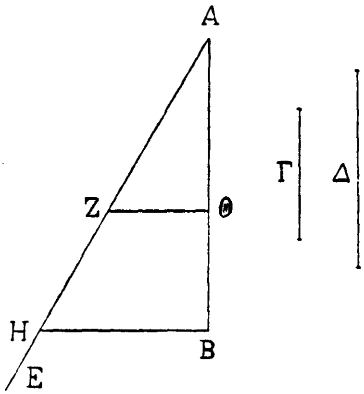
dans le douzième livre des *Éléments* qui s'y rapportent [1])] [2].

Les huit livres des *Coniques* d'Apollonius possèdent quatre cent quatre-vingt-sept théorèmes, ou figures, et soixante-dix lemmes [3].

LEMMES SUR LES LIVRES DE LA SECTION DE RAPPORT ET DE LA SECTION D'AIRE [4].

I.

Proposition 1. — *Couper une droite donnée dans un rapport donné.*



Que la droite donnée soit AB, le rapport donné celui de la droite Γ à la droite Δ et qu'il faille couper la droite AB dans ce rapport de la droite Γ à la droite Δ. Inclinons une droite AE sous un angle quelconque sur la droite AB; découpons une droite AZ égale à la droite Γ et une droite ZH égale à la droite Δ, et menons la droite ZΘ parallèle à

1. C'est-à-dire dans le livre XIII des *Éléments* d'Euclide dont les propositions sont principalement consacrées à la mesure des solides et à la comparaison de leurs mesures.

2. Le passage que nous mettons entre crochets, comme Hultsch dans son édition critique du texte, présente tous les caractères d'une interpolation. Déjà fort suspect par une langue moins pure, un verbe obscur et des expressions non employées par Pappus, il traite un sujet qui n'a aucun rapport avec les considérations que Pappus consacre en cet endroit aux *Coniques* d'Apollonius ; considérations qu'il interrompt même d'une manière intempestive. Ensuite, ce passage est absent dans la première version latine de Commandin, faite probablement d'après un manuscrit n'ayant pas été interpolé, et n'apparaît que dans la seconde édition de 1660 soignée par Manolessius. C'est donc une erreur que d'attribuer la paternité du théorème de Guldin à Pappus, alors que le passage appartient à un géomètre malheureusement inconnu, dont la valeur ne peut qu'étonner, ayant dû vivre plus ou moins longtemps après Pappus, donc dans la période de décadence de la science hellène.

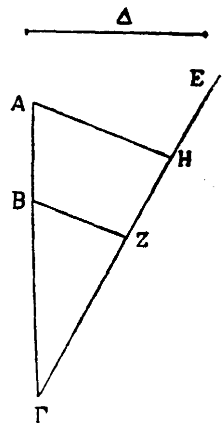
3. Pappus ne veut pas signifier que ces soixante-dix lemmes font partie intégrante des huit livres des *Coniques*, puisqu'on ne les y trouve pas ; mais que l'ensemble de ces livres a (ἔχει) soixante-dix lemmes qui s'y rapportent en vue d'éclaircir leurs propositions, et qui sont dus à divers géomètres commentateurs.

4. Ce titre, absent dans le texte grec, est ajouté par Hultsch dans sa version latine (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 685).

la droite de jonction BH. Dès lors, puisque la droite AΘ est à la droite ΘB comme la droite AZ est à la droite ZH ; que la droite AZ est égale à la droite Γ et la droite ZH égale à la droite Δ, il s'ensuit que la droite AΘ est à la droite ΘB comme la droite Γ est à la droite Δ ; donc, la droite est divisée au point Θ [1] ; ce qu'il fallait démontrer.

II.

Proposition 2. — Trois droites AB, BΓ, Δ étant données, en trouver une autre qui soit à la droite Δ comme la droite AB est à la droite BΓ.



Inclinons de nouveau une droite ΓE sous un angle quelconque et posons la droite ΓZ égale à la droite Δ. Menons la droite de jonction BZ, et menons-lui la parallèle HA. Il se fait donc de nouveau que la droite HZ est à la droite ΓZ, c'est-à-dire à la droite Δ, comme la droite AB est à la droite BΓ ; par conséquent, on a trouvé la droite ZH.

Si la troisième droite était donnée, nous trouverions pareillement la quatrième.

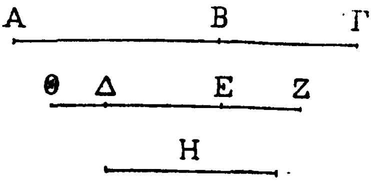
III.

Proposition 3. — Que la droite AB soit à la droite BΓ dans un rapport plus grand que celui de la droite ΔE à la droite EZ ; je dis que, par composition, la droite AΓ est aussi à la droite ΓB dans un rapport plus grand que celui de la droite ΔZ à la droite ZE.

En effet, faisons en sorte qu'une autre droite H soit à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ. En conséquence, la droite H est à la droite EZ dans un rapport plus grand que celui de la droite ΔE à la droite EZ ; donc, la droite H est plus grande que la droite ΔE [2]. Posons la droite ΘE égale à la

1. Sous-entendu : εἰς τὸν δοθέντα λόγον, dans le rapport donné.

2. Soit : $\frac{AB}{B\Gamma} > \frac{\Delta E}{EZ}$. Posons : $\frac{H}{EZ} = \frac{AB}{B\Gamma}$; donc : $\frac{H}{EZ} > \frac{\Delta E}{EZ}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 10, énoncée p. 36, n. 1) : $H > \Delta E$.

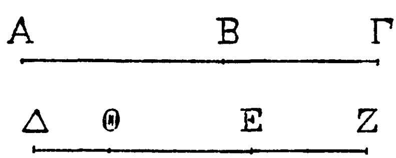


droite H. Dès lors, puisque la droite ΘE est à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ, il s'ensuit que, par composition, la droite ZΘ est à la droite ZE comme la droite AΓ est à la droite BΓ. Or, le rapport de la droite ΘZ à la droite ZE [est plus grand que celui de la droite ΔZ à la droite ZE] (1) ; donc, le rapport de la droite AΓ à la droite ΓB est aussi plus grand que celui de la droite ΔZ à la droite ZE (2).

IV.

Proposition 4. — Que le rapport de la droite AB à la droite BΓ soit, au contraire, plus petit que celui de la droite ΔE à la droite EZ ; je dis que (3) le rapport de la droite AΓ à la droite ΓB est aussi plus petit que celui de la droite ΔZ à la droite EZ.

En effet, puisque le rapport de la droite AB à la droite BΓ est, au contraire, plus petit que celui de la droite ΔE à la droite EZ, si nous faisons en sorte qu'une autre droite soit à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ, cette droite sera plus petite que la droite ΔE. Que ce soit la droite ΘE. Dès lors, on a la droite ΘZ à la droite ZE comme la droite AΓ est à la droite ΓB. Or, le rapport de la droite ΘZ à la droite ZE est plus petit que celui de la droite ΔZ à la droite ZE ; donc, le rapport



1. Restauration relevée par Hultsch dans un des manuscrits (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 686, l. 2).

2. Posons : ΘE = H ; donc, d'après la note 2 de la page 513, on a : $\frac{\Theta E}{EZ} = \frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{\Theta E + EZ}{EZ} = \frac{AB + B\Gamma}{B\Gamma}$ ou : $\frac{\Theta Z}{EZ} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$. Or, d'après la dernière relation de la note susdite, on a : $\Theta E > \Delta E$, d'où : $\Theta Z > \Delta Z$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6) : $\frac{\Theta Z}{ZE} > \frac{\Delta Z}{ZE}$; donc, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} > \frac{\Delta Z}{ZE}$.

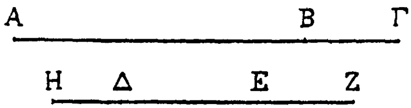
3. Sous-entendu : κατὰ σύνθεσιν, par composition.

de la droite AΓ à la droite ΓB est plus petit que celui de la droite ΔZ à la droite ZE [1].

V.

Proposition 5. — Que le rapport de la droite AB à la droite BΓ soit de nouveau plus grand que celui de la droite ΔE à la droite EZ ; je dis que, par permutation, le rapport de la droite AB à la droite ΔE est aussi plus grand que celui de la droite BΓ à la droite EZ.

En effet, faisons en sorte qu'une autre droite soit à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ. Il est clair qu'elle sera plus grande que la droite ΔE. Que ce soit la droite HE. En conséquence, par permutation, la droite BΓ est à la droite EZ comme la droite AB est à la droite EH. Mais, le rapport de la droite AB à la droite ΔE est plus grand que celui de la droite AB à la droite EH, c'est-à-dire que celui de la droite BΓ à la droite EZ ; donc, le rapport de la droite AB à la droite ΔE est aussi plus grand que celui de la droite BΓ à la droite EZ [2]. Pour les mêmes raisons, si le rapport est plus petit, je dis qu'il le sera aussi par permutation. En effet, une certaine droite sera à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ ; je dis que cette droite est plus petite que la droite ΔE, et les choses restantes sont les mêmes [3].



1. Soit : $\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{\Delta E}{EZ}$. Soit $\Theta E < \Delta E$ tel que l'on ait : $\frac{\Theta E}{EZ} = \frac{AB}{B\Gamma}$. Dès lors, $\frac{\Theta E + EZ}{EZ} = \frac{AB + B\Gamma}{B\Gamma}$, ou : $\frac{\Theta Z}{EZ} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$. Or, $\Theta E + EZ < \Delta E + EZ$ ou : $\Theta Z < \Delta Z$, d'où : $\frac{\Theta Z}{EZ} < \frac{\Delta Z}{EZ}$, d'où : $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} < \frac{\Delta Z}{EZ}$.

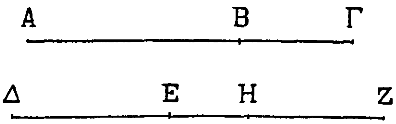
2. Si $\frac{AB}{B\Gamma} > \frac{\Delta E}{EZ}$, posons : $\frac{HE}{EZ} = \frac{AB}{B\Gamma}$; donc (prop. 3) : $HE > \Delta E$. Dès lors, $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{HE}$. Or (Euclide, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6) : $\frac{AB}{\Delta E} > \frac{AB}{HE}$, d'où, comme le texte : $\frac{AB}{\Delta E} > \frac{B\Gamma}{EZ}$.

3. Même raisonnement si l'on a : $\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{\Delta E}{EZ}$ (Voir livre III, p. 37, n. 1) où cette relation est démontrée d'une manière un peu différente.

VI.

Proposition 6. — Que le rapport de la droite AΓ à la droite ΓB soit plus grand que celui de la droite ΔZ à la droite ZE; je dis que, par conversion (1), le rapport de la droite ΓA à la droite AB est plus petit que celui de la droite ZΔ à la droite ΔE.

En effet, faisons en sorte que la droite ΔZ soit à une certaine autre droite comme la droite AΓ est à la droite ΓB; elle sera donc ainsi à une droite plus petite que la droite ZE. Que ce soit à la droite ZH. Dès lors, par conversion, la droite ZΔ est à la droite ΔH comme la droite ΓA est à la droite AB. Or, le rapport de la droite ZΔ à la droite ΔH est plus petit que celui de la droite ZΔ à la droite ΔE; [donc, le rapport de la droite ΓA à la droite AB est aussi plus petit que celui de la droite ZΔ à la droite ΔE] (2).



Pareillement aussi, que le rapport de la droite AΓ à la droite ΓB soit plus petit que celui de la droite ΔZ à la droite ZE. Dès lors, par conversion, le rapport de la droite ΓA à la droite AB est plus grand que celui de la droite ΔZ à la droite ΔE; car la droite ΔZ sera à une grandeur plus grande que la droite ZE comme la droite AΓ est à la droite ΓB; et les choses restantes sont manifestes (3).

---

1. ἀναστρέψαντι. Euclide, liv. V, déf. 17 : « Il y a conversion de raison quand on compare l'antécédent à l'excès de l'antécédent sur le conséquent » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 238.

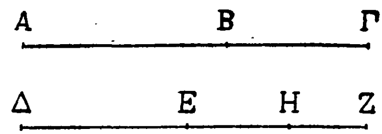
2. Reconstitution de Scaliger en marge du manuscrit de Leyde.

3. On a en première hypothèse : $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} > \frac{\Delta Z}{ZE}$. Soit $ZH < ZE$ tel que l'on ait : $\frac{\Delta Z}{ZH} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$. Dès lors, par conversion : $\frac{\Delta Z}{\Delta Z - ZH} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma - \Gamma B}$ ou : $\frac{\Delta Z}{\Delta H} = \frac{A\Gamma}{AB}$. Or, $\frac{\Delta Z}{\Delta H} < \frac{\Delta Z}{\Delta E}$; donc : $\frac{A\Gamma}{AB} < \frac{\Delta Z}{\Delta E}$. On raisonnera de même dans la seconde hypothèse : $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} < \frac{\Delta Z}{ZE}$.

VII.

PROPOSITION 7. — Que le rapport de la droite AB à la droite BΓ soit de nouveau plus grand que celui de la droite ΔE à la droite EZ; je dis que, par inversion (1), le rapport de la droite ΓB à la droite BA est plus petit que celui de la droite ZE à la droite EΔ.

En effet, faisons en sorte que la droite ΔE soit à une certaine droite comme la droite AB est à la droite BΓ. Elle sera ainsi à une droite plus petite que la droite EZ. Qu'elle soit à une droite EH. Dès lors, par inversion, la droite EH est à la droite EΔ comme la droite ΓB est à la droite BA. Or, le rapport de la droite HE à la droite ΔE est plus petit que celui de la droite ZE à la droite EΔ ; [donc, le rapport de la droite ΓB à la droite BA est aussi plus petit que celui de la droite ZE à la droite EΔ] (2).



Pareillement d'ailleurs, si le rapport de la droite AB [à la droite BΓ] (3) est plus petit que celui de la droite ΔE à la droite EZ, par inversion, le rapport de la droite ΓB à la droite BA est plus grand que celui de la droite ZE à la droite ΔE ; car la droite ΔE sera à une droite plus grande que la droite EZ comme la droite AB est à la droite ΔE, et les choses restantes sont manifestes (4).

Il résulte encore manifestement de ce qui précède que, si le rapport de la droite AB à la droite BΓ est plus grand que celui de la droite ΔE à la droite EZ, le rapport de la droite ZE à la droite EΔ est aussi plus grand que celui de la droite ΓB à la droite BA, et que, si le rapport de la droite AB à la droite BΓ

1. ἀνάπαλιν, par inversion. EUCLIDE, liv. V, déf. 14 : « La raison est inverse, quand on compare le conséquent comme antécédent à l'antécédent comme conséquent ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 237.

2. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 256, l. 8).

3. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 256, l. 11).

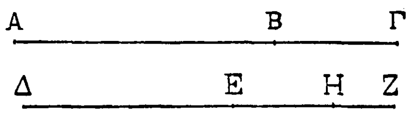
4. On a en première hypothèse : $\frac{AB}{B\Gamma} > \frac{\Delta E}{EZ}$. Soit $EH < EZ$ tel que l'on ait : $\frac{\Delta E}{EH} = \frac{AB}{\Gamma B}$. Dès lors on a : $\frac{EH}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{AB}$. Or, $\frac{EH}{\Delta E} < \frac{EZ}{\Delta E}$; donc : $\frac{B\Gamma}{AB} < \frac{EZ}{\Delta E}$. Même raisonnement dans l'hypothèse : $\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{\Delta E}{EZ}$.

est plus petit que celui de la droite ΔE à la droite EZ, le rapport de la droite ZE à la droite EΔ est aussi plus petit que celui de la droite ΓB à la droite BA.

VIII.

PROPOSITION 8. — Que le rapport de la droite AB à la droite ΔE soit plus grand que celui de la droite BΓ à la droite EZ ; je dis que le rapport de la droite AB à la droite ΔE est aussi plus grand que celui de la droite AΓ à la droite ΔZ.

En effet, faisons en sorte que le rapport de la droite BΓ soit à une certaine grandeur comme la droite AB est à la droite ΔE. Elle sera à une grandeur plus petite que la droite EZ. Qu'elle soit ainsi à la droite HE. En conséquence, la droite entière AΓ est aussi à la droite entière ΔH comme la droite AB est à la droite ΔE. Or, le rapport de la droite AΓ à la droite ΔH est plus grand que son rapport à la droite ΔZ ; donc, le rapport de la droite AB à la droite ΔE est aussi plus grand que celui de la droite AΓ à la droite ΔZ (1).



Et il est clair que le rapport de la droite entière AΓ à la droite entière ΔZ est plus petit que celui de la droite AB à la droite ΔE. Et si le rapport des parties est plus petit, celui des entières sera plus grand (2).

---

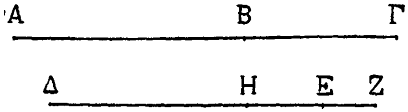
1. On a par hypothèse : $\frac{AB}{\Delta E} > \frac{B\Gamma}{EZ}$. Soit HE < EZ de manière à avoir : $\frac{B\Gamma}{HE} = \frac{AB}{\Delta E}$, d'où (EUCLIDE, liv. V, prop. 12, énoncée p. 67, n. 1) : $\frac{B\Gamma + AB}{HE + \Delta E} = \frac{AB}{\Delta E}$ ou, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{\Delta H} = \frac{AB}{\Delta E}$. Or, on a : $HE + \Delta E < EZ + \Delta E$ ou : $\Delta H < \Delta Z$; donc : $\frac{A\Gamma}{\Delta H} > \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, d'où, comme le texte : $\frac{AB}{\Delta E} > \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.

2. Phrase exprimant trop succinctement que, si le rapport de parties AB, ΔE des deux droites AΓ, ΔZ est plus petit que le rapport des autres parties BΓ, EZ, c'est-à-dire si l'on a : $\frac{AB}{\Delta E} < \frac{B\Gamma}{EZ}$, le rapport des droites entières AΓ, ΔZ sera plus grand que celui des parties AB, ΔE, c'est-à-dire que l'on aura : $\frac{AB + B\Gamma}{\Delta E + EZ} > \frac{AB}{\Delta E}$ ou : $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} > \frac{AB}{\Delta E}$.

IX.

Proposition 9. — Que le rapport de la droite entière AΓ à la droite entière ΔZ soit de nouveau plus grand que celui de la droite AB à la droite ΔE ; je dis que le rapport de la droite restante BΓ à la droite restante EZ est aussi plus grand que celui de la droite AΓ à la droite ΔZ.

[En effet, faisons en sorte que] [1] la droite AB soit à une droite ΔH comme la droite AΓ est à la droite ΔZ ; il s'ensuit que la droite restante BΓ est à la droite restante HZ comme la droite AΓ est à la droite ΔZ. Or, le rapport de la droite BΓ à la [droite EZ est plus grand que son rapport à la droite] [2] ZH ; donc, le rapport de la droite BΓ à la droite EZ est aussi plus grand que celui de la droite AΓ à la droite ΔZ [3]. Et si le rapport de la droite entière à la droite entière est plus petit, celui des droites restantes est plus petit [4].



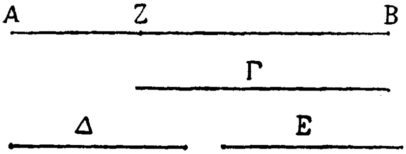
X.

Proposition 10. — Que la droite AB soit plus grande que la droite Γ et la droite Δ égale à la droite E ; je dis que la droite AB a avec la droite Γ un rapport plus grand que la droite Δ avec la droite E.

---

1. πεποιήσθω γάρ, lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 257, l. 2).
2. EZ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ZH, lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 257, l. 5).
3. Soit : $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} > \frac{AB}{\Delta E}$, et soit : $\Delta H < \Delta E$ (I) de manière à avoir : $\frac{AB}{\Delta H} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, d'où : $\frac{A\Gamma - AB}{\Delta Z - \Delta H} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, ou : $\frac{B\Gamma}{HZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ (II). Or, (I) donne : $\Delta Z - \Delta H > \Delta Z - \Delta E$, ou : $HZ > EZ$; donc : $\frac{B\Gamma}{EZ} > \frac{B\Gamma}{HZ}$, d'où (II) donne : $\frac{B\Gamma}{EZ} > \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.
4. C'est-à-dire que, si l'on a réciproquement : $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} < \frac{AB}{\Delta E}$, on a, en raisonnant de même : $\frac{B\Gamma}{EZ} < \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.

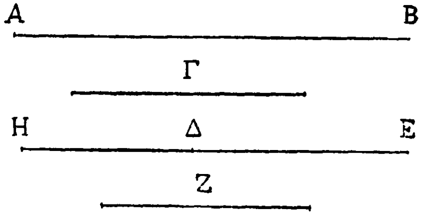
En effet, posons la droite BZ égale à la droite Γ; il s'ensuit que la droite Δ est à la droite E comme la droite BZ est à la droite Γ. Mais, la droite AB a avec la droite Γ un rapport plus grand que la droite BZ avec la droite Γ; donc, la droite AB a aussi avec la droite Γ un rapport plus grand que la droite Δ avec la droite E. Et il est manifeste que, si la droite AB est plus petite que la droite Γ, la droite AB a avec la droite Γ, par suite d'inversion, un rapport plus petit que la droite Δ avec la droite E.



XI.

Proposition 11. — Mais, que la droite AB soit plus grande que la droite Γ et la droite ΔE plus petite que la droite Z; je dis que la droite AB a avec la droite Γ un rapport plus grand que la droite ΔE avec la droite Z.

La chose est manifeste et n'exige pas de démonstration; car, si le rapport de la droite AB à la droite Γ est plus grand que celui de la droite ΔE à la droite Z lorsque la droite ΔE est égale à la droite Z (1), ce rapport sera, à fortiori, plus grand lorsque la droite ΔE est plus petite que la droite Z. Cela s'établit toutefois par démonstration comme suit : Puisque la droite AB est plus grande que la droite Γ, si on fait en sorte qu'une autre droite soit à la droite Z comme la droite AB est à la droite Γ, cette droite sera plus grande que la droite Z et, par suite, plus grande aussi que la droite ΔE. Que ce soit la droite HE. En conséquence, la droite HE a avec la droite Z un rapport plus grand que la droite ΔE avec la droite Z. Mais, la droite AB est à la droite Γ comme la droite HE est à la droite Z; donc, la



1. Voir proposition 10.

droite AB a aussi avec la droite Γ un rapport plus grand que la droite ΔE avec la droite Z.

Et il est clair que, dans le cas de plus petit, on aura toujours plus petit (1). Il est clair aussi que le rectangle compris sous les droites AB, Z est plus grand que celui qui est compris sous les droites Γ, ΔE ; car il équivaut au rectangle compris sous les droites Γ, EH, lequel est plus grand que celui qui est compris sous les droites Γ, ΔE (2).

XII.

Proposition 12. — Soit la droite AB et coupons-la au point Γ ; je dis que tous les points situés entre les points A, Γ partagent la droite AB dans des rapports plus petits que celui de la droite AΓ à la droite ΓB, et que tous ceux qui sont situés entre les points Γ, B la partagent dans des rapports plus grands.

En effet, prenons les points Δ, E de part et d'autre du point Γ. Dès lors, puisque la droite ΔA est plus petite que la droite AΓ et la droite ΔB plus grande que la droite BΓ, le rapport de la droite ΔA à la droite AΓ est plus petit que celui de la droite ΔB à la droite BΓ (3) ; donc, par permutation, le rapport de la droite AΔ à la droite ΔB est plus petit que celui de la droite AΓ à la droite ΓB (4). On démontrera de la même manière pour tous les points situés entre les points A, Γ.

Derechef, puisque la droite EA est plus grande que la droite AΓ et la droite EB plus grande que la droite BΓ, le rapport de la droite EA à la droite AΓ sera donc plus grand que celui de la droite EB à la droite BΓ. En conséquence, par permutation,

1. C'est-à-dire que dans le cas $AB < \Gamma$ et $\Delta E > Z$, on a : $\frac{AB}{\Gamma} < \frac{\Delta E}{Z}$.

2. C'est-à-dire que dans le cas $AB > \Gamma$ et $\Delta E < Z$, puisque l'on a : $\frac{AB}{\Gamma} = \frac{HE}{Z}$, on a : $AB \times Z = HE \times \Gamma$. Or, on a : $HE > Z > \Delta E$; donc : $HE \times \Gamma > \Delta E \times \Gamma$ (voir aussi plus loin, prop. 16) ; donc : $AB \times Z > \Delta E \times \Gamma$.

3. Voir proposition 11.

4. Voir proposition 5.

le rapport de la droite AE à la droite EB est plus grand que celui de la droite AΓ à la droite ΓB. On démontrera de la même manière pour tous les autres points pris entre les points Γ, B.

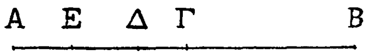
XIII.

Proposition 13. — Si l'on a une droite AB, et si on la coupe en deux parties égales au point Γ, ce point Γ est celui qui, parmi tous les points qu'on prendra, découpe le plus grand rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB.

En effet, si l'on prend le point Δ, il se fait que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB, conjointement avec le carré de la droite ΓΔ, équivaut au carré de la droite AΓ, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB ; de sorte que le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB est plus grand [que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB] (1). Et de même pour les autres points (2).

Proposition 14. — Mais, je dis, en outre, qu'un point plus rapproché du point Γ donne continuellement lieu à une aire plus grande que celle à laquelle donne lieu un point plus éloigné.

Prenons encore un autre point E entre les points A, Δ ; il faut démontrer que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB est plus grand que celui qui est compris sous les droites AE, EB.



En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB, conjointement avec le carré de la droite ΔΓ, équivaut au carré de la droite AΓ, et que le rectangle compris sous les droites AE, EB, conjointement avec le carré de la droite ΓE, équivaut aussi au carré de la droite AΓ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB, conjointement avec le carré de la droite ΔΓ, équivaut aussi au rectangle compris

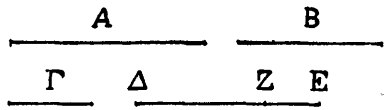
1. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 694, l. 15).
2. La droite AB étant divisée en parties égales en Γ et inégales en Δ, on a (Euclide, liv. II, prop. 5 énoncée p. 233, n. 3) : $A\Delta \times \Delta B + \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{A\Gamma}^2 = A\Gamma \times \Gamma B$, d'où : $A\Gamma \times \Gamma B > A\Delta \times \Delta B$.

sous les droites AE, EB conjointement avec le carré de la droite ΓE; expressions dans lesquelles le carré de la droite ΔΓ est plus petit que le carré de la droite ΓE; par conséquent, le rectangle restant compris sous les droites AΔ, ΔB est plus grand que celui qui est compris sous les droites AE, EB [1].

XIV.

Proposition 15. — Si l'on a la droite A, conjointement avec la droite B, égale à la droite Γ conjointement avec la droite ΔE, et la droite B plus petite que la droite ΔE, la droite A sera plus grande que la droite Γ.

En effet, posons la droite ΔZ égale à la droite B ; la droite A, conjointement avec la droite ΔZ, est donc égale à la droite ΔE conjointement avec la droite Γ. Retranchons de part et d'autre la droite ΔZ ; il s'ensuit que la droite A est égale aux droites Γ, ZE ; de sorte que la droite A est plus grande que la droite Γ [2].



XV.

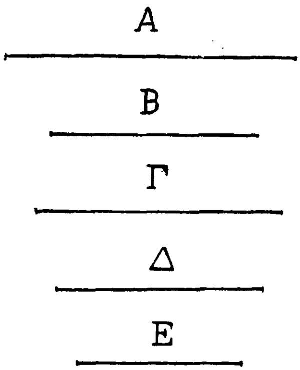
Proposition 16. — Que la droite A ait avec la droite B un rapport plus grand que la droite Γ avec la droite Δ ; je dis que le rectangle compris sous les droites A, Δ est plus grand que celui qui est compris sous les droites B, Γ.

En effet, faisons en sorte que la droite Γ soit à une droite E comme la droite A est à la droite B. Dès lors, la droite Γ a aussi avec la droite E un rapport plus grand qu'avec la droite Δ ; de sorte que la droite E est plus petite que la droite Δ. Que la droite A soit la hauteur commune, il s'ensuit que le rectangle

1. On a, comme dans la note précédente : $A\Delta \times \Delta B + \overline{\Delta\Gamma}^2 = \overline{A\Gamma}^2$ et $AE \times EB + \overline{\Gamma E}^2 = \overline{A\Gamma}^2$; d'où : $A\Delta \times \Delta B + \overline{\Delta\Gamma}^2 = AE \times EB + \overline{\Gamma E}^2$. Or, $\overline{\Delta\Gamma}^2 < \overline{\Gamma E}^2$; donc : $A\Delta \times \Delta B > AE \times EB$.

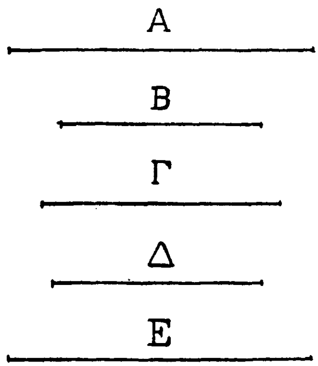
2. On a par hypothèse : $A + B = \Gamma + \Delta E$ et $B < \Delta E$. Posons : $\Delta Z = B$; donc : $A + \Delta Z = \Gamma + \Delta E$, d'où : $A = \Gamma + \Delta E - \Delta Z = \Gamma + ZE$, d'où : $A > \Gamma$.

compris sous les droites E, A est plus petit que celui qui est compris sous les droites A, Δ. Mais, le rectangle compris sous les droites A, E équivaut au rectangle compris sous les droites B, Γ ; donc, le rectangle compris sous les droites B, Γ est plus petit que celui qui est compris sous les droites A, Δ ; de sorte que le rectangle compris sous les droites A, Δ est plus grand que celui qui est compris sous les droites B, Γ (1).



Pareillement, si le rapport devient plus petit, l'aire sera aussi plus petite que l'aire (2).

Mais, que le rectangle compris sous les droites A, Δ soit, par contre, plus grand que celui qui est compris sous les droites B, Γ ; je dis que la droite A a avec la droite B un rapport plus grand que la droite Γ avec la droite Δ.



En effet, posons le rectangle compris sous les droites A, Δ équivalent à celui qui est compris sous les droites B, E ; le rectangle compris sous les droites B, E devient donc plus grand que celui qui est compris sous les droites B, Γ ; de sorte que la droite E est aussi plus grande que la droite Γ. Or, la droite E est à la droite Δ comme la droite A est à la droite B, et la droite E a avec la droite Δ un rapport plus grand que la droite Γ avec la droite Δ ; donc, la droite A a aussi avec la droite B [un rapport plus grand que la droite Γ

1. On a par hypothèse : $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}$. Soit E tel que l'on ait : $\frac{\Gamma}{E} = \frac{A}{B}$ (I), d'où : $\frac{\Gamma}{E} > \frac{\Gamma}{\Delta}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 10, énoncée p. 36, n. 1) : $E < \Delta$, d'où : $A \times E < A \times \Delta$. Or, la relation (I) donne : $A \times E = B \times \Gamma$; donc, comme le texte : $A \times \Delta > B \times \Gamma$.

2. C'est-à-dire que si l'on a : $\frac{A}{B} < \frac{\Gamma}{\Delta}$, on a aussi : $A \times \Delta < B \times \Gamma$.

avec la droite Δ] (1) (2). Et les choses se présentent pareillement pour l'inverse (3).

XVI.

Proposition 17. — Soient deux droites AB, BΓ ; que la droite BΔ soit la moyenne proportionnelle des droites AB, BΓ et posons la droite ΔE égale à la droite AΔ ; je dis que la droite ΓE est l'excédent dont la somme des droites AB, BΓ surpasse la droite qui est en puissance (4) de quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ (5).

En effet, puisque la somme des droites AB, BΓ surpasse la somme des droites AB, BE de la droite ΓE, il s'ensuit que la droite ΓE est l'excédent dont la somme des droites AB, BΓ surpasse la somme des droites

AB, BE. Or, la somme des droites AB, BE constitue deux droites BΔ, et deux droites BΔ sont en puissance de quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ ; donc, la droite ΓE est l'excédent dont la somme des droites AB, BΓ surpasse la droite qui est en puissance de quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ (6).

XVII.

Proposition 18. — Que la droite BΔ soit de nouveau la moyenne (7) des droites AB, BΓ et posons la droite ΔE égale à

---

1. Restauration due à Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 260, commentarius, l. 13).
2. On a par hypothèse : $A \times \Delta > B \times \Gamma$. Posons : $A \times \Delta = B \times E$ (I) ; donc : $B \times E > B \times \Gamma$, ou : $E > \Gamma$ (II). Or, (I) donne (Euclide, liv. IV, prop. 16, énoncée p. 44, n. 3) : $\frac{E}{\Delta} = \frac{A}{B}$, et (II) donne : $\frac{E}{\Delta} > \frac{\Gamma}{\Delta}$; donc : $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}$.
3. C'est-à-dire que, si l'on a : $A \times \Delta < B \times \Gamma$, on aura : $\frac{A}{B} < \frac{\Gamma}{\Delta}$.
4. τῆς δυναμένης, de (la droite) qui est en puissance, c'est-à-dire dont le carré équivaut à quatre rectangles $AB \times B\Gamma$.
5. Il faut donc démontrer la relation : $\Gamma E = AB + B\Gamma - 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.
6. On a : $AB + B\Gamma = AB + BE + \Gamma E$; donc : $\Gamma E = AB + B\Gamma - (AB + BE)$ (I). Or, $AB + BE = A\Delta + \Delta B + BE$, et l'on a : $\Delta E = A\Delta$; donc : $AB + BE = \Delta E + \Delta B + BE = 2B\Delta$. Or, on a par hypothèse : $\overline{B\Delta}^2 = AB \times B\Gamma$, d'où : $B\Delta = \sqrt{AB \times B\Gamma}$; donc : $AB + BE = 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$, d'où (I) devient, comme dans le texte : $\Gamma E = AB + B\Gamma - 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.
7. Sous-entendu ἀνάλογον, proportionnelle.

la droite AΔ ; je dis que la droite ΓE se compose de la somme des droites AB, BΓ et de la droite qui est en puissance de quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ (1).

En effet, puisque la droite ΓE est la somme des droites ΓΔ, ΔE, et que la droite AΔ est égale à la droite ΔE, il s'ensuit que la droite ΓE est la somme des droites AΔ, ΔΓ, c'est-à-dire la somme des droites AB, BΓ et de deux droites BΔ. Or, deux droites BΔ sont en puissance de quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ ; donc, la droite ΓE est la somme de la somme des droites AB, BΓ et de la droite qui est en puissance de quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ (2).

XVIII.

Proposition 19. — Que la droite BΔ soit de nouveau la moyenne proportionnelle des droites AB, BΓ, et posons la droite ΔE égale à la droite ΓΔ ; je dis que la droite AE est l'excédent dont la somme des droites AB, BΓ surpasse la droite qui est en puissance de quatre rectangles compris sous les droites AB, BΓ (3).

En effet, puisque la somme des droites AB, BΓ dépasse la somme des droites EB, BΓ de la droite AE, et que la somme des droites EB, BΓ constitue deux droites BΔ, c'est-à-dire la droite qui est en puissance de quatre rectangles compris sous les droites AB, BΓ, il s'ensuit que la droite AE est l'excédent dont la somme des droites AB, BΓ dépasse la droite qui est en puissance de quatre rectangles compris sous les droites AB, BΓ (4).

---

1. Il faut démontrer que l'on a : $\Gamma E = AB + B\Gamma + 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.

2. On a : $\Gamma E = \Gamma\Delta + \Delta E$. Or, on a posé : $\Delta E = A\Delta$; donc : $\Gamma E = \Gamma\Delta + A\Delta = AB + B\Gamma + 2B\Delta$. Or, on a par hypothèse : $\overline{B\Delta}^2 = AB \times B\Gamma$, d'où : $B\Delta = \sqrt{AB \times B\Gamma}$; donc : $\Gamma E = AB + B\Gamma + 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.

3. Il faut démontrer la relation : $AE = AB + B\Gamma - 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.

4. On a : $AB + B\Gamma = EB + B\Gamma + AE$, d'où : $AE = AB + B\Gamma - (EB + B\Gamma)$ (I). Or, $EB + B\Gamma = E\Delta + \Delta\Gamma + 2B\Gamma$, et l'on a posé : $\Delta E = \Delta\Gamma$; donc : $EB + B\Gamma =$

XIX.

Proposition 20. — Que la droite BΔ soit de nouveau la moyenne proportionnelle des droites AB, BΓ et posons la droite ΔE égale à la droite ΓΔ ; je dis que la droite AE se compose de la somme des droites AB, BΓ et de la droite qui est en puissance de quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ (1).

En effet, puisque la droite AE se compose des droites AΔ, ΔE, et que la droite ΔE est égale à la droite ΓΔ, il s'ensuit que la droite AE se compose des droites AΔ, ΔΓ, c'est-à-dire de la somme des droites AB, BΓ et de deux droites BΔ. Or, deux droites BΔ sont en puissance de quatre rectangles compris sous les droites AB, BΓ ; donc, la droite AE se compose de la somme des droites AB, BΓ et de la droite qui est en puissance de quatre rectangles compris sous les droites AB, BΓ (2).

[Ces lemmes sont invoqués pour la section de rapport, et ils le sont aussi, mais d'une manière différente, pour la section d'aire] (3).

PROBLÈME RELATIF AU SECOND LIVRE DE LA SECTION DE RAPPORT, UTILE POUR LA RÉCAPITULATION (4) DU TREIZIÈME LIEU.

Proposition 21. — Deux droites AB, BΓ étant données, prendre, sur le prolongement AΔ, un point Δ donné tel que le rapport de la droite BΔ à la droite ΔA soit le même que celui

---

$2(\Delta\Gamma + B\Gamma) = 2B\Delta$. Or, on a par hypothèse: $\overline{B\Delta}^2 = AB \times B\Gamma$; donc : $EB + B\Gamma = 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$, d'où (I) devient, comme dans le texte: $AE = AB + B\Gamma - 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.

1. Il faut démontrer la relation : $AE = AB + B\Gamma + 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.

2. On a : $AE = A\Delta + \Delta E$, et l'on a posé : $\Delta E = \Gamma\Delta$; donc : $AE = A\Delta + \Gamma\Delta = AB + B\Gamma + 2B\Delta$. Or, on a par hypothèse : $\overline{B\Delta}^2 = AB \times B\Gamma$, d'où : $B\Delta = \sqrt{AB \times B\Gamma}$; donc, comme le texte : $AE = AB + B\Gamma + 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.

3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 700, l. 9.)

4. εἰς τὴν ἀνακεφαλαίωσιν.

de la droite ΓΔ à l'excédent dont la somme des droites AB, BΓ surpasse la droite qui est en puissance de quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ (1). [Cela ne peut être établi d'autre manière que si la somme des droites ΔB, AΓ est égale à l'excédent EA ; que si la droite entière ΔA est égale à la droite entière AB ; que si les droites EA, AΓ, ΓB ont entre elles le rapport d'un nombre carré à un nombre carré, et que si la droite ΓB est double de la droite ΔE] (2).

Que ce soit chose faite et que l'excédent soit la droite AE (car nous l'avons trouvé dans les lemmes qui précèdent) (3). Dès lors, la droite ΓΔ est à la droite AE comme la droite BΔ est à la droite ΔA et, par permutation, puis par division et égalant aire à aire, le rectangle compris sous les droites BΓ, EA équivaut donc au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔE. Or, le rectangle compris sous les droites BΓ, EA est donné ; donc, le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔE est donné aussi (4). De plus, ce rectangle s'applique avec un excédent carré sur la droite donnée ΓE ; donc, le point Δ est donné (5).

1. Le point Δ doit donc être pris tel qu'il réponde à la relation : $\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{\Gamma\Delta}{AB + B\Gamma - 2\sqrt{AB \times B\Gamma}}$.

2. La phrase mise entre crochets exprimant des considérations qui n'interviennent pas dans la démonstration, Hultsch la considère comme ayant été interpolée par un commentateur (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 700, ll. 18-22).

3. Voir proposition 19, d'où résulte la détermination d'une longueur $AE = AB + B\Gamma - 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$.

4. Le problème étant supposé résolu, on a donc : $\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{\Gamma\Delta}{AE}$ d'où : $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta A}{AE}$, d'où : $\frac{B\Delta - \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta A - AE}{AE}$, ou : $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta E}{AE}$, d'où, comme le texte : $B\Gamma \times AE = \Gamma\Delta \times \Delta E$. Or, les droites AB, BΓ sont données ; donc : $AE = AB + B\Gamma - 2\sqrt{AB \times B\Gamma}$ est donné, d'où $B\Gamma \times AE$ est donné, d'où $\Gamma\Delta \times \Delta E$ est donné.

5. On a : $\Gamma\Delta = \Gamma E + \Delta E$, d'où : $\Gamma\Delta \times \Delta E = (\Gamma E + \Delta E)\,\Delta E = \Gamma E \times \Delta E + \overline{\Delta E}^2$; donc, comme le texte, le rectangle $\Gamma\Delta \times \Delta E$ équivaut au rectangle $\Gamma E \times \Delta E$ appliqué sur la droite donnée ΓE, augmenté du carré de la droite ΔE. Dès lors (EUCLIDE, *Données*, prop. 59 : « Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, et si cet espace est excédent d'une figure donnée d'espèce, les côtés de l'excès sont donnés ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 398), la droite ΔE est donnée, c'est-à-dire qu'elle est donnée par la résolution de l'équation quadratique de la note précédente : $B\Gamma \times AE = \Gamma\Delta \times \Delta E$, ou : $B\Gamma \times AE = (\Gamma E + \Delta E)\,\Delta E$, ou $B\Gamma \times AE = \Gamma E \times \Delta E + \overline{\Delta E}^2$. Or, si la droite ΔE est donnée, le point Δ est donné, conformément à la proposition 27 des *Données*, énoncée p. 30, n. 1.

La synthèse aura lieu de la manière suivante : Que l'excédent soit la droite ΑΕ, et que le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ équivalent au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΕΑ, soit de nouveau appliqué sur la droite ΓΕ avec un excédent carré ; je dis que le point Δ est le point cherché.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΕΑ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ, il s'ensuit que, par proportion, par composition et par permutation, la droite ΓΔ est à la droite ΕΑ, qui est l'excédent, comme la droite ΒΔ est à la droite ΔΑ (1). Les choses se présentent de même si l'on veut prendre un point établissant que la droite ΓΔ est à la droite composée de la somme des droites ΑΒ, ΒΓ et de la droite qui est en puissance de quatre rectangles compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ comme la droite ΒΔ est à la droite ΔΑ (2) ; ce qu'il fallait démontrer.

[Le premier livre de *La Section de Rapport* comporte sept lieux, vingt-quatre cas et cinq déterminations, dont trois sont maxima et deux minima. La détermination qui se rapporte au troisième cas du cinquième lieu est maxima ; celle qui se rapporte au second cas du sixième lieu et celle qui se rapporte au second cas du septième lieu sont minima ; tandis que celles qui se rapportent aux quatre cas des sixième et septième lieux sont maxima. Le second livre de *La Section de Rapport* [comporte quatorze lieux, soixante-trois cas et les déterminations qui dérivent du premier livre ; car il s'en réfère entièrement au premier livre. Le premier livre de *La Section d'Aire*] (3) comporte sept lieux, vingt-quatre cas et sept déterminations, dont quatre sont maxima et

---

1. La relation des notes précédentes $\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{AE} = \Gamma\Delta \times \Delta\mathrm{E}$ donne : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{AE}}$, d'où, par composition : $\frac{\mathrm{B\Gamma} + \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta\mathrm{E} + \mathrm{AE}}{\mathrm{AE}}$ ou : $\frac{\mathrm{B}\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta\mathrm{A}}{\mathrm{AE}}$, d'où, par permutation, comme le texte : $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{B}\Delta}{\Delta\mathrm{A}}$; relation imposée, à laquelle satisfait le point Δ, déterminé par l'application, sur la droite donnée ΓΕ, d'un rectangle équivalent au rectangle $\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{AE}$ conjointement avec un excédent carré.

2. C'est-à-dire que l'analyse et la synthèse du problème seraient les mêmes pour la détermination d'un point tel que l'on ait : $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma} + 2\sqrt{\mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma}}} = \frac{\mathrm{B}\Delta}{\Delta\mathrm{A}}$.

3. Lacune comblée par Halley, par analogie avec un passage du préambule du livre VII, dans son ouvrage de reconstitution conjecturale du traité de *La Section de Rapport* d'Apollonius, dont nous avons mentionné le titre dans notre introduction.

trois minima. Les déterminations qui se rapportent au second cas du premier lieu, au premier cas du [second lieu, au second cas] (1) du quatrième lieu et au troisième cas du sixième lieu sont maxima, et celles qui se rapportent au troisième cas du troisième lieu, au quatrième cas du quatrième lieu et au premier cas du sixième lieu sont minima. Le second livre de *La Section d'Aire* comporte treize lieux, soixante cas et les déterminations du premier livre ; car le second livre s'en réfère à ce dernier.

On se demandera pourquoi le second livre de *La Section de Rapport* comporte quatorze lieux, alors que celui (2) de *La Section d'Aire* en comporte treize. Cela résulte de ce que le septième lieu est laissé de côté dans le livre de *La Section d'Aire* comme étant manifeste. En effet, si les parallèles tombent l'une et l'autre sur les extrémités (3), quelle que soit la droite menée, celle-ci découpe l'aire donnée (4) ; car cette aire équivaut au rectangle compris sous les droites situées entre les extrémités et le point de rencontre des deux droites qui sont données de position au début ; tandis que la chose ne se présente pas de la même manière dans le livre de *La Section de Rapport*. C'est donc à cause de cela que ce livre possède un lieu de plus, notamment le septième de ce second livre, et qu'il y a accord pour le reste] (5).

PREMIER LIVRE DE LA SECTION DÉTERMINÉE. LEMME A UTILISER POUR LA PREMIÈRE INJONCTION (6) DU CINQUIÈME PROBLÈME.

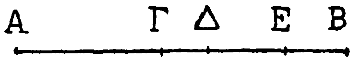
I.

Proposition 22. — Soit la droite AB ; soient trois points Γ, Δ, E sur cette droite, et que le rectangle compris sous les

1. Lacune comblée par Halley dans son ouvrage de reconstitution précité.
2. C'est-à-dire le second livre du traité de *La Section d'Aire*.
3. Sous-entendu : données.
4. C'est-à-dire elle découpe des segments qui comprennent une aire rectangulaire donnée.
5. Le passage constitué par les deux derniers alinéas, lacuneux d'ailleurs, que nous plaçons entre crochets, se borne à répéter ce qui a déjà été dit dans le préambule du livre VII, et a très probablement été interpolé par un copiste (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 702, l. 11 à p. 704, l. 6).
6. εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα, pour la première injonction, ou première disposition imposée des points dans la figure du cinquième problème du premier livre de *La Section déterminée* d'Apollonius.

droites AΔ, ΔΓ soit équivalent au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE ; je dis que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔE.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE, il s'ensuit que, en proportion, la droite EΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AΔ est à la droite ΔB, et que la droite entière AE est donc à la droite entière BΓ comme la droite EΔ est à la droite ΔΓ, et inversement. Derechef, puisque



le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE, il s'ensuit que, en proportion, la droite BΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AΔ est à la droite ΔE, et que la droite entière AB est donc à la droite entière ΓE comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ. Or, la droite ΓΔ est aussi à la droite ΔE comme la droite BΓ est à la droite EA ; de sorte que le rapport composé de celui de la droite AB à la droite ΓE et de celui de la droite BΓ à la droite AE est le même que le rapport composé de celui de la droite BΔ à la droite ΔΓ et de celui de la droite ΓΔ à la droite EΔ. Mais, le rapport composé de celui de la droite AB à la droite ΓE et de celui de la droite BΓ à la droite AE est le rapport du rectangle compris sous les droites AB, BΓ au rectangle compris sous les droites AE, EΓ, et le rapport composé de celui de la droite BΔ à la droite ΔΓ et de celui de la droite ΔΓ à la droite ΔE est le rapport de la droite BΔ à la droite ΔE ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔE [1] ; ce qu'il fallait démontrer [2].

---

1. On a par hypothèse : $B\Delta \times \Delta E = A\Delta \times \Delta\Gamma$, d'où : $\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Delta}$, d'où : $\frac{\Delta E + A\Delta}{\Delta\Gamma + B\Delta} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{AE}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{B\Gamma}{AE} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}$ (I). D'autre part la relation $B\Delta \times \Delta E = A\Delta \times \Delta\Gamma$ donne aussi : $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta E}$, d'où : $\frac{B\Delta + A\Delta}{\Delta\Gamma + \Delta E} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{AB}{\Gamma E} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ (II). On a donc, par produit : $\frac{AB}{\Gamma E} \times \frac{B\Gamma}{AE} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \times \frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}$ ou, comme le texte : $\frac{AB \times B\Gamma}{\Gamma E \times AE} = \frac{B\Delta}{\Delta E}$.

2. On démontrerait de même que l'on a : $\frac{BA \times AE}{B\Gamma \times \Gamma E} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$; relation qui sera invoquée plus loin, au cours de la démonstration de la proposition 30.

LA MÊME PROPOSITION D'UNE AUTRE MANIÈRE.

II.

Puisque le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE, il s'ensuit que, en proportion, et que de droite entière à droite entière, la droite AΔ est à la droite ΔB comme la droite AE est à la droite BΓ. Par composition, la droite AB est à la droite BΔ comme la somme des droites AE, ΓB est à la droite ΓB ; donc, le rectangle compris sous la somme des droites AE, ΓB et la droite BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ. Derechef, puisque la droite EΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AΔ est à la droite ΔB, il s'ensuit que la droite entière AE est à la droite entière ΓB comme la droite EΔ est à la droite ΔΓ. En conséquence, par inversion et composition, le rectangle compris sous la somme des droites AE, ΓB et la droite EΔ équivaut au rectangle compris sous les droites, AE EΓ. Or, on a démontré que le rectangle compris sous la somme des droites AE, ΓB et la droite BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ ; donc, en ordre inverse, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme le rectangle compris sous la somme des droites AE, ΓB et la droite BΔ est au rectangle compris sous la somme des droites AE, ΓB et la droite ΔE, c'est-à-dire comme la droite BΔ est à la droite ΔE [1].

---

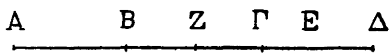
1. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, d'où : $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Delta + \Delta E}{B\Delta + \Delta\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{A\Delta + \Delta B}{\Delta B} = \frac{AE + B\Gamma}{B\Gamma}$ ou: $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{AE + B\Gamma}{B\Gamma}$, d'où : $AB \times \Gamma B = (AE + B\Gamma)\ \Delta B$ (I). D'autre part, la relation : $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$ donne : $\frac{A\Delta + \Delta E}{\Delta B + \Delta\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{AE}{\Gamma B} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{\Gamma B}{AE} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}$, d'où : $\frac{\Gamma B + AE}{AE} = \frac{\Delta\Gamma + \Delta E}{AE}$ ou : $\frac{\Gamma B + AE}{AE} = \frac{\Gamma E}{\Delta E}$, d'où, comme le texte : $(\Gamma B + AE)\ \Delta E = \Gamma E \times AE$, d'où, en ordre inverse en présence de la relation (I) : $\frac{AB \times \Gamma B}{\Gamma E \times AE} = \frac{(\Gamma B + AE)\ \Delta B}{(AE + \Gamma B)\ \Delta E} = \frac{\Delta B}{\Delta E}$.

AUTREMENT POUR LA PREMIÈRE INJONCTION DU SEPTIÈME PROBLÈME, EN DÉMONTRANT AU PRÉALABLE LES DEUX LEMMES SUIVANTS :

III.

Proposition 23. — Soit la droite AB égale à la droite ΓΔ, et prenons un point quelconque E sur la droite ΓΔ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EΔ augmenté du rectangle compris sous les droites BE, EΓ.

Coupons la droite BΓ en deux parties égales au point Z ; donc, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ, conjointement avec le carré de la droite ΓZ, équivaut au carré de la droite ZΔ. Pour la même raison, d'ailleurs, le rectangle compris sous les droites AE, EΔ, conjointement avec le carré de la droite ZE, équivaut aussi au carré de la



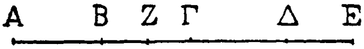
droite ZΔ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ, conjointement avec le carré de la droite ΓZ, équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EΔ augmenté du carré de la droite EZ, c'est-à-dire augmenté du rectangle compris sous les droites BE, EΓ plus le carré de la droite ΓZ. Retranchons de part et d'autre le carré de la droite ΓZ, il reste donc le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ équivalent au rectangle compris sous les droites AE, EΔ augmenté du rectangle compris sous les droites BE, EΓ (1).

1. La droite AΔ étant divisée en parties égales en Z et en parties inégales en Γ, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3): $A\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma Z}^2 = \overline{Z\Delta}^2$ et, de même, la droite AΔ étant divisée en deux parties égales en Z et inégales en E, on a : $AE \times E\Delta + \overline{ZE}^2 = \overline{Z\Delta}^2$; donc : $A\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma Z}^2 = AE \times E\Delta + \overline{ZE}^2$ Or, considérant la droite BΓ coupée en deux parties égales en Z, à laquelle est ajoutée la droite ΓE, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $BE \times E\Gamma + \overline{\Gamma Z}^2 = \overline{ZE}^2$; donc : $A\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma Z}^2 = AE \times E\Delta + BE \times E\Gamma + \overline{\Gamma Z}^2$ ou, comme le texte : $A\Gamma \times \Gamma\Delta = AE \times E\Delta + BE \times E\Gamma$.

IV.

Proposition 24. — Les mêmes choses étant supposées, que le point E soit situé en dehors de la droite AΔ ; je dis que le rectangle compris sous les droites BE, EΓ équivaut de nouveau au rectangle compris sous les droites AE, EΔ augmenté du rectangle compris sous les droites BΔ, ΔΓ.

Coupons de nouveau la droite BΓ en deux parties égales au point Z. Dès lors, le rectangle compris sous les droites BE, EΓ, conjointement avec le carré de la droite ΓZ, équivaut au carré de la droite ZE ; de sorte que le rectangle compris sous les droites BE, EΓ, conjointement avec le carré de la droite ΓZ, équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EΔ conjointement avec le carré de la droite ΔZ, c'est-à-dire conjointement avec le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔΓ augmenté du carré de la droite ΓZ. Retranchons de part et d'autre le carré de la droite ΓZ, il reste donc le rectangle compris sous les droites BE, EΓ équivalent au rectangle compris sous les droites AE, EΔ augmenté du rectangle compris sous les droites BΔ, ΔΓ [1].



V.

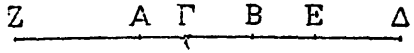
Proposition 25. — Ces choses étant considérées au préalable, il faut démontrer que, si le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔB, BE, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme la droite ΔB est à la droite BE.

En effet, posons la droite ZA égale à la droite ΓE. Dès lors,

---

1. La droite BΓ, coupée en deux parties égales en Z, à laquelle est ajoutée la droite ΓE, donne (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\mathrm{BE} \times \mathrm{E\Gamma} + \overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2 = \overline{\mathrm{ZE}}^2$. De même, la droite AΔ coupée en deux parties égales en Z, à laquelle est ajoutée la droite ΔE, donne : $\mathrm{AE} \times \mathrm{E\Delta} + \overline{\mathrm{\Delta Z}}^2 = \overline{\mathrm{ZE}}^2$; donc : $\mathrm{BE} \times \mathrm{E\Gamma} + \overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2 = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Delta} + \overline{\mathrm{\Delta Z}}^2$. Or, la droite BΓ, coupée en deux parties égales en Z, à laquelle est ajoutée la droite ΓΔ, donne de même : $\mathrm{B\Delta} \times \mathrm{\Delta\Gamma} + \overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2 = \overline{\mathrm{\Delta Z}}^2$; donc : $\mathrm{BE} \times \mathrm{E\Gamma} + \overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2 = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{B\Delta} \times \mathrm{\Delta\Gamma} \times \overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2$ ou, comme le texte : $\mathrm{BE} \times \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{B\Delta} \times \mathrm{\Delta\Gamma}$.

puisque le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔB, BE, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites ZB, BE ; il s'ensuit que le rectangle entier compris sous les droites ΔZ, BE équivaut au rectangle compris sous les droites ZB, BE augmenté du rectangle compris sous les droites AB, BΓ. Mais, en raison de ce qui a été exposé précédemment [1], ces derniers rectangles sont équivalents au rectangle compris sous les droites ZΓ, ΓE, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites AE, EΓ ; donc, le rectangle compris sous les droites ZΔ, BE équivaut aussi au rectangle compris sous les droites AE, EΓ. Considérons extrinsèquement le rectangle compris sous les droites ZΔ, ΔE [2], il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ZΔ, ΔE est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme le rectangle compris sous les droites ZΔ, ΔE est au rectangle compris sous les droites ZΔ, BE, c'est-à-dire comme la droite EΔ est à la droite EB. Par composition, le rectangle compris sous les droites [ZΔ, ΔE, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AE, EΓ, est au rectangle compris sous ces droites] [3] AE, EΓ comme la droite ΔB est à la droite BE. Mais, en raison de ce qui a été exposé précédemment, le rectangle compris sous les droites ZΔ, ΔE, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AE, EΓ, équivaut au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme la droite ΔB est à la droite BE [4].

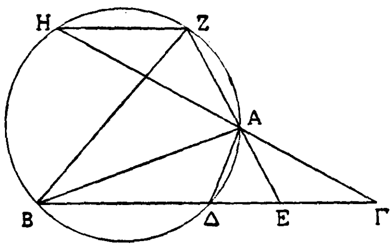


1. Voir proposition 23.
2. Sous-entendu : et rapportons-y les deux rectangles précédents.
3. La phrase placée entre crochets a été reconstituée conjecturalement par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 266, *commentarius*, l. 16).
4. On a par hypothèse : $\Delta B \times BE = AB \times B\Gamma$, d'où : $ZB \times BE + \Delta B \times BE = ZB \times BE + AB \times B\Gamma$ ou, comme le texte : $\Delta Z \times BE = ZB \times BE + AB \times B\Gamma$. Or, on a posé : $ZA = \Gamma E$; donc, on a (prop. 23, p. 533) : $Z\Gamma \times \Gamma E = ZB \times BE + AB \times B\Gamma$; donc : $\Delta Z \times BE = Z\Gamma \times \Gamma E$. Or, $Z\Gamma = AE$; donc, comme le texte : $\Delta Z \times BE = AE \times \Gamma E$. Dès lors, on peut écrire : $\frac{\Delta Z \times \Delta E}{AE \times \Gamma E} = \frac{\Delta Z \times \Delta E}{\Delta Z \times BE} = \frac{\Delta E}{BE}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Delta Z \times \Delta E + AE \times \Gamma E}{AE \times \Gamma E} = \frac{\Delta E + BE}{BE} = \frac{\Delta B}{BE}$. Or, considérant le point Δ placé en dehors de la droite ZE,

VI.

Proposition 26. — Si l'on a un triangle ΑΒΓ, et si l'on mène deux droites ΑΔ, ΑΕ de telle sorte que les angles compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ et sous les droites ΔΑ, ΑΕ valent deux angles droits, le carré de la droite ΓΑ est au carré de la droite ΑΕ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ est au rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΔ.

En effet, si nous circonscrivons un cercle au triangle ΑΒΔ ; si les droites ΕΑ, ΓΑ sont prolongées jusqu'aux points Ζ, Η ; si, au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ on substitue le rectangle compris sous les droites ΗΓ, ΓΑ, et, au rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΔ, le rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΑ, il faudra que, par permutation, l'on cherche aussi si le rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΑ est au carré de la droite ΕΑ comme le rectangle compris sous les droites ΗΓ, ΓΑ est au carré de la droite ΓΑ. Or, cela revient à chercher si la droite ΖΕ est à la droite ΕΑ comme la droite ΗΓ est à la droite ΓΑ. S'il en est donc ainsi, la droite ΗΖ est parallèle à la droite ΒΓ. Or, elle est parallèle.



En effet, puisque les angles compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ et sous les droites ΔΑ, ΑΕ valent deux angles droits, l'angle compris sous les droites ΔΑ, ΑΕ est égal à l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΗ. Mais, l'angle compris sous les droites ΔΑ, ΑΕ extérieur au quadrilatère, est égal à l'angle compris sous les droites ΖΒ, ΒΔ ; tandis que l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΗ est égal à l'angle compris sous les droites ΒΖ, ΖΗ ; donc, l'angle compris sous les droites ΖΒ, ΒΔ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΒΖ, ΖΗ. De plus, ces angles sont alternes ; donc, la

---

on a (prop. 24, p. 534) : $A\Delta \times \Delta\Gamma = \Delta Z \times \Delta E + AE \times \Gamma E$; donc, comme le texte : $\frac{A\Delta \times \Delta\Gamma}{AE \times \Gamma E} = \frac{\Delta B}{BE}$.

droite HZ est [parallèle] (1) à la droite ΒΓ (2). Or, c'est ce qu'on a cherché ; donc, si, etc. (3).

LA MÊME PROPOSITION D'UNE AUTRE MANIÈRE.

VII.

Proposition 27. — Soient, dans le triangle ΑΒΓ, les angles compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ et sous les droites ΔΑ, ΑΕ égaux à deux angles droits ; je dis que le carré de la droite ΓΑ est au carré de la droite ΑΕ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ est au rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΔ.

Menons par le point Ε la droite ΕΖ parallèle à la droite ΑΓ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΔΑ, ΑΕ est égal à l'angle compris sous les droites ΑΖ, ΖΕ (4) ; donc, le rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΗ équivaut au carré de la droite ΑΕ (5). Dès lors, puisque la droite ΓΒ est à la droite ΒΕ

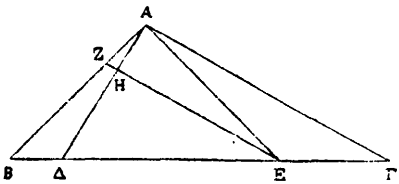
1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 267, *commentarius*, l. 33).

2. Explicitement : si $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} + \widehat{\mathrm{\Delta AE}} = 2$ angles droits, on doit démontrer que l'on a : $\frac{\overline{\mathrm{\Gamma A}}^2}{\overline{\mathrm{AE}}^2} = \frac{\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{BE} \times \mathrm{E\Delta}}$, ou bien, puisque (Euclide, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4) on a : $\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{H\Gamma} \times \mathrm{\Gamma A}$ et $\mathrm{BE} \times \mathrm{E\Delta} = \mathrm{ZE} \times \mathrm{AE}$, on doit démontrer que l'on a : $\frac{\overline{\mathrm{\Gamma A}}^2}{\overline{\mathrm{AE}}^2} = \frac{\mathrm{H\Gamma} \times \mathrm{\Gamma A}}{\mathrm{ZE} \times \mathrm{AE}}$, d'où : $\frac{\mathrm{ZE} \times \mathrm{AE}}{\overline{\mathrm{AE}}^2} = \frac{\mathrm{H\Gamma} \times \mathrm{\Gamma A}}{\overline{\mathrm{\Gamma A}}^2}$, ou que l'on a : $\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{H\Gamma}}{\mathrm{\Gamma A}}$; relation entraînant la similitude des triangles HAZ, ΓΑΕ, et, par suite, le parallélisme des droites HZ, ΒΓ, qui reste finalement à démontrer. En effet, on a par construction : $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} + \widehat{\mathrm{\Delta AE}} = 2$ droits ; donc : $\widehat{\mathrm{\Delta AE}} = 2$ droits $- \widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = \widehat{\mathrm{BAH}}$ (I). Or, (Euclide, liv. III, prop. 22 : « Les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits. » Voir. trad. de Peyrard, vol. I, p. 162) on a : $\widehat{\mathrm{ZB\Delta}} + \widehat{\mathrm{ZA\Delta}} = 2$ droits $= \widehat{\mathrm{ZA\Delta}} + \widehat{\mathrm{\Delta AE}}$, d'où comme le texte : $\widehat{\mathrm{ZB\Delta}} = \widehat{\mathrm{\Delta AE}}$. Or (Euclide, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2), on a : $\widehat{\mathrm{BAH}} = \widehat{\mathrm{BZH}}$; donc, l'égalité (I) devient, comme le texte : $\widehat{\mathrm{ZB\Delta}} = \widehat{\mathrm{BZH}}$. Or, ces angles sont alternes ; donc, les droites HZ, ΒΓ sont parallèles.

3. εἰ ἄρα : ∞, simples mots renvoyant à l'énoncé de la proposition.

4. On a par hypothèse : $\widehat{\mathrm{\Delta AE}} + \widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = 2$ angles droits $= \widehat{\mathrm{AZE}} + \widehat{\mathrm{BZE}} = \widehat{\mathrm{AZE}} + \widehat{\mathrm{BA\Gamma}}$; donc : $\widehat{\mathrm{\Delta AE}} = \widehat{\mathrm{AZE}}$.

5. L'égalité de la note précédente et la communauté de l'angle AEZ entraîne la similitude des triangles AHE, ZAE ; donc : $\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EH}}$, d'où, comme le texte : $\mathrm{ZE} \times \mathrm{EH} = \overline{\mathrm{AE}}^2$.



comme la droite ΑΓ est à la droite ZE et que la droite ΓΔ est à la droite ΔE comme la droite ΓA est à la droite HE, il s'ensuit que le rapport composé de celui de la droite ΓA à la droite ZE et de celui de la droite ΓA à la droite HE est le même que le rapport composé de celui de la droite ΓB à la droite BE et de celui de la droite ΓΔ à la droite ΔE. Mais, le rapport composé de celui de la droite ΓA à la droite ZE et de celui de la droite ΓA à la droite HE est le rapport du carré de la droite ΓA au rectangle compris sous les droites ZE, HE, c'est-à-dire au carré de la droite AE ; tandis que le rapport composé de celui de la droite ΓB à la droite BE et de celui de la droite ΓΔ à la droite ΔE est celui du rectangle compris sous les droites BΓ, ΓΔ au rectangle compris sous les droites BE, ΔE ; par conséquent, le carré de la droite ΓA est au carré de la droite AE comme le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓΔ est au rectangle compris sous les droites BE, EΔ (1).

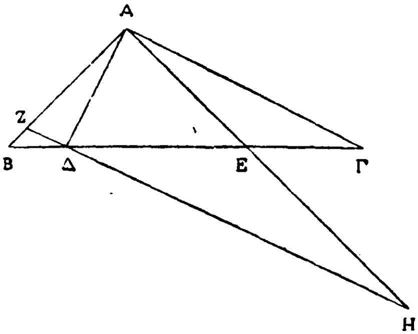
VIII.

Proposition 28. — Derechef, que chacun des angles compris sous les droites BA, AE et sous les droites ΓA, AΔ soit droit ; je dis que le carré de la droite ΓA est au carré de la droite AΔ comme le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE.

Menons par le point Δ la droite ZH parallèle à la droite AΓ, et soit H le point où elle rencontre la droite AE. L'angle compris sous les droites AΔ, ΔZ est donc droit. Or, l'angle compris sous les droites ZA, AH est droit aussi (2) ; donc, le rectangle compris

1. Le parallélisme des droites AΓ, ZE donne : $\frac{\Gamma B}{BE}=\frac{A\Gamma}{ZE}$ et $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{HE}$; donc : $\frac{A\Gamma}{ZE}\times\frac{A\Gamma}{HE}=\frac{\Gamma B}{BE}\times\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$, ou comme le texte : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{ZE\times HE}=\frac{\Gamma B\times\Gamma\Delta}{BE\times\Delta E}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente, on a, comme le texte : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{AE}^2}=\frac{\Gamma B\times\Gamma\Delta}{BE\times\Delta E}$.

2. C'est-à-dire l'angle BAE qui est droit par hypothèse.



sous les droites ZΔ, ΔH équivaut au carré de la droite ΔA. En conséquence, le carré de la droite ΓA est au rectangle compris sous les droites ZΔ, ΔH comme le carré de la droite ΓA est au carré de la droite AΔ. Mais, le rapport du carré de la droite AΓ au rectangle compris sous les droites ZΔ, ΔH se compose de celui que possède la droite ΓA avec la droite ΔH, c'est-à-dire celui de la droite ΓE à la droite EΔ, et de celui que possède la droite ΓA avec la droite ZΔ, c'est-à-dire celui de la droite ΓB à la droite BΔ ; tandis que le rapport composé de celui que possède la droite ΓE avec la droite EΔ et de celui que possède la droite ΓB avec la droite BΔ est le même que celui du rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE ; par conséquent, le carré de la droite ΓA est au carré de la droite AΔ comme le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE (1).

IX.

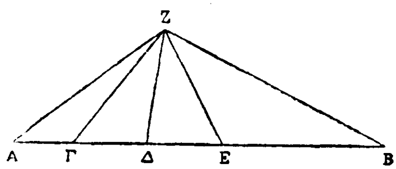
PROPOSITION 29. — Cela étant acquis, le lemme donné plus haut (2) établissant que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔE, se démontre d'une autre manière.

---

1. On a : $\widehat{ZAH}$ = 1 angle droit = $\widehat{A\Delta Z}$; donc, dans le triangle rectangle ZAH, la droite AΔ est la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypothénuse ; donc (EUCLIDE, liv. VI, prop. 8, énoncée p. 54, n. 2, et liv. VI, prop. 17, énoncée p. 287, n. 3), on a : $Z\Delta \times \Delta H = \overline{\Delta A}^2$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Gamma A}^2}{Z\Delta \times \Delta H} = \frac{\overline{\Gamma A}^2}{\overline{\Delta A}^2}$. Or, $\frac{\overline{\Gamma A}^2}{Z\Delta \times \Delta H} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta} \times \frac{\Gamma A}{\Delta H}$; donc, $\frac{\overline{\Gamma A}^2}{\overline{\Delta A}^2} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta} \times \frac{\Gamma A}{\Delta H}$. Or, les triangles semblables ABΓ, ZBΔ donnent : $\frac{\Gamma A}{Z\Delta} = \frac{\Gamma B}{B\Delta}$, et les triangles semblables AEΓ, ΔEH donnent : $\frac{\Gamma A}{\Delta H} = \frac{\Gamma E}{E\Delta}$; donc : $\frac{\overline{\Gamma A}^2}{\overline{\Delta A}^2} = \frac{\Gamma B}{B\Delta} \times \frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{\Gamma B \times \Gamma E}{B\Delta \times E\Delta}$.

2. C'est-à-dire la proposition 22 dans laquelle la droite AB est divisée aux points Γ, Δ, E de manière à avoir : $B\Delta \times \Delta E = A\Delta \times \Delta\Gamma$.

Élevons du point Δ une droite quelconque ΔZ ; posons le carré de la droite ΔZ équivalent au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ, et menons les droites de jonction AZ, ΓZ, EZ, BZ.



Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ équivaut au carré de la droite ΔZ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΓZ, ZΔ est égal à l'angle A [1]. Derechef, puisque le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE équivaut au carré de la droite ΔZ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΔZ, ZE est égal à l'angle B [2]. Mais, l'angle compris sous les droites ΓZ, ZΔ est aussi égal à l'angle A; donc, l'angle entier compris sous les droites ΓZ, ZE est égal aux angles A, B. Mais, les angles A, B, conjointement avec l'angle compris sous les droites AZ, ZB, constituent deux angles droits ; donc, les angles compris sous les droites AZ, ZB et sous les droites ΓZ, ZE constituent aussi deux angles droits [3]. D'autre part, en vertu d'un lemme précédent, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme le carré de la droite BZ est au carré de la droite ZE. Mais, la droite BΔ est à la droite ΔE comme le carré de la droite BZ est au carré de la droite ZE (car le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE équivaut au carré de la droite ΔZ) ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est

---

1. On a par construction : $A\Delta \times \Delta\Gamma = \overline{\Delta Z}^2$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 16, énoncée p. 44, n. 3) : $\frac{A\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 6, énoncée p. 136, n. 2) similitude des triangles AΔZ, ZΔΓ qui ont l'angle en Δ commun, d'où, comme le texte : $\widehat{\Gamma Z\Delta} = \widehat{ZA\Delta}$.

2. On a par hypothèse : $B\Delta \times \Delta E = A\Delta \times \Delta\Gamma$ et, par construction : $A\Delta \times \Delta\Gamma = \overline{\Delta Z}^2$; donc : $B\Delta \times \Delta E = \overline{\Delta Z}^2$, d'où, comme dans la note précédente : $\frac{B\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Delta Z}{\Delta E}$, d'où similitude des triangles BΔZ, ZΔE ayant l'angle Δ commun, d'où, comme le texte : $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{ZB\Delta}$.

3. Les égalités des deux notes précédentes donnent : $\widehat{\Gamma Z\Delta} + \widehat{\Delta ZE} = \widehat{ZA\Delta} + \widehat{ZB\Delta}$ ou, comme le texte : $\widehat{\Gamma ZE} = \widehat{ZA\Delta} + \widehat{ZB\Delta}$, d'où : $\widehat{\Gamma ZE} + \widehat{AZB} = \widehat{ZA\Delta} + \widehat{ZB\Delta} + \widehat{AZB} = 2$ droits.

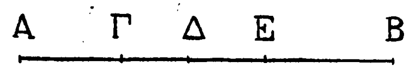
au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔE [1].

LEMME UTILE POUR LA SECONDE INJONCTION DU MÊME PROBLÈME [2].

X.

Proposition 30. — Le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE étant de nouveau équivalent au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔΓ, il faut démontrer que le rectangle compris sous les droites AB, BE est au rectangle compris sous les droites EΓ, ΓA comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ.

En effet, puisque la droite AΔ est à la droite ΔΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔE, la droite entière BA est donc à la droite entière ΓE comme la droite BΔ est à la droite ΔE. Derechef, puisque la droite EΔ est à la droite ΔΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔA, la droite restante BE est donc à la droite restante AΓ comme la droite EΔ est à la droite ΔΓ. Or, la droite AB est à la droite ΓE comme la droite BΔ est à la droite ΔE ; par conséquent, le rapport composé de celui que possède la droite BΔ avec la droite ΔE et de celui que possède la droite EΔ avec la droite ΔΓ, c'est-à-dire celui de la droite BΔ



1. La relation $\widehat{\Gamma Z E} + \widehat{AZB} = 2$ angles droits répondant à la condition de la proposition 26, celle-ci donne donc : $\frac{AB \times B\Gamma}{AE \times E\Gamma} = \frac{\overline{BZ}^2}{\overline{ZE}^2}$ (I). Or (voir note 2 de la page 540), on a : $\frac{B\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Delta Z}{\Delta E}$ (II), d'où (Euclide, liv. VI, prop. 20, énoncée p. 355, n. 1) : $\frac{B\Delta}{\Delta E} = \frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{\Delta E}^2}$ (III). D'autre part, il résulte de la relation (II) que les triangles BΔZ, ZΔE, qui ont l'angle Δ commun, sont semblables ; donc : $\frac{B\Delta}{\Delta Z} = \frac{BZ}{ZE}$, d'où : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2} = \frac{\overline{BZ}^2}{\overline{ZE}^2}$. Or, la relation (II) donne : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta Z}^2} = \frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{\Delta E}^2}$; donc : $\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{\Delta E}^2} = \frac{\overline{BZ}^2}{\overline{ZE}^2}$, d'où la relation (III) donne : $\frac{B\Delta}{\Delta E} = \frac{\overline{BZ}^2}{\overline{ZE}^2}$, d'où la relation (I) devient, comme le texte : $\frac{AB \times B\Gamma}{AE \times E\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta E}$.

2. C'est-à-dire utile à la démonstration de la seconde disposition des points dans la figure du cinquième problème du 1er livre de *La Section déterminée* d'Apollonius.

à la droite ΔΓ, est le même que le rapport composé de celui de la droite AB à la droite ΓE et de celui de la droite EB à la droite AΓ, c'est-à-dire le même que celui du rectangle compris sous les droites AB, BE au rectangle compris sous les droites EΓ, ΓA. En conséquence, le rectangle compris sous les droites AB, BE est au rectangle compris sous les droites EΓ, ΓA comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ ; ce qu'il fallait démontrer (1).

LA MÊME LEMME D'UNE AUTRE MANIÈRE (2).

XI.

Puisque la droite ΓΔ est à la droite ΔE comme la droite AΔ est à la droite ΔB, la droite restante AΓ est donc à la droite restante EB comme la droite AΔ est à la droite ΔB et, par composition, la droite AB est donc à la droite BΔ comme la somme des droites AΓ, EB est à la droite EB. En conséquence, le rectangle compris sous la somme des droites AΓ, EB et la droite BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BE. Derechef, puisque la droite EΔ est à la droite ΔΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔA, la droite restante BE est donc à la droite restante ΓA comme la droite EΔ est à la droite ΔΓ, et, par composition, la droite EΓ est à la droite ΓΔ comme la somme des droites EB, AΓ est à la droite AΓ. En conséquence, le rectangle compris sous la somme des droites EB, AΓ et la droite ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites EΓ, ΓA. Or, on a démontré que le rectangle compris sous la somme des droites AΓ, EB et la droite BΔ [équivaut aussi au rectangle compris sous les droites AB, BE ; donc] (3) le rectangle compris sous les droites AB, BE

---

1. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta E = B\Delta \times \Delta\Gamma$, d'où : $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta E}$, d'où : $\frac{A\Delta + B\Delta}{\Delta\Gamma + \Delta E} = \frac{B\Delta}{\Delta E}$ ou : $\frac{BA}{\Gamma E} = \frac{B\Delta}{\Delta E}$. D'autre part, la relation d'hypothèse donne aussi : $\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta A}$, d'où : $\frac{B\Delta - \Delta E}{\Delta A - \Delta\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{BE}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$. Dès lors : $\frac{BA}{\Gamma E} \times \frac{BE}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta E} \times \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$, ou, comme le texte : $\frac{BA \times BE}{\Gamma E \times A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$.

2. Voir la figure de la proposition 30.

3. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 270, l. 39).

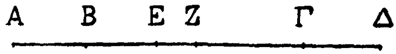
est au rectangle compris sous les droites EΓ, ΓA [comme le rectangle compris sous la somme des droites AΓ, EB et la droite BΔ] (1) est au rectangle compris sous la somme des droites AΓ, EB et la droite ΓΔ, c'est-à-dire comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ; ce qu'il fallait démontrer (2).

LE MÊME LEMME D'UNE AUTRE MANIÈRE, EN CONSIDÉRANT CECI AU PRÉALABLE :

XII.

Proposition 31. — La droite AB étant égale à la droite ΓΔ, si l'on prend un point E, qu'il faille démontrer que le rectangle compris sous les droites AE, EΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ augmenté du rectangle compris sous les droites BE, EΓ.

Coupons la droite BΓ en deux parties égales au point Z. Dès lors, le rectangle compris sous les droites AE, EΔ, conjointement avec le carré de la droite EZ, équivaut au carré de la droite ΔZ, et le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ, conjointement avec le carré de la droite ΓZ, équivaut au carré de la droite ΔZ ; de sorte que le rectangle compris sous les droites AE, EΔ, conjointement avec le carré de



la droite EZ, équivaut au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ conjointement avec le carré de la droite ΓZ, c'est-à-dire avec le rectangle compris sous les droites BE, EΓ conjointement avec le

1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 270, l. 40).

2. On a par hypothèse : $B\Delta \times \Delta\Gamma = A\Delta \times \Delta E$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Delta}{B\Delta}$, d'où : $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Delta - \Delta\Gamma}{B\Delta - \Delta E} = \frac{A\Gamma}{BE}$, d'où : $\frac{A\Delta + B\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Gamma + BE}{BE}$ ou, comme le texte : $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma + BE}{BE}$, d'où : $AB \times BE = (A\Gamma + BE)\, B\Delta$ (I). D'autre part, la relation d'hypothèse donne inversement : $\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Delta}{A\Delta}$, d'où : $\frac{B\Delta - \Delta E}{A\Delta - \Delta\Gamma} = \frac{BE}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{BE + A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E + \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Delta\Gamma}$, d'où : $(BE + A\Gamma)\, \Delta\Gamma = E\Gamma \times A\Gamma$ (II). Donc, les relations (I) et (II) donnent, comme le texte : $\frac{AB \times BE}{E\Gamma \times A\Gamma} = \frac{(A\Gamma + BE)\, B\Delta}{(BE + A\Gamma)\, \Delta\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$.

carré de la droite EZ. Retranchons de part et d'autre le carré de la droite EZ, il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites AE, EΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ augmenté du rectangle compris sous les droites BE, EΓ (1).

XIII.

Proposition 32. — Ce qui précède étant considéré au préalable, que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ soit équivalent au rectangle compris sous les droites ΔB, BE ; je dis que le rectangle compris sous [les droites AΔ, ΔΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ] (2) comme la droite ΔB est à la droite BE (3).

Posons la droite AZ égale à la droite ΓΔ. Dès lors, en raison de ce qui vient d'être exposé, le rectangle compris sous les droites ZB, BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites ZΓ, ΓΔ augmenté du rectangle compris sous les droites AB, BΓ. Or, puisque le rectangle compris

sous les droites AB, BΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔB, BE, retranchons l'un ou l'autre de ces rectangles (4) du rectangle compris sous les droites ZB, BΔ ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites ZΓ, ΓΔ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΔB, ZE. Derechef, puisque le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔB, BE, en proportion et par division, la droite ΓΔ

1. La droite AΔ étant divisée en parties égales en Z et inégales en E, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $AE \times E\Delta + \overline{EZ}^2 = \overline{\Delta Z}^2$. Et, de même, la droite AΔ étant divisée en parties égales en Z et inégales en Γ, on a : $A\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma Z}^2 = \overline{\Delta Z}^2$; donc : $AE \times E\Delta + \overline{EZ}^2 = A\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma Z}^2$. D'autre part, la droite BΓ étant divisée en parties égales en Z et inégales en E, on a : $BE \times E\Gamma + \overline{EZ}^2 = \overline{\Gamma Z}^2$; donc : $AE \times E\Delta + \overline{EZ}^2 = A\Gamma \times \Gamma\Delta + BE \times E\Gamma + \overline{EZ}^2$ ou, comme le texte : $AE \times E\Delta = A\Gamma \times \Gamma\Delta + BE \times E\Gamma$.

2. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 271, l. 30).

3. Reprise de la proposition 30, qui sera démontrée d'une autre manière en invoquant la relation démontrée par la proposition 31.

4. ὁπότερα ἀφῃρήσθω, expression singulière signifiant que les deux équations qui précèdent doivent être retranchées membre à membre.

est à la droite ΓΒ, c'est-à-dire que la droite ΖΑ est à la droite ΒΓ, comme la droite ΑΕ est à la droite ΕΒ ; donc, la droite entière ΖΕ est à la droite entière ΕΓ comme la droite ΑΕ est à la droite ΕΒ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΒ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΕΑ. Or, on a démontré aussi que le rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΒΔ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ ; donc, par permutation, le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ est au rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΓ comme le rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΒΔ est au rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΒ, c'est-à-dire comme la droite ΔΒ est à la droite ΒΕ (1).

XIV.

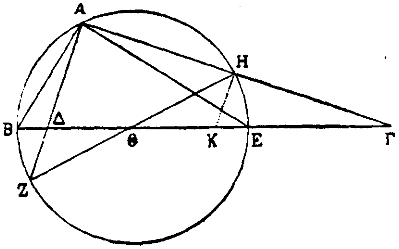
Proposition 33. — Cela étant aussi considéré au préalable, on démontrera un même lemme d'une autre manière (2) : Soit le triangle ΑΒΓ, et menons à l'intérieur les droites ΑΔ, ΑΕ formant respectivement un angle droit compris sous les droites ΒΑ, ΑΕ et sous les droites ΓΑ, ΑΔ ; je dis que le carré de la droite ΓΑ est au carré de la droite ΑΔ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΕ est au rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ.

Décrivons le cercle ΑΒΖΗ autour du triangle ΑΒΕ et menons la droite de jonction ΖΗ. Dès lors, puisque chacun des angles compris sous les droites ΒΑ, ΑΕ et sous les droites ΓΑ, ΑΔ est droit, chacune des droites ΒΕ, ΖΗ est un diamètre du cercle ;

1. On a par construction : $AZ = \Gamma\Delta$; on est donc dans les conditions de la proposition 31, d'après laquelle on a : $ZB \times B\Delta = Z\Gamma \times \Gamma\Delta + AB \times B\Gamma$ (I). Or, on a par hypothèse : $AB \times B\Gamma = B\Delta \times BE$ (II) ; donc, on a par différence des relations (I) et (II) : $ZB \times B\Delta - B\Delta \times BE = Z\Gamma \times \Gamma\Delta + AB \times B\Gamma - AB \times B\Gamma$ ou : $(ZB - BE)\, B\Delta = Z\Gamma \times \Gamma\Delta$ ou : $ZE \times B\Delta = Z\Gamma \times \Gamma\Delta$. Or, on a : $Z\Gamma = A\Delta$, donc, comme le texte : $ZE \times B\Delta = A\Delta \times \Gamma\Delta$ (III). D'autre part, la relation d'hypothèse (II) donne : $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{AB}{BE}$, d'où : $\frac{B\Delta - B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AB - BE}{BE}$ ou : $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} = \frac{AE}{BE}$. Or, $AZ = \Gamma\Delta$; donc : $\frac{AZ}{B\Gamma} = \frac{AE}{BE}$, d'où : $\frac{AZ + AE}{B\Gamma + BE} = \frac{AE}{BE}$ ou : $\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{AE}{BE}$, d'où : $ZE \times BE = AE \times E\Gamma$ (IV). En conséquence, les relations (III) et (IV) donnent, comme le texte : $\frac{A\Delta \times \Gamma\Delta}{AE \times E\Gamma} = \frac{ZE \times B\Delta}{ZE \times BE} = \frac{B\Delta}{BE}$.

2. τὸ αὐτὸ δειχθήσεται, ce même (lemme qui) sera démontré d'une autre manière (ἄλλως), tout en invoquant la relation qui vient d'être démontrée dans la proposition 32, est le lemme VIII ou proposition 28. Voir p. 538.

de sorte que son centre est le point Θ. En conséquence, puisque la droite ZΘ est égale à la droite ΘH, il s'ensuit que la droite AΔ est à la droite ΔZ comme la droite AΓ est à la droite ΓH, et inversement (1). Mais, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓH est au carré de la droite ΓA, c'est-à-dire que le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE est au carré de la droite ΓA, comme la droite ΓH est à la droite ΓA, et le rectangle compris sous les droites ZΔ, ΔA est au carré de la droite ΔA, c'est-à-dire que le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE est au carré de la droite ΔA, comme la droite ZΔ est à la droite ΔA; donc, par permutation, le carré de la droite ΓA est au carré de la droite AΔ comme le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE; ce qu'il fallait démontrer (2).



XV.

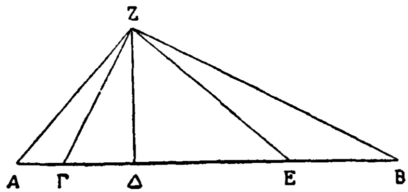
Proposition 34. — Cela étant acquis, on démontre d'une autre manière le lemme établissant que le rectangle compris sous les droites AB, BE est au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ (3).

1. Conclusion démontrée longuement par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 272, *commentarius*, ll. 22-35) de la manière que nous résumons comme suit : Menons la droite HK (en pointillé dans la figure du texte) parallèle à la droite AZ. La similitude de triangles donne : $\frac{A\Delta}{HK}=\frac{\Gamma A}{\Gamma H}$. Or, les triangles ΘKH, ΘΔZ étant égaux, on a : $\Delta Z = HK$; donc : $\frac{A\Delta}{\Delta Z}=\frac{\Gamma A}{\Gamma H}$ et, inversement : $\frac{\Delta Z}{A\Delta}=\frac{\Gamma H}{\Gamma A}$.

2. La dernière relation de la note précédente peut s'écrire : $\frac{\Delta Z \times A\Delta}{A\Delta^2}=\frac{\Gamma H \times \Gamma A}{\Gamma A^2}$. Or (Euclide, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4, et prop. 35, énoncée p. 149, n. 5), on a : $\Delta Z \times A\Delta = B\Delta \times \Delta E$ et $\Gamma H \times \Gamma A = B\Gamma \times \Gamma E$; donc : $\frac{B\Delta \times \Delta E}{A\Delta^2}=\frac{B\Gamma \times \Gamma E}{\Gamma A^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Gamma A^2}{A\Delta^2}=\frac{B\Gamma \times \Gamma E}{B\Delta \times \Delta E}$.

3. Autre démonstration de la proposition 30 (lemme X) dans laquelle on a donc par construction : $A\Delta \times \Delta E = B\Delta \times \Delta\Gamma$ (voir p. 541).

Élevons du point Δ la droite ΔZ perpendiculaire à la droite AB; posons le carré de la droite ΔZ équivalent à chacun des rectangles compris sous les droites AΔ, ΔE et sous les droites BΔ, ΔΓ, et menons les droites de jonction AZ, ZΓ, ZE, ZB. Chacun des angles compris sous les droites AZ, ZE et sous les droites ΓZ, ZB est donc droit (1). D'autre part, en vertu de ce qui vient d'être exposé, le carré de la droite BZ est au carré de la droite ZΓ comme le rectangle compris sous les droites AB, BE est au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE. Or, la droite BΔ est à la droite ΔΓ comme le carré de la droite BZ est au carré de la droite ZΓ ; donc, le rectangle compris sous les droites AB, BE est aussi au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ (2).



POUR LA PREMIÈRE INJONCTION DU SIXIÈME PROBLÈME (3).

XVI.

Proposition 35. — Soit la droite AB, soient trois points Γ, Δ, E sur celle-ci, et que le rectangle compris sous les droites AB, BE soit équivalent au rectangle compris sous les droites

1. Euclide, liv. VI, prop. 8, corollaire, invoqué dans sa réciproque (énoncée p. 49, n. 1).

2. La proposition 33 a démontré que l'on a : $\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{Z\Gamma}^2}=\frac{AB\times BE}{A\Gamma\times\Gamma E}$. Or, la similitude des triangles ΓZB, ZΔB donne : $\frac{B\Delta}{BZ}=\frac{BZ}{B\Gamma}$, d'où : $B\Delta\times B\Gamma=\overline{BZ}^2$, et la similitude des triangles ZΔΓ, ΓZB donne : $\frac{\Delta\Gamma}{Z\Gamma}=\frac{Z\Gamma}{B\Gamma}$, d'où : $\Delta\Gamma\times B\Gamma=\overline{Z\Gamma}^2$, donc, comme le texte : $\frac{B\Delta\times B\Gamma}{\Delta\Gamma\times B\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{Z\Gamma}^2}$. En conséquence, il vient, comme dans le texte : $\frac{AB\times BE}{A\Gamma\times\Gamma E}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$.

3. C'est-à-dire que le lemme XVI (ou prop. 35) est utile pour la démonstration du sixième problème du premier livre de *La Section déterminée* dans le cas de la première disposition imposée pour les points de la figure de ce problème.

ΓΒ, ΒΔ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΔΑ, ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΕΔ comme la droite AB est à la droite BE.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AB, BE équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΒΔ, il s'ensuit que, par proportion, de reste à reste et par conversion, la droite ΔΑ est à la droite AB comme l'excédent des droites ΑΓ, ΕΔ est à la droite ΑΓ. En conséquence, le rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΕΔ et la droite AB équivaut au rectangle compris sous les droites ΔΑ, ΑΓ. Derechef, puisque la droite ΓΒ est à la droite BE comme la droite AB est à la droite ΒΔ, la droite restante ΑΓ est donc à la droite restante ΔΕ comme la droite ΓΒ est à la droite BE. Par division, la droite ΓΕ est à la droite EB comme l'excédent des droites ΑΓ, ΕΔ est à la droite ΕΔ ; donc, le rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ et la droite EB équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΕΔ. Or, on a démontré aussi que le rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΕΔ et la droite AB équivaut au rectangle compris sous les droites ΔΑ, ΑΓ ; donc, par permutation, le rectangle compris sous les droites ΔΑ, ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΕΔ comme le rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ et la droite AB est au rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ et la droite BE, c'est-à-dire comme la droite AB est à la droite BE [1].

1. On a par hypothèse : $AB \times BE = \Gamma B \times B\Delta$, d'où : $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{\Gamma B}{BE}$ (I), d'où : $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{AB - \Gamma B}{B\Delta - BE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E}$, d'où : $\frac{AB}{AB - B\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma - \Delta E}$ ou : $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma - \Delta E}$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Gamma - \Delta E}{A\Gamma}$, d'où : $A\Delta \times A\Gamma = (A\Gamma - \Delta E)\, AB$ (II). D'autre part, la relation (I) donne : $\frac{AB - \Gamma B}{B\Delta - BE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{\Gamma B}{BE}$, d'où : $\frac{A\Gamma - \Delta E}{\Delta E} = \frac{\Gamma B - BE}{BE} = \frac{\Gamma E}{BE}$, d'où, comme le texte : $(A\Gamma - \Delta E)\, BE = \Gamma E \times \Delta E$ (III). Dès lors, les relations (II) et (III) donnent, comme le texte : $\frac{A\Delta \times A\Gamma}{\Gamma E \times \Delta E} = \frac{(A\Gamma - \Delta E)\, AB}{(A\Gamma - \Delta E)\, BE} = \frac{AB}{BE}$.

LE MÊME LEMME D'UNE AUTRE MANIÈRE, AU MOYEN DU RAPPORT COMPOSÉ (1).

XVII.

Puisque la droite ΔB est à la droite BE comme la droite AB est à la droite BΓ, il s'ensuit que la droite restante AΔ est à la droite restante ΓE comme la droite AB est à la droite BΓ. Derechef, puisque la droite ΓB est à la droite BE comme la droite AB est à la droite BΔ, il s'ensuit que la droite restante AΓ est à la droite restante ΔE comme la droite ΓB est à la droite BE ; de sorte que le rapport composé de celui de la droite AB à la droite BΓ et de celui de la droite ΓB à la droite BE, c'est-à-dire celui de la droite AB à la droite BE, est le même que le rapport composé de celui de la droite AΔ à la droite ΓE et de celui de la droite AΓ à la droite ΔE, c'est-à-dire celui du rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ (2).

AUTREMENT.

XVIII.

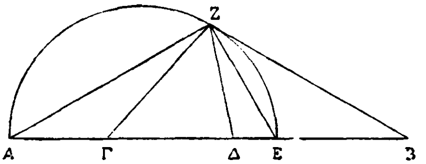
Décrivons le demi-cercle AZE sur la droite AE ; menons la tangente BZ et les droites de jonction AZ, [ΓZ] (3), ΔZ, EZ. Dès lors, puisque la droite BZ est une tangente et la droite BA une sécante, le rectangle compris sous les droites AB, BE équivaut au carré de la droite BZ. Mais, le rectangle compris sous les

1. Voir la figure de la proposition 35.

2. On a par hypothèse : $B\Gamma \times \Delta B = AB \times BE$, d'où : $\frac{\Delta B}{BE} = \frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{AB - \Delta B}{B\Gamma - BE} = \frac{AB}{B\Gamma}$, ou, comme le texte : $\frac{A\Delta}{\Gamma E} = \frac{AB}{B\Gamma}$. D'autre part, la relation d'hypothèse donne aussi : $\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{AB}{\Delta B}$, d'où : $\frac{AB - B\Gamma}{\Delta B - BE} = \frac{B\Gamma}{BE}$, ou, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{BE}$; donc : $\frac{A\Delta \times A\Gamma}{\Gamma E \times \Delta E} = \frac{AB \times B\Gamma}{B\Gamma \times BE} = \frac{AB}{BE}$.

3. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 274. l. 23).

droites AB, BE est supposé équivalent au rectangle compris sous les droites ΓB, BΔ ; donc, le rectangle compris sous les droites ΓB, BΔ équivaut aussi au carré de la droite BZ ; en sorte que l'angle compris sous les droites BZ, ZΔ est égal à l'angle compris sous les droites BΓ, ΓZ [1]. Et l'angle compris sous les droites BZ, ZE est égal à l'angle compris sous les droites ZA, AΓ ; donc, l'angle restant compris



sous les droites ΔZ, ZE est égal à l'angle restant compris sous les droites AZ, ZΓ. [2] En conséquence, le carré de la droite AZ est au carré de la droite ZE comme le rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ est au au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ [3]. Or, la droite AB est à la droite BE comme le carré de la droite AZ est au carré de la droite ZE ; donc, le rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ est au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ comme la droite AB est à la droite BE [4].

1. On a : $\overline{BZ}^2 = AB \times BE$. Or, par hypothèse de construction, on a : $AB \times BE = \Gamma B \times B\Delta$, donc : $\overline{BZ}^2 = \Gamma B \times B\Delta$, d'où : $\frac{BZ}{B\Delta} = \frac{\Gamma B}{BZ}$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 6, énoncée p. 158, n. 2) similitude des triangles ZΔB, ΓZB, d'où : $\widehat{BZ\Delta} = \widehat{B\Gamma Z}$.

2. La relation $\overline{BZ}^2 = AB \times BE$ donne : $\frac{BZ}{BE} = \frac{AB}{BZ}$, d'où similitude des triangles ZEB, AZB, d'où, comme le texte : $\widehat{BZE} = \widehat{ZA\Gamma}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente : $\widehat{BZ\Delta} - \widehat{BZE} = \widehat{B\Gamma Z} - \widehat{ZA\Gamma} = (\widehat{AZ\Gamma} + \widehat{ZA\Gamma}) - \widehat{ZA\Gamma}$ ou, comme le texte : $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{AZ\Gamma}$.

3. Voir livre VI, proposition 12 (p. 381), qui a démontré que, dans la condition $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{AZ\Gamma}$, on a : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{ZE}^2} = \frac{\Delta A \times A\Gamma}{\Gamma E \times E\Delta}$.

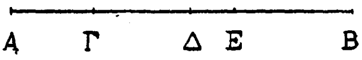
4. La similitude des triangles AZB, ZEB donne : $\frac{AZ}{ZE} = \frac{AB}{BZ}$, d'où : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{ZE}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BZ}^2}$. Or, $\overline{BZ}^2 = AB \times BE$; donc : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{ZE}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{AB \times BE} = \frac{AB}{BE}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente on a, comme dans le texte : $\frac{\Delta A \times A\Gamma}{\Gamma E \times E\Delta} = \frac{AB}{BE}$.

LEMME POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU SIXIÈME PROBLÈME [1].

XIX.

PROPOSITION 36. — Le rectangle compris sous les droites AB, BE étant de nouveau équivalent au rectangle compris sous les droites ΓB, BΔ, il faut démontrer que le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE est au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE comme la droite ΓB est à la droite BΔ.

En effet, puisque la droite ΓB est à la droite BE comme la droite AB est à la droite BΔ, il s'ensuit que la droite restante AΓ est à la droite restante ΔE comme la droite ΓB est à la droite BE. Pour la même raison d'ailleurs, la droite restante AΔ est à la droite restante ΓE comme la droite ΔB est à la droite BE, et inversement ; en sorte que le rapport composé de celui que possède la droite ΓB avec la droite BE et de celui que possède la droite EB avec la droite BΔ est le même que le rapport de la droite ΓB à la droite BΔ, c'est-à-dire le même que le rapport composé de ceux que la droite AΓ possède avec la droite ΔE et la droite ΓE avec la droite AΔ, lequel est celui du rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE. En conséquence, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE est au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE comme la droite ΓB est à la droite BΔ [2].



1. C'est-à-dire lemme auxiliaire pour la démonstration du cas de troisième disposition imposée des points de la figure du sixième problème du premier livre de *La Section déterminée*.

2. La condition d'hypothèse $\Gamma B \times B\Delta = AB \times BE$ donne : $\frac{\Gamma B}{BE} = \frac{AB}{B\Delta}$, d'où : $\frac{AB - \Gamma B}{B\Delta - BE} = \frac{\Gamma B}{BE}$ ou, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{\Gamma B}{BE}$. La même condition d'hypothèse donne aussi : $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{AB - B\Delta}{B\Gamma - BE} = \frac{B\Delta}{BE}$ ou : $\frac{A\Delta}{\Gamma E} = \frac{B\Delta}{BE}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Gamma E}{A\Delta} = \frac{BE}{B\Delta}$. Dès lors, $\frac{A\Gamma}{\Delta E} \times \frac{\Gamma E}{A\Delta} = \frac{\Gamma B}{BE} \times \frac{BE}{B\Delta}$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Gamma \times \Gamma E}{\Delta E \times A\Delta} = \frac{\Gamma B}{B\Delta}$.

LE MÊME LEMME D'UNE AUTRE MANIÈRE (1).

XX.

Puisque la droite ΓΒ est à la droite ΒΕ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΔ, la droite restante ΑΓ est à la droite restante ΔΕ comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΕ. Par conversion, la droite ΓΒ est à la droite ΓΕ comme la droite ΑΓ est à l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ ; donc, le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΕ équivaut au rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ et la droite ΒΓ. Derechef, puisque la droite restante ΑΓ est à la droite restante ΔΕ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΔ, par division, la droite ΔΑ est à la droite ΔΒ comme l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ est à la droite ΔΕ ; donc, le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΕ équivaut au rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ et la droite ΔΒ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΕ est au restangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΕ comme le rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ et la [droite ΒΓ est au rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΓ, ΔΕ et la] (2) droite ΔΒ, c'est-à-dire comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΔ (3).

LE MÊME LEMME D'UNE AUTRE MANIÈRE.

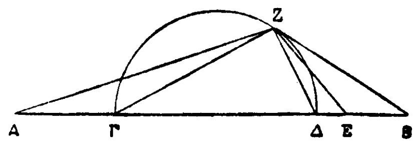
XXI.

Décrivons le demi-cercle ΓΖΔ sur la droite ΓΔ ; menons la tangente ΒΖ et menons les droites de jonction ΑΖ, [ΓΖ] (4), ΔΖ,

---

1. Voir la figure de la proposition 36.
2. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 276, l. 3).
3. La condition d'hypothèse $\Gamma B \times B\Delta = AB \times BE$ donne : $\frac{\Gamma B}{BE} = \frac{AB}{B\Delta}$ (I), d'où : $\frac{AB - \Gamma B}{B\Delta - BE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{\Gamma B}{BE}$, d'où : $\frac{A\Gamma}{A\Gamma - \Delta E} = \frac{\Gamma B}{\Gamma B - BE} = \frac{\Gamma B}{\Gamma E}$, d'où, comme le texte : $A\Gamma \times \Gamma E = (A\Gamma - \Delta E)\,\Gamma B$. D'autre part, la relation (I)donne aussi : $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{AB - \Gamma B}{B\Delta - BE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E}$, d'où : $\frac{AB - B\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Gamma - \Delta E}{\Delta E}$, d'où : $A\Delta \times \Delta E = (A\Gamma - \Delta E)\, B\Delta$; donc, comme le texte : $\frac{A\Gamma \times \Gamma E}{A\Delta \times \Delta E} = \frac{(A\Gamma - \Delta E)\,\Gamma B}{(A\Gamma - \Delta E)\, B\Delta} = \frac{\Gamma B}{B\Delta}$.
4. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 276, l. 8).

[EZ] (1). Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites AB, BE équivaut au rectangle compris sous les droites ΓB, BΔ ; mais, que le rectangle compris sous les droites ΓB, BΔ équivaut au carré de la tangente BZ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AB, BE équivaut aussi au carré de la droite BZ. En conséquence, l'angle compris sous les droites BZ, BE est égal à l'angle A. Mais, l'angle entier compris sous les droites BZ, ZΔ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ZΓ, ΓB ; donc, l'angle restant compris sous les droites EZ, ZΔ est égal à l'angle restant compris sous les droites AZ, ZΓ (2). En conséquence, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE est au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE comme le carré de la droite ΓZ est au carré de la droite ZΔ. Or, la droite ΓB est à la droite BΔ comme le carré de la droite ΓZ est au carré de la droite ZΔ ; donc, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE est au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE comme la droite ΓB est à la droite BΔ (3).



1. Restauration de Commandin (*Ibidem*).

2. On a : $\overline{BZ}^2 = \Gamma B \times B\Delta$ (I). Or, on a par hypothèse : $AB \times BE = \Gamma B \times B\Delta$; donc, $\overline{BZ}^2 = AB \times BE$, d'où : $\frac{BZ}{BE} = \frac{AB}{BZ}$, d'où (EUCLIDE, liv. VI, prop. 6, énoncée p. 158, n. 2) similitude des triangles ZBE, ABZ, d'où : $\widehat{BZE} = \widehat{BAZ}$ (II). D'autre part, la relation (I) donne : $\frac{BZ}{B\Delta} = \frac{\Gamma B}{BZ}$, d'où similitude des triangles ZBΔ, ΓBZ, d'où : $\widehat{BZ\Delta} = \widehat{Z\Gamma B}$, d'où, par différence avec la relation (II), on a : $\widehat{BZ\Delta} - \widehat{BZE} = \widehat{Z\Gamma B} - \widehat{BAZ} = (\widehat{AZ\Gamma} + \widehat{BAZ}) - \widehat{BAZ}$ ou, comme le texte : $\widehat{EZ\Delta} = \widehat{AZ\Gamma}$.

3. Considérant le triangle ΓZΔ et les droites ZE, AZ menées extérieurement sous les angles égaux $\widehat{EZ\Delta} = \widehat{AZ\Gamma}$, la proposition 12 du livre VI (voir p. 382, n. 1) a démontré que l'on a : $\frac{A\Gamma \times \Gamma E}{A\Delta \times \Delta E} = \frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\overline{Z\Delta}^2}$. Or, la similitude des triangles ΓBZ, ZBΔ donne : $\frac{\Gamma Z}{Z\Delta} = \frac{\Gamma B}{BZ}$, d'où : $\frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\overline{Z\Delta}^2} = \frac{\overline{\Gamma B}^2}{\overline{BZ}^2} = \frac{\overline{\Gamma B}^2}{\Gamma B \times B\Delta} = \frac{\Gamma B}{B\Delta}$; donc, comme le texte : $\frac{A\Gamma \times \Gamma E}{A\Delta \times \Delta E} = \frac{\Gamma B}{B\Delta}$.

XXII.

Proposition 37. — Soit la droite AB ; soient, sur celle-ci, deux points Γ, Δ, et que le carré de la droite AΔ soit au carré de la droite ΔΓ comme la droite AB est à la droite BΓ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au carré de la droite BΔ (1).

Posons la droite ΔE égale à la droite ΓΔ. Dès lors, par division, le rectangle compris sous les droites ΓA, AE est au carré de la droite ΓΔ, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔΓ, comme la droite AΓ est à la droite ΓB. Or, prenant la droite AE comme hauteur commune, le rectangle compris sous les droites ΓA, AE est au rectangle compris sous les droites AE, ΓB comme la droite AΓ est à la droite ΓB ; donc, [le rectangle compris sous les droites ΓA, AE est au rectangle compris sous les droites] (2) EΔ, ΔΓ comme le rectangle compris sous les droites ΓA, AE est au rectangle compris sous les droites [AE, ΓB] (3). En conséquence, le rectangle compris sous les droites AE, ΓB équivaut au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔΓ. Par proportion et par composition, la droite ΔB est à la droite BΓ comme la droite AΔ est à la droite ΔE, c'est-à-dire à la droite ΔΓ; donc, la droite entière AB est aussi à la droite entière BΔ comme la droite ΔB est à la droite BΓ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au carré de la droite BΔ (4) ; ce qu'il fallait démontrer.

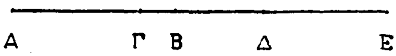
---

1. Proposition identique à la suivante, dans laquelle l'un des deux points Γ, Δ sera pris sur le prolongement de la droite AB.
2. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 277, l. 22).
3. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *ibidem*. l. 23).
4. On a par hypothèse : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{A\Delta}^2-\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{AB-B\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ (I).
Or, la droite EΓ étant coupée en parties égales en Δ, et la droite AE lui étant ajoutée, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\overline{A\Delta}^2=\overline{\Delta\Gamma}^2+\Gamma A\times AE$, d'où : $\overline{A\Delta}^2-\overline{\Delta\Gamma}^2=\Gamma A\times AE$; tandis que l'on a posé : $E\Delta=\Delta\Gamma$, d'où : $\overline{\Delta\Gamma}^2=E\Delta\times\Delta\Gamma$; donc, la relation (I) devient : $\frac{\Gamma A\times AE}{E\Delta\times\Delta\Gamma}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{\Gamma A\times AE}{E\Delta\times\Delta\Gamma}=\frac{A\Gamma\times AE}{B\Gamma\times AE}$, d'où, comme le texte : $E\Delta\times\Delta\Gamma=B\Gamma\times AE$; d'où :

XXIII.

Proposition 38. — Que le carré de la droite ΑΔ soit de nouveau au carré de la droite ΔΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ équivaut au carré de la droite ΒΔ.

Posons la droite ΔΕ égale à la droite ΓΔ, il s'ensuit que, par division, le rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΒ ; c'est-à-dire comme le rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΒΓ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΒΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ. Par proportion et par division, la droite ΔΒ est à la droite ΓΒ comme la droite ΑΔ est à la droite ΔΕ, c'est-à-dire à la droite ΔΓ ; donc, la droite restante ΑΒ est à la droite restante ΔΒ comme la droite ΔΒ est à la droite ΓΒ ; en sorte que le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ équivaut au carré de la droite ΒΔ (1).



XXIV.

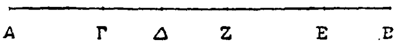
Proposition 39. — Soit la droite ΑΒ ; soient, sur celle-ci, trois points Γ, Δ, Ε, et que le carré de la droite ΑΓ soit au carré

$\frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E}\Delta}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma+\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{AE}+\mathrm{E}\Delta}{\mathrm{E}\Delta}$ ou : $\frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{E}\Delta}=\frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{\mathrm{B}\Delta+\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{B}\Gamma+\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B}\Delta}=\frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{B}\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma=\overline{\mathrm{B}\Delta}^2$.

1. On a par hypothèse : $\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B}\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}^2-\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{\mathrm{AB}-\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}$ (I). Or, la droite ΓΕ est coupée en deux parties égales en Δ, et la droite ΑΓ lui étant ajoutée, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2=\overline{\Delta\Gamma}^2+\mathrm{AE}\times\mathrm{A}\Gamma$, d'où : $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2-\overline{\Delta\Gamma}^2=\mathrm{AE}\times\mathrm{A}\Gamma$; tandis que l'on a par construction : $\overline{\Delta\Gamma}^2=\Delta\Gamma\times\Delta\mathrm{E}$; donc, la relation (I) devient : $\frac{\mathrm{AE}\times\mathrm{A}\Gamma}{\Delta\Gamma\times\Delta\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{\mathrm{AE}\times\mathrm{A}\Gamma}{\Delta\Gamma\times\Delta\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{AE}\times\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AE}\times\mathrm{B}\Gamma}$, d'où : $\Delta\Gamma\times\Delta\mathrm{E}=\mathrm{AE}\times\mathrm{B}\Gamma$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{AE}}{\Delta\mathrm{E}}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma-\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{AE}-\Delta\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E}}$ ou, comme le texte : $\frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\Gamma}$; donc : $\frac{\mathrm{A}\Delta-\Delta\mathrm{B}}{\Delta\Gamma-\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{B}}=\frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{B}\Gamma}$, d'où : $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma=\overline{\Delta\mathrm{B}}^2$.

de la droite ΓΔ comme le rectangle compris sous les droites BA, AE est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE ; je dis que le carré de la droite BΓ est au carré de la droite ΓE comme le rectangle compris sous les droites AB, BΔ est au rectangle compris sous les droites AE, EΔ.

En effet, prenons le point d'égalité Z ([1]), tel que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΔ soit équivalent au rectangle compris sous les droites BZ, ZE. Dès lors, le rectangle compris sous les droites BA, AE est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE comme la droite AZ est à la droite ΔZ (car c'est un lemme relatif à *La Section déterminée*) ([2]). Or, le carré de la droite AΓ est au carré de la droite ΓΔ comme le rectangle compris sous les droites BA, AE est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE ; donc, le carré de la droite AΓ est aussi au carré de la droite ΓΔ comme la droite AZ est à la droite ZΔ ([3]). En conséquence, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΔ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites BZ, ZE, équivaut au carré de la droite ZΓ ; donc, le carré de la droite BΓ est au carré de la droite ΓE comme la droite BZ est à la droite ZE ([4]). Or, le rectangle compris sous



1. ἰσότητος σημεῖον τὸ Z, le point d'égalité Z, expression singulière signifiant ici que le point Z doit partager les droites AE, ΔB dans des rapports égaux, c'est-à-dire de manière à avoir : $\frac{AZ}{ZE}=\frac{BZ}{Z\Delta}$ d'où, comme dit le texte : $AZ \times Z\Delta = BZ \times ZE$.

2. En effet, la proposition 22, ou premier lemme relatif à *La Section déterminée* (voir p. 530) a démontré que, si la droite AB est partagée aux points Δ, Z, E de manière à avoir $AZ \times Z\Delta = BZ \times ZE$, on a, comme dans le texte : $\frac{BA \times AE}{B\Delta \times \Delta E}=\frac{AZ}{\Delta Z}$.

3. On a par hypothèse : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{BA \times AE}{B\Delta \times \Delta E}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente, on a, comme le texte : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{AZ}{\Delta Z}$.

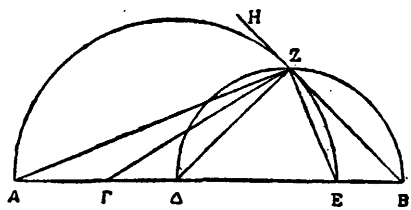
4. La proposition 37, ou lemme XXII relatif à *La Section déterminée* (voir p. 554) a démontré que, si la droite AZ est divisée aux points Γ, Δ de manière à avoir la relation de la note précédente, on a, comme le texte : $AZ \times \Delta Z = \overline{Z\Gamma}^2$, d'où, en présence de la relation de construction : $AZ \times Z\Delta = BZ \times ZE$ (voir note 1 ci-dessus), on a, comme dans le texte : $BZ \times ZE = \overline{Z\Gamma}^2$, d'où : $\frac{Z\Gamma}{ZE}=\frac{BZ}{Z\Gamma}$ (I), d'où : $\frac{Z\Gamma + BZ}{ZE + Z\Gamma}=\frac{\Gamma B}{\Gamma E}=\frac{BZ}{Z\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{\Gamma B}^2}{\overline{\Gamma E}^2}=\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{Z\Gamma}^2}$. Or, la relation (I)

les droites AB, BΔ est au rectangle compris sous les droites AE, EΔ comme la droite BZ est à la droite ZE ; donc, le carré de la droite BΓ est aussi au carré de la droite ΓE comme le rectangle compris sous les droites AB, BΔ est au rectangle compris sous les droites AE, EΔ (1).

MÊME LEMME D'UNE AUTRE MANIÈRE.

XXV.

Décrivons les demi-cercles AZE, ΔZB sur les deux droites AE, ΔB, et menons les droites de jonction AZ, ZΓ, ZΔ, ZE, ZB. Dès lors, puisque les angles compris sous les droites AZ, ZB et sous les droites ΔZ, ZE valent deux angles droits, il s'ensuit que le carré de la droite AZ est au carré de la droite ZΔ comme le rectangle compris sous les droites BA, AE est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE. Or, le carré de la droite AΓ est au carré de la droite ΔΓ comme le rectangle compris sous les droites BA, AE est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE ; donc, le carré de la droite AZ est au carré de la droite ZΔ



comme le carré de la droite AΓ est au carré de la droite ΔΓ ; de sorte que la droite AZ est aussi à la droite ZΔ comme la droite AΓ est à la droite ΓΔ. En conséquence, l'angle compris sous les droites AZ, ZΔ est coupé en deux parties égales par la

---

donne aussi : $\frac{Z\Gamma}{ZE}\times\frac{BZ}{Z\Gamma}=\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{Z\Gamma}^2}$ ou : $\frac{BZ}{ZE}=\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{Z\Gamma}^2}$; donc comme le texte : $\frac{\overline{\Gamma B}^2}{\overline{\Gamma E}^2}=\frac{BZ}{ZE}$; relation qui résulte d'ailleurs directement de la proposition 38 (ou lemme XXII) (voir p. 555) invoquée dans sa réciproque.

1. La proposition 22 (voir p. 531, n. 1) a démontré subsidiairement que, si les points Δ, Z, E sont tels que l'on ait : $AZ \times Z\Delta = BZ \times ZE$, on a, comme le texte : $\frac{AB \times B\Delta}{AE \times E\Delta}=\frac{BZ}{ZE}$, d'où, en présence de l'égalité dernière de la note précédente on a, comme le texte : $\frac{\overline{\Gamma B}^2}{\overline{\Gamma E}^2}=\frac{AB \times B\Delta}{AE \times E\Delta}$.

droite ZΓ. Mais, la droite BZ étant prolongée jusqu'au point H, l'angle compris sous les droites ΔZ, ZE est égal à l'angle compris sous les droites HZ, ZA ; donc, l'angle entier compris sous les droites EZ, ZΓ est égal à l'angle entier compris sous les droites ΓZ, ZH (1). En conséquence, la droite BZ est à la droite ZE comme la droite BΓ est à la droite ΓE (2), et il en est de même de carré à carré de ces droites. Mais, le rectangle compris sous les droites AB, BΔ est au rectangle compris sous les droites AE, EΔ comme le carré de la droite BZ est au carré de la droite ZE ; donc, le carré de la droite BΓ est aussi au carré de la droite ΓE comme le rectangle compris sous les droites AB, BΔ est au rectangle compris sous les droites AE, EΔ ; ce qu'il fallait démontrer (3).

---

1. On a : $\widehat{AZE} + \widehat{\Delta ZB} = 2$ angles droits ou : $\widehat{AZE} + \widehat{EZB} + \widehat{\Delta ZE} = \widehat{AZB} + \widehat{\Delta ZE} = 2$ angles droits. Dès lors, la proposition 26, ou lemme VI (voir p. 536), a démontré que l'on a: $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{Z\Delta}^2} = \frac{BA \times AE}{B\Delta \times \Delta E}$. Or, on a par hypothèse (voir énoncé de la prop. 39) : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2} = \frac{BA \times AE}{B\Delta \times \Delta E}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{Z\Delta}^2} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}$, d'où : $\frac{AZ}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4) : $\widehat{AZ\Gamma} = \widehat{\Gamma Z\Delta}$. Or, $\widehat{AZE} = \widehat{\Delta ZB} = \widehat{\Delta ZH} = 1$ angle droit ; donc : $\widehat{AZE} - \widehat{AZ\Delta} = \widehat{\Delta ZH} - \widehat{AZ\Delta}$ ou, comme le texte : $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{HZA}$, d'où : $\widehat{\Delta ZE} + \widehat{\Gamma Z\Delta} = \widehat{HZA} + \widehat{AZ\Gamma}$ ou, comme le texte : $\widehat{EZ\Gamma} = \widehat{\Gamma ZH}$.

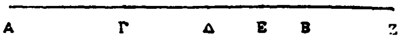
2. La dernière égalité de la note précédente montre que l'angle extérieur EZH du triangle EZB est divisé en deux parties égales par la droite ΓZ ; donc (Euclide, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4, mais étendue au cas de l'angle extérieur), on a, comme dans le texte : $\frac{BZ}{ZE} = \frac{B\Gamma}{\Gamma E}$. Commandin a démontré directement cette déduction (cfr. *loc. cit.*, p. 279, *commentarius*, ll. 22-33), et Simson la démontre dans un théorème qu'il énonce : « If the outward angle of a triangle made by producing one of its sides, be divided into two equal angles by a straight line which also cuts the base produced, the segments between the dividing line and the extremities of the base, have the same ratio which the other sides of the triangle have to another, etc. » (*The Elements of Euclid*. London, 1734, p. 136).

3. La relation de la note précédente donne : $\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{ZE}^2} = \frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{\Gamma E}^2}$. Or, la relation précédente $\widehat{AZB} + \widehat{\Delta ZE} = 2$ angles droits donne aussi, en vertu de la proposition 26 (voir p. 536) : $\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{ZE}^2} = \frac{AB \times B\Delta}{AE \times \Delta E}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{\Gamma E}^2} = \frac{AB \times B\Delta}{AE \times \Delta E}$.

XXVI.

Proposition 40. — Que le carré de la droite ΓΔ soit de nouveau au carré de la droite ΔE comme le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB est au rectangle compris sous les droites AE, EB ; je dis que le carré de la droite AΔ est au carré de la droite ΔB comme le rectangle compris sous les droites EA, AΓ est au rectangle compris sous les droites ΓB, BE.

Prenons de nouveau le point d'égalité Z, de manière que le rectangle compris sous les droites AZ, ZB soit équivalent au rectangle compris sous les droites ΓZ, ZE (1). Dès lors, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB est au rectangle compris sous les droites AE, EB comme la droite ΓZ est à la droite ZE (2). Or, le carré de la droite ΓΔ est au carré de la droite ΔE comme le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB est au rectangle compris sous les droites AE, EB ; donc, le carré de la droite ΓΔ est au carré de la droite ΔE comme la droite ΓZ est à la droite ZE (3). En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZE, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites AZ, ZB, équivaut au carré de la droite ZΔ (4) ; donc, le carré de la droite ΔA est au carré de la droite ΔB comme



1. C'est-à-dire que la droite étant divisée aux points Γ, Δ, E de manière à avoir : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2}=\frac{A\Gamma \times \Gamma B}{AE \times EB}$ (I), le point Z, dit d'égalité (ἰσότητος σημεῖον), est pris tel, sur le prolongement de la droite AB, que l'on ait : $\frac{\Gamma Z}{ZB}=\frac{A\Gamma}{EB}$, d'où : $\frac{\Gamma Z}{ZB}=\frac{\Gamma Z + A\Gamma}{ZB + EB}$ ou : $\frac{\Gamma Z}{ZB}=\frac{AZ}{EZ}$, d'où, comme le texte : $\Gamma Z \times EZ = AZ \times ZB$.

2. La proposition 36, ou lemme XIX (voir p. 551) a démontré, qu'en présence de la dernière égalité de la note précédente on a : $\frac{A\Gamma \times \Gamma B}{AE \times EB}=\frac{\Gamma Z}{ZE}$.

3. L'égalité de la note précédente donne, en présence de la relation d'hypothèse (I) de la note 1 ci-dessus : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2}=\frac{\Gamma Z}{ZE}$.

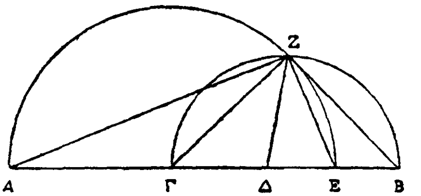
4. Considérant la droite ΓZ divisée aux points Δ, E, la proposition 37, ou lemme XXII (voir p. 554), a démontré que, en présence de la relation de la note précédente, on a : $\Gamma Z \times ZE = \overline{Z\Delta}^2$. Or, on a par construction : $\Gamma Z \times ZE = AZ \times ZB$; donc, comme le texte : $AZ \times ZB = \overline{Z\Delta}^2$.

la droite AZ est à la droite ZB (1). Or, le rectangle compris sous les droites EA, AΓ est au rectangle compris sous les droites ΓB, BE comme la droite AZ est à la droite ZB ; donc, le carré de la droite AΔ est au carré de la droite ΔB comme le rectangle compris sous les droites EA, AΓ est au rectangle compris sous les droites ΓB; BE; ce qu'il fallait démontrer (2).

MÊME LEMME D'UNE AUTRE MANIÈRE.

XXVII.

Décrivons les demi-cercles AZE, ΓZB sur les droites AE, ΓB, et menons les droites de jonction AZ, ΓZ, ΔZ, EZ, BZ. Dès lors, l'angle compris sous les droites AZ, ZΓ est égal à l'angle compris sous les droites EZ, ZB ; donc, le carré de la droite ΓZ est au carré de la droite ZE comme le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB est au rectangle compris sous les droites AE, EB. Or, le carré de la droite ΓΔ est au carré de la droite ΔE comme le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB est au rectangle compris sous les droites AE, EB ; donc, le carré de la droite ΓZ est aussi au carré de la droite ZE comme le carré de la droite ΓΔ est au carré de la droite ΔE ; en sorte que la droite ΓZ est aussi



1. La dernière égalité de la note précédente permet de conclure, en vertu de la réciproque de la proposition 37, ou lemme XII, que l'on a, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{AZ}{ZB}$. Une démonstration directe, assez longue, a été donnée par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 280, l. 41, à p. 281, l. 6), et une autre démonstration plus simple a été donnée par R. Simson (cfr. *Reliqua quaedam*, etc.)de la manière suivante : La dernière relation de la note précédente donne : $\frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{Z\Delta}{ZB}$ (I), d'où : $\frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{AZ - Z\Delta}{Z\Delta - ZB} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$, d'où : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{Z\Delta}^2} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2}$ (II). Or, la relation (I) donne aussi : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{Z\Delta}^2} = \frac{AZ \times Z\Delta}{Z\Delta \times ZB} = \frac{AZ}{ZB}$, d'où (II) devient, comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{AZ}{ZB}$.

2. Considérant la droite AZ divisée aux trois points Γ, E, B, et ayant par construction : $\Gamma Z \times ZE = AZ \times ZB$, on se trouve dans les conditions de la

à la droite ZE comme la droite ΓΔ est à la droite ΔE (1). En conséquence, l'angle compris sous les droites ΓZ, ZΔ est égal à l'angle compris sous les droites ΔZ, ZE. Or, l'angle compris sous les droites AZ, ZΓ est aussi égal à l'angle compris sous les droites BZ, ZE ; donc, l'angle entier compris sous les droites AZ, ZΔ est égal à l'angle entier compris sous les droites BZ, ZΔ ; donc, le carré de la droite AΔ est au carré de la droite ΔB comme le carré de la droite AZ est au carré de la droite ZB (2). Or, le rectangle compris sous les droites EA, AΓ est au rectangle compris sous les droites ΓB, BE comme le carré de la droite AZ est au carré de la droite ZB ; par conséquent, le carré de la droite AΔ est au carré de la droite ΔB [comme le rectangle compris sous les droites EA, AΓ est au rectangle compris sous les droites ΓB, BE] (3) ; ce qu'il fallait démontrer (4).

---

proposition 35, ou lemme XVI (voir p. 547) qui a démontré que l'on a : $\frac{EA \times A\Gamma}{\Gamma A \times BE} = \frac{AZ}{ZB}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{EA \times A\Gamma}{\Gamma B \times BE}$.

1. On a par hypothèse : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2} = \frac{A\Gamma \times \Gamma B}{AE \times EB}$. Or, l'angle ΓZE est commun aux deux angles droits AZE, ΓZB ; donc : $\widehat{AZ\Gamma} = \widehat{EZB}$ (I). Dès lors, considérant le triangle ΓZE avec les côtés duquel les droites AZ, ZB forment des angles égaux, la proposition 12 du livre VI (voir p. 382, n. 1) donne : $\frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\overline{ZE}^2} = \frac{A\Gamma \times \Gamma B}{AE \times EB}$, d'où, en présence de la relation d'hypothèse, il vient : $\frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\overline{ZE}^2} = \frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2}$, d'où : $\frac{\Gamma Z}{ZE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$.

2. La dernière égalité de la note précédente donne (EUCLIDE, liv. VI, prop. 3 énoncée p. 220, n. 4) : $\widehat{\Gamma Z\Delta} = \widehat{\Delta ZE}$, d'où, en présence de l'égalité (I) de la note précédente : $\widehat{AZ\Gamma} + \widehat{\Gamma Z\Delta} = \widehat{EZB} + \widehat{\Delta ZE}$ ou, comme le texte : $\widehat{AZ\Delta} = \widehat{BZ\Delta}$, d'où (EUCLIDE, liv. VI, prop. 3) : $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AZ}{ZB}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{\overline{AZ}^2}{\overline{ZB}^2}$.

3. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 280, l. 15).

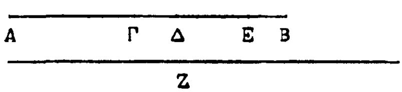
4. Considérant le triangle AZB avec les côtés desquels les droites ZΓ, ZE forment des angles égaux, la proposition 12 du livre VI (voir p. 381) donne : $\frac{EA \times A\Gamma}{\Gamma B \times BE} = \frac{\overline{AZ}^2}{\overline{BZ}^2}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note 2 ci-dessus, on a, comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{EA \times A\Gamma}{\Gamma B \times BE}$.

LEMMES UTILES POUR LE SECOND LIVRE DE LA SECTION DÉTERMINÉE.

I.

Proposition 41. — Soit la droite AB ; soient trois points Γ, Δ, E [1] pris tels que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ soit équivalent au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE, et posons la droite Z égale à la somme des droites AE, ΓB ; je dis que le rectangle compris sous les droites Z, AΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites BA, AE ; que le rectangle compris sous les droites Z, ΓΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites BΓ, ΓE ; que le rectangle compris sous les droites Z, BΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites AB, BΓ, et que le rectangle compris sous les droites Z, ΔE équivaut à celui qui est compris sous les droites AE, EΓ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE, et que, par proportion, par inversion, par droite entière à droite entière et par composition, la droite BA est à la droite AΔ comme la somme des droites BΓ, AE, c'est-à-dire la droite Z, est à la droite AE, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites Z, AΔ équivaut au rectangle compris sous les droites BA, AE [2]. Derechef, puisque la droite entière AE est à la droite entière ΓB comme la droite EΔ est à la droite ΔΓ, par composition, la droite ΓE est à la droite ΓΔ comme la somme des droites AE, ΓB est à la droite ΓB, c'est-à-dire comme la



1. Sous-entendu : ἐπ' αὐτῆς, sur cette (droite).

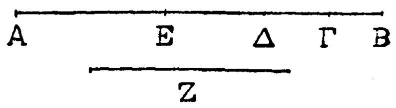
2. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times E\Delta$, d'où, comme le texte, par proportion : $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma}$ (I), par inversion (καὶ ἀνάπαλιν) : $\frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{E\Delta}$, par droite entière à droite entière : $\frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{B\Delta + \Delta\Gamma}{A\Delta + E\Delta} = \frac{\Gamma B}{AE}$ (II) et par composition : $\frac{B\Delta + A\Delta}{A\Delta} = \frac{\Gamma B + AE}{AE}$ ou : $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{\Gamma B + AE}{AE} = \frac{Z}{AE}$, d'où : $AB \times AE = Z \times A\Delta$.

droite Z est à la droite ΓB ; donc, le rectangle compris sous les droites Z, ΓΔ équivaut au rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE (1). Il en est de même pour les rectangles restants (2) ; donc, on a les quatre rectangles.

II.

Proposition 42. — Que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ soit maintenant de nouveau équivalent au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE, et posons la droite Z égale à la somme des droites AE, ΓB ; je dis qu'on obtient de nouveau les quatre rectangles : celui qui est compris sous les droites Z, AΔ équivalent au rectangle compris sous les droites [BA, AE ; celui qui est compris sous les droites Z, ΓΔ équivalent à celui qui est compris sous les droites] (3) BΓ, ΓE ; celui qui est compris sous les droites Z, BΔ équivalent à celui qui est compris sous les droites AB, BΓ et celui qui est compris sous les droites Z, ΔE équivalent à celui qui est compris sous les droites AE, EΓ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE, par proportion, par inversion, de reste à reste et par composition, la droite BA est à la droite AΔ comme la somme des droites AE, ΓB est à la droite AE. Or, la somme des droites AE, ΓB est égale à la droite Z ; donc, la droite BA est à la droite AΔ comme la droite Z est à la droite AE ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites Z, AΔ équivaut au



1. La relation d'hypothèse (I) de la note précédente donne : $\frac{A\Delta + E\Delta}{B\Delta + \Delta\Gamma} = \frac{AE}{B\Gamma} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma}$ (I), d'où : $\frac{AE + B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{E\Delta + \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{\Gamma E}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{Z}{B\Gamma} = \frac{\Gamma E}{\Delta\Gamma}$, d'où, comme le texte : $Z \times \Delta\Gamma = \Gamma E \times B\Gamma$.

2. C'est-à-dire que la relation (II) de la note 2 de la page 562 donne : $\frac{B\Delta}{B\Delta + A\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Gamma B + AE}$ ou : $\frac{B\Delta}{AB} = \frac{\Gamma B}{Z}$, d'où : $Z \times B\Delta = \Gamma B \times AB$, et que la relation (I) de la note précédente donne : $\frac{AE}{AE + B\Gamma} = \frac{E\Delta}{E\Delta + \Delta\Gamma}$ ou : $\frac{AE}{Z} = \frac{E\Delta}{E\Gamma}$, d'où : $AE \times E\Gamma = Z \times E\Delta$.

3. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 282, *commentarius*, l. 40).

rectangle compris sous les droites BA, AE (1). Derechef, puisque la droite EΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AΔ est à la droite ΔB, la droite restante AE est à la droite restante ΓB comme la droite EΔ est à la droite ΔΓ. Par composition, la droite EΓ est à la droite ΓΔ comme la somme des droites AE, ΓB, c'est-à-dire comme la droite Z, est à la droite ΓB ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites Z, ΓΔ équivaut au rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE (2). On démontrera la même chose pour les deux rectangles restants aussi ; donc, les quatre rectangles sont obtenus.

III.

Proposition 43. — D'autre part, que le point soit en dehors de la droite entière (3), et que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ soit [équivalent] (4) au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE ; je dis que, si on pose la droite Z égale à l'excédent des droites AE, ΓB, on obtient de nouveau quatre rectangles : celui qui est compris sous les droites Z, AΔ équivalent à celui qui est compris sous les droites BA, AE, celui qui est compris [sous les droites Z, ΓΔ équivalent à celui qui est compris sous] (5) les droites BΓ, ΓE, celui qui est compris sous les droites Z, BΔ équivalent à celui qui est compris sous les droites AB, BΓ et celui qui est compris sous les droites Z, ΔE équivalent à celui qui est compris sous les droites AE, EΓ.

---

1. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, d'où : $\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{B\Delta}{A\Delta}=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}$, d'où : $\frac{B\Delta}{A\Delta}=\frac{B\Delta-\Delta\Gamma}{A\Delta-\Delta E}=\frac{B\Gamma}{AE}$, d'où : $\frac{B\Delta+A\Delta}{A\Delta}=\frac{B\Gamma+AE}{AE}$ ou, considérant que l'on a posé $Z = AE + B\Gamma$, il vient : $\frac{BA}{A\Delta}=\frac{Z}{AE}$, d'où $BA \times AE = Z \times A\Delta$.

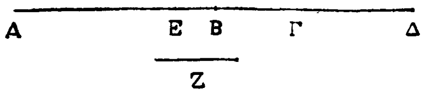
2. La relation d'hypothèse donnant : $\frac{A\Delta}{\Delta B}=\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$, on a : $\frac{A\Delta-\Delta E}{\Delta B-\Delta\Gamma}=\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{AE}{\Gamma B}=\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{AE+\Gamma B}{\Gamma B}=\frac{\Delta E+\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{Z}{\Gamma B}=\frac{E\Gamma}{\Delta\Gamma}$, d'où : $Z \times \Delta\Gamma = E\Gamma \times \Gamma B$.

3. C'est-à-dire que le point Δ soit en dehors de la droite entière $AE + EB + B\Gamma$. Commandin opine que le texte τὸ σημεῖον (le point) est une corruption de τὰ σημεῖα (les points), bien que la figure n'indique que deux points en dehors de la droite AB (Cfr. *loc. cit.*, p. 283, *commentarius*, l. 28).

4. Lacune que Commandin comble par le mot ἴσον (Cfr. *loc. cit.*, p. 283, l. 31)

5. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 283, l. 33).

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ, par proportion, de reste à reste et par conversion, la droite ΔΑ est à la droite ΑΒ comme la droite ΑΕ est à l'excédent des droites ΑΕ, ΓΒ. Or, la droite Ζ est l'excédent des droites ΑΕ, ΓΒ ; donc, le rectangle compris sous les droites Ζ, ΑΔ équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΑ, ΑΕ [1]. Derechef, puisque la droite restante ΑΕ est à la droite restante ΒΓ comme la droite ΕΔ est à la roite ΔΓ, par division, la droite ΕΓ est à la droite ΓΔ comme l'excédent des droites ΑΕ, ΒΓ est à la droite ΒΓ ; donc, le rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΕ, ΒΓ, c'est-à-dire sous la droite Ζ, et la droite ΓΔ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΕ [2]. On démontrera la même chose aussi pour les rectangles restants ; donc, les quatre rectangles sont obtenus.



IV.

Proposition 44. — Ces choses étant démontrées, on trouvera facilement ces lemmes pour le premier livre de *La Section déterminée* [3], dans lesquels « les mêmes choses étant supposées, il est dit que le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ est au rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΓ comme la droite ΒΔ est à la droite ΔΕ. »

En effet, puisqu'il a été démontré [4] que le rectangle compris

---

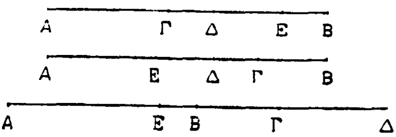
1. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, d'où : $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$ (I), d'où : $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Delta - \Delta E}{B\Delta - \Delta\Gamma} = \frac{AE}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{A\Delta}{A\Delta - B\Delta} = \frac{AE}{AE - B\Gamma}$. Or, on a posé : $Z = AE - B\Gamma$; donc : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{Z}$, d'où : $Z \times A\Delta = AB \times AE$.

2. La relation (I) de la note précédente donne : $\frac{A\Delta - \Delta E}{B\Delta - \Delta\Gamma} = \frac{AE}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{AE - B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta E - \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{Z}{B\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Delta\Gamma}$, d'où : $Z \times \Delta\Gamma = E\Gamma \times B\Gamma$.

3. C'est-à-dire les propositions précédentes : 22 ou lemme I (voir p. 530) ; 30 ou lemme X (voir p. 541), et 36 ou lemme XIX (voir p. 551).

4. C'est-à-dire dans les *trois propositions qui précèdent*.

sous les droites Z, BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ, et que le rectangle compris sous les droites Z, ΔE équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EΓ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au rectangle compris sous les droites AE, EΓ comme le rectangle compris sous les droites Z, ΔB est au rectangle compris sous les droites Z, ΔE, c'est-à-dire comme la droite ΔB est à la droite ΔE.

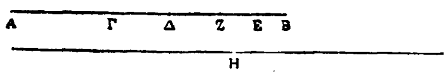


POUR LA PREMIÈRE INJONCTION DU PREMIER PROBLÈME [1].

V.

PROPOSITION 45. — Soit de nouveau le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ équivalent au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE, et soit un point quelconque Z [2] ; je dis que, si l'on pose la droite H égale à la somme des droites AE, ΓB, le rectangle compris sous les droites AΓ, ZΓ excède le rectangle compris sous les droites BZ, ZE du rectangle compris sous les droites H, ΔZ.

En effet, puisqu'on a démontré précédemment [3] que le rectangle compris sous les droites H, ΔE équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EΓ, retranchons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, ZE ; il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites H, ΔZ est l'excédent dont le rectangle compris sous les droites AE, EΓ surpasse le rectangle compris sous les droites H, EZ [4]. Or, le



1. C'est-à-dire : Lemme utile à la démonstration du cas de première disposition imposée des points dans la figure du premier problème du second livre de *La Section déterminée*.
2. Le point Z est pris quelconque entre les points Δ, E.
3. Voir proposition 41 ou lemme I.
4. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$. Or, la proposition 41 ou lemme I (voir p. 562) a démontré que l'on a : $H \times \Delta E = AE \times E\Gamma$, d'où :

rectangle compris sous les droites AE, ΓZ excède le rectangle compris sous les droites BΓ, ZE de ce que le rectangle compris sous les droites AE, EΓ excède le rectangle compris sous les droites H, EZ après avoir retranché de chacun de ces derniers le rectangle compris sous les droites AE, EZ (1) ; tandis que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ excède le rectangle compris sous les droites BZ, ZE de ce que le rectangle compris sous les droites AE, ΓZ excède le rectangle compris sous les droites ΓB, ZE après avoir retranché de chacun de ces derniers le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZE ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ excède le rectangle compris sous les droites BZ, ZE du rectangle compris sous les droites H, ΔZ (2) ; ce qu'il fallait démontrer.

AUTRE LEMME POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU SECOND PROBLÈME.

VI.

Proposition 46. — Que le point Z soit situé entre les points E, B (3) ; je dis que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites EZ, ZB, équivaut au rectangle compris sous les droites H, ΔZ.

En effet, puisqu'on a démontré précédemment que le rectangle compris sous les droites H, ΔE équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EΓ, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, EZ, il s'ensuit que le rectangle entier compris sous les droites H, ΔZ équivaut au rectangle compris

---

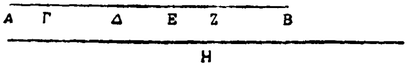
$H \times \Delta E - H \times EZ = AE \times E\Gamma - H \times EZ$ ou, comme le texte : $H \times \Delta Z = AE \times E\Gamma - H \times ZE$.

1. On a : $AE \times E\Gamma - H \times ZE = AE \times E\Gamma - AE \times ZE - (H \times ZE - AE \times ZE) = AE\,(E\Gamma - ZE) - (H - AE)\,ZE$. Or, on a posé : $H = AE + \Gamma B$, d'où : $H - AE = \Gamma B$; donc, comme le texte : $AE \times E\Gamma - H \times ZE = AE \times \Gamma Z - \Gamma B \times ZE$.

2. On a : $AE \times \Gamma Z - \Gamma B \times ZE = AE \times \Gamma Z - \Gamma Z \times ZE - (\Gamma B \times ZE - \Gamma Z \times ZE) = AZ \times Z\Gamma - BZ \times ZE$, d'où, remontant à la dernière égalité de la note précédente, on a : $AE \times E\Gamma - H \times ZE = AZ \times Z\Gamma - BZ \times ZE$, d'où, remontant à la dernière égalité de la note 4 de la page 566, on a : $H \times \Delta Z = AZ \times Z\Gamma - BZ \times ZE$.

3. Étant donc donné, comme dans la proposition précédente, que les points Γ, Δ, E sont tels que l'on ait : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, et que l'on pose : $H = AE + \Gamma B$.

sous les droites ΑΕ, ΕΓ plus le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΖ plus le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΕΖ. Mais, le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΑΕ ΕΖ, constitue le rectangle entier compris sous les droites ΑΕ ΓΖ ; donc le rectangle compris sous les droites Η, ΔΖ devient équivalent au rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΓΖ augmenté du rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΕΖ. Mais, derechef, le rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΕΖ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΕ augmenté du rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΒ ; tandis que le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΓΖ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΕ, constitue le rectangle entier compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ que l'on a conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΒ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites Η, ΔΖ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ augmenté du rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΒ (1).



POUR LA PREMIÈRE INJONCTION DU TROISIÈME PROBLÈME.

VII.

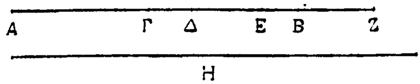
Proposition 47. — Que le point Ζ soit de nouveau au delà de la droite ΑΒ (2) ; il faut démontrer que le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ excède le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΒ du rectangle compris sous les droites Η, ΔΖ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites Η, ΔΒ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ, ajoutons

1. Le lemme I ou proposition 41 a démontré que l'on a : $Η \times ΔΕ = ΑΕ \times ΕΓ$, d'où : $Η \times ΔΕ + Η \times ΕΖ = ΑΕ \times ΕΓ + Η \times ΕΖ$. Or, $Η = ΑΕ + ΓΒ$; donc : $Η (ΔΕ + ΕΖ) = ΑΕ \times ΕΓ + (ΑΕ + ΓΒ)\, ΕΖ$ ou : $Η \times ΔΖ = ΑΕ \times ΕΓ + ΑΕ \times ΕΖ + ΓΒ \times ΕΖ$. Or, $ΑΕ \times ΕΓ + ΑΕ \times ΕΖ = ΑΕ \times ΓΖ$; donc : $Η \times ΔΖ = ΑΕ \times ΓΖ + ΓΒ \times ΕΖ = ΑΕ \times ΓΖ + (ΓΖ + ΖΒ)\, ΕΖ = ΑΕ \times ΓΖ + ΓΖ \times ΕΖ + ΖΒ \times ΕΖ = ΑΖ \times ΓΖ + ΖΒ \times ΕΖ$.

2. Étant donné que l'on a, comme dans la proposition 45, ou lemme V : $ΑΔ \times ΔΓ = ΒΔ \times ΔΕ$ et $Η = ΑΕ + ΓΒ$.

de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, BZ; il s'ensuit que le rectangle entier compris sous les droites H, ΔZ équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ augmenté



du rectangle compris sous les droites H, BZ, c'est-à-dire du rectangle compris sous les droites AE, BZ augmenté du rectangle compris sous les droites ΓB, BZ. Or, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΓB, BZ, constitue le rectangle entier compris sous les droites AZ, ΓB ; donc, le rectangle compris sous les droites H, ΔZ équivaut au rectangle compris sous les droites AZ, ΓB augmenté du rectangle compris sous les droites AE, BZ. Mais, le rectangle compris sous les droites AZ, ΓB, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AE, BZ, est l'excédent dont le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ surpasse le rectangle compris sous les droites EZ, ZB; donc, le rectangle compris sous les droites H, ΔZ est aussi l'excédent dont le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ surpasse le rectangle compris sous les droites EZ, ZB [1].

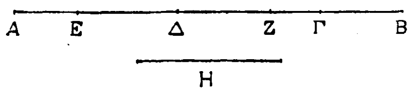
POUR LA SECONDE INJONCTION DU PREMIER PROBLÈME.

VIII.

Proposition 48. — Que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ soit équivalent au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔB; que le point Z soit situé entre les points Δ, Γ, et posons la droite H égale à la somme des droites AE, ΓB; je dis que le rectangle compris sous les droites EZ, ZB excède le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ du rectangle compris sous les droites H, ΔZ.

1. La proposition 41, ou lemme I, a démontré que l'on a : $H \times \Delta B = AB \times B\Gamma$; d'où : $H \times \Delta B + H \times BZ = AB \times B\Gamma + H \times BZ$, d'où, considérant la seconde relation d'hypothèse de la note précédente : $H \times \Delta Z = AB \times B\Gamma + (AE + B\Gamma) BZ = (AB + BZ) B\Gamma + AE \times BZ = AZ \times B\Gamma + AE \times BZ$. Or, $AZ \times B\Gamma + AE \times BZ = AZ(\Gamma Z - BZ) + (AZ - EZ) BZ = AZ \times \Gamma Z - EZ \times BZ$; donc, comme le texte : $H \times \Delta Z = AZ \times \Gamma Z - EZ \times BZ$.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites H, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΕ, retranchons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, ΖΓ ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites H, ΔΖ est l'excédent dont le rectangle compris sous les droites ΕΓ, ΓΒ surpasse le rectangle compris sous les droites H, ΓΖ. Or, le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΓΒ excède le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΖΓ de ce que le rectangle compris sous les droites ΕΓ, ΓΒ excède le rectangle compris sous les droites H, ΖΓ après avoir retranché de ces derniers le rectangle commun compris sous les droites ΒΓ, ΓΖ ; tandis que le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΒ excède le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ de ce que le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΓΒ excède le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΖΓ, après avoir ajouté à ces derniers le rectangle commun compris sous les droites ΕΖ, ΖΓ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΒ excède aussi le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ du rectangle compris sous les droites H, ΔΖ (1).



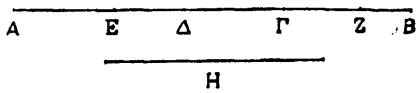
POUR LA SECONDE INJONCTION DU SECOND PROBLÈME.

IX.

Proposition 49. — Mais, que le point Z soit situé entre les points Γ, B ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΒΖ, ΖΕ, devient équivalent au rectangle compris sous les droites H, ΔΖ.

1. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = E\Delta \times \Delta B$; donc, en vertu de la proposition 42, ou lemme II, on a : $H \times \Delta\Gamma = B\Gamma \times \Gamma E$, d'où : $H \times \Delta\Gamma - H \times Z\Gamma = B\Gamma \times \Gamma E - H \times Z\Gamma$, ou, comme le texte : $H \times \Delta Z = B\Gamma \times \Gamma E - H \times \Gamma Z$. Or, $B\Gamma \times \Gamma E - H \times \Gamma Z = (B\Gamma \times \Gamma E - B\Gamma \times \Gamma Z) - (H \times \Gamma Z - B\Gamma \times \Gamma Z)$. Or, on a par hypothèse : $H = AE + \Gamma B$; donc, comme dans le texte : $B\Gamma \times \Gamma E - H \times \Gamma Z = EZ \times B\Gamma - [(AE + \Gamma B)\ \Gamma Z - B\Gamma \times \Gamma Z] = EZ \times B\Gamma - AE \times \Gamma Z$. Or, $EZ \times B\Gamma - AE \times \Gamma Z = (EZ \times B\Gamma + EZ \times \Gamma Z) - (AE \times \Gamma Z + EZ \times \Gamma Z) = EZ \times ZB - AZ \times \Gamma Z$; donc, comme le texte : $H \times \Delta Z = EZ \times ZB - AZ \times \Gamma Z$.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites H, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, ΓZ; il s'ensuit que le rectangle entier compris sous les droites H, ΔZ équivaut au rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE augmenté du rectangle compris sous les droites H, ΓZ, constituant le rectangle compris sous les droites AE, ΓZ augmenté du rectangle compris sous les droites BΓ, ΓZ. Mais, le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓB, conjointement avec le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓZ, est le rectangle entier compris sous les droites EZ, ΓB ; donc, le rectangle compris sous les droites EZ, ΓB, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AE, ΓZ, devient équivalent au rectangle compris sous les droites H, ΔZ. Mais, le rectangle compris sous les droites EZ, ΓB est équivalent au rectangle compris sous les droites EZ, ZΓ augmenté du rectangle compris sous les droites BZ, ZE ; tandis que le rectangle compris sous les droites EZ, ZΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AE, ΓZ, est le rectangle entier compris sous les droites AZ, ZΓ ; donc, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites BZ, ZE, équivaut au rectangle compris sous les droites H, ΔZ (1).



POUR LA SECONDE INJONCTION DU TROISIÈME PROBLÈME.

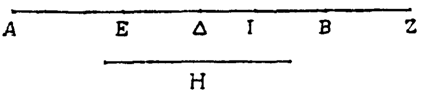
X.

PROPOSITION 50. — Que le point Z soit maintenant au delà de la droite AB ; je dis que le rectangle compris sous les droites

1. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = E\Delta \times \Delta B$ et $H = AE + \Gamma B$ (voir prop. 48 ou lemme VIII) ; donc, en vertu de la proposition 42, ou lemme II, on a : $H \times \Delta\Gamma = B\Gamma \times \Gamma E$, d'où : $H \times \Delta\Gamma + H \times \Gamma Z = B\Gamma \times \Gamma E + H \times \Gamma Z$ ou : $H \times \Delta Z = B\Gamma \times \Gamma E + (AE + \Gamma B)\,\Gamma Z = B\Gamma \times \Gamma E + AE \times \Gamma Z + \Gamma B \times \Gamma Z$. Or, $B\Gamma \times \Gamma E + \Gamma B \times \Gamma Z = EZ \times \Gamma B$; donc, comme le texte : $H \times \Delta Z = EZ \times \Gamma B + AE \times \Gamma Z$. Or, $EZ \times \Gamma B = EZ\,(\Gamma Z + ZB) = EZ \times \Gamma Z + EZ \times ZB$. donc, on a finalement, comme le texte : $H \times \Delta Z = EZ \times \Gamma Z + EZ \times ZB + AE \times \Gamma Z = (EZ + AE)\,\Gamma Z + EZ \times ZB = AZ \times \Gamma Z + EZ \times BZ$.

AZ, ZΓ excède le rectangle compris sous les droites EZ, ZB du rectangle compris sous les droites H, ΔZ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites H, ΔB équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites [H,BZ ; donc le rectangle entier compris sous les droites] (1) H, ΔZ équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ augmenté du rectangle compris sous les droites H, BZ, constituant le rectangle compris sous les droites AE, ZB augmenté du rectangle compris sous les droites ΓB, BZ. Or, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΓB, BZ, est le rectangle compris sous les droites AZ, ΓB ; donc, le rectangle compris sous les droites AZ, ΓB, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AE, ZB, équivaut au rectangle compris sous les droites H, ΔZ. Mais, le rectangle compris sous les droites AZ, BΓ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites AE, ZB, est l'excédent dont le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ surpasse le rectangle compris sous les droites EZ, ZB ; donc, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ excède aussi le rectangle compris sous les droites EZ, ZB du rectangle compris sous les droites H, ΔZ (2) ; ce qu'il fallait démontrer.



POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU PREMIER PROBLÈME.

XI.

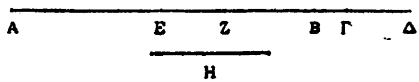
Proposition 51. — Que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ soit équivalent au rectangle compris sous les droites

1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 288, l. 20).

2. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = E\Delta \times \Delta B$ et $H = AE + \Gamma B$ (voir prop. 48 ou lemme VIII) ; donc, en vertu de la proposition 42 ou lemme II, on a : $H \times \Delta B = AB \times B\Gamma$, d'où : $H \times \Delta B + H \times BZ = AB \times B\Gamma + H \times BZ$ ou : $H \times \Delta Z = AB \times B\Gamma + (AE + \Gamma B)\, BZ = AB \times B\Gamma + AE \times BZ + \Gamma B \times BZ$. Or, $AB \times B\Gamma + \Gamma B \times BZ = AZ \times B\Gamma$; donc : $H \times \Delta Z = AZ \times B\Gamma + AE \times BZ$. Or, on a : $AZ \times B\Gamma + AE \times BZ = AZ\,(Z\Gamma - BZ) + (AZ - EZ)\,BZ = AZ \times Z\Gamma - EZ \times BZ$; donc, comme le texte, $H \times \Delta Z = AZ \times Z\Gamma - EZ \times BZ$.

BΔ, ΔE ; posons la droite H comme excédent des droites AE, BΓ, et prenons un point Z entre les points E, B ; je dis que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ excède le rectangle compris sous les droites EZ, ZB du rectangle compris sous la droite H et la droite ZΔ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites H, BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, BZ ; il s'ensuit que le rectangle entier compris sous les droites H, ZΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AB, BΓ augmenté du rectangle compris sous les droites H, BZ, constituant le rectangle compris sous l'excédent des droites AE, BΓ et la droite BZ. Mais, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est le rectangle compris sous les droites AZ, BΓ augmenté du rectangle compris sous les droites ZB, BΓ ; donc, le rectangle compris sous les droites H, ZΔ devient équivalent au rectangle compris sous les droites AZ, BΓ augmenté du rectangle compris sous les droites ΓB, BZ et augmenté du rectangle compris sous l'excédent des droites AE, ΓB et la droite BZ. Or, le rectangle compris sous les droites ΓB, BZ, augmenté du rectangle compris sous l'excédent des droites AE, ΓB et la droite BZ, est le rectangle entier compris sous les droites AE, ZB ; donc, le rectangle compris sous les droites H, ZΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AZ, ΓB augmenté du rectangle compris sous les droites AE, ZB. Mais, le rectangle compris sous les droites AZ, BΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AE, ZB, est l'excédent dont le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ surpasse le rectangle compris sous les droites EZ, ZB ; donc, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ excède le rectangle compris sous les droites EZ, ZB du rectangle compris sous les droites H, ZΔ [1] ; ce qu'il fallait démontrer.



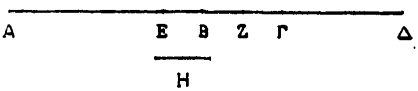
1. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, et l'on pose : $H = AE - B\Gamma$. Dès lors, en vertu de la proposition 43, ou lemme III, on a : $H \times B\Delta = AB \times B\Gamma$, d'où : $H \times B\Delta + H \times BZ = AB \times B\Gamma + H \times BZ$ ou : $H \times Z\Delta = AB \times B\Gamma + (AE - B\Gamma)\, BZ = (AZ + ZB)\, B\Gamma + (AE - B\Gamma)\, BZ =$

POUR LA PREMIÈRE INJONCTION DU SECOND PROBLÈME.

XII.

Proposition 52. — Les mêmes choses étant supposées, que le point Z soit situé entre les points B, Γ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites EZ, ZB, équivaut à celui qui est compris sous la droite H et la droite ZΔ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites H, ΓΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites EΓ, ΓB, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, ZΓ ; il s'ensuit que le rectangle entier compris sous les droites H, ZΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites EΓ, ΓB augmenté de celui qui est compris sous les droites H, ZΓ. Mais, le rectangle compris sous les droites H ZΓ est celui qui est compris sous l'excédent des droites AE, BΓ et la droite ZΓ; tandis que le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓB est celui qui est compris sous les droites BΓ, ΓZ augmenté de celui qui est compris sous les droites EZ, BΓ; donc, le rectangle compris sous les droites H, ZΔ devient équivalent à celui qui est compris sous les droites EZ, BΓ augmenté de celui qui est compris sous les droites BΓ, ΓZ et augmenté de celui qui est compris sous l'excédent des droites AE, BΓ et la droite ΓZ. [Or, le rectangle compris sous l'excédent des droites AE, BΓ et la droite ΓZ] (1), conjointement avec celui qui est compris sous les droites BΓ, ΓZ, est le rectangle entier compris sous les droites AE, ΓZ ; donc, le rectangle compris sous les droites H, ZΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites AE, ΓZ augmenté de celui qui est compris sous les droites EZ, ΓB. Mais, le rectangle



$AZ \times B\Gamma + ZB \times B\Gamma + (AE - B\Gamma)\,BZ$. Or, $ZB \times B\Gamma + (AE - B\Gamma)\,BZ = AE \times BZ$; donc, comme le texte : $H \times Z\Delta = AZ \times B\Gamma + AE \times BZ = AZ\,(Z\Gamma - ZB) + (AZ - EZ)\,BZ = AZ \times Z\Gamma - EZ \times BZ$.

1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 290, l. 5).

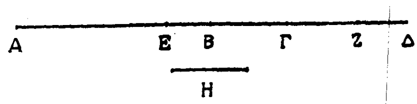
compris sous les droites EZ, BΓ est celui qui est compris sous les droites EZ, ZΓ augmenté de celui qui est compris sous les droites EZ, ZB ; tandis que le rectangle compris sous les droites EZ, ZΓ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites AE, ZΓ, est le rectangle entier compris sous les droites AZ, ZΓ. Et nous avons aussi le rectangle compris sous les droites EZ, ZB ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites EZ, ZB, équivaut au rectangle compris sous les droites H, ZΔ ; ce qu'il fallait démontrer (1).

POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU TROISIÈME PROBLÈME.

XIII.

Proposition 53. — Que le point Z soit de nouveau situé entre les points Γ, Δ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ est déficient du rectangle compris sous les droites EZ, ZB d'un rectangle compris sous les droites H, ZΔ (2).

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites H, ΓΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites EΓ, ΓB, retranchons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, ΓZ ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites H, ZΔ est l'excédent dont le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓB surpasse celui qui est compris sous les droites H, ΓZ, c'est-à-dire celui qui est compris sous l'excédent des droites AE, ΓB et la droite ΓZ.



Or, le rectangle compris sous les droites EZ, BΓ excède celui qui

1. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, et l'on pose : $H = AE - B\Gamma$. Dès lors, la proposition 43 (lemme III) démontre que l'on a : $H \times \Gamma\Delta = E\Gamma \times \Gamma B$, d'où : $H \times \Gamma\Delta + H \times Z\Gamma = E\Gamma \times \Gamma B + H \times Z\Gamma$ ou : $H \times Z\Delta = (EZ + Z\Gamma)\,\Gamma B + (AE - \Gamma B)\,Z\Gamma = EZ \times \Gamma B + [Z\Gamma \times \Gamma B + (AE - \Gamma B)\,Z\Gamma] = EZ \times \Gamma B + AE \times Z\Gamma = EZ\,(Z\Gamma + ZB) + AE \times Z\Gamma = EZ \times Z\Gamma + EZ \times ZB + AE \times Z\Gamma = (EZ + AE)\,Z\Gamma + EZ \times ZB = AZ \times Z\Gamma + EZ \times ZB$.

2. Il faut donc démontrer la relation : $EZ \times ZB - AZ \times Z\Gamma = H \times Z\Delta$.

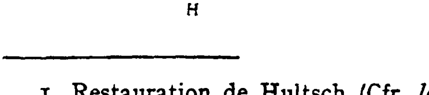
est compris sous les droites AE, ΓZ de ce que le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓB excède celui qui est compris sous l'excédent des droites AE, ΓB et la droite ΓZ après avoir ajouté à ces derniers rectangles le rectangle commun compris sous les droites ZΓ, ΓB ; tandis que le rectangle compris sous les droites EZ, ZB excède celui qui est compris sous les droites AZ, ZΓ [de ce que le rectangle compris sous les droites EZ, BΓ excède celui qui est compris sous les droites AE, ΓZ] (1) après avoir ajouté à ces derniers rectangles le rectangle commun compris sous les droites EZ, ZΓ ; de sorte que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ est déficient du rectangle compris sous les droites EZ, ZB, du rectangle compris sous la droite H et la droite ZΔ (2).

POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU TROISIÈME PROBLÈME.

XIV.

Proposition 54. — Mais, que le point Z soit au delà de la droite AΔ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ excède, au contraire, celui qui est compris sous les droites EZ, ZB de celui qui est compris sous les droites H, ΔZ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites H, ΓΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites EΓ, ΓB, retranchons-les tous deux du rectangle compris sous les droites H, ΓZ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites H, ΔZ est l'excédent dont le rectangle compris sous les droites H, ΓZ surpasse le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓB. Or, le rectangle compris sous les droites AE, ΓZ excède celui qui est compris sous les droites EZ, BΓ [de ce que le rectangle com-



1. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 748, l. 10).
2. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, et on pose : $H = AE - B\Gamma$. Dès lors, la proposition 43, ou lemme III, a démontré qu'on a : $H \times \Gamma\Delta = E\Gamma \times \Gamma B$, d'où : $H \times \Gamma\Delta - H \times \Gamma Z = E\Gamma \times \Gamma B - H \times \Gamma Z$ ou, en suivant le texte : $H \times Z\Delta = E\Gamma \times \Gamma B - (AE - B\Gamma)\,\Gamma Z = E\Gamma \times \Gamma B + \Gamma Z \times B\Gamma - [(AE - B\Gamma)\,\Gamma Z + \Gamma Z \times B\Gamma] = EZ \times B\Gamma - AE \times \Gamma Z = EZ \times B\Gamma + EZ \times \Gamma Z - (AE \times \Gamma Z + EZ \times \Gamma Z) = EZ \times BZ - AZ \times \Gamma Z$.

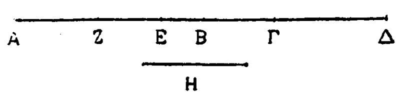
pris sous les droites H, ΓZ excède celui qui est compris sous les droites EΓ, ΓB] (1) après avoir ajouté à ces derniers le rectangle commun compris sous les droites BΓ, ΓZ ; car la droite AE est l'excédent des droites AE, BΓ augmenté de la droite BΓ et, d'autre part, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ excède celui qui est compris sous les droites EZ, ZB de ce que le rectangle compris sous les droites AE, ΓZ excède celui qui est compris sous les droites EZ, BΓ après avoir ajouté à ces derniers le rectangle commun compris sous les droites EZ, ZΓ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ excède celui qui est compris sous les droites EZ, ZB de celui qui est compris sous les droites H, ΔZ (2).

POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU TROISIÈME PROBLÈME (3).

XV.

PROPOSITION 55. — Que le point Z soit de nouveau situé entre les points A, E ; je dis que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites EZ, ZB, équivaut au rectangle compris sous les droites H, ZΔ.

Puisque le rectangle compris sous les droites H, BΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites AB, BΓ, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, BZ ; il s'ensuit que le rectangle entier compris sous les droites H, ZΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites AB, BΓ augmenté de



1. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 748, l. 21).

2. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, et l'on pose : $H = AE - B\Gamma$. Dès lors, en vertu de la proposition 43, ou lemme III, on a : $H \times \Gamma\Delta = E\Gamma \times \Gamma B$, d'où : $H \times \Gamma Z - H \times \Gamma\Delta = H \times \Gamma Z - E\Gamma \times \Gamma B$ ou : $H \times \Delta Z = (AE - B\Gamma)\,\Gamma Z - E\Gamma \times B\Gamma = (AE - B\Gamma)\,\Gamma Z + B\Gamma \times \Gamma Z - (E\Gamma \times B\Gamma + B\Gamma \times \Gamma Z) = AE \times \Gamma Z - EZ \times B\Gamma = AE \times \Gamma Z + EZ \times \Gamma Z - (EZ \times B\Gamma + EZ \times \Gamma Z) = AZ \times \Gamma Z - EZ \times ZB$.

3. Hultsch a fait remarquer que ce lemme concerne plutôt la première injonction du second problème de *La Section déterminée*, comme le lemme XII, ou proposition 52 (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 751, l. 6).

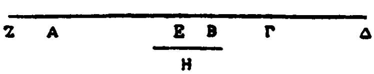
celui qui est compris sous les droites H, ZB. Mais, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut à celui qui est compris sous les droites AZ, BΓ augmenté de celui qui est compris sous les droites ZB, BΓ ; tandis que le rectangle compris sous l'excédent des droites AE, BΓ et la droite ZB, conjointement avec celui qui est compris sous les droites ΓB, BZ, équivaut à celui qui est compris sous les droites AE, BZ ; donc, [le rectangle compris sous les droites AE, BZ] (1) est celui qui est compris sous les droites BZ, ZE augmenté de celui qui est compris sous les droites AZ, ZB, lequel, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AZ, BΓ, est celui qui est compris sous les droites AZ, ZΓ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites BZ, ZE, équivaut à celui qui est compris sous les droites H, ZΔ (2).

POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU TROISIÈME PROBLÈME

XVI.

Proposition 56. — Que le point Z soit de nouveau en dehors (3) ; je dis que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ est défaillant du rectangle compris sous les droites EZ, ZB d'un rectangle compris sous les droites H, ZΔ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites H, AΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites BA, AE, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites H, AZ. Dès lors, le rectangle entier compris sous les droites H, ΔZ équivaut à celui qui est compris sous les droites BA, AE augmenté de celui qui est compris sous



1. Restauration due à Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 291, l. 45).
2. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, et l'on pose : $H = AE - B\Gamma$. Dès lors, en vertu du lemme III, proposition 43, on a : $H \times B\Delta = AB \times B\Gamma$, d'où : $H \times B\Delta + H \times BZ = AB \times B\Gamma + H \times BZ$ ou : $H \times Z\Delta = (AZ + BZ)\,B\Gamma + (AE - B\Gamma)\,BZ = AZ \times B\Gamma + AE \times BZ = AZ \times B\Gamma + (AZ + ZE)BZ = AZ \times B\Gamma + AZ \times BZ + ZE \times BZ = AZ \times Z\Gamma + ZE \times BZ$.
3. C'est-à-dire en dehors de la droite AΔ.

l'excédent des droites AE, ΓB et la droite AZ. [Mais, le rectangle compris sous les droites BA, AE, conjointement avec celui qui est compris sous l'excédent des droites AE, ΓB et la droite AZ, est, en entier,] (1) le rectangle compris sous les droites ZB, AE défaillant du rectangle compris sous les droites ZA, BΓ ; en sorte que le rectangle compris sous les droites H, ZΔ est aussi l'excédent dont le rectangle compris sous les droites BZ, AE surpasse celui qui est compris sous les droites ZA, BΓ. Mais, le rectangle compris sous les droites BZ, ZE excède aussi celui qui est compris sous les droites ΓZ, ZA de ce que le rectangle compris sous les droites ZB, AE excède celui qui est compris sous les droites ZA, BΓ après avoir ajouté à ces derniers le rectangle commun compris sous les droites BZ, ZA ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites BZ, ZE excède celui qui est compris sous les droites ΓZ, ZA du rectangle compris sous les droites H, ZΔ ; en sorte que le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZA est défaillant de celui qui est compris sous les droites BZ, ZE d'un rectangle compris sous les droites H, ZΔ ; ce qu'il fallait démontrer (2).

POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU PREMIER PROBLÈME.

XVII.

Proposition 57. — Soit la droite AB [égale] (3) à la droite ΓΔ, et soit un point quelconque E situé entre les points B, Γ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AE, EΔ excède le rectangle compris sous les droites BE, EΓ du rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ.

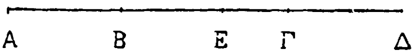
---

1. Lacune comblée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 752, ll. 1-2), d'une manière plus concise que celle qui a été proposée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 292, ll. 28-33).

2. On a par hypothèse : $A\Delta \times \Delta\Gamma = B\Delta \times \Delta E$, et l'on pose : $H = AE - B\Gamma$. Dès lors, le lemme III, ou proposition 43, a démontré que l'on a : $H \times A\Delta = BA \times AE$, d'où, en suivant le texte : $H \times A\Delta + H \times AZ = BA \times AE + H \times AZ$ ou : $H \times \Delta Z = BA \times AE + (AE - B\Gamma) AZ = BA \times AE + AE \times AZ - B\Gamma \times AZ = BZ \times AE - B\Gamma \times AZ = BZ \times AE + BZ \times AZ - (B\Gamma \times AZ + BZ \times AZ) = BZ \times ZE - \Gamma Z \times AZ$.

3. Commandin a rétabli ici le mot ἴση, perdu ou sous-entendu (Cfr. *loc. cit.*, p. 293, l. 12).

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AE, EΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EΓ, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites BE, EΓ, augmenté de celui qui est compris sous les droites AB, EΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites AE, ΓΔ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AE, EΔ excéde le rectangle compris sous les droites BE, EΓ du rectangle compris sous les droites EΓ, AB, c'est-à-dire du rectangle compris sous les droites EΓ, ΓΔ (car les droites AB, ΓΔ sont égales), et du rectangle compris sous les droites AE, ΓΔ. Mais, [le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓΔ, augmenté de celui qui est compris sous les droites AE, ΓΔ] (1) devient le rectangle entier compris sous les droites AΓ, ΓΔ ; donc, le rectangle compris sous les droites AE, EΔ excède celui qui est compris sous les droites BE, EΓ de celui qui est compris sous les droites AΓ, ΓΔ (2).



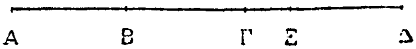
POUR LA PREMIÈRE INJONCTION DU SECOND PROBLÈME.

XVIII.

PROPOSITION 58. — Soit la droite AB [égale] (3) à la droite ΓΔ, et prenons un point E entre les points Γ, Δ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AE, EΔ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites BE, EΓ, équivaut à celui [qui est compris sous les droites AΓ, ΓΔ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AE, EΔ équivaut à celui] (4) qui est compris sous les droites AΓ, EΔ augmenté de celui qui est compris sous les droites ΓE, EΔ, ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites

1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 29, *commentarius*, l. 21).
2. On a, en suivant le texte : $AE \times E\Delta = AE\,(E\Gamma + \Gamma\Delta) = AE \times E\Gamma + AE \times \Gamma\Delta = (BE + AB)\,E\Gamma + AE \times \Gamma\Delta$, d'où, considérant que l'on a par hypothèse : $AB = \Gamma\Delta$, il vient : $AE \times E\Delta - BE \times E\Gamma = AB \times E\Gamma + AE \times \Gamma\Delta = \Gamma\Delta \times E\Gamma + AE \times \Gamma\Delta = A\Gamma \times \Gamma\Delta$.
3. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 293, l. 26).
4. Lacune comblée facilement par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 293, l. 39).



BE, EΓ ; il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AE, EΔ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites BE, EΓ, équivaut au rectangle compris sous les droites AΓ, EΔ augmenté de celui qui, compris sous les droites ΓE, EΔ, est augmenté de celui qui est compris sous les droites BE, EΓ. Mais, le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites BE, EΓ, est le rectangle entier compris sous les droites BΔ, ΓE, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE (car les droites entières AΓ, BΔ sont égales) ; et le rectangle compris sous les droites AΓ, EΔ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites AΓ, ΓE, est le rectangle entier compris sous les droites AΓ, ΓΔ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites AE, EΔ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites BE, EΓ, équivaut à celui qui est compris sous les droites AΓ, ΓΔ (1).

LEMME UTILE POUR LE RAPPORT SINGULIER (2) DE LA TROISIÈME INJONCTION DU PREMIER PROBLÈME (3).

XIX.

PROPOSITION 59. — Si l'on a un demi-cercle AEB établi sur le diamètre BA et des perpendiculaires ΓE, ΔZ ; si l'on mène la droite EZH et, sur celle-ci, la perpendiculaire BH, on obtient trois choses : le rectangle compris sous les droites ΓB, BΔ équivalent au carré de la droite BH ; le rectangle compris sous les droites

---

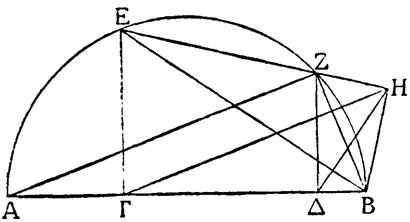
1. On a, en suivant le texte : $AE \times E\Delta = (A\Gamma + \Gamma E) E\Delta = A\Gamma \times E\Delta + \Gamma E \times E\Delta$, d'où : $AE \times E\Delta + BE \times \Gamma E = A\Gamma \times E\Delta + \Gamma E \times E\Delta + BE \times \Gamma E = A\Gamma \times E\Delta + B\Delta \times \Gamma E$. Or, on a par hypothèse : $AB = \Gamma\Delta$, d'où : $A\Gamma = B\Delta$; donc, comme le texte : $AE \times E\Delta + BE \times \Gamma E = A\Gamma \times E\Delta + A\Gamma \times \Gamma E = A\Gamma \times \Gamma\Delta$.

2. μοναχὸς, unique (sous-entendu λόγος, rapport), c'est-à-dire le rapport singulier ou particulier qui se présente dans la troisième disposition de points imposée dans la figure du premier problème du second livre de la *Section déterminée* d'Apollonius.

3. Le titre affecté au lemme XIX (ou proposition 59) est altéré dans les manuscrits, et nous le traduisons d'après la reconstitution conjecturale de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 755, note 2) : *Λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸν μοναχὸν τοῦ τρίτου ἐπιτάγματος τοῦ πρώτου προβλήματος.*

AΓ, ΔB équivalent au carré de la droite ZH, et le rectangle compris sous les droites AΔ, ΓB équivalent au carré de la droite EH.

En effet, menons les droites de jonction HΓ, HΔ, AZ, ZB. Dès lors, puisque l'angle au point Z est droit, et que la droite ZΔ est perpendiculaire, l'angle compris sous les droites ΔZ, ZB est égal à l'angle compris sous les droites BA, AZ [1]. Mais, l'angle compris sous les droites ΔZ, ZB est égal à l'angle compris sous les droites ΔH, HB [2] ; tandis que, si l'on mène la droite de jonction EB, l'angle compris sous les droites BA, AZ est égal à l'angle compris sous les droites BE, EZ, c'est-à-dire l'angle compris sous les droites BΓ, ΓH ; par conséquent, l'angle compris sous les droites ΔH, HB est aussi égal à l'angle compris sous les droites BΓ, ΓH [3] ; en sorte que le rectangle compris sous les droites ΓB, BΔ équivaut au carré de la droite BH [4]. Or, le rectangle entier compris sous les droites AB, BΔ équivaut aussi au carré de la droite BZ ; donc, le rectangle restant compris sous les droites AΓ, ΔB équivaut au carré de la droite ZH [5]. Derechef, puisque le rectangle compris sous les



---

1. On a : $\widehat{AZB} = 1$ angle droit $= \widehat{Z\Delta B}$, d'où (EUCLIDE, liv. III, prop. 8, énoncée p. 54, n. 2) : $\widehat{\Delta ZB} = \widehat{BAZ}$.

2. On a : $\widehat{ZHB} = 1$ angle droit $= \widehat{Z\Delta B}$; donc, ZB est le diamètre d'un cercle qui passe par les points H, Δ, d'où (EUCLIDE, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2) : $\widehat{\Delta ZB} = \widehat{\Delta HB}$.

3. On a de même (EUCLIDE, liv. III, prop. 21) : $\widehat{BAZ} = \widehat{BEZ}$. Or, les angles en H et en Γ étant droits, la droite EB est le diamètre du cercle qui passe par les points H, Γ; donc : $\widehat{BEZ} = \widehat{B\Gamma H}$, d'où, comme le texte : $\widehat{BAZ} = \widehat{B\Gamma H}$, d'où, en présence de l'égalité de la note 1 ci-dessus : $\widehat{\Delta ZB} = \widehat{B\Gamma H}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : $\widehat{\Delta HB} = \widehat{B\Gamma H}$.

4. L'égalité de la note précédente entraîne la similitude des triangles ΓBH, HBΔ qui ont l'angle en B commun ; donc : $\frac{B\Gamma}{BH} = \frac{BH}{B\Delta}$, d'où, comme le texte : $B\Gamma \times B\Delta = \overline{BH}^2$.

5. Le triangle rectangle AZB donne : $AB \times B\Delta = \overline{BZ}^2$, d'où, en présence de la dernière expression de la note précédente : $AB \times B\Delta - B\Gamma \times B\Delta = \overline{BZ}^2 - \overline{BH}^2$ ou : $A\Gamma \times B\Delta = \overline{ZH}^2$.

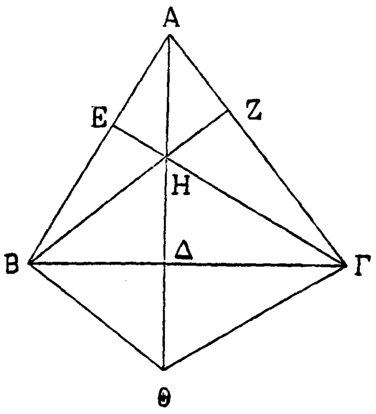
droites AB, BΓ équivaut au carré de la droite BE, en retranchant le rectangle compris sous les droites ΓB, BΔ, équivalent au carré de la droite BH, il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites AΔ, ΓB équivaut au carré de la droite EH [1]. Les trois choses sont donc obtenues.

POUR LE RAPPORT SINGULIER DE LA TROISIÈME INJONCTION DU SECOND PROBLÈME.

XX.

Proposition 60. — Soit le triangle ABΓ ; menons les droites AΔ, BZ, ΓE ; que la droite AΔ soit perpendiculaire sur la droite BΓ, et que les points A, Z, E, H soient dans un cercle [2] ; je dis que les angles situés aux points Z, E sont droits.

Prolongeons la droite AΔ ; posons la droite ΔΘ égale à la droite HΔ, et menons les droites de jonction BΘ, ΘΓ ; il s'ensuit que l'angle Θ est égal à celui qui est compris sous les droites BH, HΓ, c'est-à-dire compris sous les droites ZH, HE [3]. Mais, l'angle compris sous les droites ZH, HE, conjointement avec l'angle A, vaut deux angles droits ; donc, l'angle compris sous les droites BΘ, ΘΓ, conjointement avec l'angle A, vaut aussi deux droits ; de sorte que les points A, B, Θ, Γ sont dans un cercle. En conséquence, l'angle compris sous les droites BA, AH est égal à l'angle compris sous les droites BΓ, ΓΘ, c'est-à-dire sous les droites HΓ, ΓΔ. Or, les angles disposés suivant le sommet au



1. On a de même : $AB \times B\Gamma = \overline{BE}^2$, d'où, en présence de la dernière expression de la note 4, page 582 : $AB \times B\Gamma - B\Gamma \times B\Delta = \overline{BE}^2 - \overline{BH}^2$ ou, comme le texte : $A\Delta \times B\Gamma = \overline{EH}^2$.

2. ἐν κύκλῳ, dans un cercle, c'est-à-dire sur la circonférence d'un cercle.

3. Il résulte des constructions que les triangles ΓΔΘ, ΓΔH, et que les triangles BΔΘ, BΔH sont égaux, d'où, comme le texte : $\widehat{B\Theta\Gamma} = \widehat{BH\Gamma} = \widehat{ZHE}$.

point H sont égaux ; donc, l'angle restant Δ est égal à celui qui est situé au point E. Or, l'angle Δ est droit ; donc, l'angle situé au point E est droit aussi (¹). Pour les mêmes raisons d'ailleurs, l'angle situé au point Z est droit aussi ; donc, les angles situés aux points Z, E sont droits ; ce qu'il fallait démontrer.

RAPPORT SINGULIER DE LA TROISIÈME INJONCTION DU PREMIER PROBLÈME.

XXI.

Proposition 61. — Trois droites AB, BΓ, ΓΔ étant données, s'il se fait que le carré de la droite BE est au carré de la droite EΓ comme le rectangle compris sous les droites AB, BΔ est au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ, le rapport singulier et minimum est celui du rectangle compris sous les droites AE, EΔ au rectangle compris sous les droites BE, EΓ. Dès lors, je dis que ce rapport est le même que celui du carré de la droite AΔ au carré de l'excédent dont la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΓ, BΔ surpasse la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AB, ΓΔ (²).

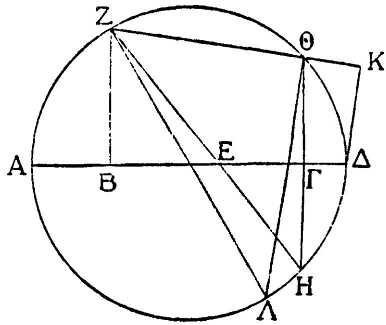
---

1. Les points A, Z, E, H étant par hypothèse sur une circonférence de cercle, on a : $\widehat{ZHE} + \widehat{EAZ} = 2$ droits, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : $\widehat{B\Theta\Gamma} + \widehat{EAZ} = 2$ droits, d'où les points A, B, Θ, Γ sont sur une circonférence de cercle, d'où, considérant l'arc sous-tendu par la corde BΘ, on a : $\widehat{BAH} = \widehat{B\Gamma\Theta} = \widehat{H\Gamma\Delta}$, d'où l'on a dans les triangles AEH, ΓΔH, d'angles opposés au sommet : $\widehat{AEH} = \widehat{\Gamma\Delta H}$. Or, par hypothèse : $\widehat{\Gamma\Delta H}$ = angle droit ; donc, comme le texte : $\widehat{AEH}$ = angle droit.

2. On doit donc démontrer la relation : $\frac{AE \times E\Delta}{BE \times E\Gamma} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{(\sqrt{A\Gamma \times B\Delta} - \sqrt{AB \times \Gamma\Delta})^2}$.

L'ouvrage d'Apollonius sur *La Section déterminée* étant perdu, on ne peut faire que des conjectures sur l'énoncé du problème auquel se rattache ici le lemme de Pappus, ainsi que sur la signification exacte de l'expression μοναχὸς λόγος καὶ ἐλάχιστός (le rapport singulier et minimum) relevant de ce même problème. Simson (cfr. *Reliqua quaedam, etc.*, p. 56) a toutefois proposé la reconstitution suivante de l'énoncé : « Ratio autem minima determinatur ita. Ostensum fuit... datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D, si fiat ut rectangulum ABD ad ipsum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex EC, fore E punctum quod facit rationem rectanguli AED ad rectangulum BEC singularem et minimam. Nunc vero ostendendum est rationem hanc eandem esse ei quam habet quadratum ex AD ad quadratum excessus quo recta linea quae potest rectangulum AC BD excedit eam quae potest rectangulum ABCD ».

Décrivons un cercle autour de la droite ΑΔ (1) et menons les perpendiculaires ΒΖ, ΓΗ. Dès lors, puisque le carré de la droite ΒΕ est au carré de la droite ΕΓ comme le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΔ est au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΔ, c'est-à-dire comme le carré de la droite ΒΖ est au carré de la droite ΓΗ, il s'ensuit que, en longueur, la droite ΒΕ est à la droite ΕΓ comme la droite ΒΖ est à la droite ΓΗ. En conséquence, la ligne qui passe par les points Ζ, Ε, Η est droite (2). Que ce soit la droite ΖΕΗ ; prolongeons la droite ΗΓ jusqu'au point Θ, prolongeons la droite de jonction ΖΘ sur le point Κ, et menons sur celle-ci la perpendiculaire ΔΚ. Dès lors, en raison d'un lemme établi précédemment, le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΒΔ devient équivalent au carré de la droite ΖΚ, et le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΓΔ équivalent au carré de la droite ΘΚ ; par conséquent, la droite restante ΖΘ est l'excédent dont la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΒΔ surpasse celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΓΔ (3). Menons maintenant la droite ΖΛ par le centre, et menons la droite de jonction ΘΛ. Dès lors, puisque l'angle droit compris sous les droites ΖΘ, ΘΛ est égal à l'angle droit compris sous les droites ΕΓ, ΓΗ, et que l'angle au point Λ est aussi égal à l'angle au point Η, il s'ensuit que les triangles sont équiangles ; par conséquent, la droite ΕΗ est à la droite ΕΓ comme la



1. C'est-à-dire autour de la droite ΑΔ comme diamètre.

2. On a par hypothèse : $\frac{\overline{\mathrm{BE}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{B\Delta}}{\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta}}$. Or, $\overline{\mathrm{BZ}}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{B\Delta}$ et $\overline{\mathrm{\Gamma H}}^2 = \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$; donc, $\frac{\overline{\mathrm{BE}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{BZ}}^2}{\overline{\mathrm{\Gamma H}}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{BZ}}{\mathrm{\Gamma H}}$, d'où similitude des triangles rectangles ΖΒΕ, ΗΓΕ, d'où : $\widehat{\mathrm{ZEB}} = \widehat{\mathrm{HE\Gamma}}$, d'où situation des points Ζ, Ε, Η sur une même ligne droite.

3. Le lemme XIX, ou proposition 59, a démontré que l'on a : $\overline{\mathrm{ZK}}^2 = \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{B\Delta}$ et $\overline{\Theta \mathrm{K}}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$, d'où, comme le texte : $\mathrm{ZK} - \Theta\mathrm{K} = \mathrm{Z}\Theta = \sqrt{\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{B\Delta}} - \sqrt{\mathrm{AB} \times \mathrm{\Gamma\Delta}}$.

droite ΛZ est à la droite ΘZ, c'est-à-dire comme la droite ΑΔ est à la droite ZΘ ; et le carré de la droite EH est donc au carré de la droite EΓ, de même que le rectangle compris sous les droites HE, EZ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites AE, EΔ, est au rectangle compris sous les droites BE, EΓ, comme le carré de la droite ΑΔ est au carré de la droite ZΘ (1). Et le rapport du rectangle compris sous les droites AE, EΔ au rectangle compris sous les droites BE, EΓ est singulier et minimum, tandis que la droite ZΘ est l'excédent dont la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΒΔ surpasse celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AB, ΓΔ, [c'est-à-dire l'excédent du carré de la droite ZK sur le carré de la droite ΘK] (2) ; de sorte que le rapport singulier et minimum est le même que celui du carré de la droite ΑΔ au carré de l'excédent dont la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΒΔ surpasse celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AB, ΓΔ (3) ; ce qu'il fallait démontrer.

---

1. La droite ZΛ est un diamètre ; donc, le triangle ZΘΛ est rectangle en Θ. Or, le triangle EΓH est rectangle en Γ par construction, et les angles en Λ, H qui s'appuient sur le même arc sont égaux ; donc, les triangles ZΘΛ, EΓH sont semblables, d'où : $\frac{EH}{E\Gamma}=\frac{\Lambda Z}{\Theta Z}$. Or, $A\Delta = \Lambda Z$; donc, comme le texte : $\frac{EH}{E\Gamma}=\frac{A\Delta}{\Theta Z}$, d'où : $\frac{\overline{EH}^2}{\overline{E\Gamma}^2}=\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Theta Z}^2}$. Or, la similitude des triangles EΓH, EBZ donne : $\frac{ZE}{BE}=\frac{EH}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{EH \times ZE}{BE \times E\Gamma}=\frac{\overline{EH}^2}{\overline{E\Gamma}^2}$ ou, considérant que l'on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 35, énoncée p. 149, n. 5) : $AE \times E\Delta = EH \times ZE$, il vient : $\frac{AE \times E\Delta}{BE \times E\Gamma}=\frac{\overline{EH}^2}{\overline{\Gamma E}^2}$, d'où comme le texte : $\frac{AE \times E\Delta}{BE \times E\Gamma}=\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Theta Z}^2}$.

2. La phrase placée entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 758, l. 28).

3. On a démontré p. 585, n. 3 que l'on a : $\Theta Z = \sqrt{A\Gamma \times B\Delta} - \sqrt{AB \times \Gamma\Delta}$; donc, la dernière expression de la note 1 ci-dessus devient : $\frac{AE \times E\Delta}{BE \times \Theta Z} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{(\sqrt{A\Gamma \times B\Delta} - \sqrt{AB \times \Gamma\Delta})^2}$.

RAPPORT SINGULIER DE LA TROISIÈME INJONCTION DU SECOND PROBLÈME.

XXII.

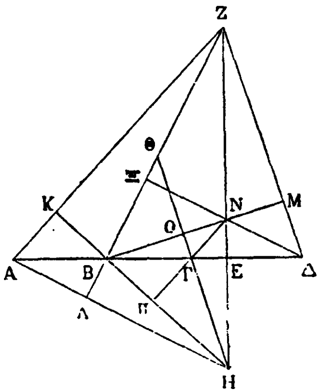
PROPOSITION 62. — Trois droites AB, BΓ, ΓΔ étant données de nouveau, s'il se fait que le carré de la droite ΔE est au carré de la droite EΓ comme le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB est au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB, le rapport singulier et minimum [est celui du rectangle compris sous les droites AE, EB au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ (1). Dès lors, je dis que] (2) ce rapport est celui du carré de la somme de la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΓ, BΔ et de la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΔ, BΓ au carré de la droite ΔΓ (3).

Menons du point E la droite EZ perpendiculaire sur la droite AΔ ; prolongeons-la ; que le carré de la droite ZΔ soit équivalent au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB, et menons la droite HΓ parallèle à la droite ZΔ. Dès lors, puisque le carré de la droite ΔE est au carré de la droite EΓ, c'est-à-dire le carré de la droite ΔZ au carré de la droite ΓH, comme le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB est au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB, et que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB équivaut au carré de la droite ZΔ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB équivaut

1. Simson a rétabli conjecturalement comme suit l'énoncé de ce troisième cas imposé du second problème du second livre de *La Section déterminée*, où intervient le rapport singulier minimum (cfr. *loc. cit.*, p. 169) : « Ratio autem minima ita determinatur. Ostensum fuit, Datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D, si fiat ut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita quadratum ex DE ad quadratum ex EC, fore E punctum quod facit minimam rationem rectanguli AEB ad rectangulum CED. Ostendendum nunc est hanc eandem esse ei quam habet quadratum rectae lineae quae constat ex ea quae potest rectangulum ACBD et ex ea quae potest rectangulum ad quadratum ex DC ».

2. La phrase mise entre crochets a été reconstituée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 760, l. 10).

3. On doit donc démontrer la relation : $\frac{(\sqrt{A\Gamma \times B\Delta}+\sqrt{A\Delta \times B\Gamma})^2}{\Delta\Gamma^2} = \frac{AE \times EB}{\Gamma E \times E\Delta}$.



aussi au carré de la droite ΓH (1). Menons les droites de jonction AZ, ZB, AH, HB (2). Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB équivaut au carré de la droite ΔZ, l'angle compris sous les droites BZ, ZΔ est égal à celui qui est compris sous les droites ZA, AB. Or, l'angle compris sous les droites BH, HΓ est aussi égal à celui qui est compris sous les droites BA, AH (3). Mais, l'angle compris sous les droites BZ, ZΔ est aussi égal à celui qui est compris sous les droites BΘ, ΘH ; donc, les angles compris sous les droites BΘ, ΘH et sous les droites BH, HΘ, constituant l'angle compris sous les droites KB, BZ (si l'on prolonge la droite BK), valent l'angle compris sous les droites ΛA, AK ; de sorte que les points A, Λ, B, K sont dans un cercle (4). En conséquence, en vertu de ce qui a été exposé antérieurement, les angles situés aux points K, Λ sont droits (5). Menons main-

1. On a par hypothèse : $\frac{\overline{\Delta E}^2}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{A\Delta \times \Delta B}{A\Gamma \times \Gamma B}$. Or, les triangles semblables, ZEΔ, HEΓ donnent : $\frac{\Delta Z}{\Gamma H} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{\Gamma H}^2} = \frac{A\Delta \times \Delta B}{A\Gamma \times \Gamma B}$. Or, on a par construction : $\overline{\Delta Z}^2 = A\Delta \times \Delta B$; donc, comme le texte : $\overline{\Gamma H}^2 = A\Gamma \times \Gamma B$.

2. Le texte sous-entend ici que la droite HΓ est prolongée jusqu'au point de rencontre Θ avec la droite ZB.

3. On a par construction : $\overline{\Delta Z}^2 = A\Delta \times \Delta B$, d'où : $\frac{\Delta Z}{\Delta B} = \frac{A\Delta}{\Delta Z}$, d'où similitude des triangles BΔZ, AΔZ ayant l'angle en Δ commun ; donc : $\widehat{BZ\Delta} = \widehat{ZAB}$ (I). D'autre part, la relation de la note 1 ci-dessus donne : $\frac{\Gamma H}{\Gamma B} = \frac{A\Gamma}{\Gamma H}$, d'où similitude des triangles BΓH, HΓA ayant l'angle en Γ commun ; donc, comme le texte : $\widehat{BH\Gamma} = \widehat{BAH}$ (II).

4. Explicitement : Les droites ΔZ, HΘ sont parallèles par construction ; donc, comme le texte : $\widehat{BZ\Delta} = \widehat{B\Theta H}$, d'où, en présence de l'égalité (I) de la note précédente : $\widehat{ZAB} = \widehat{B\Theta H}$. D'autre part, on a l'égalité (II) de la note précédente : $\widehat{BH\Gamma}$ ou $\widehat{BH\Theta} = \widehat{BAH}$. Or, $\widehat{B\Theta H} + \widehat{BH\Theta} = \widehat{KBZ}$; donc : $\widehat{ZAB} + \widehat{BAH} = \widehat{KA\Lambda} = \widehat{KBZ}$. Or, $\widehat{KBZ} + \widehat{KB\Lambda} = 2$ droits ; donc : $\widehat{KA\Lambda} + \widehat{KB\Lambda} = 2$ droits ; donc, comme le texte, les points A, Λ, B, K sont concycliques.

5. Voir lemme XX ou proposition 60 (p. 583).

tenant la droite BM perpendiculaire sur la droite ZΔ ; menons la droite de jonction ΔN, et prolongeons-la jusqu'au point Ξ ; il s'ensuit que cette droite est perpendiculaire sur la droite ZΛ [1] et qu'elle est parallèle à la droite HΛ [2]. Derechef, prolongeons la droite de jonction HΓ jusqu'au point O ; il s'ensuit que cette droite est perpendiculaire à la droite BN (car la droite ZΔ est aussi perpendiculaire sur la droite MB) [3]. Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB équivaut au carré de la droite ΓH, l'angle compris sous les droites BH, HΓ est donc égal à celui qui est compris sous les droites HA, AΓ [4]. Mais, l'angle compris sous les droites BH, HΓ, considéré dans le cercle, est égal à celui qui est compris sous les droites ΓN, NB [5], tandis que l'angle compris sous les droites HA, AB, considéré dans la parallèle, est égal à celui qui est compris sous les

1. Dans le triangle quelconque BZΔ, les perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés se coupent en un même point, et N étant le point de rencontre des droites ZE, BM, perpendiculaires par construction, il s'ensuit que la droite de jonction ΔN est perpendiculaire sur la droite ZΛ. Ce raisonnement ne découle cependant pas directement d'une proposition formelle d'Euclide, et Pappus doit donc sous-entendre ici quelque démonstration plus détournée. Une première reconstitution de cette démonstration a été tentée par Commandin. Elle se base sur diverses propositions d'Euclide, mais, outre sa prolixité, elle est erronée (Cfr *loc. cit.*, p. 298, l. 45, à p. 299, l. 18). Une autre reconstitution est due à Simson (Cfr. *loc. cit.*, p. 171). En voici le texte, un peu abrégé par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 763, en note) dans un latin trop facile pour que nous devions le traduire : « Quoniam anguli ΔMN et ΔEN recti sunt, puncta Δ, E, N, M sunt in circuli circumferentia. Sed quia triangulis orthogoniis ΔBM et ΔZE communis est angulus BΔZ, reliquus igitur ΔBM reliquo ΔZE aequalis est, sive $\widehat{EBM} = \widehat{EZM}$; ergo puncta B, E, M, Z in circuli circumferentia sunt. Ergo, juncta EM, in segmento MN erit $\widehat{M\Delta N} = \widehat{MEN}$ (sive $\widehat{ME\Xi}$) et, in segmento MZ, $\widehat{ME\Xi} = \widehat{MBZ}$. Ergo, in triangulis ZΔΞ et ZBM anguli ZΔΞ et ZBM aequales sunt, et iisdem communis est angulus BZΔ ; itaque reliqui anguli ZΞΔ et ZMB aequales sunt. Sed erat BM perpendicularis ad ZΔ ; ergo etiam ΔΞ perpendicularis est ad ZΛ. »

2. Parce qu'on a démontré que l'angle Λ est droit.

3. On a par construction : ZΔ perpendiculaire à MB et HΓ parallèle à ZΔ.

4. Ce qui a déjà été démontré plus haut dans le passage où l'angle HAΓ est désigné angle BAH (voir note).

5. Dans le triangle acutangle BNH, la droite BE est perpendiculaire sur NH par construction, et on a démontré que NO est perpendiculaire sur BN ; donc, la droite NΠ, qui passe par le point de section Γ, est perpendiculaire sur la droite BH ; donc, les points Π, O sont sur la circonférence du cercle de diamètre HN ; donc, les angles ΠHO, ONΠ, qui s'appuient sur le même arc sous-tendu par la corde ΠO sont égaux, c'est-à-dire que l'on a, comme le texte : $\widehat{BH\Gamma} = \widehat{\Gamma NB}$.

droites BΔ, ΔN ; par conséquent, l'angle compris sous les droites BN, NΓ est égal à celui qui est compris sous les droites BΔ, ΔN ; donc, le rectangle compris sous les droites ΔB, BΓ équivaut au carré de la droite BN (1). Or, puisque, dans le triangle BΔZ, la droite ΔNΞ est menée perpendiculairement, et que les droites ZN, NB sont brisées contre cette droite, il s'ensuit que l'excédent des carrés des droites ZΔ, ΔB équivaut à l'excédent des carrés des droites ZN, NB (2). Mais, l'excédent des carrés des droites ZΔ, ΔB est le rectangle compris sous les droites AB, BΔ ; donc, l'excédent des carrés des droites ZN, NB est aussi le rectangle compris sous les droites AB, BΔ. Or, le rectangle compris sous les droites ΔB, BΓ équivaut aussi au carré de la droite BN ; donc, la droite NZ est celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΓ, BΔ (3).

Derechef, puisque l'excédent des carrés des droites HN, NB est égal à l'excédent des carrés des droites HΓ, ΓB (4), mais que l'excédent des carrés des droites HΓ, ΓB est le rectangle compris

---

1. On a démontré n. 3, p. 588 que l'on a : $\widehat{BH\Gamma} = \widehat{HA\Gamma}$ (ou $\widehat{HAB}$), d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : $\widehat{\Gamma NB} = \widehat{HAB}$. Or, le parallélisme des droites HA, ΔΞ donne : $\widehat{HAB} = \widehat{B\Delta N}$, d'où, comme le texte : $\widehat{\Gamma NB} = \widehat{B\Delta N}$; donc, les triangles BΓN, BNΔ, qui ont l'angle en B commun, sont semblables, d'où : $\frac{\Delta B}{BN} = \frac{BN}{B\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\Delta B \times B\Gamma = \overline{BN}^2$.

2. Considérant le triangle ZΔB dans lequel les droites ZN, NB relient les extrémités de la base ZB à un point de la perpendiculaire abaissée du sommet sur cette base, on a : $\overline{\Xi\Delta}^2 = \overline{Z\Delta}^2 - \overline{Z\Xi}^2 = \overline{\Delta B}^2 - \overline{B\Xi}^2$, d'où : $\overline{Z\Delta}^2 - \overline{\Delta B}^2 = \overline{Z\Xi}^2 - \overline{B\Xi}^2$, et $\overline{N\Xi}^2 = \overline{ZN}^2 - \overline{Z\Xi}^2 = \overline{NB}^2 - \overline{B\Xi}^2$, d'où $\overline{ZN}^2 - \overline{NB}^2 = \overline{Z\Xi}^2 - \overline{B\Xi}^2$; donc, comme le texte : $\overline{Z\Delta}^2 - \overline{\Delta B}^2 = \overline{ZN}^2 - \overline{NB}^2$. Pappus démontrera la même relation à la proposition 120 pour le cas limite où le point N se confond avec le pied Ξ de la perpendiculaire.

3. On a par construction : $\overline{Z\Delta}^2 = A\Delta \times \Delta B$. Or, considérant la droite AΔ divisée en deux parties inégales en B, on a (Euclide, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2) : $A\Delta \times \Delta B = AB \times B\Delta + \overline{B\Delta}^2$; donc : $\overline{Z\Delta}^2 = AB \times B\Delta + \overline{B\Delta}^2$, d'où, comme le texte : $\overline{Z\Delta}^2 - \overline{B\Delta}^2 = AB \times B\Delta$; d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente : $\overline{ZN}^2 - \overline{NB}^2 = AB \times B\Delta$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note 1 ci-dessus : $\overline{ZN}^2 - B\Delta \times B\Gamma = AB \times B\Delta$, d'où : $\overline{ZN}^2 = (AB + B\Gamma)\, B\Delta = A\Gamma \times B\Delta$, d'où, comme le texte : $ZN = \sqrt{A\Gamma \times B\Delta}$.

4. Considérant le triangle BNH dans lequel les droites BΓ, ΓH relient les extrémités de la base BH à un point Γ de la perpendiculaire abaissée du sommet sur cette base, on a : $\overline{N\Pi}^2 = \overline{HN}^2 - \overline{\Pi H}^2 = \overline{NB}^2 - \overline{B\Pi}^2$, d'où : $\overline{HN}^2 - \overline{NB}^2 = \overline{\Pi H}^2 - \overline{B\Pi}^2$, et $\overline{\Gamma\Pi}^2 = \overline{H\Gamma}^2 - \overline{\Pi H}^2 = \overline{\Gamma B}^2 - \overline{B\Pi}^2$, d'où : $\overline{H\Gamma}^2 - \overline{\Gamma B}^2 = \overline{\Pi H}^2 - \overline{B\Pi}^2$; donc, comme le texte : $\overline{HN}^2 - \overline{NB}^2 = \overline{H\Gamma}^2 - \overline{\Gamma B}^2$.

sous les droites AB, BΓ, il s'ensuit que l'excédent des carrés des droites HN, NB est aussi le rectangle compris sous les droites AB, BΓ. Or, le rectangle compris sous les droites ΔB, BΓ équivaut aussi au carré de la droite BN ; donc, la droite NH est celle qui est en puissance du rectangle entier compris sous les droites AΔ, BΓ (1). Mais, la droite ZN est celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΓ, BΔ ; [donc, la droite entière ZH est celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΔ, BΓ] (2) augmentée de celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΓ, BΔ (3).

Puisque l'angle compris sous les droites ZK, KH est droit et que la droite AE est perpendiculaire, le rectangle compris sous les droites AE, EB équivaut donc au rectangle compris sous les droites ZE, EH. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ZE, EH est à celui qui est compris sous les droites ΓE, EΔ comme le rectangle compris sous les droites AE, EB est à celui qui est compris sous les droites ΓE, EΔ (4). Or, le carré de la droite [ZH est au carré de la droite] (5) ΓΔ comme le rectangle compris sous les droites ZE, EH est au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ ; donc, le carré de la droite ZH est aussi au carré de la droite ΓΔ comme le rectangle compris sous les droites AE, EB est au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ. Et le rapport du rectangle compris sous les droites AE, EB au rectangle

---

1. On a démontré n. 1, p. 588 que l'on a : $\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2 = \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{B\Gamma}$. Or, considérant la droite AΓ divisée en parties inégales en B on a (Euclide, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2) : $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma} + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2$; donc $\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma} + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2$, d'où : $\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2 - \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente, on a : $\overline{\mathrm{HN}}^2 - \overline{\mathrm{NB}}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma}$, d'où, en présence de la relation démontrée (voir n. 1, p. 590) : $\Delta\mathrm{B} \times \mathrm{B\Gamma} = \overline{\mathrm{NB}}^2$, il vient : $\overline{\mathrm{HN}}^2 - \Delta\mathrm{B} \times \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma}$, d'où : $\overline{\mathrm{HN}}^2 = (\mathrm{AB} + \Delta\mathrm{B})\, \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{B\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\mathrm{HN} = \sqrt{\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{B\Gamma}}$.
2. Restauration due à Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 764, ll. 27-28).
3. La somme des deux expressions des notes précédentes donne donc, comme le texte : $\mathrm{ZN} + \mathrm{HN} = \mathrm{ZH} = \sqrt{\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{B\Delta}} + \sqrt{\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{B\Gamma}}$.
4. Considérant les triangles rectangles AKB, HEB opposés au sommet on a : $\widehat{\mathrm{KAB}} = \widehat{\mathrm{BHE}}$; donc, les triangles rectangles AEZ, HEB, qui ont les angles en A et H égaux, sont semblables ; donc : $\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{EB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EH}}$, d'où : $\mathrm{ZE} \times \mathrm{EH} = \mathrm{AE} \times \mathrm{EB}$, d'où : $\frac{\mathrm{ZE} \times \mathrm{EH}}{\Gamma\mathrm{E} \times \mathrm{E\Delta}} = \frac{\mathrm{AE} \times \mathrm{EB}}{\Gamma\mathrm{E} \times \mathrm{E\Delta}}$.
5. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 302, l. 13).

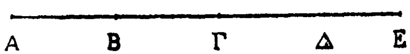
compris sous les droites, ΓE, EΔ est singulier et minimum, tandis que la droite ZH se compose de la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΓ, BΔ [et de celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droite AΔ, BΓ] (1) ; donc, le rapport singulier et minimum est le même que celui du carré de la droite composée de celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΓ, BΔ et de celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΔ, BΓ au carré de la droite ΓΔ (2).

POUR LA TROISIÈME INJONCTION DU TROISIÈME PROBLÈME.

XXIII.

Proposition 63. — Que la droite AB soit égale à la droite ΓΔ et que le rectangle compris sous les droites BE, EΓ soit plus grand que celui qui est compris sous les droites AB, BΔ ; je dis que le rectangle compris sous les droites BE, EΓ excède celui qui est compris sous les droites AE, EΔ de celui qui est compris sous les droites BΔ, ΔΓ (3).

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites BE, EΓ équivaut au rectangle compris sous les droites BΓ, ΓE augmenté du carré de la droite EΓ, c'est-à-dire augmenté du rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ conjointement avec le rectangle compris sous les droites EΓ, ΓΔ;



1. Lacune comblée par Commandin (*Ibidem*).

2. Les triangles semblables ZEΔ, HEΓ donnent : $\frac{ZE}{E\Delta}=\frac{EH}{\Gamma E}$ (I), d'où : $\frac{\overline{ZE}^2}{\overline{E\Delta}^2}=\frac{ZE\times EH}{E\Delta\times \Gamma E}$. Or, la relation (I) donne aussi : $\frac{ZE}{E\Delta}=\frac{ZE+EH}{E\Delta+\Gamma E}=\frac{ZH}{\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{\overline{ZE}^2}{\overline{E\Delta}^2}=\frac{\overline{ZH}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{ZH}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{ZE\times EH}{E\Delta\times\Gamma E}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note 4 de la page 591 : $\frac{\overline{ZH}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{AE\times EB}{\Gamma E\times E\Delta}$. Or, on a démontré (n. 3, p. 591) que l'on a : $ZH=\sqrt{A\Gamma\times B\Delta}+\sqrt{A\Delta\times B\Gamma}$; donc, comme le texte : $\frac{(\sqrt{A\Gamma\times B\Delta}+\sqrt{A\Delta\times B\Gamma})^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{AE\times EB}{\Gamma E\times E\Delta}$.

3. Cette proposition est identique à la proposition 24 (ou lemme IV) démontrée d'une autre manière. Voir p. 534.

mais, que le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΕ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites ΕΓ, ΓΔ, constitue le rectangle entier compris sous les droites ΒΔ, ΓΕ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΕ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΕ augmenté du rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΕΔ. Mais, le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΕ équivaut à celui qui est compris sous les droites ΑΓ, ΕΔ augmenté de celui qui est compris sous les droites ΑΓ, ΓΔ ; tandis que le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΕΔ, conjointement avec celui qui est compris sous les droites ΓΕ, ΕΔ, est le rectangle entier compris sous les droites ΑΕ, ΕΔ. On obtient donc le rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΓ équivalent à celui qui est compris sous les droites ΑΕ, ΕΔ augmenté de celui qui, compris sous les droites ΑΓ, ΓΔ, constitue le rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΓ ; de sorte que le rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΓ excède celui qui est compris sous les droites ΑΕ, ΕΔ de celui qui est compris sous les droites ΒΔ, ΔΓ ; ce qu'il fallait démontrer (1).

RAPPORT SINGULIER DE LA TROISIÈME [INJONCTION DU TROISIÈME] (2) PROBLÈME (3).

XXIV.

PROPOSITION 64. — Trois droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ étant données et une droite ΔΕ leur étant ajoutée, s'il se fait que le carré de la droite ΒΕ est au carré de la droite ΕΓ comme le rectangle

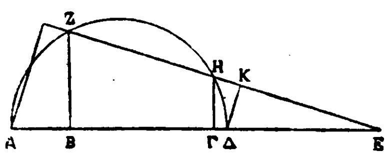
1. Considérant la droite ΒΕ partagée en parties inégales en Γ, on a (EUCLIDE, liv. II, proposition 3, énoncée p. 232, n. 2) : $\mathrm{BE} \times \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E} + \overline{\mathrm{\Gamma E}}^2 = \mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E} + \mathrm{\Gamma E}\,(\mathrm{E\Delta} + \mathrm{\Gamma\Delta}) = \mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E} + \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$ Or, $\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E} + \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{B\Delta} \times \mathrm{\Gamma E}$, d'où, considérant que l'on a par construction : $\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma\Delta}$, d'où : $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Delta}$, on a : $\mathrm{B\Delta} \times \mathrm{\Gamma E} = \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E}$; donc : $\mathrm{BE} \times \mathrm{\Gamma E} = \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma E} = \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{A\Gamma}\,(\mathrm{E\Delta} + \mathrm{\Gamma\Delta}) = \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Delta} + \mathrm{B\Delta} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$.

2. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 768, l. 1), d'après la conjecture de R. Simson (*loc. cit.*, p. 57).

3. Le troisième cas de disposition des points du troisième problème du second livre de *La Section déterminée* d'Apollonius a fait l'objet d'une reconstitution conjecturale de la part de Simson (*loc. cit.*, p. 188) qui *donne l'énoncé suivant :*

compris sous les droites AB, BΔ est au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ, le rapport singulier et maximum est celui du rectangle compris sous les droites AE, EΔ à celui qui est compris sous les droites BE, EΓ. Dès lors, je dis que ce rapport est le même que celui du carré de la droite AΔ au carré de la somme de la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AΓ, BΔ et de la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites AB, ΓΔ (1).

Décrivons le demi-cercle AZHΔ sur la droite AΔ, et menons les droites BZ, ΓH perpendiculaires sur la droite AΔ. Dès lors, puisqu'il se fait que le carré de la droite [BE] (2) est au carré de la droite EΓ comme le rectangle compris sous les droites AB, BΔ est à celui qui est compris sous les droites AΓ, ΓΔ, mais que, dans le demi-cercle, le rectangle compris sous les droites AB, BΔ équivaut au carré de la droite BZ,



et que le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ équivaut au carré de la droite ΓH, il s'ensuit que le carré de la droite BE est au carré de la droite EΓ comme le carré de la droite BZ est au carré de la droite ΓH et qu'il en est ainsi en longueurs (3). De plus, les droites BZ, ΓH sont parallèles ; donc la ligne qui passe par les points Z, H, E est droite (4). Soit la droite ZHE,

---

« Ratio autem maxima determinatur ita. Ostensum fuit, Datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D, si fiat, addita quadam DE, ut rectangulum ABD ad rectangulum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex CE, fore E punctum quod facit maximam rationem rectanguli AED ad rectangulum BEC. Ostendendum nunc est rationem hanc eandem esse ei quam habet quadratum ex AD ad quadratum rectae lineae quae componitur ex ea quae potest rectangulum ACBD et ex ea quae potest contentum ABCD ».

1. Il faut donc démontrer que, dans le cas de l'injonction des points tels que l'on ait : $\frac{\overline{BE}^2}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{AB \times B\Delta}{A\Gamma \times \Gamma\Delta}$, on a aussi : $\frac{AE \times E\Delta}{BE \times E\Gamma} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{(\sqrt{A\Gamma \times B\Delta} + \sqrt{AB \times \Gamma\Delta})^2}$.

2. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 304, l. 17).

3. C'est-à-dire en première puissance de ces droites.

4. On a par hypothèse : $\frac{\overline{BE}^2}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{AB \times B\Delta}{A\Gamma \times \Gamma\Delta}$. Or, on a dans le demi-cercle : $\overline{BZ}^2 = AB \times B\Delta$ et $\overline{\Gamma H}^2 = A\Gamma \times \Gamma\Delta$; donc : $\frac{\overline{BE}^2}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{\overline{BZ}^2}{\overline{\Gamma H}^2}$, d'où : $\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{BZ}{\Gamma H}$; relation qui, en présence du parallélisme des droites BZ, ΓH, indique que les points

prolongeons-la, et me nons-luiles perpendiculaires $A\Theta$, ΔK. Dès lors, puisque le rapport du rectangle compris sous les droites AE, $E\Delta$ au rectangle compris sous les droites BE, $E\Gamma$ est singulier et maximum ; mais, que le rectangle compris sous les droites ZE, EH [équivaut au rectangle compris sous les droites AE, $E\Delta$] (1), il s'ensuit que le rapport singulier et maximum est le même que celui du rectangle compris sous les droites ZE, EH au rectangle compris sous les droites BE, $E\Gamma$ (2). Or, considérant les parallèles, le carré de la droite HE est au carré de la droite $E\Gamma$, c'est-à-dire le carré de la droite AE est au carré de la droite $E\Theta$, [comme le rectangle compris sous les droites ZE, EH est au rectangle compris sous les droites BE, $E\Gamma$] (3) (car les points Θ, A, Γ, H sont dans un cercle, parce que les angles aux points Θ, Γ sont droits) ; tandis que, considérant les parallèles, le carré de la droite $A\Delta$ est au carré de la droite ΘK comme le carré de la droite EA est au carré de la droite $E\Theta$; par conséquent, le rapport singulier et maximum est celui du carré de la droite ΔA au carré de la droite ΘK (4). Or, la droite ΘK est celle qui est en puissance du

---

Z, H, E sont en ligne droite, comme il a été démontré à la proposition 13 du livre IV (voir p. 159 et notes) de deux manières différentes : la première, par l'absurde, et la seconde au moyen du parallélogramme auxiliaire déterminé par une parallèle à $B\Delta$ menée du point Z jusqu'à la rencontre avec la droite ΓH prolongée et la considération de triangles semblables.

1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 304, *commentarius*, l. 5).

2. Le lemme admet comme démontré dans la proposition perdue d'Apollonius que, si la segmentation de la droite AE est déterminée par la relation : $\frac{\overline{BE}^2}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{AB \times B\Delta}{A\Gamma \times \Gamma\Delta}$, le rapport singulier et maximum qui affecte cette droite est : $\frac{AE \times E\Delta}{BE \times E\Gamma}$. Or, il est démontré que les droites ZH, HE sont dans le prolongement l'une de l'autre ; donc, considérant les sécantes EZ, EA on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4) : $ZE \times EH = AE \times E\Delta$; donc, comme le texte : $\frac{AE \times E\Delta}{BE \times E\Gamma} = \frac{ZE \times EH}{BE \times E\Gamma}$.

3. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 304, *commentarius*, l. 37).

4. Les parallèles BZ, ΓH donnent : $\frac{EH}{E\Gamma} = \frac{ZE}{BE}$, d'où : $\frac{\overline{EH}^2}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{ZE \times EH}{BE \times E\Gamma}$. Or, les angles Θ, Γ étant droits, les points Θ, A, Γ, H sont sur la circonférence de cercle de diamètre AH, d'où, considérant les sécantes de ce cercle : $AE \times E\Gamma = E\Theta \times EH$, d'où : $\frac{AE}{E\Theta} = \frac{EH}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{E\Theta}^2} = \frac{\overline{EH}^2}{\overline{E\Gamma}^2}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{E\Theta}^2} = \frac{ZE \times EH}{BE \times E\Gamma}$. Or, le parallélisme des droites $A\Theta$, ΔK donne : $\frac{A\Delta}{K\Theta} = \frac{AE}{E\Theta}$,

rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΒΔ augmentée de celle qui est en puissance du rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΓΔ ; de sorte que le rapport singulier et maximum est le même que celui du carré de la droite ΑΔ au carré de la somme de la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΒΔ et de la droite qui est en puissance du rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΓΔ [1].

Le premier livre de *La Section déterminée* comporte six problèmes, seize injonctions et cinq déterminations, dont quatre sont maxima et une minima. Celles qui se rapportent à la seconde injonction du second problème, à la troisième injonction du quatrième problème, à la troisième injonction du cinquième problème et à la troisième injonction du sixième problème sont maxima ; tandis que celle qui se rapporte à la troisième injonction du troisième problème est minima. Le second livre de *La Section déterminée* comporte trois problèmes, neuf injonctions et trois déterminations, dont deux sont minima et une maxima. Celles qui se rapportent à la troisième injonction du premier problème et à la troisième injonction du second problème sont minima ; tandis que celle qui se rapporte à la troisième injonction du troisième problème est maxima.

PREMIER LIVRE DES INCLINAISONS. LEMME UTILE POUR LE PREMIER PROBLÈME.

I.

Proposition 65. — Soient la droite ΑΒ plus grande que la droite ΓΔ et le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΒ équi-

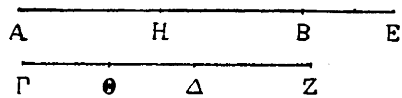
---

d'où : $\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{K\Theta}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{AE}}^2}{\overline{\mathrm{E\Theta}}^2}$; donc : $\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{K\Theta}}^2}=\frac{\mathrm{ZE}\times\mathrm{EH}}{\mathrm{BE}\times\mathrm{E\Gamma}}$, d'où, en présence de la dernière expression de la note 2 de la page 595 on a, comme le texte : $\frac{\mathrm{AE}\times\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{BE}\times\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{K\Theta}}^2}$.

1. On a : $\mathrm{K\Theta}=\mathrm{\Theta H}+\mathrm{HK}$. Or, on a démontré (prop. 59 ou lemme XIX) que l'on a : $\overline{\mathrm{\Theta H}}^2=\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{B\Delta}$ et $\overline{\mathrm{HK}}^2=\mathrm{AB}\times\mathrm{\Gamma\Delta}$; donc : $\mathrm{K\Theta}=\sqrt{\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{B\Delta}}+\sqrt{\mathrm{AB}\times\mathrm{\Gamma\Delta}}$; donc, la dernière relation de la note précédente devient : $\frac{\mathrm{AE}\times\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{BE}\times\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{(\sqrt{\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{B\Delta}}+\sqrt{\mathrm{AB}\times\mathrm{\Gamma\Delta}})^2}$.

valent au rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΔ; je dis que la droite ΑΕ est plus grande que la droite ΓΖ.

Coupons les droites ΑΒ, ΓΔ respectivement en deux parties égales aux points Η, Θ, et il est donc clair que la droite ΗΒ est plus grande que la droite ΘΔ. Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΒ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΔ, et que le carré de la droite ΗΒ est plus grand que celui de la droite ΘΔ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΒ, conjointement avec le carré de la droite [ΗΒ, est plus grand que le rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΔ conjointement avec le carré de la droite] (1) ΘΔ. Mais, le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΒ, conjointement avec le carré de la droite ΗΒ, équivaut au carré de la droite ΗΕ, tandis que le rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΔ, conjointement avec le carré de la droite ΘΔ, équivaut au carré de la droite ΖΘ ; donc, le carré de la droite ΗΕ est plus grand que celui de la droite ΘΖ ; en sorte que la droite ΗΕ est plus grande que la droite ΘΖ. Or, la droite ΑΗ est aussi plus grande que la droite ΓΘ ; donc, la droite entière ΑΕ est plus grande que la droite entière ΓΖ (2).



Pareillement encore, si la droite ΑΒ est plus petite que la droite ΓΔ, et si le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΒ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΔ, la droite entière ΑΕ sera plus petite que la droite entière ΓΖ.

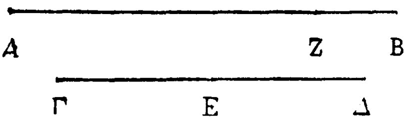
II.

Proposition 66. — Soit la droite ΑΒ plus grande que la droite ΓΔ, et coupons la droite ΓΔ en deux parties égales au

1. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 305, l. 36).

2. On a par hypothèse: $AB > \Gamma\Delta$, d'où : $\frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} \Gamma\Delta$ ou : $HB > \Theta\Delta$. Or, on a par hypothèse : $AE \times EB = \Gamma Z \times Z\Delta$; donc : $AE \times EB + \overline{HB}^2 > \Gamma Z \times Z\Delta + \overline{\Theta\Delta}^2$. Or, considérant la droite AB coupée en deux parties égales en H, à laquelle on ajoute la droite BE, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $AE \times EB + \overline{HB}^2 = \overline{HE}^2$ et, de même, pour la droite ΓΔ à laquelle est ajoutée la droite ΔZ, on a : $\Gamma Z \times Z\Delta + \overline{\Theta\Delta}^2 = \overline{\Theta Z}^2$; donc : $\overline{HE}^2 > \overline{\Theta Z}^2$, d'où : $HE > \Theta Z$. Or : $AH > \Gamma\Theta$; donc : $AH + HE > \Gamma\Theta + \Theta Z$ ou, *comme le texte* : $AE > \Gamma Z$.

point E. Dès lors, il est clair qu'il est possible d'appliquer, suivant la droite AB, un rectangle équivalent à celui qui est compris sous les droites ΓE, EΔ ; car le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ équivaut au carré de la droite ΓE; tandis que le carré de la droite ΓE est plus petit que le carré de la moitié de la droite AB (1). Appliquons ce rectangle ; que ce soit celui qui est compris sous les droites AZ, ZB, et que la droite AZ soit plus grande que la droite ZB. En conséquence, il est de nouveau manifeste que la droite AZ est plus grande que la droite ΓE, et que la droite BZ est plus petite que la droite EΔ.



En effet, la droite AZ est [plus grande] (2) que la moitié de la plus grande droite, et la droite ΓE est la moitié de la plus petite droite (3) ; [donc, la droite AZ est plus grande que la droite ΓE] (4); ce qu'il fallait démontrer.

III.

Proposition 67. — Soient de nouveau le rectangle compris sous les droites AZ, ZB équivalent à celui qui est compris sous les droites ΓE, EΔ et la droite AB plus petite que la droite ΓΔ. Soient, en outre, la droite ΔE plus petite que la droite EΓ et la droite BZ plus petite que la droite ZA ; je dis que la droite AZ est aussi plus petite que la droite ΓE.

Coupons les droites ΓΔ, AB en deux parties égales aux points H, Θ ; il s'ensuit que la droite AΘ est plus petite que la

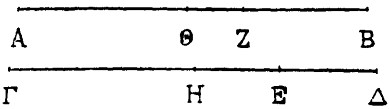
1. C'est-à-dire que l'on peut construire un rectangle équivalent à $\Gamma E \times E\Delta$ dont la somme des côtés adjacents à un angle est AB ; car $\Gamma E \times E\Delta = \overline{\Gamma E}^2$, et, par hypothèse : $\Gamma\Delta < AB$, d'où : $\Gamma E < \frac{1}{2} AB$, d'où : $\Gamma E \times E\Delta < \left(\frac{AB}{2}\right)^2$.

2. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 306, l. 11).

3. Le texte présente ici l'interpolation intempestive : ὡς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν ΓE, οὕτως ἡ EΔ πρὸς τὴν ZB, c'est-à-dire : $\frac{E\Delta}{ZB} = \frac{AZ}{\Gamma E}$ (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 772, l. 20).

4. Restauration conjecturale de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 772, l. 21) basée sur la phrase « minor igitur est ZB quam EΔ » que Commandin ajoute daus sa version latine, en faisant remarquer : « Haec nos addidimus perspicuitatis causa » (Cfr. *loc. cit.*, p. 306, l. 16).

droite ΓΗ ; de sorte que le carré de la droite ΑΘ est aussi plus petit que le carré de la droite ΓΗ. Mais, le carré de la droite ΑΘ équivaut au rectangle compris sous [les droites ΑΖ, ΖΒ augmenté du carré de la droite ΖΘ, et le carré de la droite ΓΗ équivaut au rectangle compris sous] (1) les droites ΓΕ, ΕΔ augmenté du carré de la droite ΗΕ ; donc le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΒ, conjointement avec le carré de la droite ΖΘ, est plus petit que le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΕΔ conjointement avec le carré de la droite ΗΕ. En conséquence, le carré restant de la droite ΘΖ est plus petit que le carré de la droite ΗΕ ; donc, la droite ΘΖ est plus petite que la droite ΗΕ. Or, la droite ΑΘ est aussi plus petite que la droite ΓΗ ; donc, la droite entière ΑΖ est plus petite que la droite entière ΓΕ (2), et la droite restante est plus grande que la droite restante (3).



IV.

Proposition 68. — Soit maintenant la droite ΑΒ de nouveau plus grande que la droite ΓΔ, et coupons la droite ΓΔ en un point Ε, de telle sorte que la droite ΔΕ ne soit pas plus petite que la droite ΕΓ. Dès lors, il est clair qu'il est possible d'appliquer à la droite ΑΒ un rectangle qui, défaillant d'un carré (4), soit équivalent à celui qui est compris sous les droites ΓΕ, ΕΔ (5).

1. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 307, l. 1).

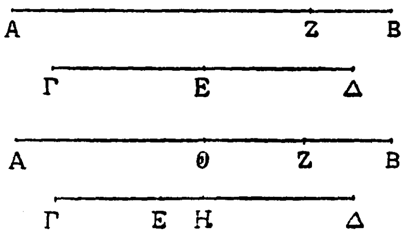
2. Considérant la droite ΑΒ coupée en parties égales en Θ et inégales en Ζ, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $AZ \times ZB + \overline{Z\Theta}^2 = \overline{A\Theta}^2$, et, de même pour la droite ΓΔ coupée en parties égales en Η et inégales en Ε, on a : $\Gamma E \times E\Delta + \overline{HE}^2 = \overline{\Gamma H}^2$. Or, par hypothèse : $AB < \Gamma\Delta$, d'où : $A\Theta < \Gamma H$; donc, comme le texte : $AZ \times ZB + \overline{Z\Theta}^2 < \Gamma E \times E\Delta + \overline{HE}^2$. Or, par hypothèse, on a aussi : $AZ \times ZB = \Gamma E \times E\Delta$; donc : $\overline{Z\Theta}^2 < \overline{HE}^2$, d'où : $Z\Theta < HE$, d'où : $A\Theta + Z\Theta < \Gamma H + HE$ ou, comme le texte : $AZ < \Gamma E$.

3. La relation d'hypothèse $AZ \times ZB = \Gamma E \times E\Delta$ donne : $\frac{AZ}{\Gamma E} = \frac{E\Delta}{ZB}$, d'où, en présence de la dernière inégalité de la note précédente, on a : $ZB = AB - AZ > E\Delta = \Gamma\Delta - \Gamma E$.

4. ἐλλεῖπον τετραγώνῳ, qui manque ou est défaillant d'un tétragone (carré).

5. Le rectangle appliqué sur la droite ΑΒ qui, à défaut d'un carré, est équivalent au rectangle ΓΕ, ΕΔ, aura donc pour côtés x et $AB - x$ et comme aire $ABx - x^2 = \Gamma E \times E\Delta$.

En effet, puisque la droite ΔE n'est pas plus petite que la droite EΓ, elle est soit égale à cette droite, soit plus grande qu'elle. Si elle lui est [égale] ([1]), le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ équivaut au carré de la moitié de la droite ΓΔ ; en sorte qu'il est plus petit que le carré de la moitié de la droite AB ; tandis que, si elle est plus grande ([2]), le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ est, à fortiori, plus petit que le carré de la moitié de la droite AB (car il est aussi plus petit que le carré de la moitié de la droite ΓΔ) ([3]). En conséquence, il est possible d'appliquer à la droite AB un rectangle qui, défaillant d'un carré, soit équivalent au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ ([4]).



Appliquons ce rectangle ; que ce soit celui qui est compris sous les droites AZ, ZB, et que la droite AZ soit le grand segment ; je dis que la droite ZB est plus petite que la droite ΓE.

En effet, puisque la droite ΔE n'est pas plus petite que la droite EΓ, elle lui est donc égale ou est plus grande. Que la droite ΔE soit d'abord égale à la droite EΓ. Dès lors, puisque la droite AB est plus grande que la droite ΓΔ, et que la droite AZ est plus grande que la moitié de la droite AB, il s'ensuit que la droite AZ est plus grande que la droite ΔE. Et la droite ΔE est à la droite ZB comme la droite AZ est à la droite ΓE ; donc, la droite ΓE est aussi plus grande que la droite ZB ; en sorte que

1. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 307, l. 47).
2. C'est-à-dire si ΔE > EΓ.
3. Euclide, liv. VI, prop. 27 : « De tous les parallélogrammes qui sont appliqués à une même droite et qui sont défaillants de parallélogrammes semblables au parallélogramme décrit sur la moitié de cette droite et semblablement placés, le plus grand est celui qui est appliqué à la moitié de cette droite, et qui est semblable à son défaut » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 356.
4. Euclide, liv. VI, prop. 28 : « A une droite donnée, appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit défaillant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné : il faut que la figure rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de la droite donnée ; le défaut du parallélogramme appliqué à la moitié de cette droite et le défaut de celui qui doit être défaillant d'un parallélogramme semblable étant semblables entre eux » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 359.

la droite ZB est plus petite que la droite ΓE (1). Mais, que la droite ΔE soit plus grande que la droite EΓ, et coupons la droite ΓΔ en deux parties égales au point H ; tandis que nous coupons la droite AB en deux parties égales au point Θ. Dès lors, puisque la droite AB est plus grande que la droite ΓΔ ; que la droite ΘB est la moitié de la droite AB et la droite ΓH la moitié de la droite ΓΔ, il s'ensuit que la droite ΘB est plus grande que la droite ΓH ; en sorte que le carré de la droite ΘB est aussi plus grand que le carré de la droite ΓH. Mais, le carré de la droite ΘB équivaut au rectangle compris sous les droites AZ, ZB augmenté du carré de la droite ZΘ, et le carré de la droite ΓH équivaut au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ augmenté du carré de la droite EH ; donc, le rectangle compris sous les droites AZ, ZB, conjointement avec le carré de la droite ZΘ, est plus grand que le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ conjointement avec le carré de la droite EH ; rectangles dont celui qui est compris sous les droites AZ, ZB équivaut à celui qui est compris sous les droites ΓE, EΔ. En conséquence, le carré restant de la droite ΘZ est plus grand que le carré de la droite EH ; en sorte que la droite ΘZ est aussi plus grande que la droite EH. Or, la droite AΘ est aussi plus grande que la droite ΔH ; donc, la droite entière AZ est plus grande que la droite entière ΔE. De plus, la droite ΔE est à la droite ZB comme la droite AZ est à la droite ΓE ; donc, la droite ΓE est aussi plus grande que la droite ZB ; en sorte que la droite ZB est plus petite que la droite ΓE (2) ; ce qu'il fallait démontrer.

---

1. Soit, dans le premier cas : $\Delta E = E\Gamma$. On a par hypothèse : $AB > \Gamma\Delta$ et $AZ > ZB$. Dès lors, $AZ > \frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} \Gamma\Delta$ ou, comme le texte : $AZ > \Delta E$ Or, on suppose avoir pu construire $AZ \times ZB = \Gamma E \times E\Delta$, d'où : $\frac{AZ}{\Gamma E} = \frac{\Delta E}{ZB}$; donc (Euclide, liv. V, prop. 14 : « Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième ; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 266), $\Gamma E > ZB$ ou, comme le texte : $ZB < \Gamma E$.

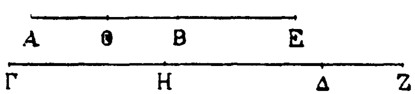
2. Soit dans le second cas : $\Delta E > E\Gamma$, et posons : $\Theta B = \frac{1}{2} AB$ et $\Gamma H = \frac{1}{2} \Gamma\Delta$. Or, on a par hypothèse : $AB > \Gamma\Delta$; donc : $\Theta B > \Gamma H$, d'où : $\overline{\Theta B}^2 > \overline{\Gamma H}^2$. Considérant maintenant la droite AB coupée en parties égales en Θ et *inégales* en Z, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, *énoncée p. 233, n. 3*) : $\overline{\Theta B}^2 = AZ \times ZB + \overline{Z\Theta}^2$,

POUR LE SIXIÈME PROBLÈME.

V.

Proposition 69. — Que la droite AB soit plus petite que la droite ΓΔ, et que le rectangle compris sous les droites AE, EB soit équivalent au rectangle compris sous les droites ΓZ, ZΔ ; je dis que la droite AE est plus petite que la droite ΓZ.

Coupons les droites AB, ΓΔ en deux parties égales aux points Θ, H ; la droite ΘB est donc plus petite que la droite HΔ. Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZΔ équivaut à celui qui est compris sous les droites AE, EB, et que le carré de la droite ΘB est plus petit que le carré de la droite HΔ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AE, EB conjointement avec le carré de la droite ΘB, ce qui constitue le carré de la droite ΘE, est plus petit que le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZΔ conjointement avec le carré de la droite HΔ, ce qui constitue le carré de la droite HZ ; en sorte que la droite EΘ est plus petite que la droite HZ. Or, la droite AΘ est aussi plus petite que la droite ΓH ; donc, la droite entière AE est plus petite que la droite ΓZ (1).



---

et, de même pour la droite ΓH, divisée en parties égales en E et inégales en H, on a : $\overline{\Gamma H}^2 = \Gamma E \times E\Delta + \overline{EH}^2$; donc : $AZ \times ZB + \overline{Z\Theta}^2 > \Gamma E \times E\Delta + \overline{EH}^2$. Or, on suppose avoir pu construire $AZ \times ZB = \Gamma E \times E\Delta$ (I) ; donc : $\overline{Z\Theta}^2 > \overline{EH}^2$, d'où : $Z\Theta > EH$. Or, on a par hypothèse : $A\Theta > \Delta H$; donc : $A\Theta + Z\Theta > \Delta H + EH$ ou, comme le texte : $AZ > \Delta E$. Or, l'expression (I) donne : $\frac{AZ}{\Gamma E} = \frac{E\Delta}{ZB}$; donc (Euclide, liv. V, prop. 14, énoncée dans la note précédente) : $\Gamma E > ZB$ ou, comme le texte : $ZB < \Gamma E$.

1. Posons : $\Theta B = \frac{1}{2} AB$ et $H\Delta = \frac{1}{2} \Gamma\Delta$. On a par hypothèse : $AB < \Gamma\Delta$; donc : $\Theta B < H\Delta$. Considérant la droite AB coupée en parties égales en Θ, à laquelle on ajoute BE, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $AE \times EB + \overline{\Theta B}^2 = \overline{\Theta E}^2$ et, de même pour la droite ΓΔ coupée en deux parties égales en H, à laquelle on ajoute ΔZ, on a : $\Gamma Z \times Z\Delta + \overline{H\Delta}^2 = \overline{HZ}^2$; donc : $\overline{\Theta E}^2 - AE \times EB < \overline{HZ}^2 - \Gamma Z \times Z\Delta$. Or, on a par hypothèse : $AE \times EB = \Gamma Z \times Z\Delta$; donc : $\overline{\Theta E}^2 < \overline{HZ}^2$, d'où : $\Theta E < HZ$. Or, on a : $A\Theta < \Gamma H$; donc : $A\Theta + \Theta E < \Gamma H + HZ$ ou, comme le texte : $AE < \Gamma Z$.

Pareillement aussi, si la droite est plus grande, la droite entière est plus grande que la droite entière (1).

THÉORÈME CONSIDÉRÉ CORRÉLATIVEMENT (2) DANS LE HUITIÈME PROBLÈME (3).

VI.

PROPOSITION 70. — Ayant le rhombe ΑΔ, dont la droite ΒΓΕ est le diamètre (4), si on prend la droite ΕΖ comme moyenne proportionnelle des droites ΒΕ, ΕΓ ; si on décrit le cercle ΖΗΘ de centre Ε à la distance ΕΖ, et si on prolonge la droite ΛΓΗ, la ligne qui passe par les points Η, Κ, Β sera droite.

En effet, menons les droites de jonction ΛΕ, ΕΚ, ΒΚ, ΚΗ, [ΗΕ] (5). Dès lors, puisque l'angle compris sous les droites ΛΓ, ΓΖ est égal à celui qui est compris sous les droites ΖΓ, ΓΚ et que ces angles sont situés de part et d'autre du diamètre, du cercle, les droites ΛΓ, ΓΚ sont égales (car c'est un lemme) (6). Mais, la droite ΛΕ est aussi égale à la droite ΕΚ ; donc, l'angle compris

1. C'est-à-dire que, si l'on a : $AB > \Gamma\Delta$, on démontrera de même qu'il en résulte : $AE > \Gamma Z$.

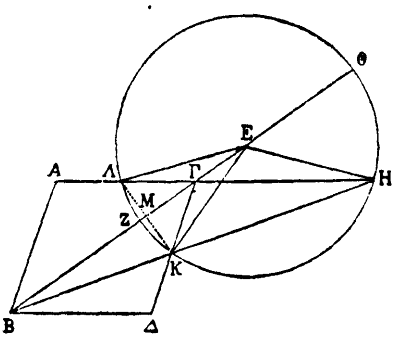
2. παραθεωρούνμενον, examiné en concordance ou en corrélation.

3. Le théorème que Pappus démontre est relatif à trois points qui, déterminés par une certaine construction appliquée au rhombe, se présentent en ligne droite. Le fait de mentionner la corrélation de ce théorème avec le huitième problème du traité perdu d'Apollonius sur *Les Inclinaisons* fait présumer que ce problème rentrait dans la catégorie des problèmes dits plans, susceptibles de solutions par la règle et le compas, et qu'il avait trait à la construction d'une droite issue d'un sommet du rhombe et interceptée sur une longueur donnée entre les côtés prolongés de ce rhombe.

4. οὗ διάμετρος ἡ ΒΓΕ, expression qui doit avoir été altérée dans les manuscrits ; car la démonstration montre aussitôt qu'il ne s'agit pas du rhombe de diamètre ΒΓΕ, mais de celui qui a comme diamètre la droite ΒΓ que l'on prolonge jusqu'à un point quelconque Ε. Le texte primitif aura donc voulu dire : « dont la droite ΒΓΕ est le diamètre prolongé ».

5. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 778, l. 13).

6. On a par propriété du rhombe : $\widehat{\Lambda\Gamma Z} = \widehat{Z\Gamma K}$, d'où : $\widehat{\Lambda E\Gamma} = \widehat{KE\Gamma}$ et $\widehat{\Lambda\Gamma E} = \widehat{K\Gamma E}$, d'où égalité des triangles ΛΓΕ, ΚΓΕ, d'où, comme le texte : $\Lambda\Gamma = \Gamma K$. Les mots mis entre parenthèses semblent cependant indiquer que cette conclusion est tirée d'une autre manière en vertu d'un lemme, non retrouvé chez Pappus ni ailleurs, utilisant problablement la droite ΛΚ, que nous ajoutons en pointillé dans la figure, et démontrant que les triangles ΛΜΓ, ΚΜΓ sont rectangles, d'où l'on tire aussi : $\Lambda\Gamma = \Gamma K$.



sous les droites ΓΛ, ΛE est égal à celui qui est compris sous les droites ΓK, KE. Mais, l'angle compris sous les droites ΓΛ, ΛE est égal à l'angle compris sous les droites ΓH, HE ; donc, l'angle compris sous les droites ΓH, HE est aussi égal à celui qui est compris sous les droites ΓK, KE. Or, l'angle compris sous les droites ΓK, KE est aussi égal à celui qui est compris sous les droites ΓB, BK ; donc, l'angle compris sous les droites ΓB, BK est aussi égal à celui qui est compris sous les droites ΓH, HE. Mais, l'angle compris sous les droites HΓ, ΓE est aussi égal à celui qui est compris sous les droites BΓ, ΓK ; donc, l'angle restant compris sous les droites ΓE, EH est égal à l'angle restant compris sous les droites ΓK, KB. Mais, l'angle compris sous les droites ΓE, EH, conjointement avec celui qui est compris sous les droites ΓK, KH, est égal à deux droits ; donc, l'angle compris sous les droites ΓK, KB, conjointement avec celui qui est compris sous les droites ΓK, KH, est égal à deux droits ; en sorte que la ligne qui passe par les points B, K, H est droite (1).

---

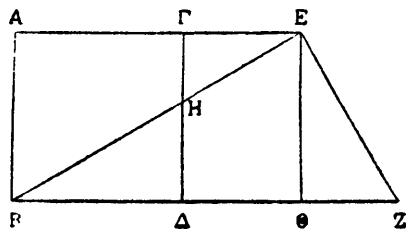
1. En notations usuelles, on a : $\Lambda E = EK$; donc : $\widehat{\Gamma\Lambda E} = \widehat{\Gamma K E}$. Or, $\widehat{\Gamma\Lambda E} = \widehat{\Gamma H E}$; donc : $\widehat{\Gamma H E} = \widehat{\Gamma K E}$. Or, on a par hypothèse : $\frac{EZ}{E\Gamma} = \frac{EB}{EZ}$ ou : $\frac{EK}{E\Gamma} = \frac{EB}{EK}$, d'où similitude des triangles BEK, KEΓ ayant l'angle en E commun ; donc : $\widehat{\Gamma K E} = \widehat{\Gamma B K}$; donc : $\widehat{\Gamma B K} = \widehat{\Gamma H E}$. Or, $\widehat{H\Gamma E} = \widehat{\Lambda\Gamma B} = \widehat{B\Gamma K}$; donc, dans les triangles KBΓ, EHΓ, on a : $\widehat{\Gamma E H} = \widehat{\Gamma K B}$. Or, on a eu plus haut : $\widehat{\Gamma H E} = \widehat{\Gamma K E}$; donc (EUCLIDE, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2), les points K, Γ, E, H sont sur une même circonférence de cercle, d'où, considérant le quadrilatère inscrit, on a : $\widehat{\Gamma E H} + \widehat{\Gamma K H} = 2$ angles droits ; donc, comme le texte : $\widehat{\Gamma K B} + \widehat{\Gamma K H} = 2$ angles droits ; d'où les points B, K, H sont sur une même droite.

LEMME UTILE POUR LE PROBLÈME RÉALISANT SUR LES CARRÉS LES MÊMES CHOSES QUE SUR LE RHOMBE [1].

VII.

Proposition 71. — Soit le carré AΔ ; menons la droite BHE et menons-lui la perpendiculaire EZ ; je dis que les carrés des droites ΓΔ, HE valent le carré de la droite ΔZ.

Menons par le point E la droite EΘ parallèle à la droite ΓΔ ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΓE, EΘ est droit. Or, l'angle compris sous les droites ZE, EH est droit aussi ; donc, l'angle compris sous les droites ΓE, EH, c'est-à-dire celui qui est compris sous les droites ΔB, BH, est égal à l'angle compris sous les droites ZE, EΘ. Mais, l'angle compris sous les droites ZΘ, ΘE est aussi égal à l'angle droit compris sous les droites BΔ, ΔH, et la droite EΘ est égale à la droite BΔ ; par conséquent, la droite EZ est aussi égale à la droite HB [2]. Or, puisque le carré de la droite BZ équivaut aux carrés des droites BE, EZ, droites chez lesquelles le rectangle



1. Le sens mathématique de ce titre de lemme paraît avoir échappé à Hultsch, qui le rend de la manière suivante : « Lemma utile ad problema de quadratis quorum summa rhombo aequalis est » (Lemme utile pour le problème relatif aux carrés dont la somme équivaut à un rhombe). Or, il ne sera nullement question, dans ce lemme, de carrés valant un rhombe. Ce titre, tel que nous le traduisons, comporte, au contraire, l'explication suivante : Le lemme VI, ou proposition 70, qui précède, a mentionné sa corrélation avec le huitième problème du traité perdu d'Apollonius sur *Les Inclinaisons*, donnant la construction plane, c'est-à-dire au moyen de la règle et du compas, de la droite issue d'un sommet du rhombe et interceptée sur une longueur donnée entre les côtés de ce rhombe, et l'application de cette solution au carré n'a donc pu échapper à Apollonius. Or, le lemme auquel s'applique le titre en question sera utilisé dans le problème suivant, attribué à Héraclite, donnant, autrement qu'Apollonius pour le rhombe, la construction plane de la droite issue d'un sommet du carré et interceptée sur une longueur donnée entre les côtés prolongés de ce carré.

2. On a par construction : $\widehat{\Gamma E\Theta} = \widehat{BEZ}$ = angle droit ; donc : $\widehat{\Gamma EH} = \widehat{HB\Delta} = \widehat{ZE\Theta}$. Or, $E\Theta = \Gamma\Delta = B\Delta$, d'où égalité des triangles $ZE\Theta$, $HB\Delta$, d'où : $EZ = BH$.

compris sous les droites ZB, BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites EB, BH (car les points Δ, Z, E, H, sont dans un cercle), il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites BZ, ZΔ équivaut au rectangle compris sous les droites BE, EH augmenté du carré de la droite EZ, c'est-à-dire augmenté du carré de la droite BH [1]. Mais, le rectangle compris sous les droites BE, EH, conjointement avec le carré de la droite BH, est le rectangle compris sous les droites EB, BH conjointement avec le carré de la droite EH ; donc, le rectangle compris sous les droites BZ, ZΔ équivaut au rectangle compris sous les droites EB, BH, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites ZB, BΔ augmenté du carré de la droite HE. Retranchons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔZ, il s'ensuit que le carré restant de la droite ZΔ équivaut aux carrés des droites BΔ, HE, c'est-à-dire aux carrés des droites ΓΔ, HE [2].

LE PROBLÈME A LA MANIÈRE D'HÉRACLITE [3].

VIII.

PROPOSITION 72. — Le carré AΔ étant donné de position, faire en sorte que la droite donnée EZ soit inclinée vers le point B.

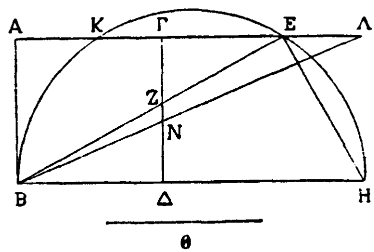
---

1. On a : $\overline{BZ}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EZ}^2$, ou : $BZ\,(B\Delta + \Delta Z) = BE\,(BH + HE) + \overline{EZ}^2$ ou : $BZ \times B\Delta + BZ \times \Delta Z = BE \times BH + BE \times HE + \overline{EZ}^2$. Or, les points Δ, Z, E, H étant sur une circonférence de cercle de diamètre HZ, on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4) : $BZ \times B\Delta = BE \times BH$; donc : $BZ \times \Delta Z = BE \times EH + EZ^2$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente : $BZ \times \Delta Z = BE \times EH + \overline{BH}^2$.

2. Considérant la droite BE coupée en parties inégales en H, on a (EUCLIDE, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2) : $BE \times EH = BH \times HE + \overline{HE}^2$; donc : $BE \times EH + \overline{BH}^2 = BH \times HE + \overline{HE}^2 + \overline{BH}^2 = BH\,(HE + BH) + \overline{HE}^2 = BH \times EB + \overline{HE}^2$; donc, la dernière expression de la note précédente devient : $BZ \times \Delta Z = BH \times EB + \overline{HE}^2$. Or, les sécantes BE, BZ du cercle passant par les points Δ, Z, E, H donnent : $BH \times EB = BZ \times B\Delta$; donc : $BZ \times \Delta Z = BZ \times B\Delta + \overline{HE}^2$, d'où, comme le texte : $BZ \times \Delta Z - B\Delta \times \Delta Z = BZ \times B\Delta - B\Delta \times \Delta Z + \overline{HE}^2$ ou : $(BZ - B\Delta)\,\Delta Z = (BZ - \Delta Z)\,B\Delta + \overline{HE}^2$ ou : $\overline{\Delta Z}^2 = \overline{B\Delta}^2 + \overline{HE}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{HE}^2$.

3. C'est-à-dire le problème de la construction de la droite menée d'un sommet du carré et interceptée sur une longueur donnée entre les côtés de ce carré, au moyen de la règle et du compas, effectuée par Héraclite d'une manière autre que celle qui a été employée par Apollonius pour le rhombe et, par suite, applicable au carré, dans la huitième proposition de l'ouvrage perdu sur *Les Inclinaisons*.

Que ce soit chose faite, et menons du point E la droite EH à angles droits sur la droite BE. Dès lors, puisque les carrés des droites ΓΔ, ZE valent le carré de la droite ΔH (1), et que les carrés des droites ΓΔ, ZE sont donnés (car chacune de ces droites est donnée de longueur), il s'ensuit que le carré de la droite ΔH est donné aussi ; donc, la droite ΔH est donnée de longueur ; donc, la droite entière BH est donnée de longueur aussi. Mais, elle est donnée de position aussi ; donc, le demi-cercle décrit sur la droite BH est donné de position. Et ce demi-cercle passe par le point E (2) ; par conséquent, le point E est lié de position à la circonférence. Mais, la droite AE lui est aussi liée de position ; donc, le point est donné (3). Mais, le point B est donné aussi ; donc, la droite BE est donnée de position.



La synthèse du problème sera donc la suivante : Soit le carré AΔ ; soit Θ la droite donnée, et que le carré de la droite ΔH soit équivalent aux carrés des droites ΓΔ, Θ. Dès lors, la droite HΔ est plus grande que la droite ΔΓ ; en sorte que le rectangle compris sous les droites HΔ, ΔB est aussi plus grand que le carré de la droite ΔΓ. En conséquence, le demi-cercle décrit sur la droite BH tombera au-dessus du point Γ (4). Décrivons-le ; que ce soit le demi-cercle BKEH ; prolongeons la droite AΓ jusqu'au point E, et menons les droites de jonction BE, EH. Dès lors, les carrés des droites ΓΔ, EZ valent le carré de la droite HΔ. Or, on a posé le carré de la droite ΔH équivalent aux carrés des droites ΓΔ, Θ ; donc, les carrés des droites ΓΔ, Θ valent les carrés des droites ΓΔ, EZ ; en sorte que le carré de la droite Θ est égal au carré de la droite EZ ; donc, la droite Θ est égale à la droite EZ. Et

1. Le lemme VII, ou proposition 71, a démontré la relation : $\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{ZE}^2 = \overline{\Delta H}^2$.

2. Parce que l'angle BEH est droit par construction.

3. EUCLIDE, *Données*, prop. 25, énoncée p. 214, n. 6.

4. On a posé : $\overline{\Delta H}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \Theta^2$; donc : $\Delta H > \Gamma\Delta$; d'où : $\Delta H \times \Gamma\Delta = \Delta H \times \Delta B > \overline{\Gamma\Delta}^2$; donc, le demi-cercle passe au-dessus du point Γ, et la droite AΓ prolongée coupe donc le demi-cercle en un point E.

la droite EZ est donnée (1) ; donc, la droite EZ résout le problème.

Je dis maintenant que cette droite est la seule (2). En effet, menons transversalement une autre droite BΛ (3). Dès lors, si la droite BΛ satisfait aussi au problème, la droite NΛ sera égale à la droite EZ. Or, la droite ZB est plus grande que la droite NB (4) ; donc, la droite entière BΛ sera plus petite que la droite BE ; ce qui est absurde, car elle est plus grande. En conséquence, la droite BΛ ne satisfait pas au problème ; donc, la droite BE est unique.

Au reste, pour reconnaître encore laquelle de ces droites est la plus grande, on démontre les choses de la manière suivante : Puisque la droite ΛB est plus grande que la droite BE et la droite BZ plus grande que la droite BN, il s'ensuit que la droite restante NΛ est plus grande que la droite ZE. Et il est clair que la droite qui est plus rapprochée du point Γ est continuellement plus petite que celle qui en est plus éloignée (5).

LEMME UTILE POUR LA DÉTERMINATION (6) DU NEUVIÈME PROBLÈME, TEL QU'ON LE TROUVE CHEZ LES ANCIENS.

IX.

Proposition 73. — Soit la droite BA égale à la droite AΓ, et coupons la droite BΓ en deux parties égales au point Δ ; je dis que la droite BΓ est la plus petite de toutes les droites menées par le point Δ.

En effet, menons une autre droite EZ, et prolongeons la

1. On a (lemme VII, ou proposition 71) : $\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{EZ}^2 = \overline{H\Delta}^2$, d'où, en présence de la relation de construction : $\overline{\Delta H}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \Theta^2$, on a : $\Theta = EZ$. Or, Θ est donné ; donc, EZ est donné.

2. C'est-à-dire que la droite EZ seule satisfait au problème.

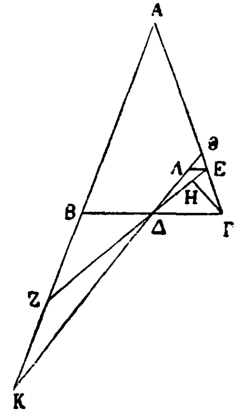
3. C'est-à-dire menons une droite BΛ inclinée vers le point B, située au-dessous du point E.

4. L'angle en Δ est droit ; donc, l'angle BNZ est obtus, d'où (Euclide, liv. I, prop. 19, énoncée p. 434, n. 7) on a : $ZB > BN$.

5. Ce qui se rapporte au cas où une droite inclinée vers B est menée au-dessus du point E, c'est-à-dire entre les points Γ et E.

6. C'est-à-dire utile pour la détermination ou discussion des conditions de possibilité.

droite AB jusqu'au point Z ; je dis que la droite EZ est plus grande que la droite ΓB. Puisque l'angle compris sous les droites AB, BΓ, c'est-à-dire l'angle Γ, est plus grand que l'angle compris sous les droites BZ, ZE, il est possible de retrancher de l'angle Γ un angle égal à l'angle compris sous les droites BZ, ZE. Que l'angle compris sous les droites ΔΓ, ΓH soit égal à ce dernier angle. Dès lors, la droite ΓΔ est à la droite ΔH comme la droite ZΔ est à la droite ΔB. Or, la droite ZΔ est plus grande que la droite ΔB ; donc, la droite ΓΔ est aussi plus grande que la droite ΔH. En conséquence, puisque la droite ZΔ est plus grande que la droite ΔB, c'est-à-dire la droite ΔΓ, mais que la droite ΔΓ est plus grande que la droite ΔH, [il s'ensuit que la droite ZΔ est la plus grande et que la droite ΔH est la plus petite] (1). Dès lors, puisque les quatre droites ZΔ, ΔB, ΔΓ, ΔH sont en proportion, que la droite ZΔ est la plus grande et la droite ΔH la plus petite, il s'ensuit que la droite ZH est plus grande que la droite BΓ ; de sorte que la droite BΓ, plus petite que la droite ZH, est, à fortiori, plus petite que la droite EZ (2). On démontrera pareillement que la droite BΓ est plus petite que toutes les droites menées par le point Δ. En conséquence, la droite BΓ est la plus petite de toutes les droites menées par le point Δ. Je dis maintenant que celle qui en est plus rapprochée est plus petite que celle qui en est plus éloignée.



En effet, menons transversalement une autre droite ΘK, et établissons l'angle compris sous les droites ΔE, EΛ égal à l'angle K (car cela est possible). Dès lors, la droite KΔ est de nouveau plus

1. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 307, l. 31).

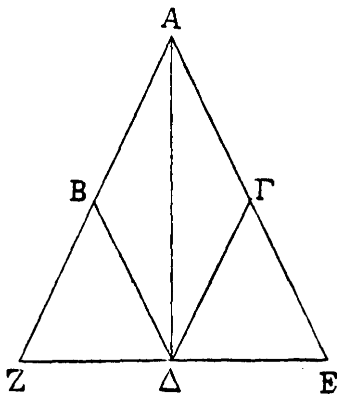
2. On a par construction : $\widehat{\Delta\Gamma H} = \widehat{BZE}$, d'où similitude des triangles ΔHΓ, ΔBZ, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Pi} = \frac{Z\Delta}{\Delta B}$. Or, $Z\Delta > \Delta B$; donc : $\Gamma\Delta > \Delta H$. Or, on a par construction : $\Delta B = \Gamma\Delta$; donc, comme le texte : $Z\Delta > \Gamma\Delta > \Delta H$. Dès lors, (Euclide, liv. V, prop. 25 : « Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 287), on a : $Z\Delta + \Delta H > \Delta B + \Gamma\Delta$ ou, comme le texte : $ZH > B\Gamma$, d'où, à fortiori : $B\Gamma < ZE$.

grande que la droite ZΔ et la droite EΔ plus grande que la droite ΔΛ ; en sorte que la droite entière KΛ est plus grande que la droite EZ. En conséquence, la droite ΘK est, à fortiori, plus grande que la droite EZ ; en sorte que la droite ZE est plus petite que la droite ΘK. Dès lors, la droite BΓ est plus petite que toutes les droites menées par le point Δ, et celle qui en est plus rapprochée est plus petite que celle qui en est plus éloignée [1].

X.

PROPOSITION 74. — Cela étant ainsi, la détermination est manifeste.

En effet, si nous exposons le rhombe ABΓΔ et si, menant la droite de jonction AΔ, nous lui menons la perpendiculaire EZ rencontrant les droites AΓ, AB aux points E, Z, il nous faut déterminer si cette droite est la plus grande ou la plus petite de toutes les droites qui sont menées par le point Δ. Et puisque la droite AΔ est la diagonale, que la droite EZ est perpendiculaire sur la droite AΔ, on a obtenu le triangle isocèle EAZ ayant la droite EA égale à la droite AZ. En conséquence, en raison du lemme précédent, la droite EZ est plus petite que toutes les droites menées par le point Δ, et celle qui en est plus rapprochée est continuellement plus petite que celle qui en est plus éloignée.



LEMMES SUR LE SECOND LIVRE DES INCLINAISONS.

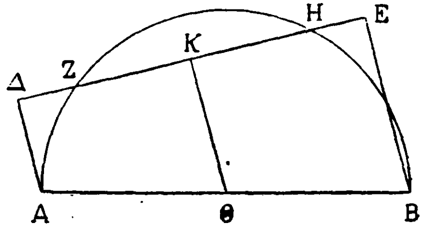
I.

PROPOSITION 75. — Soit le demi-cercle décrit sur la droite AB ; menons transversalement une droite quelconque ΔE, et menons-lui

1. Même raisonnement que dans la note précédente.

les perpendiculaires AΔ, BE ; je dis que la droite ΔZ est égale à la droite HE.

Prenons le centre Θ du demi-cercle et menons la perpendiculaire ΘK sur la droite ΔE ; celle-ci est donc parallèle aux droites AΔ, BE, et la droite ZK est égale à la droite KH [1]. Or, puisque les trois droites AΔ, ΘK, BE sont parallèles, et que la droite AΘ est égale à la droite ΘB, il s'ensuit que la droite ΔK est aussi égale à la droite KE ; droites chez lesquelles la droite ZK est égale à la droite KH ; par conséquent, la droite restante ΔZ est égale à la droite restante HE [2].

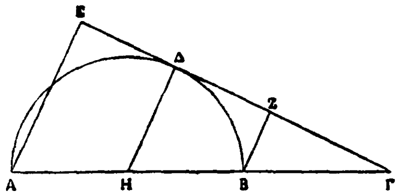


Et il est manifeste que la droite ΔH est aussi égale à la droite EZ [3].

II.

PROPOSITION 76. — Soit de nouveau le demi-cercle sur la droite AB ; menons la tangente ΓΔ que nous prolongeons, et menons-lui les perpendiculaires AE, BZ ; je dis que la droite EΔ est de nouveau égale à la droite ΔZ.

Que le point H soit le centre, et menons la droite de jonction ΔH qui est donc parallèle aux droites AE, BZ (car les angles au point Δ sont droits). Dès lors, puisque les trois droites AE, HΔ, BZ sont parallèles, et que la droite AH est égale à la droite HB, il s'ensuit que la droite EΔ est aussi égale à la droite ΔZ ; ce qu'il fallait démontrer.



1. EUCLIDE, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.

2. Le parallélisme des droites AΔ, ΘK, BE donne : $\frac{\Delta K}{KE} = \frac{A\Theta}{\Theta B}$. Or, $A\Theta = \Theta B$; donc : $\Delta K = KE$. Or, $ZK = KH$; donc : $\Delta K - ZK = KE - KH$ ou : $\Delta Z = HE$.

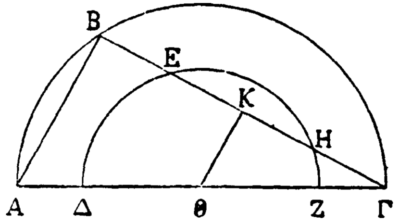
3. Proposition déjà démontrée par Archimède pour le cas où la droite quelconque ΔE coupe le diamètre du cercle à l'intérieur du cercle. Voir *Œuvres d'Archimède, Livre des Lemmes*, proposition 13, trad. de P. Ver Eecke, p. 538.

POUR LE CINQUIÈME PROBLÈME.

III.

Proposition 77. — Soient les deux demi-cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ sur la droite ΑΓ ; que la droite ΑΔ soit égale à la droite ΓΖ, et menons du point Γ la droite ΒΓ ; je dis que la droite ΒΕ est aussi égale à la droite ΗΓ.

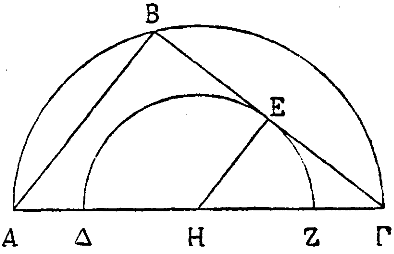
En effet, puisque la droite ΑΔ est égale à la droite ΓΖ, les demi-cercles sont décrits autour du même centre. Prenons le centre Θ des demi-cercles, et menons du point Θ la perpendiculaire ΘΚ sur la droite ΕΗ ; il s'ensuit que la droite ΕΚ est égale à la droite ΚΗ (1). Dès lors, menons la droite de jonction ΑΒ et, puisque les droites ΑΒ, ΘΚ sont parallèles, et que la droite ΑΘ est égale à la droite ΘΓ, la droite ΒΚ est donc aussi égale à la droite ΚΓ (2) ; droites chez lesquelles la droite ΕΚ est égale à la droite ΚΗ. En conséquence, la droite restante ΒΕ est égale à la droite restante ΗΓ ; ce qu'il fallait démontrer.



IV.

Proposition 78. — Soient de nouveau les demi-cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ ; menons du point Γ la tangente ΓΕ au demi-cercle ΔΕΖ, et prolongeons-la jusqu'au point Β ; je dis que, si la droite ΑΔ est égale à la droite ΖΓ, la droite ΒΕ est égale à la droite ΕΓ.

Il est manifeste que les demi-cercles sont décrits autour du même



1. Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.
2. Démonstration embarrassée, car la corde ΒΓ appartenant au demi-cercle ΑΒΓ doit déjà être considérée comme coupée en deux parties égales en Κ par la perpendiculaire ΘΚ.

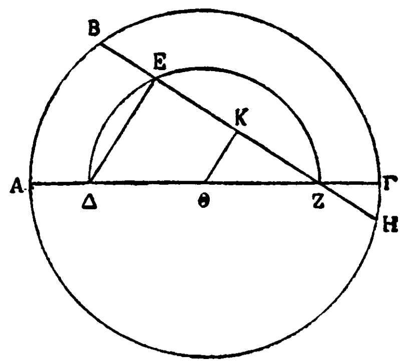
centre. Prenons de nouveau le centre H des demi-cercles, et menons les droites de jonction HE, AB ; il s'ensuit que l'angle au point E est droit. Mais, il est droit aussi au point B ; donc, les droites AB, EH sont parallèles. Et la droite AH est égale à la droite ΓH ; donc, la droite BE est égale aussi à la droite EΓ ; ce qu'il fallait démontrer.

POUR LE SEPTIÈME PROBLÈME.

V.

Proposition 79. — Soient de nouveau les demi-cercles ABΓ, ΔEZ ; que la droite AΔ soit égale à la droite ZΓ ; décrivons complètement le grand cercle, et menons par le point Z une droite BH ; je dis que la droite BE est égale à la droite ZH.

Que le point Θ soit le centre, et menons du point Θ la perpendiculaire ΘK sur la droite BH ; il s'ensuit que la droite BK est égale à la droite KH (1). Menons maintenant la droite de jonction EΔ. Dès lors, puisque les droites ΔE, ΘK sont parallèles, et que la droite ΔΘ est égale à la droite ΘZ, la droite EK est donc aussi égale à la droite KZ (2). Or, la droite entière BK est aussi égale à la droite entière KH ; donc, la droite restante BE est égale à la droite restante ZH ; ce qu'il fallait démontrer.



Il est manifeste que la droite BZ est aussi égale à la droite EH.

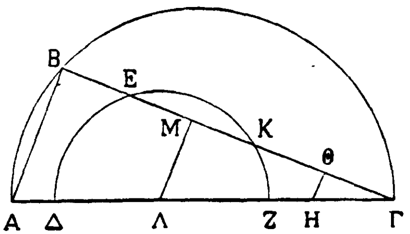
1. Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.
2. Démonstration embarrassée à cet endroit comme dans les deux propositions précédentes ; car la droite EZ est une corde du demi-cercle ΔEZ coupée en deux parties égales en K par la perpendiculaire ΘK.

POUR LE NEUVIÈME PROBLÈME.

VI.

PROPOSITION 80. — Soient les deux demi-cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ; posons la droite ΖΗ égale à la droite ΑΔ et, menant transversalement la droite ΒΓ, menons, du point Η sur celle-ci, la perpendiculaire ΗΘ; je dis que la droite ΒΕ est égale à la droite ΚΘ.

Prenons le centre Λ du demi-cercle ΔΕΖ, et menons du point Λ la droite ΛΜ perpendiculaire sur la droite ΚΕ; il s'ensuit que la droite ΕΜ est égale à la droite ΜΚ (1). Or, puisque la droite ΑΔ est égale à la droite ΖΗ et la droite ΔΛ égale à la droite ΛΖ, la droite entière ΑΛ est donc égale à la droite entière ΛΗ Et l'on a trois parallèles ΑΒ. ΜΛ, ΘΗ; donc, la droite ΒΜ est égale à la droite ΜΘ. Or, chez ces droites, la droite ΕΜ est égale à la droite ΜΚ; donc, la droite restante ΒΕ est égale à la droite restante ΚΘ.

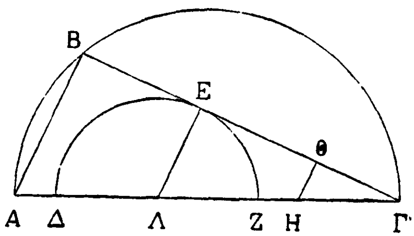


Il est manifeste que la droite ΒΚ est aussi égale à la droite ΕΘ.

VII.

PROPOSITION 81. — Supposant les mêmes choses, que la droite ΒΓ soit tangente au demi-cercle ΔΕΖ; je dis de nouveau que la droite ΒΕ est égale à la droite ΕΘ.

Prenons de nouveau le centre Λ du demi-cercle ΔΕΖ, et menons la droite de jonction ΛΕ; il s'ensuit que cette droite est perpendiculaire sur la droite ΒΓ. Et l'on a obtenu trois droites parallèles ΑΒ, ΕΛ, ΗΘ, et la



1. Même raisonnement que dans les deux lemmes qui précèdent.

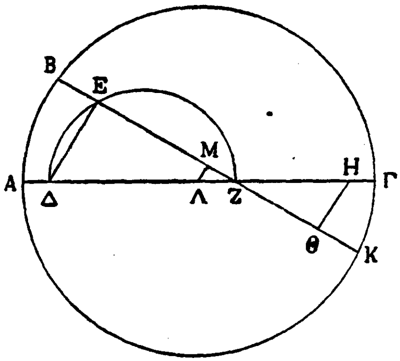
droite ΑΛ est égale à la droite ΛΗ ; par conséquent, la droite ΒΕ est aussi égale à la droite ΕΘ ; ce qu'il fallait démontrer.

POUR LE HUITIÈME [1] PROBLÈME.

VIII.

PROPOSITION 82. — Soient deux demi-cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ ; que la droite ΑΔ soit plus petite que la droite ΓΖ ; posons la droite ΓΗ égale à la droite ΑΔ ; décrivons le cercle ΑΒΚΓ en entier ; menons transversalement une droite quelconque ΒΚ, et menons-lui du point Η la perpendiculaire ΗΘ ; je dis que la droite ΒΕ est égale à la droite ΘΚ.

Prenons le centre Λ du cercle ΑΒΓ, et menons du point Λ la droite ΛΜ perpendiculaire sur la droite ΕΖ ; il s'ensuit que la droite ΒΜ est égale à la droite ΜΚ. Or, puisque la droite ΑΛ est égale à la droite ΛΓ et la droite ΑΔ égale à la droite ΗΓ, il s'ensuit que la droite restante ΔΛ est égale à la droite restante ΛΗ. Et on a les trois droites parallèles ΔΕ, ΛΜ, ΗΘ ; par conséquent, la droite ΕΜ est égale à la droite ΜΘ [2]. Or, la droite entière ΒΜ est aussi égale à la droite entière ΜΚ ; donc, la droite restante ΒΕ est égale à la droite restante ΘΚ.



Il est manifeste que la droite ΘΒ est aussi égale à la droite ΕΚ.

1. Vu les variantes dans les manuscrits, Hultsch doute de l'attribution de ce lemme au huitième problème du second livre des *Inclinaisons*, et il ajoute dans sa version latine : « vel fortasse decimum » (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 793, l. 27).

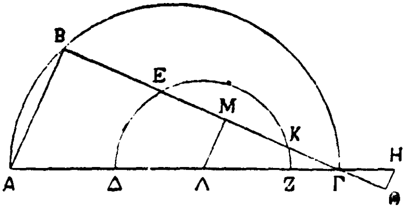
2. Le parallélisme des droites ΔΕ, ΛΜ, ΗΘ donne : $\frac{\mathrm{ZH}}{\mathrm{Z\Theta}}=\frac{\Lambda\mathrm{Z}}{\mathrm{MZ}}=\frac{\Delta\Lambda}{\mathrm{EM}}$, d'où : $\frac{\mathrm{ZH}+\Lambda\mathrm{Z}}{\mathrm{Z\Theta}+\mathrm{MZ}}=\frac{\Delta\Lambda}{\mathrm{EM}}$ ou : $\frac{\Lambda\mathrm{H}}{\mathrm{M\Theta}}=\frac{\Delta\Lambda}{\mathrm{EM}}$. Or, $\Delta\Lambda=\Lambda\mathrm{H}$; donc : $\mathrm{EM}=\mathrm{M\Theta}$.

POUR LE DIX-SEPTIÈME PROBLÈME.

IX.

PROPOSITION 83. — Les mêmes choses étant supposées, que la droite ΑΔ soit plus grande que la droite ΖΓ ; posons la droite ΖΗ égale à la droite ΑΔ, et, menant transversalement la droite ΒΓΘ, menons-lui la perpendiculaire ΗΘ ; je dis que la droite ΒΕ est égale à la droite ΚΘ.

Prenons le centre Λ du demi-cercle ΔΕΖ, et menons-en la droite ΛΜ perpendiculaire sur la droite ΕΚ ; il s'ensuit que la droite ΕΜ est égale à la droite ΜΚ.



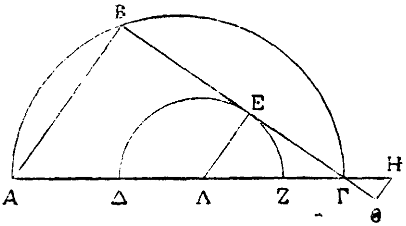
Or, puisque la droite ΑΔ est égale à la droite ΖΗ et la droite ΔΛ égale à la droite ΛΖ, la droite entière ΑΛ est donc égale à la droite entière ΛΗ. Et on a les trois droites ΒΑ, ΜΛ, ΗΘ parallèles ; par conséquent, la droite ΒΜ est aussi égale à la droite ΜΘ [1]. Or, chez celles-ci, la droite ΕΜ est égale à la droite ΜΚ ; donc, la droite restante ΒΕ est égale à la droite restante ΚΘ ; ce qu'il fallait démontrer.

Il est manifeste d'ailleurs, que la droite ΒΚ est aussi égale à la droite ΕΘ.

X.

PROPOSITION 84. — Les mêmes choses étant supposées, que la droite ΒΓ soit tangente au demi-cercle ΔΕΖ ; je dis que la droite ΒΕ est égale à la droite ΕΘ.

Prenons de nouveau le centre Λ du demi-cercle ΔΕΖ et menons la droite de jonction ΛΕ ; il s'ensuit qu'elle est perpendiculaire sur la



1. Le raisonnement est le même que dans le lemme précédent.

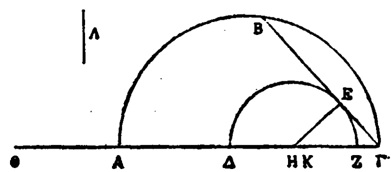
droite BΘ ; en sorte qu'on a trois droites parallèles AB, ΛE, HΘ. Et la droite AΛ est égale à la droite ΛH ; donc, la droite BE est aussi égale à la droite EΘ.

PROBLÈME UTILE POUR LA SYNTHÈSE DU DIX-SEPTIÈME PROBLÈME.

XI.

Proposition 85. — Le demi-cercle ABΓ étant donné de position et le point Δ [1] étant donné, décrire par le point Δ un demi-cercle ΔEZ tel que, si l'on mène la tangente BΓ, la droite AΔ devienne égale à la droite BE [2].

Que la chose soit réalisée ; il s'ensuit que la droite EB est à la droite EΓ comme la droite AΔ est à la droite EΓ. En conséquence, le carré de la droite AΔ est aussi au carré de la droite EΓ comme le carré de la droite EB est au carré de la droite EΓ. Mais, si l'on prend le centre H du demi-cercle ΔEZ, et si l'on mène la droite de jonction HE, le carré de la droite AH est au carré de la droite HΓ comme le carré de la droite BE est au carré de la droite EΓ. Mais, le carré de la droite EΓ est l'excédent des carrés des droites EH, HΓ ; par conséquent, le carré de la droite AH est au carré de la droite HΓ comme le carré de la droite AΔ est à l'excédent des carrés des droites ΔH, HΓ [3]. Posons la droite AΘ égale à la droite ΔA et coupons la droite ΔΓ en deux parties égales au point K. Dès lors, puisque le carré de la droite AΔ est à l'excédent des carrés des



1. C'est-à-dire donné sur le diamètre AΓ.
2. Le texte aurait dû dire plus correctement : la droite BE devienne égale à la droite AΔ.
3. Le problème étant supposé résolu, on a : BE = AΔ, d'où, $\frac{BE}{E\Gamma}=\frac{A\Delta}{E\Gamma}$, d'où : comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{E\Gamma}^2}=\frac{\overline{BE}^2}{\overline{E\Gamma}^2}$. Or, les triangles semblables ABΓ, HEΓ donnent : $\frac{AH}{H\Gamma}=\frac{BE}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{AH}^2}{\overline{H\Gamma}^2}=\frac{\overline{BE}^2}{\overline{E\Gamma}^2}$ ou : $\frac{\overline{AH}^2}{\overline{H\Gamma}^2}=\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{E\Gamma}^2}=\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{H\Gamma}^2-\overline{HE}^2}=\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{H\Gamma}^2-\overline{\Delta H}^2}$.

droites ΔH, HΓ comme le carré de la droite AH est au carré de la droite HΓ, il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites ΔH, HΘ est au carré restant de la droite HΔ, c'est-à-dire que la droite ΘH est à la droite HΔ, comme le carré de la droite AΔ est à l'excédent des carrés des droites ΔH, HΓ, c'est-à-dire à deux fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, HK (1). Posons donc deux fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, Λ équivalent au carré de la droite AΔ. Or, le carré de la droite AΔ est donné ; donc, deux fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, Λ est donné aussi ; de sorte que le rectangle simple est donné aussi. Et la droite ΓΔ est donnée ; donc, la droite Λ est donnée aussi. Or, puisque le carré de la droite AΔ, c'est-à-dire deux fois le rectangle compris sous les droites Λ, ΔΓ, est à deux fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, HK, c'est-à-dire que la droite Λ est à la droite HK, comme la droite HΘ est à la droite HΔ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΘH, HK équivaut au rectangle compris sous les droites Λ, HΔ (2). De plus, les trois droites ΘΔ, ΔK, Λ sont données ; donc, on est ramené au premier livre de *La Section déterminée* (3) : « Les trois

---

1. Explicitement : la dernière expression de la note précédente donne : $\frac{\overline{AH}^2}{\overline{H\Gamma}^2}=\frac{\overline{AH}^2-\overline{A\Delta}^2}{\overline{H\Gamma}^2-(\overline{H\Gamma}^2-\overline{\Delta H}^2)}=\frac{\overline{AH}^2-\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta H}^2}$. Or, considérant la droite ΘΔ coupée en deux parties égales en A, à laquelle on ajoute la droite ΔH, on a (EUCLIDE, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\overline{AH}^2=\Theta H\times\Delta H+\overline{A\Delta}^2$, d'où : $\overline{AH}^2-\overline{A\Delta}^2=\Theta H\times\Delta H$; donc : $\frac{\overline{AH}^2}{\overline{H\Gamma}^2}=\frac{\Theta H\times\Delta H}{\overline{\Delta H}^2}=\frac{\Theta H}{\Delta H}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente, on a, comme le texte : $\frac{\Theta H}{\Delta H}=\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{H\Gamma}^2-\overline{\Delta H}^2}$. Or, considérant la droite ΔZ coupée en deux parties égales en H, à laquelle on ajoute la droite ZΓ, on a (EUCLIDE, *ibidem*) : $\overline{H\Gamma}^2=\Delta\Gamma\times Z\Gamma+\overline{\Delta H}^2$, d'où : $\overline{H\Gamma}^2-\overline{\Delta H}^2=\Delta\Gamma\times\Gamma Z$; donc : $\frac{\Theta H}{\Delta H}=\frac{\overline{A\Delta}^2}{\Delta\Gamma\times\Gamma Z}$. Or, $Z\Gamma=\Delta\Gamma-\Delta Z=2\Delta K-2\Delta H=2(\Delta K-\Delta H)=2HK$; donc, comme le texte : $\frac{\Theta H}{\Delta H}=\frac{\overline{A\Delta}^2}{2\Delta\Gamma\times HK}$.

2. Si on pose : $\overline{A\Delta}^2=2\Delta\Gamma\times\Lambda$, la dernière relation de la note précédente devient : $\frac{\Theta H}{\Delta H}=\frac{2\Delta\Gamma\times\Lambda}{2\Delta\Gamma\times HK}=\frac{\Lambda}{HK}$, d'où, comme le texte : $\Theta H\times HK=\Lambda\times\Delta H$.

3. C'est-à-dire que le problème est ramené à la seconde injonction ou disposition imposée des points du troisième problème du livre premier de *La Section déterminée* d'Apollonius. Ce problème perdu a fait l'objet d'une reconstitution par Robert Simson, qui l'énonce : « Datis in recta linea tribus punctis B, A, C, invenire quartum D inter puncta B, A, quod faciet rectangulum a segmento DA et data recta E ad rectangulum BDC in ratione data » (Cfr. *Opera quaedam reliqua, etc.*, pp. 73-75).

droites ΘΔ, ΔΚ, Λ étant données, couper la droite ΔΚ en un point Η, de telle sorte que le rapport du rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΗΚ au rectangle compris sous les droites Λ, ΗΔ devienne celui de rectangle égal à rectangle égal » (1). Or, la question est manifeste (2) et sans détermination (3). En conséquence, le point Η est donné. Et il est le centre du demi-cercle ; donc, le demi-cercle est donné de position. Et la droite ΒΓ est menée tangentiellement du point donné Γ ; donc, la droite ΒΓ est donnée de position (4) (5) ; ce qu'il fallait démontrer.

XII.

La synthèse du problème se fera de la manière suivante : Soit ΑΒΓ le demi-cercle ; soit Δ le point donné (6), et qu'il faille satisfaire au problème. Posons que deux fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, Λ équivaut au carré de la droite ΑΔ ; posons la droite ΑΘ égale à la droite ΔΑ ; coupons la droite ΔΓ en deux parties égales au point Κ ; puis les trois droites ΘΔ, ΔΚ, Λ étant données, coupons la droite ΔΚ au point Η de manière à obtenir que le rapport du rectangle compris sous les droites Λ, ΗΔ au rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΗΚ soit celui d'égal à égal ; enfin, décrivons le demi-cercle ΔΕΖ autour du centre Η ; je dis que ce demi-cercle satisfait au problème.

1. C'est-à-dire qu'étant données les droites ΘΔ, ΔΚ, Λ, il faut déterminer le point Η tel que l'on ait : $\Theta H \times HK = \Lambda \times H\Delta$.

2. La solution de ce problème est manifeste pour Pappus en raison de ce que la solution en était donnée dans l'ouvrage d'Apollonius encore à la disposition des lecteurs. Commandin a donné une solution de ce problème basée sur les propositions d'Euclide (Cfr. *loc. cit.*, p. 320, ll. 50 et suiv.).

3. C'est-à-dire sans détermination de conditions de possibilité.

4. Commandin a fait remarquer (cfr. *loc. cit.*, p. 321, l. 30) que la tangente ΒΓ est, en outre, donnée de longueur, conformément à la proposition 91 des *Données* d'Euclide : « Si d'un point donné, on mène une droite qui touche un cercle donné de position, la droite menée est donnée de position et de grandeur ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 469.

5. Le texte présente ici la phrase, que Hultsch estime avoir été interpolée (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 798, l. 17) : τὸ δ' αὐτὸ ἁρμόσει τοῦ σημείου κάτω, et que la version de Commandin rend par la phrase (cfr. *loc. cit.*, p. 318, l. 41) : « Idem autem congruet, si punctum infra sumatur » ; c'est-à-dire : « la même chose se présente si le point est pris en dessous ». Or, comme le point Δ ne peut être pris sous la droite ΑΓ, le sens de cette interpolation échappe.

6. C'est-à-dire sur le diamètre ΑΓ.

En effet, menons la droite ΒΓ tangente au demi-cercle [1]; je dis que la droite ΑΔ est égale à la droite ΒΕ. Car, puisque le rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΗΚ équivaut à celui qui est compris sous les droites Λ, ΗΔ, la droite Λ est, en proportion, à la droite ΗΚ comme la droite ΘΗ est à la droite ΗΔ [2]. Mais, le rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΗΔ est au carré de la droite ΗΔ, c'est-à-dire que l'excédent des carrés des droites ΗΑ, ΑΔ est au carré de la droite ΗΔ comme la droite ΘΗ est à la droite ΗΔ; tandis que deux fois le rectangle compris sous les droites Λ, ΔΓ est à deux fois le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΗΚ, c'est-à-dire que le carré de la droite ΑΔ est à l'excédent des carrés des droites ΔΗ, ΗΓ, comme la droite Λ est à la droite ΗΚ [3]; donc, le carré de la droite ΑΔ est aussi à l'excédent des carrés des droites ΔΗ, ΗΓ comme l'excédent des carrés des droites ΗΑ, ΑΔ est au carré de la droite ΗΔ [4]. En conséquence, le carré de la droite ΑΔ est à l'excédent des carrés des droites ΔΗ, ΗΓ, c'est-à-dire à l'excédent des carrés des droites ΓΗ, ΗΕ, c'est-à-dire au carré de la droite ΕΓ, comme le carré de la droite ΑΗ est au carré de la droite ΗΓ, et le carré de la droite ΑΔ est donc au carré de la droite ΕΓ comme le carré de la droite ΑΗ est au carré de la droite ΗΓ. Or, le carré de la droite ΒΕ est au carré

1. C'est-à-dire tangente au demi-cercle ΔΕΖ au point Ε.

2. Le point Η étant pris tel que l'on ait : $\Lambda \times \mathrm{H\Delta} = \Theta\mathrm{H} \times \mathrm{HK}$, on a en proportion, comme dit le texte : $\frac{\Lambda}{\mathrm{HK}} = \frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{H\Delta}}$.

3. On a évidemment, d'une part : $\frac{\Theta\mathrm{H} \times \mathrm{H\Delta}}{\overline{\mathrm{H\Delta}}^2} = \frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{H\Delta}}$. Or, considérant la droite ΘΔ coupée en parties égales en Α, à laquelle on ajoute la droite ΔΗ, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, p. 43, n. 3) : $\Theta\mathrm{H} \times \mathrm{H\Delta} + \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2$, d'où : $\Theta\mathrm{H} \times \mathrm{H\Delta} = \overline{\mathrm{AH}}^2 - \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$; donc : $\frac{\overline{\mathrm{AH}}^2 - \overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{H\Delta}}^2} = \frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{H\Delta}}$ (I). D'autre part, on a aussi : $\frac{2\Delta\Gamma \times \Lambda}{2\Delta\Gamma \times \mathrm{HK}} = \frac{\Lambda}{\mathrm{HK}}$. Or, on a posé : $2\Delta\Gamma \times \Lambda = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$; donc : $\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{2\Delta\Gamma \times \mathrm{HK}} = \frac{\Lambda}{\mathrm{HK}}$. Or, $\mathrm{HK} = \Delta\mathrm{K} - \Delta\mathrm{H}$, d'où : $2\mathrm{HK} = 2\Delta\mathrm{K} - 2\Delta\mathrm{H} = \Delta\Gamma - \Delta\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\Gamma$; donc : $\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\Delta\Gamma \times \mathrm{Z}\Gamma} = \frac{\Lambda}{\mathrm{HK}}$. Or, considérant la droite ΔΖ coupée en parties égales en Η, à laquelle on ajoute la droite ΖΓ, on a (Euclide, *ibidem*) : $\Delta\Gamma \times \mathrm{Z}\Gamma + \overline{\mathrm{H\Delta}}^2 = \overline{\mathrm{H}\Gamma}^2$, d'où : $\Delta\Gamma \times \mathrm{Z}\Gamma = \overline{\mathrm{H}\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{H\Delta}}^2$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{H}\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{H\Delta}}^2} = \frac{\Lambda}{\mathrm{HK}}$ (II).

4. La relation de la note 2 ci-dessus devient, en présence des relations (I) et (II) de la note précédente : $\frac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{H}\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{H\Delta}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{AH}}^2 - \overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{H\Delta}}^2}$.

de la droite ΕΓ comme le carré de la droite ΑΗ est au carré de la droite ΗΓ ; par conséquent, le carré de la droite ΑΔ est au carré de la droite ΕΓ comme le carré de la droite ΒΕ est au carré de la droite ΕΓ ; donc, le carré de la droite ΑΔ est égal au carré de la droite ΒΕ ; de sorte que la droite ΑΔ est égale à la droite ΒΕ (1). Et il est clair que la droite ΒΕ est plus grande que la droite ΕΓ ; car, nous avons le carré de la droite ΑΔ au carré de la droite ΕΓ comme la droite ΘΗ est à la droite ΗΔ. Or, la droite ΘΗ est plus grande que la droite ΗΔ ; donc, le carré de la droite ΑΔ est plus grand que le carré de la droite ΕΓ ; de sorte que la droite ΑΔ est plus grande que la droite ΕΓ (2) ; donc, elle est, à fortiori, plus grande que la droite ΖΓ (3). En conséquence, le demi-cercle ΔΕΖ satisfait au problème.

Je dis, en outre, que ce demi-cercle est le seul (4).

En effet, décrivons un autre demi-cercle ΔΜΝ et menons la tangente ΓΜΞ. Dès lors, si le demi-cercle ΔΜΝ satisfait aussi au problème, la droite ΑΔ sera égale à la droite ΜΞ. Prenons le centre Ο du demi-cercle ΔΜΝ et menons la droite de jonction ΟΜ. Conformément à l'analyse, le rectangle compris sous les droites ΘΟ, ΟΚ sera équivalent au rectangle compris sous les droites Λ, ΔΟ ; ce qui est absurde (car il a été démontré dans *La Section déterminée* qu'il est plus grand) (5) ; par conséquent, le demi-

1. La relation de la note précédente donne : $\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{H\Delta}}^2}=\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2+(\overline{\mathrm{AH}}^2-\overline{\mathrm{A\Delta}}^2)}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{H\Delta}}^2+\overline{\mathrm{H\Delta}}^2}$ ou : $\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{H\Delta}}^2}=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}^2}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2}$. Or, $\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{H\Delta}}^2=\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{HE}}^2=\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2$; donc, comme le texte : $\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}^2}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2}$. Or, les triangles semblables ΑΒΓ, ΗΕΓ donnent : $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{H\Gamma}}=\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E\Gamma}}$; donc : $\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\dfrac{\overline{\mathrm{BE}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}$, d'où : $\overline{\mathrm{BE}}^2=\overline{\mathrm{A\Delta}}^2$ et $\mathrm{BE}=\mathrm{A\Delta}$.

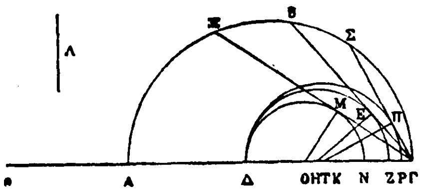
2. On a : $\dfrac{\Lambda}{\mathrm{HK}}=\dfrac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{H\Delta}}$, et on a (note 3, page 620) : $\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{H\Delta}}^2}=\dfrac{\Lambda}{\mathrm{HK}}$. Or, $\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{H\Delta}}^2}=\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}$; donc : $\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\dfrac{\Lambda}{\mathrm{HK}}$, d'où, comme le texte : $\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}^2}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\dfrac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{H\Delta}}$. Or, $\Theta\mathrm{H} > \mathrm{H\Delta}$; donc : $\mathrm{A\Delta} > \mathrm{E\Gamma}$, ou : $\mathrm{BE} > \mathrm{E\Gamma}$.

3. Ce que Commandin démontre facilement en abaissant du point Ε une droite auxiliaire perpendiculaire sur la droite ΔΓ (Cfr. *loc. cit.*, p. 327, l. 48).

4. C'est-à-dire qu'il est le seul demi-cercle qui résolve le problème.

5. Démonstration donnée donc par Apollonius, probablement dans cette même proposition dont Pappus a rappelé plus haut l'un des cas (disposition des points), et dont Robert Simson a donné une restauration (voir l'énoncé dans la note 3, page 618). Commandin a néanmoins donné une démonstration que

cercle ΔMN ne satisfait pas au problème. On démontrera pareillement que nul autre que le demi-cercle ΔEZ n'y satisfait ; donc, le demi-cercle ΔEZ satisfait seul au problème.



Mais, pour reconnaître, en outre, lequel d'entre les demi-cercles découpe plus grandement (1), nous ferons la démonstration suivante :

Puisqu'il a été démontré dans *La Section déterminée* que le rectangle compris sous les droites Λ, ΔO est plus petit que le rectangle compris sous les droites ΘO, OK, la droite Λ a, en proportion, avec la droite OK un rapport plus petit que celui de la droite ΘO avec la droite OΔ (2). Mais, le carré de la droite AΔ est à l'excédent des carrés des droites ΔO, OΓ comme la droite Λ est à la droite KO (car cela a été démontré) (3), et l'excédent des carrés des droites OA, AΔ est au carré de la droite OΔ comme la droite ΘO est à la droite OΔ (4) ; par conséquent, le carré de la droite AΔ a avec l'excédent des carrés des droites ΔO, OΓ un rapport plus petit que celui de l'excédent

nous résumons comme suit (cfr. *loc. cit.*, p. 321, l. 57) : La proposition 14 du livre VII (voir p. 522) a démontré que l'on a : $\Theta O \times OK > \Theta H \times HK$. Or, le point H est tel que l'on a : $\Lambda \times H\Delta = \Theta H \times HK$; donc : $\Theta O \times OK > \Lambda \times H\Delta$. Or, $H\Delta > \Delta O$, d'où : $\Lambda \times H\Delta > \Lambda \times \Delta O$; donc, à fortiori : $\Theta O \times OK > \Lambda \times \Delta O$.

1. μεῖζον ἀποτέμνει, découpe (sur la tangente un segment) plus grand (que la droite AΔ).

2. La dernière inégalité de la note avant-précédente donne : $\frac{\Lambda}{OK} < \frac{\Theta O}{\Delta O}$.

3. On peut écrire : $\frac{2\Delta\Gamma \times \Lambda}{2\Delta\Gamma \times OK} = \frac{\Lambda}{OK}$. Or, on a posé : $2\Delta\Gamma \times \Lambda = \overline{A\Delta}^2$, et on a : $2\Delta\Gamma \times OK = \Delta\Gamma \times 2OK = \Delta\Gamma\,(2\Delta K - 2\Delta O) = \Delta\Gamma\,(\Delta\Gamma - \Delta N) = \Delta\Gamma \times N\Gamma$; donc : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\Delta\Gamma \times N\Gamma} = \frac{\Lambda}{OK}$. De plus, considérant la droite ΔN coupée en parties égales en O, à laquelle on ajoute la droite NΓ, on a (EUCLIDE, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\Delta\Gamma \times N\Gamma + \overline{\Delta O}^2 = \overline{O\Gamma}^2$, d'où : $\Delta\Gamma \times N\Gamma = \overline{O\Gamma}^2 - \overline{\Delta O}^2$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{O\Gamma}^2 - \overline{\Delta O}^2} = \frac{\Lambda}{OK}$ (I).

4. On peut écrire : $\frac{\Delta O \times \Theta O}{\overline{\Delta O}^2} = \frac{\Theta O}{\Delta O}$. Or, considérant la droite ΘΔ coupée en parties égales en A, à laquelle on ajoute la droite ΔO, on a (EUCLIDE, *ibidem*) : $\Delta O \times \Theta O + \overline{A\Delta}^2 = \overline{AO}^2$, d'où : $\Delta O \times \Theta O = \overline{AO}^2 - \overline{A\Delta}^2$, donc, comme le texte : $\frac{\overline{AO}^2 - \overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta O}^2} = \frac{\Theta O}{\Delta O}$ (II).

des carrés des droites ΟΑ, ΑΔ avec le carré de la droite ΟΔ, et ainsi de tous à tous (1), [c'est-à-dire que le carré de la droite ΑΟ a avec le carré de la droite ΟΓ un rapport plus grand] (2) que celui du carré de la droite ΑΔ avec l'excédent des carrés des droites ΓΟ, ΟΔ, c'est-à-dire avec le carré de la droite ΓΜ. En conséquence, le carré de la droite ΑΔ a avec le carré de la droite ΓΜ un rapport plus petit que celui du carré de la droite ΑΟ avec le carré de la droite ΟΓ, c'est-à-dire que celui du carré de la droite ΞΜ avec le carré de la droite ΜΓ ; donc, la droite ΞΜ est plus grande que la droite ΑΔ (3).

On démontre pareillement que toutes les droites (4) qui aboutissent entre les points Α, Β sont plus grandes que la droite ΑΔ, et que celles qui aboutissent entre les points Β, Γ sont plus petites. Car, si nous décrivons de nouveau le demi-cercle ΔΠΡ ; si nous menons la tangente ΣΠΓ, et si nous construisons les mêmes choses que précédemment, le centre du demi-cercle ΔΠΡ sera le point Τ, situé de l'autre côté du point Η (5). Or, dans *La Section déterminée* (6), le rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΗΚ sera, plus grand que celui qui est compris sous les droites ΘΤ, ΤΚ et pour les mêmes raisons, la droite ΑΔ sera de nouveau plus grande que la droite ΣΠ ; de sorte que les demi-cercles, ayant les tangentes plus rapprochées du point Α, les font plus grandes que la droite ΑΔ, et ceux qui les ont plus éloignées les font plus petites.

---

1. καὶ πάντα πρὸς πάντα, expression empruntée à Euclide (liv. V, prop. 12, énoncée p. 67, n. 1) signifiant que la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un des antécédents est à un des conséquents.

2. Reconstitution de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 804, l. 1).

3. La relation $\frac{\Lambda}{\mathrm{OK}} < \frac{\Theta\mathrm{O}}{\Delta\mathrm{O}}$ démontrée plus haut devient, en présence des dernières relations (I) et (II) des notes précédentes : $\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}^2}{\overline{\mathrm{O}\Gamma}^2 - \overline{\Delta\mathrm{O}}^2} < \frac{\overline{\mathrm{AO}}^2 - \overline{\mathrm{A}\Delta}^2}{\overline{\Delta\mathrm{O}}^2}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}^2}{\overline{\mathrm{O}\Gamma}^2 - \overline{\Delta\mathrm{O}}^2} < \frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + (\overline{\mathrm{AO}}^2 - \overline{\mathrm{A}\Delta}^2)}{(\overline{\mathrm{O}\Gamma}^2 - \overline{\Delta\mathrm{O}}^2) + \overline{\Delta\mathrm{O}}^2}$ ou : $\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}^2}{\overline{\mathrm{O}\Gamma}^2 - \overline{\Delta\mathrm{O}}^2} < \frac{\overline{\mathrm{AO}}^2}{\overline{\mathrm{O}\Gamma}^2}$. Or, $\overline{\mathrm{O}\Gamma}^2 - \overline{\Delta\mathrm{O}}^2 = \overline{\mathrm{O}\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{OM}}^2 = \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$; donc : $\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}^2}{\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2} < \frac{\overline{\mathrm{AO}}^2}{\overline{\mathrm{O}\Gamma}^2}$. Or, la similitude des triangles ΑΞΓ, ΟΜΓ donne : $\frac{\overline{\Xi\mathrm{M}}^2}{\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2} = \frac{\overline{\mathrm{AO}}^2}{\overline{\mathrm{O}\Gamma}^2}$; donc : $\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}^2}{\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2} < \frac{\overline{\Xi\mathrm{M}}^2}{\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2}$, d'où : $\Xi\mathrm{M} > \mathrm{A}\Delta$.

4. C'est-à-dire les segments des tangentes.

5. C'est-à-dire au delà du centre Η du demi-cercle ΔΕΖ.

6. C'est-à-dire : ainsi que cela a été démontré dans cette même proposition de *La Section déterminée* d'Apollonius, dont il a été question plus haut (voir page 618, note 3).

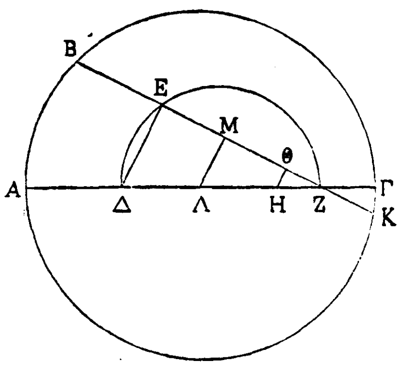
Il est donc possible de décrire par le point Δ des cercles tels que la tangente de chacun d'eux, prolongée jusqu'à l'arc du grand demi-cercle, détermine, entre le point de contact et l'arc du grand demi-cercle, une droite égale à la droite ΑΔ ou, au contraire, plus grande ou plus petite que cette droite.

POUR LE DIX-NEUVIÈME PROBLÈME.

XIII.

Proposition 86. — Soient de nouveau des demi-cercles ; que la droite ΑΔ soit plus grande que la droite ΓΖ ; posons la droite ΓΗ égale à la droite ΑΔ et, la droite ΒΕΖ étant menée transversalement, menons-lui du point Η la perpendiculaire ΗΘ. Complétons, en outre, le cercle ΑΒΓ et prolongeons la droite ΒΖ jusqu'au point Κ ; je dis que la droite ΒΘ est égale à la droite ΕΚ.

Prenons le centre Λ du cercle ΑΒΓ, et menons du point Λ la perpendiculaire ΛΜ sur la droite ΒΚ ; donc, la droite ΜΒ est égale à la droite ΜΚ [1]. Dès lors, puisque la droite ΑΛ est égale à la droite ΛΓ et la droite ΑΔ égale à la droite ΗΓ, il s'ensuit que la droite restante ΔΛ est égale à la droite restante ΛΗ. Et on a trois parallèles ΔΕ, ΛΜ, ΗΘ ; par conséquent, la droite ΕΜ est aussi égale à la droite ΜΘ. Or, la droite ΒΜ est aussi égale à la droite entière ΜΚ ; donc, la droite restante ΒΕ est égale à la droite restante ΘΚ. Il est donc clair que la droite ΒΘ est aussi égale à la droite ΕΚ ; ce qu'il fallait démontrer.



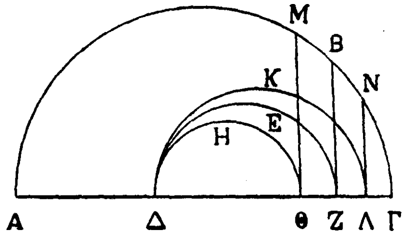
1. Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.

PROBLÈME POUR LE MÊME PROBLÈME [1].

XIV.

Proposition 87. — Ayant le demi-cercle ΑΒΓ et le point Δ, décrire par le point Δ, sur la droite ΑΓ, un demi-cercle tel que, si l'on mène la tangente ΖΒ, on ait la droite ΑΔ égale à la droite ΖΒ.

Que ce soit chose faite. Dès lors, puisque la droite ΑΔ est égale à la droite ΖΒ, le carré de la droite ΑΔ équivaut aussi au carré de la droite ΖΒ, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ. Donc, si nous appliquons, sur la droite ΑΓ, un rectangle qui, défaillant d'un carré, soit équivalent au carré de la droite ΑΔ, tel que le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ [2] ; si nous menons la perpendiculaire ΖΒ, et si nous décrivons le demi-cercle ΔΕΖ sur la droite ΔΖ, la droite ΒΖ sera tangente à ce demi-cercle et égale à la droite ΑΔ. Cela ne s'obtient toutefois que si la droite ΑΔ est plus petite que la moitié de la droite ΑΓ [3].



Cela étant trouvé, si nous décrivons par le point Δ d'autres demi-cercles, tels que ΔΗΘ, ΔΚΛ [4], et si nous menons les tangentes ΘΜ, ΛΝ, la droite ΘΜ sera plus grande que la droite ΑΔ et la droite ΛΝ plus petite. [En effet, puisque la droite ΘΔ est plus petite que la droite ΔΓ, la droite ΘΜ sera située entre les points Δ, Γ. Elle ne tombera donc pas au point Ζ, puisqu'il se

1. C'est-à-dire problème à utiliser pour la solution du problème 17 du second livre de *La Section déterminée* d'Apollonius.

2. Ce problème constitue la proposition 28 du livre VI d'Euclide, énoncée p. 600 n. 4. Si l'on pose : $Z\Gamma = x$, le problème revient donc à résoudre l'équation $(A\Gamma - x)\, x = \overline{A\Delta}^2$.

3. Condition de possibilité indiquée du reste dans la proposition d'Euclide mentionnée dans la note précédente.

4. Demi-cercles dont les diamètres sont respectivement plus petit et plus grand que le diamètre du demi-cercle ΔΕΖ.

ferait que la droite ΑΔ soit égale à la droite ΖΓ (1) ; ce qui est absurde. Elle n'est, à fortiori, pas située entre les points Γ, Ζ, puisqu'il se ferait de nouveau que la droite ΑΔ soit plus petite que la droite ΖΓ (2) ; ce qui est absurde (car elle est plus grande, comme on l'a supposé au début du problème). Donc, le point Θ sera situé entre les points Ζ, Δ. Or, le rectangle compris sous les droites ΑΘ, ΘΓ, c'est-à-dire le carré de la droite ΜΘ, est plus grand que le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ, c'est-à-dire le carré de la droite ΖΒ (3) ; donc, il est plus grand que le carré de la droite ΑΔ (4) ; en sorte que la droite ΘΜ est plus grande que la droite ΑΔ. Or, la droite ΛΝ est située entre les points Ζ, Γ ; donc, puisque le rectangle compris sous les droites ΑΛ, ΛΓ est plus petit que le carré de la droite ΑΔ (puisqu'il est aussi plus petit que le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ), le carré de la droite ΛΝ est aussi plus petit que le carré de la droite ΑΔ ; en sorte que la droite ΛΝ est plus petite que la droite ΑΔ (5). Il en est de même pour toutes les droites qui, à la suite de cette dernière, sont menées du côté du point Γ (6)] (7) et, d'une manière générale, suivant que les demi-cercles s'approchent du point Γ, la tangente est plus petite que la droite ΑΔ et, suivant qu'ils s'en éloignent, elles seront continuellement plus grandes. En conséquence, le point Δ restant fixe, il est possible de décrire, sur la droite ΑΓ, des demi-cercles tels que leurs tangentes soient égales à la droite ΑΔ, ou plus grandes ou plus petites que cette droite.

---

1. Erreur du commentateur, auteur de tout ce passage, et pour laquelle Hultsch a proposé la correction $\Theta\Delta = \Delta Z$ (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 809, l. 13).

2. Même erreur pour laquelle Hultsch donne la correction : $\Delta Z < \Delta\Theta$ (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 809, l. 17).

3. En vertu de la proposition 14 du livre VII, voir p. 522.

4. Car on a : $\overline{ZB}^2 = \overline{A\Delta}^2$.

5. Puisque $A\Lambda \times \Lambda\Gamma < AZ \times Z\Gamma$; que $A\Lambda \times \Lambda\Gamma = \overline{\Lambda N}^2$ et que $AZ \times Z\Gamma = \overline{ZB}^2 = \overline{A\Delta}^2$, on a : $\Lambda N < A\Delta$.

6. C'est-à-dire que toutes les autres tangentes situées entre les points Λ, Γ seront aussi plus petites que la droite ΑΔ.

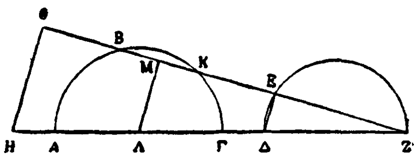
7. Le long passage que nous mettons entre crochets, altéré du reste en plusieurs endroits mentionnés dans les notes précédentes, doit être considéré comme une interpolation de commentateur (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 808, ll. 7-20).

POUR LE VINGT-ET-UNIÈME PROBLÈME.

XV.

Proposition 88. — Soient les demi-cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ ; posons la droite ΑΗ égale à la droite ΓΔ et, menant transversalement la droite ΖΒ, menons-lui la perpendiculaire ΗΘ ; je dis que la droite ΘΒ est égale à la droite ΚΕ.

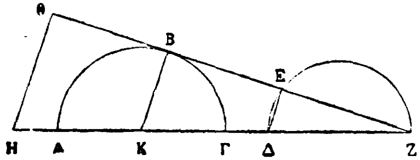
Prenons le centre Λ du demi-cercle ΑΒΓ, et menons du point Λ la droite ΛΜ perpendiculaire sur la droite ΒΖ ; il s'ensuit que la droite ΒΜ est égale à la droite ΜΚ [1]. Or, puisque la droite ΗΑ est égale à la droite ΓΔ et la droite ΑΛ égale à la droite ΛΓ, la droite entière ΗΛ est donc égale à la droite entière ΛΔ. De plus, on a trois droites ΗΘ, ΛΜ, ΔΕ qui sont parallèles ; par conséquent, la droite ΘΜ est aussi égale à la droite ΜΕ ; droites chez lesquelles la droite ΒΜ est égale à la droite ΜΚ ; donc, la droite restante ΘΒ est égale à la droite restante ΚΕ ; ce qu'il fallait démontrer. Il est clair aussi que les droites ΘΚ, ΒΕ sont égales.



XVI.

Proposition 89. — Les choses étant les mêmes, que la droite ΒΖ soit tangente au point Β ; je dis que la droite ΘΒ est de nouveau égale à la droite ΒΕ.

En effet, prenons de nouveau le centre Κ du demi-cercle ΑΒΓ et menons du point Κ la droite de jonction ΚΒ, qui est donc perpendiculaire sur la droite ΒΖ. Dès lors, puisque, en raison des trois parallèles ΗΘ, ΒΚ, ΔΕ, la droite ΗΚ est égale à la droite ΚΔ, il s'ensuit que la droite ΘΒ est aussi égale à la droite ΒΕ ; ce qu'il fallait démontrer.



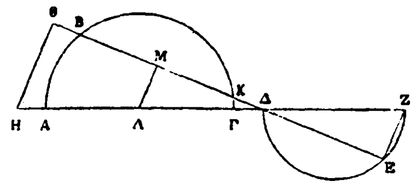
1. Euclide, liv. III, proposition 3, énoncée p. 140, n. 3.

POUR LE VINGT-TROISIÈME PROBLÈME.

XVII.

Proposition 90. — Soient les demi-cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ ; posons la droite ΑΗ égale à la droite ΓΔ, et, menant transversalement la droite ΕΘ, menons-lui la perpendiculaire ΗΘ ; je dis que la droite ΘΒ est égale à la droite ΚΔ.

Prenons le centre Λ du demi-cercle ΑΒΓ, et menons la perpendiculaire ΛΜ ; la droite ΒΜ est donc égale à la droite ΜΚ (1). Puisque la droite ΗΑ est égale à la droite ΓΔ et la droite ΑΛ égale à la droite ΛΓ, la droite entière ΗΛ est donc égale à la droite entière ΛΔ. Et l'on a trois parallèles ΗΘ, ΛΜ, ΕΖ ; par conséquent, la droite ΘΜ est est aussi égale à la droite ΜΔ ; droites chez lesquelles la droite ΒΜ est égale à la droite ΜΚ ; donc, la droite restante ΘΒ est égale à la droite restante ΚΔ. [Si la droite est tangente, la chose est manifeste ; car on a mené la droite de jonction du centre au point de contact] (2) ; ce qu'il fallait démontrer.



POUR LE VINGT-QUATRIÈME PROBLÈME.

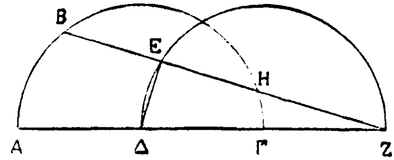
XVIII.

Proposition 91. — Soient deux demi-cercles tels que ΑΒΓ, ΔΕΖ ; que la droite ΑΔ soit égale à la droite ΔΓ et menons transversalement la droite ΖΒ ; je dis que la droite ΒΕ est égale à la droite ΕΗ.

La chose est manifeste ; car, si l'on mène la droite de jonction ΔΕ, l'angle compris sous les droites ΔΕ, ΕΖ est droit, parce

1. Euclide, *ibidem*.
2. La phrase placée entre crochets est interpolée (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 812, l. 7).

qu'il est dans un demi-cercle. Et la droite ΔE est menée du centre dans le demi-cercle ΑΒΓ; donc, la droite BE est égale à la droite EH (1).

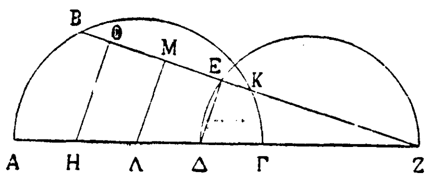


POUR LE VINGT-CINQUIÈME PROBLÈME.

XIX.

Proposition 92. — Les choses étant les mêmes, que la droite ΑΔ soit plus grande que la droite ΔΓ; posons la droite AH égale à la droite ΔΓ et menons la perpendiculaire HΘ sur la droite BZ; je dis que la droite BΘ est égale à la droite EK.

Puisque la droite ΑΔ est plus grande que la droite ΔΓ, le centre du cercle ΑΒΓ est donc situé entre les points A, Δ. Que ce soit le point Λ et menons de nouveau la perpendiculaire ΛΜ; il s'ensuit que la droite BM est égale à la droite MK. Or, puisque la droite AH est égale à la droite ΔΓ et la droite ΑΛ égale à la droite ΛΓ, la droite restante HΛ est donc égale à la droite restante ΛΔ. Et l'on a trois parallèles HΘ, ΛΜ, ΔΕ; donc, la droite ΘΜ est aussi égale à la droite ME. Or, la droite entière BM est aussi égale à la droite entière MK; donc, la droite restante BΘ est égale à la droite restante EK; ce qu'il fallait démontrer.



POUR LE VINGT-SIXIÈME PROBLÈME.

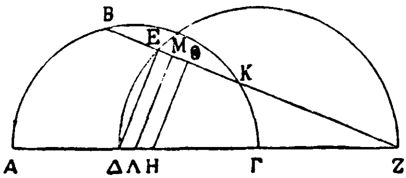
XX.

Proposition 93. — Que la droite ΑΔ soit plus petite que la droite ΔΓ; posons la droite ΓΗ égale à la droite ΑΔ et menons

1. La perpendiculaire ΔΕ partant du centre du cercle ΑΒΓ, on a (Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3) : BE = EH.

la perpendiculaire HΘ ; je dis que la droite BE est égale à la droite KΘ.

En effet, puisque la droite ΑΔ est plus petite que la droite ΔΓ, le centre du demi-cercle ΑΒΓ est situé entre les points Δ, H. Que ce soit le point Λ et menons du point Λ la perpendiculaire ΛM sur la droite ZB. En conséquence, la droite BM est égale à la droite MK. Or, puisque la droite ΑΔ est égale à la droite ΓH [et la droite ΑΛ égale à la droite ΛΓ, il s'ensuit que la droite restante ΔΛ est égale à la droite restante ΛH] (1). Et l'on a trois parallèles ΔE, ΛM, HΘ ; donc, la droite EM est aussi égale à la droite MΘ. Or, la droite entière BM est aussi égale à la droite entière MK ; donc, la droite restante BE est égale à la droite restante KΘ ; ce qu'il fallait démontrer.



POUR LE VINGT-NEUVIÈME PROBLÈME (2).

XXI.

Ayant deux demi-cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ et la droite ΑΔ étant plus grande que la droite ΔΓ, si l'on pose la droite AH égale à la droite ΔΓ et si, menant transversalement la droite ZB, on lui mène la perpendiculaire HΘ, je dis que la droite ΘB est égale à la droite KE.

Prenons le centre Λ du demi-cercle ΑΒΓ et menons du point Λ la perpendiculaire ΛM sur la droite BZ ; la droite BM est donc égale à la droite MK. Or, puisque la droite ΑΛ est égale à la droite ΛΓ et la droite AH égale à la droite ΔΓ, il s'ensuit que la droite restante HΛ est égale à la droite restante ΛΔ. Et l'on a trois parallèles HΘ, ΛM, ΔE ; donc, la droite ΘM est égale à la droite ME ; droites chez lesquelles la droite BM est égale à la droite MK ; par conséquent, la droite restante ΘB est égale à la droite restante KE ; ce qu'il fallait démontrer.

Il est manifeste que la droite ΘK est aussi égale à la droite BE.

1. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 327, *commentarius*, l. 4).
2. Voir la proposition identique 92 et la figure qui l'accompagne.

POUR LE TRENTE ET UNIÈME PROBLÈME (1).

XXII.

Soient les demi-cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ ; que la droite ΑΔ soit de nouveau plus petite que la droite ΔΓ ; menons transversalement la droite ΖΕΒ ; posons la droite ΓΗ égale à la droite ΑΔ, et menons la droite ΗΘ perpendiculaire à la droite ΖΒ ; [je dis que la droite ΕΒ est égale à la droite ΚΘ] (2).

En effet, il est clair que [la droite ΗΘ] (3) ne tombe ni au point Κ ni entre les points Ζ, Κ. Si nous prenons le centre Λ (4), et si nous menons du point Λ la perpendiculaire ΛΜ sur la droite ΒΖ, la droite ΒΜ sera égale à la droite ΜΚ. Mais, parce qu'on a les trois parallèles ΔΕ, ΛΜ, ΗΘ, la droite ΕΜ serait égale à la droite ΜΚ (5) (car la droite ΔΛ est égale à la droite ΔΗ) ; on aurait donc aussi la droite ΒΜ égale à la droite ΜΕ, c'est-à-dire une plus grande égale à une plus petite ; ce qui est impossible. En conséquence, la droite ΗΘ ne tombe pas au point Κ. Je dis que, à fortiori, cette droite ne tombe pas entre les points Ζ, Κ ; donc, elle tombe en dehors d'eux. Or, puisque la droite ΑΛ est égale à la droite ΛΓ et la droite ΑΔ égale à la droite ΗΓ, il s'ensuit que la droite restante ΔΛ est égale à la droite restante ΛΗ. Et l'on a les trois parallèles ΔΕ, ΛΜ, ΗΘ ; par conséquent, la droite ΕΜ est égale à la droite ΜΘ ; droites chez lesquelles la droite ΒΜ est égale à la droite ΜΚ ; donc, la droite restante ΕΒ est égale à la droite restante ΚΘ ; ce qu'il fallait démontrer. Et il est clair que la droite ΕΚ est aussi égale à la droite ΒΘ.

---

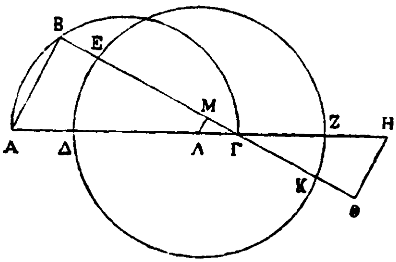
1. Voir la proposition identique 93 et la figure qui l'accompagne.
2. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 816, l. 15).
3. Restauration de Horsley dans son essai de reconstitution du traité d'Apollonius sur *Les Inclinaisons* (*Apollonii Pergaei Inclinationum libri duo. Restituebat Sam. Horsley*. Oxonii, 1770, in-8°).
4. Sous-entendu : τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου, du demi-cercle ΑΒΓ.
5. C'est-à-dire dans la première hypothèse d'avoir la droite ΗΘ tombant au point Κ.

POUR LE TRENTE-QUATRIÈME PROBLÈME.

XXIII.

PROPOSITION 94. — Soient les demi-cercles ABΓ, ΔEZ ; que la droite ΔΓ soit plus grande que la droite ΓZ ; posons la droite ZH égale à la droite AΔ et complétons le cercle [ΔEZK] [1]. Menons transversalement la droite BΓΘ et menons du point H la perpendiculaire HΘ sur la droite BΘ. [Il est clair qu'elle tombe hors du cercle, car elle est parallèle à la droite AB. Or, la droite AB tombe en dehors ; donc, la droite HΘ tombe aussi en dehors] [2]. Je dis que la droite BE est égale à la droite ΘK.

Puisque la droite ΔΓ est plus grande que la droite ΓZ, le centre du demi-cercle ΔEZ est situé entre les points Δ, Γ. Que ce centre soit Λ, et soit la perpendiculaire ΛM. Dès lors, puisque la droite AΔ est égale à la droite ZH et la droite ΔΛ égale à la droite ΛZ, la droite entière AΛ est donc égale à la droite entière ΛH. Et il y a trois parallèles AB, ΛM, HΘ ; donc, la droite BM est aussi égale à la droite MΘ ; droites chez lesquelles la droite EM est égale à la droite MK ; donc, la droite restante BE est égale à la droite restante KΘ ; ce qu'il fallait démontrer. Il est clair que la droite BK est aussi égale à la droite EΘ.



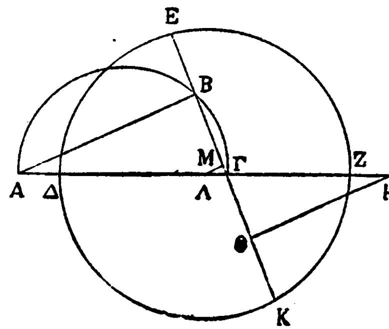
XXIV.

PROPOSITION 95. — Soient de nouveau les demi-cercles ABΓ, ΔEZ ; que la droite ΔΓ soit plus grande que la droite ΓZ ; posons la droite ZH égale à la droite AΔ ; complétons le cercle ΔEZK ;

1. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 327, *commentarius*, l. 30).
2. La phrase que nous mettons entre crochets ne se justifiant pas dans un simple énoncé de proposition, doit avoir été interpolée (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 818, l. 14).

menons transversalement la droite EBK et menons-lui du point H la perpendiculaire HΘ. [Il est clair qu'elle tombe à l'intérieur du cercle, puisque la droite AB, qui lui est parallèle, tombe aussi à l'intérieur] (1). Il faut démontrer que la droite EB est égale à la droite ΘK.

Que le point Λ soit le centre et que la droite ΛM soit de nouveau la perpendiculaire ; la droite EM est donc égale à la droite MK. Or, puisque, dans les trois parallèles AB, ΛM, HΘ, la droite AΛ est égale à la droite ΛH, il s'ensuit que la droite BM est aussi égale à la droite MΘ. Or, la droite entière EM est égale à la droite entière MK ; donc, la droite restante EB est égale à la droite restante KΘ ; ce qu'il fallait démontrer.



Le premier livre des *Inclinaisons* contient neuf problèmes, trois déterminations, et elles sont toutes trois minima : celle qui se rapporte au cinquième problème, celle qui se rapporte au septième et celle qui se rapporte au neuvième. Le second livre *Des Inclinaisons* contient quarante-cinq problèmes et trois déterminations : celle qui se rapporte au problème dix-sept, celle qui se rapporte au problème dix-neuf et celle qui se rapporte au problème vingt-trois. Et elles sont toutes trois minima (2).

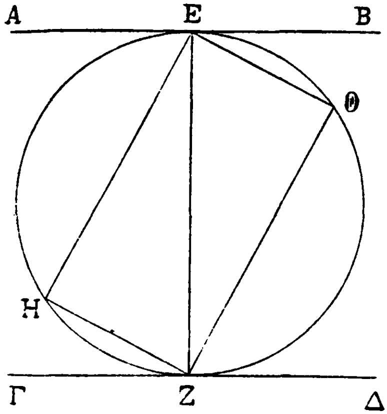
LE PREMIER LIVRE DES CONTACTS. POUR LE CINQUIÈME PROBLÈME.

I.

Proposition 96. — Soient deux parallèles AB, ΓΔ ; que le cercle EZ les touche aux points E, Z et menons la droite de jonction EZ ; je dis que cette droite est le diamètre du cercle EZ.

1. La phrase que nous mettons entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 820, l. 1).
2. Voir le préambule du livre VII.

Prenons des points H, Θ sur la circonférence du cercle et menons les droites de jonction EH, HZ, EΘ, ΘZ. Dès lors, puisque la droite AE est tangente et que la droite EZ est sécante, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites AE, EZ est égal à l'angle compris sous les droites EΘ, ΘZ situé dans le segment alterne. Pour la même raison, l'angle compris sous les droites ΔZ, ZE est aussi égal à l'angle alterne compris sous les droites EH, HZ ; par conséquent, l'angle compris sous les droites EΘ, ΘZ est aussi égal à l'angle compris sous les droites EH, HZ.



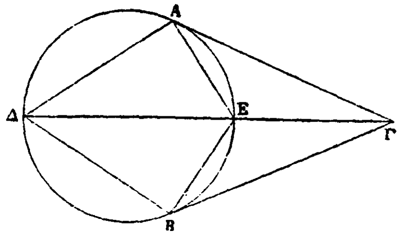
Et ces angles valent deux droits ; donc, chacun d'eux est droit (1) ; en sorte que chacun des segments EΘZ, EHZ est un demi-cercle. En conséquence, la droite EZ est le diamètre du cercle EZ ; ce qu'il fallait démontrer.

II.

Proposition 97. — Soit le cercle ABΔ ; que les droites BΓ, ΓA lui soient tangentes et coupons l'angle Γ en deux parties égales par la droite ΓΔ ; je dis que le centre du cercle ABΔ se trouve sur la droite ΓΔ.

Menons les droites de jonction ΔA, AE, ΔB, BE. Dès lors, puisque la droite AΓ est tangente et la droite ΓΔ sécante, le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓE équivaut au carré de la droite ΓA ; donc, l'angle compris sous les droites ΔA, AΓ est

1. Considérant la tangente AE et la corde EΘ, on a (Euclide, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2) : $\widehat{AEZ} = \widehat{E\Theta Z}$ et, de même, on a : $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{EHZ}$. Or, entre parallèles AB, ΓΔ on a (Euclide, liv. I, prop. 29, énoncée p. 105, n. 5) : $\widehat{AEZ} = \widehat{\Delta ZE}$, d'où, comme le texte : $\widehat{E\Theta Z} = \widehat{EHZ}$. Or (Euclide, liv. III, prop. 22, énoncée p. 537, n. 2) on a : $\widehat{E\Theta Z} + \widehat{EHZ} = 2$ angles droits ; donc : $\widehat{E\Theta Z} = \widehat{EHZ} = 1$ angle droit.

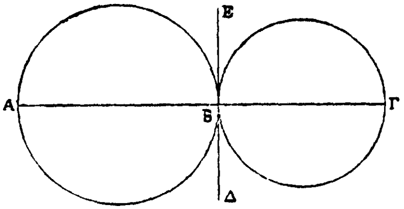


égal à l'angle compris sous les droites AE, EΓ. Pour les mêmes raisons, l'angle compris sous les droites ΔB, BΓ est aussi égal à celui qui est compris sous les droites BE, EΓ. Mais, l'angle compris sous les droites BΓ, ΓΔ est égal à l'angle compris sous les droites AΓ, ΓΔ; donc, l'angle compris sous les droites ΔA, AE est aussi égal à celui qui est compris sous les droites ΔB, BE; de sorte que chacun de ces angles est droit [1]. En conséquence, la droite ΔE est le diamètre du cercle ABΔ; donc, le centre du cercle ABΔ se trouve sur la droite ΓΔ.

POUR LE DOUZIÈME PROBLÈME.

III.

PROPOSITION 98. — Soient deux cercles AB, BΓ tangents entre eux au point B; menons transversalement la droite ABΓ, et que le centre du cercle AB se trouve sur cette droite; je dis que le centre du cercle BΓ se trouve aussi sur la droite ABΓ.



En effet, menons la droite ΔBE tangente à l'un et à l'autre cercle, il s'ensuit que l'angle compris

1. Explicitement, on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4): $\Delta\Gamma \times \Gamma E = \overline{\Gamma A}^2$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma A} = \frac{\Gamma A}{\Gamma E}$, d'où similitude des triangles AΓΔ, EΓA ayant l'angle Γ commun, d'où, comme le texte : $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{AE\Gamma}$ (I). Et de même : $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{BE\Gamma}$ (II). Or, considérant que l'on a par construction : $\widehat{B\Gamma E} = \widehat{A\Gamma E}$; que $\Gamma A = \Gamma B$ (ces deux droites étant égales à $\sqrt{\Delta\Gamma \times \Gamma E}$), et que le côté EΓ est commun, les triangles AEΓ, BEΓ sont égaux, d'où : $\widehat{AE\Gamma} = \widehat{BE\Gamma}$, d'où (I) et (II) donnent : $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{\Delta B\Gamma}$, d'où : $\widehat{\Delta A\Gamma} - \widehat{EA\Gamma} = \widehat{\Delta B\Gamma} - \widehat{EB\Gamma}$ ou, comme le texte : $\widehat{\Delta AE} = \widehat{\Delta BE}$. Or, considérant le quadrilatère inscrit, on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 22, énoncée p. 537, n. 2) : $\widehat{\Delta AE} + \widehat{\Delta BE} = 2$ droits, d'où : $\widehat{\Delta AE} = \widehat{\Delta BE} = 1$ angle droit.

sous les droites AB, BΔ est droit [1] ; donc, l'angle qui lui succède, compris sous les droites ΔB, BΓ, est droit aussi. Et la droite ΔE est tangente au cercle BΓ ; donc, le centre du cercle BΓ se trouve sur la droite ABΓ, de même que celui du cercle AB.

AUTREMENT [2].

IV.

PROPOSITION 99. — Que les droites AB, BΓ soient de nouveau les diamètres des cercles ; je dis que les cercles AB, BΓ sont tangents entre eux [3].

Menons de nouveau la tangente ΔE au cercle AB [4], il s'ensuit que l'angle compris sous les droites AB, BΔ est droit et que l'angle qui lui succède, compris sous les droites BΔ, ΔΓ, est droit aussi. Et le centre du cercle BΓ se trouve sur la droite BΓ ; donc, la droite ΔE est tangente au cercle BΓ [5]. Mais, elle est aussi tangente au cercle AB au point B ; donc, le cercle AB est aussi tangent au cercle BΓ au point B [sur la même figure] [6].

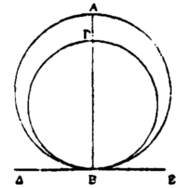
V.

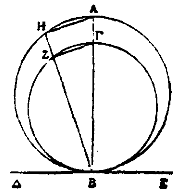
PROPOSITION 100. — Soient deux cercles AB, BΓ tangents entre eux au point B [7] ; menons transversalement la droite AΓB et que le centre du cercle AB soit situé sur cette droite ; je dis que le centre du cercle BΓ est aussi situé sur la droite BΓ.

Menons la tangente ΔE aux cercles. Dès lors, puisque la droite ΔE est tangente au cercle AB et que la droite AB passe par le centre, l'angle compris sous les droites ΔB, BA est droit.

1. EUCLIDE, liv. III, prop. 18, énoncée p. 142, n. 2.
2. Voir la figure de la proposition précédente.
3. C'est-à-dire que les droites AB, BΓ, qui constituent une même droite, soient de nouveau les diamètres des cercles AB, BΓ, et que le point B soit situé entre les points A, Γ ; je dis que les cercles AB, BΓ seront tangents entre eux au point B.
4. Sous-entendu : κατὰ τὸ B σημεῖον, au point B.
5. Sous-entendu au point B.
6. Interpolation qui renvoie à la figure de la proposition précédente.
7. La proposition examine le cas des cercles tangents intérieurement.

Et la droite BΓ a été menée du point de contact ; donc, le centre du cercle BΓ est situé sur la droite BΓ.





La chose est encore manifeste de la manière suivante : Si l'on mène transversalement la droite BZH, et si l'on mène les droites de jonction ΓZ, AH, il se fait que l'angle compris sous les droites EB, BΓ est égal à chacun des angles compris sous les droites BZ, BΓ et sous les droites AH, HB (1). Et l'angle compris sous les droites AH, HB est droit (2) ; donc l'angle compris sous les droites BZ, ZΓ est droit aussi ; en sorte que le centre du cercle BΓ est situé sur la droite BΓ. Et pareillement, si le centre du cercle BΓ est donné sur la droite AB, on démontrera que le centre du cercle AB est aussi sur cette droite.

VI.

PROPOSITION 101. — Mais, que les droites AB, BΓ soient de nouveau les diamètres ; je dis que les cercles sont tangents entre eux (3).

Menons la droite ΔBE tangente au cercle AB ; l'angle compris sous les droites AB, BE est donc droit. Et la droite BΓ est le diamètre (4) ; donc, la droite ΔE est tangente au cercle BΓ au point B [car si on prolonge une droite ΓZ jusqu'au point Δ, le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔZ devient équivalent au carré de la droite ΔB, parce que l'angle au point Z est droit et qu'on a l'angle au point B droit] (5). Mais, elle est aussi tangente

---

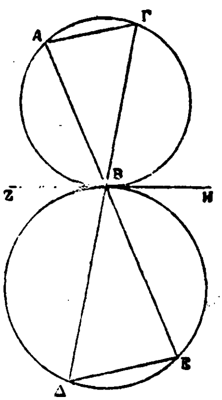
1. EUCLIDE, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2.
2. Parce que, par hypothèse, le centre du cercle AB se trouve sur la droite AB.
3. Voir la figure qui accompagne la proposition précédente.
4. C'est-à-dire le diamètre du cercle BΓ.
5. La phrase que nous mettons entre crochets doit avoir été interpolée, car elle ne répond pas à une construction de la figure ; mais cette construction étant supposée, l'interpolateur invoque la similitude des triangles rectangles ΔBΓ, ΔZB, ayant l'angle Δ commun, pour conclure que l'on a : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} = \frac{\Delta B}{\Delta Z}$, d'où : $\Gamma\Delta \times \Delta Z = \overline{\Delta B}^2$, d'où la droite ΔE est tangente au cercle *BΓ*.

au cercle AB au point B ; par conséquent, le cercle AB touche le cercle ΒΓ au point B [1].

POUR LE SEIZIÈME PROBLÈME.

VII.

PROPOSITION 102. — Soient deux cercles ΑΒΓ, ΔΕΒ tangents entre eux au point B ; menons par le point B des droites ΓΒΔ, ABE, et menons les droites de jonction ΑΓ, ΔΕ ; je dis que les droites ΑΓ, ΔΕ sont parallèles.



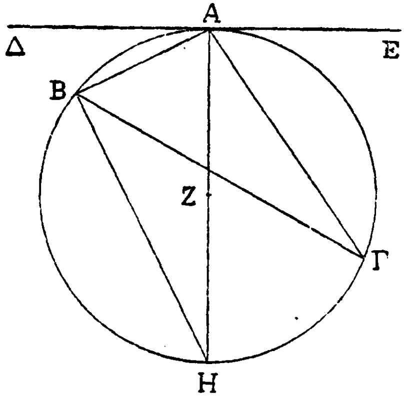
En effet, menons la droite ZH tangente aux cercles au point B. Dès lors, puisque la droite BZ est tangente et la droite BA sécante, l'angle compris sous les droites AB, BZ est égal à l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ [2]. Pour la même raison, l'angle compris sous les droites HB, BE est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ. Mais, l'angle compris sous les droites AB, BZ est égal à l'angle compris sous les droites EB, BH ; donc, l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΕΔ, ΔΒ. Et ces angles sont alternes ; donc, la droite ΑΓ est parallèle à la droite ΔΕ ; ce qu'il fallait démontrer.

VIII.

PROPOSITION 103. — Soit le cercle ΑΒΓ ; menons les droites de jonction AB, ΒΓ, ΓΑ, et menons par le point A une droite ΔΕ telle que l'angle B soit égal à l'angle compris sous les droites EA, ΑΓ [3] ; je dis que la droite ΔΕ est tangente au cercle ΑΒΓ au point A.

1. Une petite interpolation ajoute ici : ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, sur la même figure ; c'est-à-dire sur la figure de la proposition précédente (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 826, l. 17).
2. EUCLIDE, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2.
3. C'est-à-dire telle que l'on ait : $\widehat{EA\Gamma} = \widehat{AB\Gamma}$.

Si la droite AΓ passe par le centre, la chose sera manifeste ; car l'angle compris sous les droites EA, AΓ devient droit, parce que l'angle B est droit aussi, et cela a déjà été démontré [1]. S'il n'en est pas ainsi [2], que le centre soit Z ; menons la droite de jonction AZ ; prolongeons-la jusqu'au point H et menons la droite de jonction BH. En conséquence, l'angle compris sous les droites AB, BH est droit. Dès lors, puisque l'angle compris sous les droites EA, AΓ est égal à celui qui est compris sous les droites AB, BΓ [3], et que l'angle compris sous les droites HA, AΓ est, dans le même segment, égal à l'angle compris sous les droites HB, BΓ, il s'ensuit que l'angle entier compris sous les droites EA, AH est égal à l'angle compris sous les droites AB, BH. Or l'angle compris sous les droites AB, BH est droit ; donc, l'angle compris sous les droites EA, AH est droit aussi. Et la droite ZA est issue du centre ; donc, la droite ΔE est tangente au cercle ABΓ ; car cela a été démontré précédemment [4].



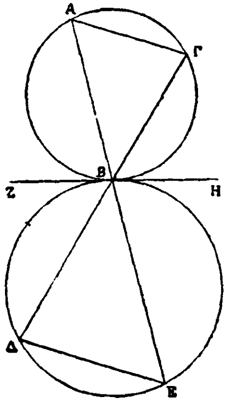
IX.

Proposition 104. — Cela étant [5], voici la réciproque du lemme qui précède [6]. La droite AΓ étant parallèle à la droite ΔE, il faut démontrer que les cercles ABΓ, ΔEB sont tangents entre eux au point B.

---

1. Euclide, liv. III, prop. 16, corollaire : « De là il est évident que la droite perpendiculaire au diamètre, et menée d'une de ses extrémités, touche la circonférence, et que cette droite ne la touche qu'en un seul point, puisqu'il a été démontré que la droite qui rencontre un cercle en deux points entre dans ce cercle ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 154.
2. C'est-à-dire si la droite AΓ ne passe pas par le centre.
3. Par hypothèse.
4. Euclide, liv. III, prop. 16, corollaire (voir note 1 ci-dessus).
5. C'est-à-dire la proposition 103 (ou lemme VIII) étant démontrée.
6. C'est-à-dire la réciproque de la proposition 102, ou lemme VII.

Menons de nouveau la droite ZH tangente au cercle ABΓ (1) ;



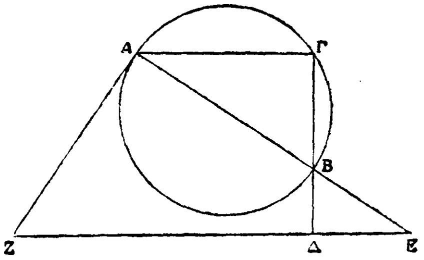
l'angle compris sous les droites AB, BZ est donc de nouveau égal à l'angle Γ (2). Mais, l'angle compris sous les droites AB, BZ est égal à l'angle compris sous les droites EB, BH, et l'angle Γ est alterne de l'angle Δ ; de sorte que l'angle compris sous les droites HB, BE est aussi égal à l'angle Δ. Or, en vertu du lemme qui précède, la droite ZH est tangente au cercle ΔBE ; mais, elle est aussi tangente au point B ; donc, le cercle ABΓ est aussi tangent au cercle BΔE au point B.

PROBLÈME POUR LE MÊME PROBLÈME (3)

X.

Proposition 105. — Le cercle ABΓ étant donné de position et deux points Δ, E étant donnés, si des points Δ, E une ligne ΔBE est brisée et prolongée, faire en sorte que la droite AΓ soit parallèle à la droite ΔE (4).

Que la chose soit obtenue et menons la tangente ZA. Dès lors, puisque la droite AΓ est parallèle à la droite ΔE, l'angle Γ est égal à l'angle compris sous les droites ΓΔ, ΔE. Mais l'angle Γ est égal à l'angle compris sous les droites ZA, AE (car ces droites sont tangente et sécante); donc, l'angle compris sous les droites ZA, AE est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΓΔ, ΔE. En conséquence, les points A, B, Δ, Z sont dans un



1. Sous-entendu : κατὰ τὸ B σημεῖον, au point B.
2. Euclide, liv. IV, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2.
3. C'est-à-dire problème utile pour la solution de ce même problème XVI d'Apollonius sur *Les Contacts*, pour lequel Pappus a déjà donné le lemme VII ou proposition 102. Voir p. 638.
4. En d'autres termes, faire en sorte que le point B soit pris tel que, si les droites de jonction ΔB, EB sont prolongées jusqu'à la circonférence du cercle, la droite AΓ soit parallèle à la droite ΔE.

cercle ; donc, le rectangle compris sous les droites AE, EB équivaut au rectangle compris sous les droites ZE, EΔ. Or, le rectangle compris sous les droites AE, EB est donné (car il équivaut au carré de la tangente) ; donc, le rectangle compris sous les droites ΔE, EZ est donné aussi [1]. Et la droite ΔE est donnée ; donc, la droite EZ est donnée aussi [2]. Or, cette droite est donnée aussi de position et le point E est donné ; donc, le point Z est donné aussi [3]. Or, la droite ZA est menée, du point donné Z, tangente au cercle ABΓ donné de position ; donc, la droite ZA est donnée de position et de grandeur [4]. Et le point Z est donné ; donc le point A est donné aussi. Mais le point E est donné aussi ; donc, la droite AE est donnée de position [5]. Or, le cercle est aussi donné de position ; donc, le point B est donné [6]. De plus, chacun des points Δ, E est donné ; donc, chacune des droites ΔB, BE est donnée de position.

La synthèse du problème est donc la suivante : Soit le cercle ABΓ et soient Δ, E les deux points donnés. Posons le rectangle compris sous la droite ΔE et une autre droite EZ équivalent au carré de la tangente [7] ; menons du point Z la ligne droite ZA tangente au cercle ABΓ [8] ; menons la droite de jonction AE ;

---

1. Les droites AΓ, ΔE étant parallèles par hypothèse, on a : $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E}$. Or, considérant la tangente ZA et la sécante AB on a (Euclide, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2) : $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{ZAE}$; donc : $\widehat{ZAE} = \widehat{\Gamma\Delta E}$. Or $\widehat{\Gamma\Delta E} + \widehat{\Gamma\Delta Z} = 2$ angles droits ; donc : $\widehat{ZAE} + \widehat{\Gamma\Delta Z} = 2$ angles droits ; donc (Euclide, liv. III, prop. 22, énoncée p. 537, n. 2), les points A, B, Δ, Z sont situés sur la circonférence du cercle ABΔZ, et les sécantes EA, EZ de ce cercle donnent, comme le texte : $AE \times EB = ZE \times E\Delta$. Or, (Euclide, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4) on a : $AE \times EB =$ carré de la tangente menée du point E au cercle, et (Euclide, *Données*, prop. 91, énoncée p. 619, n. 4) cette tangente est donnée ; donc $AE \times EB$ est donné ; donc : $ZE \times E\Delta$ est donné aussi.

2. Euclide, *Données*, prop. 57, énoncée p. 144, n. 5.

3. Les points E, Δ étant donnés par hypothèse, la droite ZE, donnée de grandeur, est donnée aussi de position ; donc (Euclide, *Données*, prop. 27, énoncée p. 30, n. 1), le point Z est donné.

4. Euclide, *Données*, prop. 91, énoncée p. 619, n. 4.

5. Euclide, *Données*, prop. 26, énoncée p. 214, n. 1.

6. Euclide, *Données*, prop. 25, énoncée p. 214, n. 6.

7. C'est-à-dire : posons le rectangle $\Delta E \times EZ$ équivalent au carré de la tangente menée du point E à la circonférence ABΓ, tangente non indiquée sur la figure, et qui (Euclide, *Données*, prop. 91) est une grandeur donnée en raison de ce que le point E et le cercle ABΓ sont donnés.

8. C'est-à-dire tangente au point A.

prolongeons la droite de jonction ΔB jusqu'au point Γ, et menons la droite de jonction AΓ ; je dis que la droite AΓ est parallèle à la droite ΔE.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites ZE, EΔ équivaut au carré de la tangente (1) ; mais, que le rectangle compris sous les droites AE, EB équivaut aussi au carré de la tangente (2), il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AE, EB équivaut au rectangle compris sous les droites ZE, EΔ. En conséquence, [les points A, B, Δ Z] (3) sont dans un cercle ; [donc] (4), l'angle compris sous les droites ZA, AE [est égal] (5) à l'angle compris sous les droites BΔ, ΔE (6). Mais, l'angle compris sous les droites ZA, AE est aussi égal à l'angle compris sous les droites AΓ, ΓB situé dans le segment alterne (7) ; donc, l'angle compris sous les droites AΓ, ΓB est aussi égal à l'angle compris sous les droites BΔ, ΔE. Et ces angles sont alternes ; donc, la droite AΓ est parallèle à la droite ΔE.

POUR LE DIX-SEPTIÈME PROBLÈME.

XI.

PROPOSITION 106. — Soient deux cercles ABΓ, AΔE tangents entre eux au point A (8) ; menons transversalement, du point A, les droites AΔB, AEΓ, et menons les droites de jonction ΔE, BΓ ; je dis que les droites ΔE, BΓ sont parallèles.

Menons du point A la tangente ZH ; donc, l'angle compris sous les droites ZA, AB est égal à chacun des angles compris sous les droites AΓ, ΓB et sous les droites AE, EΔ (9) ; en sorte que l'angle compris sous les droites AΓ, ΓB est aussi égal à

1. On a par hypothèse : $Z E \times E\Delta =$ carré de la tangente menée du point E au cercle ABΓ.

2. EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4.

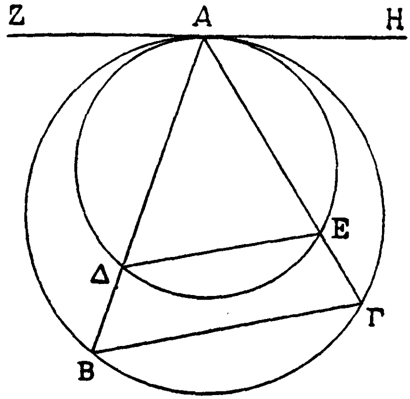
3. 4. 5. Lacunes comblées par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 355, l. 24).

6. Dans le quadrilatère inscriptible AZΔB, on a : $\widehat{ZAE} + \widehat{B\Delta Z} = 2$ angles droits. Or, $\widehat{B\Delta E} + \widehat{B\Delta Z} = 2$ angles droits ; donc, comme le texte : $\widehat{ZAE} = \widehat{B\Delta E}$.

7. EUCLIDE, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2.

8. Cas des cercles tangents intérieurement.

9. EUCLIDE, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2.



l'angle compris sous les droites AE, EΔ. En conséquence, la droite ΔE est parallèle à la droite BΓ.

[Mais, que la droite ΔE soit parallèle à la droite BΓ] (1) ; je dis que les cercles ABΓ, AΔE sont tangents entre eux (2).

En effet, menons la tangente ZH au cercle ABΓ ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ZA, AΔ est égal à l'angle Γ. Mais, l'angle Γ est égal à l'angle E (3) ; donc, l'angle compris sous les droites ZA, AΔ est aussi égal à l'angle E ; de sorte que la droite ZH est tangente au cercle AΔE (car cela a été démontré précédemment) (4). [En conséquence, les cercles ABΓ, AΔE sont tangents entre eux au point A] (5).

PROBLÈME POUR LE MÊME PROBLÈME (6).

XII.

PROPOSITION 107. — Le cercle ABΓ étant donné de position et deux points Δ, E étant donnés, briser une ligne ΔAE et faire

1. Reconstitution due à Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 335, *commentarius*, dernière ligne).

2. La réciproque de cette proposition n'est pas énoncée complètement. Camerer a complété l'énoncé de la manière suivante dans la version latine qui accompagne sa première édition du texte grec des lemmes de Pappus sur le traité *Des Contacts* d'Apollonius : « ductis nempe per punctum A, duobus circulis ABΓ, AΔE commune, rectis quibuscunque AΔB, AEΓ, quae ex eadem puncti A parte uni circulorum in punctis B, Γ, alteri vero in punctis Δ, E occurrant, junctisque rectis BΓ, ΔE » (*Apollonii de Tactionibus quae supersunt, ac maxime lemmata Pappi in hos libros graece nunc primum edita, e codicibus manuscriptis, cum Vietae librorum Apollonii restitutione, adjectis observationibus, computationibus ac problematis Apolloniani historia, a Joanne Guilielmo Camerer.* Gothae et Amstelodami, 1795, in-8°, voir p. 78, ll. 7-11).

3. Par hypothèse.

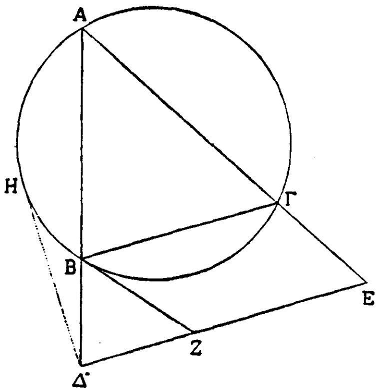
4. Voir lemme VIII ou proposition 103, p. 638.

5. Reconstitution de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 834, l. 5), d'après la reconstitution latine proposée par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 335, l. 41).

6. C'est-à-dire relatif au même problème XVII d'Apollonius pour lequel a déjà été donné le lemme XI (ou proposition 106).

en sorte que la droite BΓ soit parallèle à la droite ΔE [1].

Que la chose soit obtenue et menons du point B la tangente BZ. Dès lors, puisque la droite BZ est tangente et la droite BΓ sécante, l'angle compris sous les droites ZB, BΓ, c'est-à-dire celui qui est compris sous les droites ΔZ, ZB, est égal à l'angle A ; par conséquent, les points A, B, Z, E sont dans un cercle ; donc, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB équivaut au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ [2]. Or, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB est donné (car il équivaut au carré d'une tangente) ; donc, le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ est donné aussi [3]. Et la droite ΔE est donnée ; donc, la droite ΔZ est donnée aussi. Mais, cette droite est donnée aussi de position et le point Δ est donné ; donc, le point Z est donné aussi [4]. Or, la droite ZB a été menée, du point donné Z, tangente au cercle donné de position; donc, la droite ZB est donnée de position [5]. Mais, le cercle ABΓ est donné de position aussi ; donc, le point B est donné. Et le point Δ est donné aussi ; donc, la droite BΔ est donnée de position [6]. Et le cercle est aussi donné de position ;



1. En d'autres termes : Étant donnés un cercle ABΓ et deux points Δ, E, mener, par les points Δ, E, des sécantes dirigées vers un même point de la circonférence du cercle ABΓ, telles que les droites de jonction BΓ, ΔE soient parallèles.

2. Considérant la tangente BZ et la sécante BΓ, on a (Euclide, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2) : $\widehat{ZB\Gamma} = \widehat{BAE}$. Or, par hypothèse BΓ, ΔE étant parallèles, on a : $\widehat{ZB\Gamma} = \widehat{\Delta ZB}$; donc, comme le texte : $\widehat{\Delta ZB} = \widehat{BAE}$. Or, $\widehat{\Delta ZB} + \widehat{BZE} = 2$ droits ; donc : $\widehat{BAE} + \widehat{BZE} = 2$ droits ; donc, les points A, B, Z, E sont concycliques, d'où, comme le texte : $A\Delta \times \Delta B = E\Delta \times \Delta Z$.

3. On a (Euclide, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4) : $A\Delta \times \Delta B =$ carré de la tangente ΔH que nous indiquons en pointillé dans la figure du texte. Or, cette tangente ΔH est donnée de position et de grandeur en vertu de la proposition 91 des *Données* d'Euclide (énoncée p. 619, n. 4) ; donc, le rectangle $A\Delta \times \Delta B$ est donné de grandeur, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente, le rectangle $E\Delta \times \Delta Z$ est donné de grandeur aussi.

4. Euclide, *Données*, prop. 27, énoncée p. 30, n. 1.

5. Euclide, *Données*, prop. 91, invoquée déjà dans la note précédente.

6. Euclide, *Données*, prop. 26, énoncée p. 214, n. 5.

donc, le point A est donné (1). Et le point E est donné aussi ; donc, chacune des droites ΔA, AE est donnée de position.

La synthèse du problème se fera de la manière suivante : Soit le cercle ABΓ et soient donnés les points Δ, E. Posons le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ équivalent au carré de la tangente (2) ; menons du point Z la ligne droite ZB [tangente] (3) au cercle ABΓ ; menons la droite de jonction ΔB, prolongeons-la jusqu'au point A et menons les droites de jonction AE, BΓ ; je dis que la droite BΓ est parallèle à la droite ΔE.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ équivaut au carré de la tangente (4), [c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB (5), il s'ensuit que les points A, B, Z, E sont dans un cercle] (6) ; par conséquent, l'angle A, c'est-à-dire l'angle compris sous les droites ΓB, BZ (car la droite BZ est tangente et la droite BΓ sécante), est égal à l'angle compris sous les droites BZ, ZΔ. Or, ces angles sont alternes ; donc, la droite BΓ est [parallèle] (7) à la droite ΔE (8).

PROBLÈME POUR LE PROBLÈME DIX-HUIT (9).

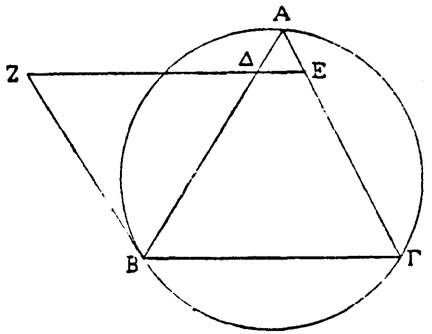
XIII.

PROPOSITION 108. — Le cercle ABΓ étant donné de position et deux points Δ, E étant donnés, briser, à partir des points Δ, E,

1. EUCLIDE, *Données*, prop. 25, énoncée p. 214, n. 6.
2. C'est-à-dire équivalent au carré de la tangente ΔH indiquée en pointillé dans la figure, mais que le texte peut s'abstenir de désigner, vu que cette tangente est une donnée acquise au problème, en raison de la simple dation du cercle et des points Δ, E, en vertu de la proposition 91 précitée des *Données* d'Euclide.
3. Lacune comblée par Camerer dans son édition princeps précitée des lemmes de Pappus (Cfr. *loc. cit.*, p. 26, l. 26).
4. Par hypothèse.
5. EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4.
6. Restauration de Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 836, ll. 13-15).
7. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 337, l. 17).
8. Les points A, B, Z, E étant concycliques, on a : $\widehat{\Delta AE} + \widehat{BZE} = 2$ angles droits. Or, $\widehat{BZ\Delta} + \widehat{BZE} = 2$ angles droits ; donc, comme le texte : $\widehat{\Delta AE} = \widehat{BZ\Delta}$. Or, considérant la tangente BZ et la sécante BΓ, on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2) : $\widehat{\Gamma BZ} = \widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Delta AE}$; donc, comme le texte : $\widehat{\Gamma BZ} = \widehat{BZ\Delta}$, d'où parallélisme des droites BΓ, BE.
9. C'est-à-dire relatif au problème XVIII du traité des *Contacts* d'Apollonius.

une ligne ΔAE, et faire en sorte que la droite $B\Gamma$ soit parallèle à la droite ΔE (1).

Que la chose soit obtenue. Menons du point B la ligne droite BZ tangente au cercle $AB\Gamma$; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ZB, BA est égal à l'angle Γ, c'est-à-dire à l'angle E ; donc, les points B, Z, A, E sont dans un cercle. En conséquence, le rectangle compris sous les droites $B\Delta$, ΔA équivaut au rectangle compris sous les droites $Z\Delta$, ΔE (2). Or, le rectangle compris sous les droites $B\Delta$, ΔA est donné (car la droite $A\Delta B$ est menée transversalement du point donné Δ au cercle donné de position) (3); donc, le rectangle compris sous les droites $Z\Delta$, ΔE est donné aussi. Et la droite ΔE est donnée ; donc, la droite $Z\Delta$ est donnée aussi (4). Et le point Δ est donné ; [donc le point Z est donné (5) aussi] (6). Or, la droite ZB a été menée tangente au cercle [donné de position, du point donné Z] (7) ; donc, la droite ZB est donnée



1. Application du lemme précédent XII, ou proposition 107, au cas des deux points Δ, E, pris à l'intérieur du cercle. Heath a fait remarquer le premier (*The works of Archimedes edited in modern notations with introductory chapters.* Cambridge, 1897, p. 312, en note) l'analogie que présente la figure qui accompagne ce lemme avec la figure de la proposition X du livre *Des Lemmes* d'Archimède (Voir *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, p. 534).
2. Considérant la tangente BZ et la corde BA, on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2) : $\widehat{ZBA} = \widehat{B\Gamma A}$. Or, par hypothèse, les droites $B\Gamma$, ZE sont parallèles ; donc : $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{ZEA}$, d'où, comme le texte : $\widehat{ZBA} = \widehat{ZEA}$; donc (EUCLIDE, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2), ces angles égaux sont mesurés par le même arc du cercle qui passe par les points Z, B, E, A, et les cordes BA, ZE qui coupent ce cercle donnent (EUCLIDE, liv. III, prop. 35, énoncée p. 149, n. 5) : $B\Delta \times \Delta A = Z\Delta \times \Delta E$.
3. EUCLIDE, *Données*, prop. 93 : « Si, dans un cercle donné de position, on prend un point donné, et si, par ce point, on mène une droite dans le cercle, le rectangle sous les segments de la droite menée est donné » Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 472.
4. EUCLIDE, *Données*, prop. 57, énoncée p. 144, n. 5.
5. EUCLIDE, *Données*, prop. 27, énoncée p. 30, n. 1.
6. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 338, l. 17).
7. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 338, l. 20).

de position [1]. Or, le cercle est aussi donné de position ; donc, le point B est donné aussi [2]. Mais, le point Δ est donné aussi ; donc, la droite BΔ est donnée de position [3]. Or, le cercle est aussi donné de position ; donc, le point A est donné [4]. Or, chacun des points Δ, E est donné aussi ; donc chacune des droites ΔA, AE est donnée de position.

La synthèse du problème se fera de la manière suivante : Soit ABΓ le cercle donné de position et soient Δ, E les deux points donnés. Menons transversalement une droite quelconque AΔB ; posons le rectangle compris sous les droites EΔ, EZ équivalent au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB ; menons du point Z la droite BZ tangente au cercle ABΓ, et menons la droite de jonction ΓEA. Dès lors, puisque l'angle compris sous les droites ZB, BA est égal à l'angle situé au point E [5] (car les points A, Z, B, E sont dans un cercle) [6] ; mais, que l'angle compris sous les droites ZB, BA est aussi égal à l'angle Γ (car on a une tangente et une sécante) [7], il s'ensuit que l'angle Γ est aussi égal à l'angle E ; donc, la droite BΓ est parallèle à la droite ΔE ; ce qu'il fallait démontrer.

PROBLÈME POUR LE PROBLÈME DIX-NEUF [8].

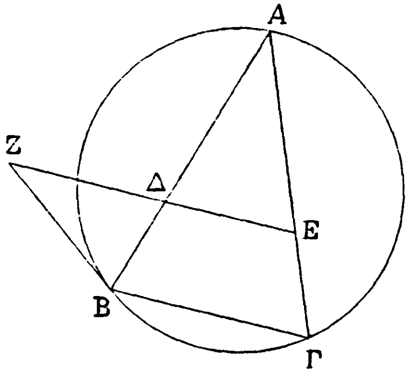
XIV.

Proposition 109. — Le cercle ABΓ étant donné de position, et deux points Δ, E étant donnés [9], briser, à partir de ces points, la ligne ΔAE de manière que la droite BΓ soit parallèle à la droite ΔE.

Que la chose soit obtenue et menons la tangente BZ. Dès lors, les points A, Z, B, E sont de nouveau dans un cercle, et

1. Euclide, *Données*, prop. 91, énoncée p. 619, n. 4.
2. Euclide, *Données*, même prop. 91.
3. Euclide, *Données*, prop. 26, énoncée p. 214, n. 5.
4. Euclide, *Données*, prop. 25, énoncée p. 214, n. 6.
5. Euclide, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2.
6. Euclide, liv. III, prop. 35, énoncée p. 149, n. 5.
7. Euclide, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2.
8. C'est-à-dire relatif au problème XIX du traité *Des Contacts* d'Apollonius.
9. A l'intérieur de ce cercle ABΓ.

le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB équivaut au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ [1]. Or, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB est donné ; donc, le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ est donné aussi. Et la droite ΔE est donnée ; donc, la droite ΔZ est donnée aussi. Or, cette droite est donnée aussi de position et le point Δ est donné ; donc, le point Z est donné aussi ; en sorte que la droite BZ est donnée de position. Mais, le cercle est donné aussi ; donc, le point B est donné. Mais, les points Δ, E sont donnés aussi ; donc, chacune des droites ΔA, AE est donnée [2] ; car on démontre cela de la même manière que précédemment [3], et la synthèse est la même que la précédente [4].

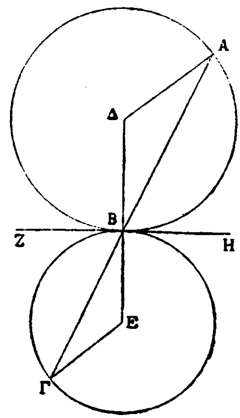


POUR LE PROBLÈME VINGT-QUATRE.

XV.

PROPOSITION 110. — Que deux cercles AB, BΓ soient tangents entre eux au point B ; prenons leurs centres Δ, E ; menons les droites de jonction AΔ, ΔB, ΓE, EB, et que la droite AΔ soit parallèle à la droite ΓE ; je dis que les lignes qui passent par les points Δ, B, E et par les points A, B, Γ sont droites.

1. Voir la proposition précédente.
2. Sous-entendu : θέσει, de position.
3. Voir proposition 108.
4. Ce lemme ne diffère du précédent que par la disposition de la figure. Dans ces conditions, Haumann, dans son essai de reconstitution du traité *Des Contacts* d'Apollonius, émet l'opinion qu'à la suite de ce lemme (ou proposition 109) devait être rationnellement placé le lemme XXI (ou proposition 116), avec, comme titre : εἰς τὸ κʹ πρόβλημα (pour le problème X), puis le lemme XXIII (ou proposition 118), avec le titre : εἰς τὸ αὐτό (pour le même problème). Voir : *C. G. Haumann. Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen*. Breslau, 1817, in-8°, p. 68.



En effet, menons la droite ZH tangente aux cercles AB, BΓ. Dès lors, puisque la droite ZH est tangente et que la droite ΔB est issue du centre, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΔB, BZ est droit. Pour les mêmes raisons, l'angle compris sous les droites ZB, BE est droit aussi ; par conséquent, la ligne qui passe par les points Δ, B, E est droite. Or, puisque la droite AΔ est égale à la droite ΔB et la droite EΓ égale à la droite EB, la droite EΓ est donc à la droite EB comme la droite AΔ est à la droite ΔB. Et les côtés proportionnels sont situés autour des angles égaux Δ, E; donc, l'angle compris sous les droites ΔB, BA est égal à celui qui est compris sous les droites ΓB, BE (1). Et la ligne ΔBE est droite; donc, la ligne qui passe par les points A, B, Γ est droite aussi (2) ; ce qu'il fallait démontrer.

POUR LE VINGT-CINQUIÈME PROBLÈME.

XVI.

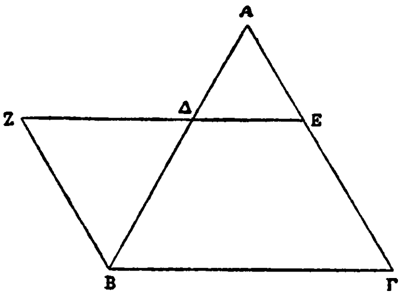
PROPOSITION III. — La droite AB étant égale à la droite BΓ, la droite AΔ égale à la droite ΔE et la droite ΔE parallèle à la droite BΓ, il faut démontrer que la ligne qui passe par les points A, E, Γ est droite.

---

1. On a : $A\Delta = \Delta B$ et $E\Gamma = EB$, d'où : $\frac{E\Gamma}{EB} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$. Or, les droites $A\Delta$, ΓE sont parallèles par hypothèse, donc: $\widehat{A\Delta B} = \widehat{BE\Gamma}$, d'où similitude des triangles $AB\Delta$, ΓBE, d'où : $\widehat{AB\Delta} = \widehat{\Gamma BE}$.

2. On a : $\widehat{\Gamma BZ} + \widehat{\Gamma BE} = 1$ angle droit, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente : $\widehat{\Gamma BZ} + \widehat{AB\Delta} = 1$ angle droit, d'où : $\widehat{\Gamma BZ} + \widehat{ZB\Delta} + \widehat{AB\Delta} = \widehat{\Gamma B\Delta} + \widehat{AB\Delta} = 2$ angles droits ; donc (EUCLIDE, liv. I, prop. 14: « Si à une droite, et à un point de cette droite, deux droites non placées du même côté font des angles de suite égaux à deux droits, ces deux droites sont dans la même direction ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 27) : les droites AB, BΓ forment une seule et même droite. La même déduction se justifie d'ailleurs en vertu de la réciproque de la proposition 15 du livre I d'Euclide : « Si deux droites se coupent mutuellement, elles font des angles au sommet égaux entre eux » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 28.

Menons les droites de jonction ΑΕ, ΕΓ ; menons la droite ΒΖ parallèle à la droite ΑΕ et prolongeons la droite ΕΔ jusqu'au point Ζ ; il s'ensuit que la droite ΔΖ est égale à la droite ΔΒ. Or, la droite ΑΔ est aussi égale à la droite ΔΕ ; donc, la droite entière ΑΒ est égale à la droite entière ΖΕ. Mais, la droite ΑΒ est égale à la droite ΒΓ ; donc, la droite ΒΓ est aussi égale à la droite ΖΕ. Mais, ces droites sont parallèles ; donc, la droite ΓΕ est aussi parallèle à la droite ΒΖ. Mais, la droite ΑΕ est aussi parallèle à la droite ΒΖ ; donc, la ligne ΑΕΓ est droite ; car cela est manifeste (1).



DEUXIÈME LIVRE DES CONTACTS (2).

POUR LE TRENTE ET UNIÈME PROBLÈME.

XVII.

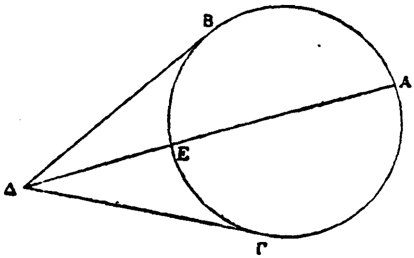
Proposition 112. — Si l'on a le cercle ΑΒΓ ; si deux droites égales ΒΔ, ΔΓ lui sont jetées, et si la droite ΒΔ est tangente, je dis que la droite ΔΓ est tangente aussi.

La chose est manifeste ; car, si l'on mène transversalement la

1. Les triangles ΖΔΒ, ΑΔΕ, semblables par construction, donnent : $\frac{\Delta B}{\Delta Z} = \frac{\Delta A}{\Delta E}$. Or, par hypothèse : $\Delta E = \Delta A$; donc : $\Delta Z = \Delta B$, d'où : $ZE = AB$. Or, par hypothèse : $AB = B\Gamma$; donc : $ZE = B\Gamma$. Or, par hypothèse, les droites ΒΓ, ΖΕ sont parallèles ; donc (Euclide, liv. I, prop. 33 : « Les droites qui joignent, des même côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 55), les droites ΓΕ, ΒΖ sont aussi parallèles. Or, les droites ΑΕ, ΒΖ sont parallèles par construction ; donc, par similitude de triangles : $\widehat{BZE} = \widehat{AE\Delta}$. Or, $\widehat{B\Gamma E} = \widehat{BZE}$; donc : $\widehat{B\Gamma E} = \widehat{AE\Delta}$. Or, dans le parallélogramme ΒΖΕΓ, on a : $\widehat{B\Gamma E} + \widehat{\Delta E\Gamma} = 2$ angles droits ; d'où : $\widehat{AE\Delta} + \widehat{\Delta E\Gamma} = 2$ angles droits ; donc (Euclide, liv. I, prop. 14, énoncée dans la note précédente), les droites ΑΕ, ΕΓ forment une seule et même droite.

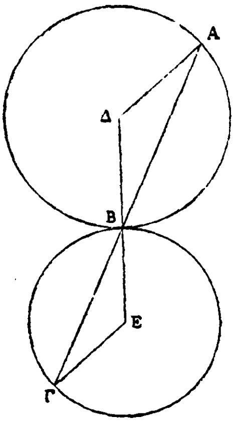
2. Ἐπαφῶν δεύτερον. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 842, l. 23), conformément à l'essai de reconstitution de Haumann (pp. 107, 113, 117) mentionnée plus haut, p. 648, n. 4.

droite ΔA, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE équivaut au carré de la droite ΔB (1). Mais, le carré de la droite ΔB est égal au carré de la droite ΔΓ (2) ; donc, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔE équivaut aussi au carré de la droite ΔΓ ; donc, la droite ΔΓ est tangente au cercle ABΓ (3).



XVIII.

Proposition 113. — Soient deux cercles AB, BΓ ; menons transversalement, par le point B, une droite ABΓ, et inclinons deux parallèles AΔ, EΓ vers les centres des cercles ; je dis que les cercles AB, BΓ sont tangents entre eux au point B (4).



Prenons les centres Δ, E des cercles et menons les droites de jonction ΔB, BE. La ligne qui passe par les points Δ, B, E est donc droite. En effet, la droite AΔ est parallèle à la droite ΓE ; la droite ΓE est à la droite EB comme la droite AΔ est à la droite ΔB, et l'on obtient deux triangles ayant un angle A égal à un angle Γ et des côtés proportionnels autour des autres angles Δ, E ; donc, ces

1. Euclide, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4.
2. Par hypothèse.
3. Euclide, liv. III, prop. 37 : « Si l'on prend un point quelconque hors d'un cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe ce cercle, et dont l'autre tombe sur ce cercle, et si le rectangle sous la sécante entière et la droite prise extérieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au carré de la droite qui tombe sur ce cercle, la droite qui tombe sur ce cercle sera tangente à ce cercle » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 192.
4. Cette proposition paraît avoir été fort altérée tant dans son énoncé que dans sa démonstration ; car, si les deux cercles ne sont pas tangents en B, les droites AΔ, EΓ ne peuvent être parallèles que si l'une des deux tombe en dehors du centre du cercle. Et si le point B est commun, comme dans la figure qui accompagne le texte, le lemme est déjà démontré par Euclide, liv. III, prop. 13 : « Un cercle ne touche point un cercle en plus d'un point, soit qu'il le touche intérieurement ou extérieurement » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 145.

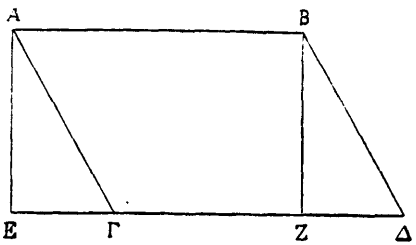
triangles sont équiangles ; donc, l'angle compris sous les droites AB, BΔ est égal à l'angle compris sous les droites ΓB, BE. Et la ligne ABΓ est droite ; donc, la ligne ΔBE est droite aussi (1). Or, puisque la ligne qui passe par les centres et par le point de contact est droite, les cercles AB, BΓ sont tangents entre eux au point B.

POUR LE CINQUANTE-DEUXIÈME PROBLÈME.

XIX.

Proposition 114. — Soient la droite AB parallèle à la droite ΓΔ, la droite AΓ égale à la droite BΔ, l'angle compris sous les droites AΓ, ΓΔ obtus et l'angle compris sous les droites BΔ, ΔΓ aigu ; je dis que AΔ est un parallélogramme (2).

En effet, puisque l'angle compris sous les droites AΓ, ΓΔ est obtus, et que l'angle compris sous les droites BΔ, ΔΓ est aigu, il s'ensuit que, parmi les perpendiculaires menées des points A, B sur la droite ΓΔ, celle qui est menée du point A tombe au delà du point Γ, tandis que celle qui est menée du point B tombe en deçà du point Δ, et que ce soient les droites AE, BZ. En conséquence, la droite AE est parallèle à la droite BZ. Or, la droite AB est aussi parallèle à la droite ΓΔ, et les angles aux points E, Z sont droits ; donc, la droite ZΔ est égale à la droite EΓ ; de sorte que la droite entière EZ est aussi égale à la droite entière ΓΔ ; donc, la droite AB est égale à la droite ΓΔ (3).



1. Voir proposition 110, ou lemme XV.

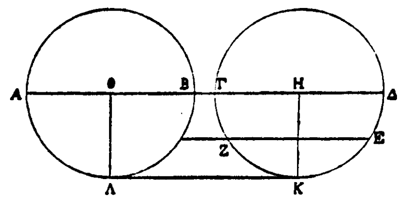
2. D'après Haumann (voir son essai de reconstitution précité, p. 69) ce lemme serait une interpolation.

3. La figure ABZE est un parallélogramme ; donc : AE = BZ. Or, par hypothèse : AΓ = BΔ, et les angles en E, Z sont droits ; donc (Euclide, liv. I, prop. 47, énoncée p. 132, n. 1) : $\overline{A\Gamma}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{B\Delta}^2 - \overline{BZ}^2$, ou : $\overline{E\Gamma}^2 = \overline{Z\Delta}^2$, d'où : $E\Gamma = Z\Delta$, d'où : $E\Gamma + \Gamma Z = Z\Delta + \Gamma Z$ ou : $EZ = \Gamma\Delta$. Or, dans le parallélogramme ABZE on a : $AB = EZ$; donc : $AB = \Gamma\Delta$; donc, conclusion qui manque

XX.

PROPOSITION 115. — Soient deux cercles égaux AB, ΓΔ ; soient la droite ΑΔ passant par leurs centres et la droite EZ parallèle à la droite ΓΔ ; je dis que cette dernière droite prolongée coupe aussi le cercle AB [1].

Prenons les centres H, Θ des cercles ; menons des points H, Θ les perpendiculaires [HK, ΘΛ] [2], [et menons la droite de jonction ΚΛ] [3] ; [il s'ensuit que] [4] la droite HK [est égale] [5] à la droite ΘΛ. Mais, ces droites sont aussi parallèles ; donc, la droite ΚΛ est aussi égale et parallèle à la droite ΗΘ ; de sorte que les angles aux points K, Λ sont droits. Et les droites HK, ΘΛ sont issues des centres ; donc, la droite ΚΛ est tangente aux cercles. Dès lors, il est manifeste que la droite tangente au cercle ΓΔ est aussi tangente au cercle AB ; donc, la droite EZ, qui coupe le cercle ΓΔ, coupe aussi le cercle AB si on la prolonge (puisqu'elle sera située entre les points B, Λ, comme la droite EZ est située entre les points Γ, K) [6].



XXI.

PROPOSITION 116. — Soient la droite ΔA égale à la droite AE, la droite ΒΔ plus grande que la droite ΓE, et menons la droite

dans cette démonstration d'authenticité douteuse, la figure ΑΒΔΓ est un parallélogramme en vertu de la proposition 33 du livre I d'Euclide : « Les droites qui joignent des mêmes côtés des droites égales et parallèles sont elles-mêmes égales et parallèles ». Voir trad. de Peyrard, vol. I.

1. D'après l'opinion de Haumann (Essai de reconstitution précité, p. 69), ce lemme XX, ou proposition 115, dont l'énoncé et la démonstration sont d'ailleurs assez négligés, serait dû à un interpolateur.

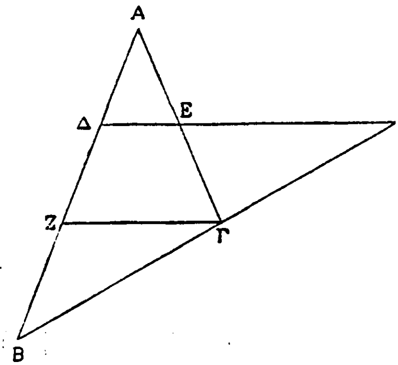
2. Lacune comblée par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 342, l. 25).

3. Lacune comblée par Camerer (*loc. cit.*, p. 30, l. 21).

4. Lacune comblée par Commandin par le mot ἄρα. (Cfr. *loc. cit.*, p. 342, l. 22).

5. Lacune comblée par Commandin au moyen de ἴση ἐστὶν (Cfr. *loc. cit.*, p. 342, l. 22).

6. La phrase entre parenthèses est abandonnée par Haumann comme ayant été sous-interpolée (Cfr. *loc. cit.*, p. 53).



de jonction ΔE ; je dis que la droite ΔE prolongée rencontre la droite BΓ (1).

Posons la droite ΔZ égale à la droite ΓE et menons la droite de jonction ΓZ ; cette droite est donc parallèle à la droite ΔE et rencontre la droite BΓ ; par conséquent, la droite ΔE rencontre aussi la droite BΓ (2).

PROBLÈME POUR LE MÊME PROBLÈME (3).

XXII.

PROPOSITION 117. — Un cercle étant donné de position et trois points Δ, E, Z étant donnés dans la même droite, briser une ligne ΔAE et faire en sorte que la droite BΓ soit dans le prolongement de la droite ΓZ (4).

1. Sans contester l'authenticité de ce petit lemme, Haumann (cfr. *loc. cit.*, p. 68) estime qu'il a été déplacé, et qu'il devait originairement venir après le lemme XIV, ou proposition 109.

2. D'après Camerer (*loc. cit.*, p. 100), cette conclusion invoque Euclide dans ses deux propositions suivantes :

Livre I, prop. 17 : « Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux angles droits ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 31.

Livre I, prop. 29 : « Une droite qui tombe sur deux droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux ; l'angle extérieur égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 49.

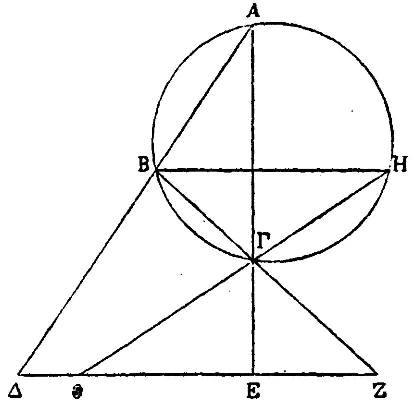
En outre, l'axiome 11 du livre I : « Si une droite tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 2.

D'autre part, d'après Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 343, l. 10), cette conclusion découle directement du commentaire de Proclus sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide, proposition 29 (*Proclus Diadochus. In primum Euclidis elementorum librum commentarii Recognovit G. Friedlein.* Lipsiae, 1873, in-8°, voir p. 372).

3. C'est-à-dire problème utile pour la solution du même problème LII du livre II d'Apollonius sur les *Contacts*. D'après Haumann (*loc. cit.*, p. 69), cette proposition aurait été interpolée aussi dans l'ouvrage de Pappus.

4. Ce problème peut s'énoncer en d'autres termes : « Inscrire, dans un cercle donné de position, un triangle dont les côtés passent par trois points donnés sur une même droite donnée de position. » On remarquera que les propositions

Que la chose soit obtenue; menons par le point B la droite BH parallèle à la droite ΔZ ; menons la droite de jonction HΓ et prolongeons-la jusqu'au point Θ. En conséquence, l'angle compris sous les droites BH, HΓ, c'est-à-dire l'angle A, est égal à l'angle compris sous les droites ΓΘ, ΘZ ; donc, le rectangle compris sous les droites AE, EΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ [1]. Or, le rectangle compris sous les droites AE, EΓ est donné (car il équivaut au carré de la tangente menée du point E) ; donc, le rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ est donné aussi [2]. Et la droite ΔE est donnée ; donc, la droite EΘ est donnée aussi [3]. Mais, cette droite est donnée aussi de position et le point E est donné ;



précédentes 105, 107 et 108 résolvent le même problème dans le cas où l'un des trois points en ligne droite est éloigné à l'infini.

Une première généralisation de ce problème, c'est-à-dire inscrire, dans un cercle donné, un triangle dont les côtés passent par trois points donnés, est connue sous le nom de Problème de Castillon. Résolu d'abord par ce géomètre, en 1776, il l'a été ensuite de différentes manières par Lagrange, Euler, Fuss, Lexel, Giordano di Ottajano et Malfatti. Une seconde généralisation, c'est-à-dire inscrire, à un cercle donné, une figure rectiligne dont les côtés en nombre quelconque donné passent respectivement par des points donnés, est due à Lorgna, en 1787. On résout actuellement en géométrie projective la généralisation : Inscrire, dans une conique donnée Γ, un polygone $A_1 A_2 A_3 .. A_n$ dont les côtés $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots A_n A_1$ passent par des points donnés $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$. On trouvera une solution du problème de Castillon dans l'ouvrage de Catalan : *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*. Sixième édition, Paris, 1879, p. 222.

1. Les droites BH, ΔZ, parallèles par construction, donnent : $\widehat{BH\Gamma} = \widehat{\Gamma\Theta Z}$. Or, on a dans le même cercle : $\widehat{BH\Gamma} = \widehat{BA\Gamma}$; donc : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma\Theta Z}$. Or, $\widehat{\Gamma\Theta Z} + \widehat{\Gamma\Theta\Delta} = 2$ angles droits ; donc : $\widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Gamma\Theta\Delta} = 2$ angles droits ; donc, les points A, Γ, Θ, Δ sont concycliques et, considérant les sécantes AE, EΔ du cercle, on a, comme le texte : $AE \times E\Gamma = \Delta E \times E\Theta$.

2. On a : $AE \times E\Gamma =$ carré de la tangente menée du point E au cercle ABΓ. Or, le cercle ABΓ et le point E sont donnés ; donc, cette tangente est donnée aussi (Euclide, *Données*, prop. 91, énoncée p. 619, n. 4) ; donc, comme le texte, $AE \times E\Gamma$ est donné, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente, $\Delta E \times E\Theta$ est donné aussi.

3. Euclide, *Données*, prop. 57, énoncée p. 144, n. 5.

donc, le point Θ est donné aussi (1). Or, le point Z est donné aussi ; donc, on en arrive à briser la droite ΘΓZ, à partir des deux points donnés Θ, Z, faisant en sorte que la droite BH soit parallèle à la droite ΘEZ. Or, cela a été exposé précédemment (2). En conséquence, le point Γ est donné. Mais, le point E est donné aussi ; donc, la droite ΓE est donnée de position (3). Mais, le cercle est donné aussi (4) ; donc, le point A est donné (5). Et le point Δ est donné aussi ; donc, la droite ΔA est donnée aussi de position ; ce qu'il fallait démontrer.

La synthèse du problème se fera de la manière suivante : Soit le cercle ABΓ ; soient Δ, E, Z les trois points donnés sur la même droite ; posons le rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ équivalent au carré de la tangente (6) et, les deux points Θ, Z étant ainsi donnés, brisons, à partir des points Θ, Z, la ligne ΘΓZ sur le cercle de manière que la droite BH soit parallèle à la droite ΘZ (7) ; [menons la droite de jonction EΓ et prolongeons-la jusqu'au point A] (8) ; je dis que la ligne qui passe par les points A, B, Δ est droite.

En effet, puisque chacun des rectangles compris sous les droites AE, EΓ et sous les droites ΔE, EΘ équivaut au carré de la tangente menée du point E, le rectangle compris sous les droites AE, EΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ. En conséquence, les points Δ, Θ, Γ, A sont dans un cercle (9). Et puisque l'angle compris sous les droites BH, HΓ est égal à l'angle compris sous les droites ΓΘ, ΘZ (10), mais que, dans le cercle, l'angle compris sous les droites BH, HΓ est égal à l'angle compris sous les droites BA, AΓ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites BA, AΓ est égal à l'angle compris sous les droites ΓΘ, ΘZ. Et les points A, Γ, Θ, Δ sont dans un cercle ;

1. EUCLIDE, *Données*, prop. 27, énoncée p. 30, n. 1.
2. Voir proposition 105, ou lemme X, p. 640.
3. EUCLIDE, *Données*, prop. 26, énoncée p. 214, n. 5.
4. Sous-entendu : θέσει, de position.
5. EUCLIDE, *Données*, prop. 25, énoncée p. 231, n. 4.
6. C'est-à-dire équivalent au carré de la tangente menée du point E au cercle ABΓ.
7. Problème résolu à la proposition 105, ou lemme X, voir p. 640.
8. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 344, l. 39).
9. Voir la note relative au même passage dans la partie analytique de la proposition.
10. Parce que les droites BH, ΘZ sont parallèles par construction.

donc, la droite AB est sur la même droite que la droite BΔ ([1]) ; ce qu'il fallait démontrer.

Restent les cas de ce problème ; ils se ramènent, en effet, aux cas du dix-septième problème ([2]).

XXIII.

Proposition 118. — Soient deux cercles AB, ΓΔ ; prolongeons la droite AΔ et faisons en sorte que la droite EH soit à la droite HZ comme le rayon du cercle AB est au rayon du cercle ΓΔ ; je dis que, si une droite menée du point H, coupant le cercle ΓΔ, est prolongée, elle coupe aussi le cercle AB ([3]).

En effet, prenons les points E, Z, centres des cercles ; menons du point H la droite HΘ tangente au cercle ΓΔ ; menons la droite de jonction ZΘ, et menons la droite EK parallèle [à la droite ZΘ] ([4]). Dès lors, puisque la droite EK est à la droite ZΘ

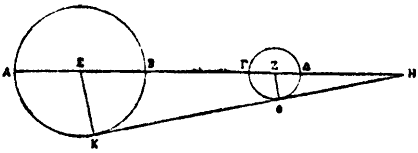
---

1. On a : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma\Theta Z}$. Or, $\widehat{\Gamma\Theta Z} + \widehat{\Gamma\Theta\Delta} = 2$ angles droits ; donc : $\widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Gamma\Theta\Delta} = 2$ angles droits. Or, on a démontré que les points A, Γ, Θ, Δ sont concycliques ; donc : $\widehat{\Delta A\Gamma} + \widehat{\Gamma\Theta\Delta} = 2$ angles droits ; donc : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Delta A\Gamma}$, c'est-à-dire que les droites BA et AΔ se confondent. Il se peut aussi, comme le suppose Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 851, en note), que la conclusion vise une démonstration apagogique, c'est-à-dire par l'absurde, faisant valoir que, si AB ne se confond pas avec AΔ, on aura : $\widehat{BA\Gamma} \lessgtr \widehat{\Delta A\Gamma}$.

2. Le sens de cette phrase a échappé à Commandin, qui l'abandonne dans sa version latine en disant : « Post haec in graeco codice nonnulla leguntur, quae fortasse supervacanea sunt, neque enim quid sibi velint satis intelligere possum. » (Cfr. *loc. cit.*, p. 344, l. 47). Le texte semble toutefois signifier que le problème conserve divers cas qui correspondent à ceux de la proposition XVII perdue d'Apollonius ; proposition pour laquelle Pappus a donné plus haut les propositions 107 et 108, qui sont des cas particuliers de la proposition 117, dans lesquels le troisième point est reporté à l'infini sur la droite qui relie les deux autres points.

3. L'énoncé de cette proposition manquant de précision, Camerer a proposé de le reconstituer comme suit (cfr. *loc. cit.*, p. 110) : Dati sint duo circuli AB, ΓΔ non ex eodem centro descripti, sintque centra eorum E, Z, jungaturque recta EZ : dico sumi posse in ipsa recta EZ, et, si circuli sint inaequales, major nempe circulus AB, minor vero circulus ΓΔ, sumi posse praeterea in recta EZ ultra Z producta punctum H tale, ut sit EH ad HZ in eadem ratione ac radius circuli AB ad radium circuli ΓΔ, ductaque ex puncto H recta quacunque, quae secet alterutrum circulorum, v. g. circulum ΓΔ, dico eandem productam secare etiam alterum circulum AB. » Cet énoncé est exprimé en un latin assez facile pour pouvoir nous abstenir de le traduire, et Camerer le fait suivre d'une démonstration parfaite, qui lève les obscurités de la démonstration de Pappus.

4. Restauration proposée par Hultsch (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 852, *l.* 3).



comme la droite EH est à la droite HZ, la ligne passant par les points H, Θ, K est droite [1]. Et l'angle Θ est droit ; donc l'angle K est droit aussi ; en sorte que, si la droite menée du point H est tangente au cercle ΓΔ, et si on la prolonge, elle est aussi tangente au cercle AB. Mais, les droites qui coupent le cercle ΓΔ sont situées entre les points Δ, Θ ; donc, si on les prolonge, elles seront situées entre les points K, B. Or, la droite HK est tangente [2] ; donc, une droite située entre les points B, K et Δ, Θ est sécante. Mais, cette même droite coupe aussi le cercle ΓΔ ; donc, la droite menée du point H en coupant le cercle ΓΔ coupe aussi le cercle AB.

Le premier livre *Des Contacts* contient sept problèmes, et le second livre quatre problèmes.

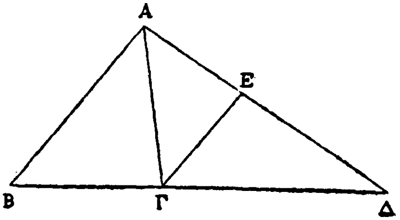
LES PREMIER ET SECOND LIVRES DES LIEUX PLANS. LEMME POUR LE PREMIER LIEU DU SECOND LIVRE.

I.

Proposition 119. — Soit le triangle ABΓ ; menons une droite AΔ, et que le carré de la droite BA soit au carré de la droite AΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ ; je dis que le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔΓ devient équivalent au carré de la droite AΔ.

Menons par le point Γ la droite ΓE parallèle à la droite AB ; il s'ensuit que la droite AB est à la droite ΓE, et que le carré de la droite AB est au rectangle compris sous les droites AB, ΓE, comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ. Or, le carré de la droite AB est au carré de la droite AΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔΓ ; donc, le rectangle compris sous les droites BA, ΓE équivaut au carré de la droite ΓA. En conséquence, ces droites sont

1. Voir livre IV, proposition 13 (p. 159 et notes), où cette conclusion est démontrée de deux manières différentes, dont l'une est apagogique.
2. Sous-entendu : au cercle AB.



en proportion autour d'angles égaux alternes ; donc, l'angle compris sous les droites ΓΑ, ΑΔ est égal à l'angle B ; en sorte que le rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΓ équivaut au carré de la droite ΔΑ [1].

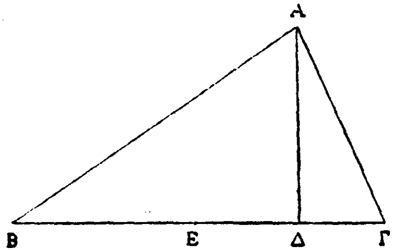
Quant à la réciproque, elle est évidente.

POUR LE SECOND LIEU.

II.

Proposition 120. — Soit le triangle ΑΒΓ et soit la perpendiculaire ΑΔ ; je dis que l'excédent des carrés des droites ΒΑ, ΑΓ équivaut à l'excédent des carrés des droites ΒΔ, ΔΓ et que, si la droite ΒΓ est divisée en deux parties égales au point E, l'excédent des carrés des droites ΒΔ, ΔΓ équivaut à deux fois le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΕΔ.

Il est évident que l'excédent des carrés des droites ΒΑ, ΑΓ équivaut à l'excédent des carrés des droites ΔΒ, ΔΓ ; car le carré de la droite ΑΒ équivaut aux carrés des droites ΒΔ, ΑΔ, et le carré de la droite ΑΓ équivaut aux carrés des droites ΑΔ, ΔΓ ; par conséquent, les carrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassent les carrés des droites ΑΔ, ΔΓ de ce que le carré de la droite ΑΒ surpasse le carré de la droite ΑΓ. Retranchons le carré de la droite



1. La similitude de triangles donne : $\frac{AB}{\Gamma E}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{AB}^2}{AB\times\Gamma E}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$. Or, par hypothèse, on a : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A\Gamma}^2}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$; donc : $\frac{\overline{AB}^2}{AB\times\Gamma E}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A\Gamma}^2}$, d'où, comme le texte : $AB\times\Gamma E=\overline{A\Gamma}^2$; d'où : $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$. Or, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux ; donc, les triangles ΒΑΓ, ΑΓΕ sont semblables ; donc : $\widehat{\Gamma A\Delta}=\widehat{AB\Gamma}$; donc, les triangles ΑΒΔ, ΓΑΔ ayant l'angle Δ commun sont semblables, d'où : $\frac{B\Delta}{\Delta A}=\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$, d'où, comme le texte : $B\Delta\times\Delta\Gamma=\overline{\Delta A}^2$.

AΔ, il reste donc le carré de la droite AB surpassant le carré de la droite AΓ de ce que le carré de la droite BΔ surpasse le carré de la droite ΔΓ (1).

Et l'on démontre de la manière suivante que l'excédent des carrés des droites BΔ, ΔΓ est deux fois le rectangle compris sous les droites BΓ, ΔE.

En effet, puisque la droite BE est égale à la droite EΓ, la droite BΔ est donc égale à la somme des droites ΓE, EΔ ; par conséquent, le carré de la droite BΔ équivaut aussi au carré de la somme des droites ΓE, EΔ. Mais, le carré de la somme des droites ΓE, EΔ surpasse le carré de la droite ΓΔ de quatre fois le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ, c'est-à-dire de deux fois le rectangle compris sous les droites BΓ, EΔ ; donc, l'excédent des carrés des droites BΔ, ΔΓ est deux fois le rectangle compris sous les droites BΓ, ΔE (2).

POUR LE MÊME LIEU (3), DANS LE CAS OU LE RAPPORT N'EST PAS D'ÉGALE A ÉGALE GRANDEUR.

III.

Proposition 121. — Soit le triangle ABΓ, et que le carré de la droite BA soit à l'égard du carré de la droite AΓ, plus grand d'une aire donnée qu'en raison (4) ; l'aire donnée étant E, et que ce soit en raison de la droite BΔ à la droite ΔΓ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΔB, BΓ est plus grand que l'aire E (5).

1. On a : $\overline{AB}^2 = \overline{B\Delta}^2 + \overline{A\Delta}^2$ et $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{A\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2$; donc : $\overline{AB}^2 - \overline{A\Gamma}^2 = \overline{B\Delta}^2 + \overline{A\Delta}^2 - (\overline{A\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2)$ ou, comme le texte : $\overline{AB}^2 - \overline{A\Gamma}^2 = \overline{B\Delta}^2 - \overline{\Delta\Gamma}^2$.

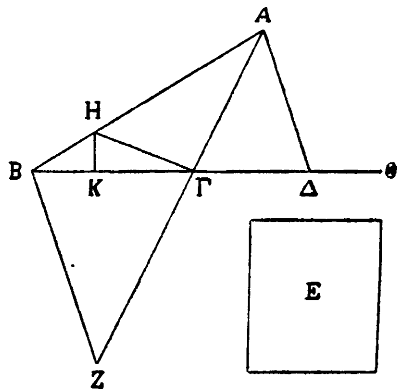
2. On par hypothèse : $BE = E\Gamma$; donc : $B\Delta = BE + E\Delta = \Gamma E + E\Delta$, d'où : $\overline{B\Delta}^2 = (\Gamma E + E\Delta)^2 = (\Gamma\Delta + 2E\Delta)^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + 4\,(\Gamma\Delta \times E\Delta + \overline{E\Delta}^2)$. Or, considérant la droite EΓ divisée en parties inégales en Δ on a (Euclide, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2) : $\Gamma E \times E\Delta = \Gamma\Delta \times E\Delta + \overline{E\Delta}^2$; donc : $\overline{B\Delta}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + 4\Gamma E \times E\Delta = \overline{\Gamma\Delta}^2 + 2B\Gamma \times E\Delta$, d'où, comme le texte : $\overline{B\Delta}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2 = 2B\Gamma \times E\Delta$.

3. C'est-à-dire pour le même second lieu du second livre d'Apollonius sur *Les Lieux plans*.

4. δοθέντι μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ. Voir au sujet de cette expression singulière : Euclide, *Données*, définition 11, énoncée p. 92, n. 1.

5. Cet énoncé s'exprime algébriquement : Soit : $\frac{\overline{BA}^2 - E}{\overline{A\Gamma}^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, il faut démontrer que l'on aura : $\Delta B \times B\Gamma > E$.

En effet, retranchons, comme étant l'aire donnée, le rectangle compris sous les droites AB, BH ; il s'ensuit que le rapport du rectangle compris sous les droites BA, AH au carré de la droite AΓ est donné, c'est-à-dire est le même que celui de la droite BΔ à la droite ΔΓ. Posons le rectangle compris sous les droites ZA, AΓ équivalent au rectangle compris sous les droites BA, AH ; il s'ensuit que le rapport du rectangle restant compris sous les droites ZA, AΓ au carré de la droite AΓ, c'est-à-dire le rapport de la droite ZA à la droite AΓ, est le même que celui de la droite BΔ à la droite ΔΓ. En conséquence, la droite AΔ est parallèle à la droite ZB ; donc, l'angle Z est égal à l'angle compris sous les droites ΓA, AΔ (1). Mais, l'angle Z est égal à l'angle compris sous les droites AH, HΓ ; donc, l'angle compris sous les droites AH, HΓ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΓA, AΔ (2). Or, l'angle compris sous les droites AΔ, ΔΘ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΓA, AΔ ; donc, l'angle compris sous les droites AΔ, ΔΘ est aussi plus grand que l'angle compris sous les droites ΓH, HA (3) ; en sorte que le



1. Posons : $BA \times BH = E$. Dès lors, la relation d'hypothèse de la note précédente devient : $\frac{\overline{BA}^2 - BA \times BH}{\overline{A\Gamma}^2} = \frac{BA\,(BA - BH)}{\overline{A\Gamma}^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, ou, comme le texte : $\frac{BA \times AH}{\overline{A\Gamma}^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$. Posons : $ZA \times A\Gamma = BA \times AH$; donc : $\frac{ZA \times A\Gamma}{\overline{A\Gamma}^2} = \frac{ZA}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{ZA - A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{B\Delta - \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{Z\Gamma}{A\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{Z\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}$, d'où (EUCLIDE, liv. VI, prop. 6, énoncée p. 158, n. 2) : similitude des triangles BΓZ, AΓΔ, d'où : $\widehat{BZA} = \widehat{\Gamma A\Delta}$, d'où (EUCLIDE, liv. I, prop. 27, énoncée p. 124, n. 5) parallélisme des droites AΔ, ZB.

2. On a posé : $ZA \times A\Gamma = BA \times AH$, d'où : $\frac{ZA}{BA} = \frac{AH}{A\Gamma}$, d'où (EUCLIDE, liv. VI, prop. 6) similitude des triangles BAZ, HAΓ, d'où : $\widehat{BZA} = \widehat{AH\Gamma}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente : $\widehat{AH\Gamma} = \widehat{\Gamma A\Delta}$.

3. On a évidemment : $\widehat{A\Delta\Theta} > \widehat{\Gamma A\Delta}$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : $\widehat{A\Delta\Theta} > \widehat{AH\Gamma}$.

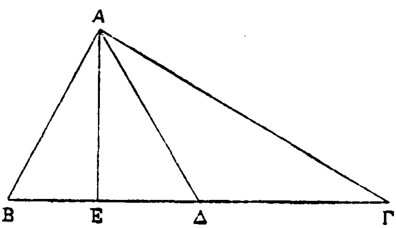
rectangle compris sous les droites ΔB, BΓ est plus grand que le rectangle compris sous les droites AB, BH, c'est-à-dire plus grand que l'aire donnée E [1].

POUR LE TROISIÈME LIEU.

IV.

Proposition 122. — Si l'on a le triangle ABΓ, et si l'on mène une droite AΔ coupant en deux parties égales la droite BΓ, je dis que les carrés des droites BA, AΓ sont le double des carrés des droites AΔ, ΔΓ.

Menons la perpendiculaire AE. Or, les carrés des droites BE, EΓ sont le double des carrés des droites BΔ, EΔ, et deux fois le carré de la droite AE, conjointement avec deux fois le carré de la droite ΔE, est aussi le double du carré de la droite AΔ ; tandis que les carrés des droites BE, EΓ, conjointement avec deux fois le carré de la droite AE, valent les carrés des droites BA, AΓ ; par conséquent, les carrés des droites BA, AΓ sont le double des carrés des droites BΔ, ΔA, c'est-à-dire des carrés des droites ΓΔ, ΔA [2].



1. On a : $\widehat{A\Delta\Theta} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 2$ angles droits. Or, puisqu'on a (note précédente) : $\widehat{AH\Gamma} < \widehat{A\Delta\Theta}$, posons : $\widehat{AHK} = \widehat{A\Delta\Theta}$; donc : $\widehat{AHK} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 2$ angles droits ; donc, le quadrilatère AHKΔ est inscriptible dans un cercle, d'où, considérant les sécantes BA, BΔ de ce cercle : $\Delta B \times BK = AB \times BH$. Or, $B\Gamma > BK$; donc, comme le texte : $\Delta B \times B\Gamma > AB \times BH$ ou : $\Delta B \times B\Gamma > E$.

2. Explicitement : considérant la droite BΓ partagée en parties égales en Δ et inégales en E, on a (Euclide, liv. II, prop. 9 : « Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, les carrés des segments inégaux de la droite entière sont doubles du carré de la moitié de cette droite et du carré de la droite placée entre les sections. » Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 102), c'est-à-dire que l'on a l'identité : $a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2\right]$; donc $\overline{BE}^2 + \overline{E\Gamma}^2 = 2(\overline{B\Delta}^2 + \overline{E\Delta}^2)$ (I). Or, le triangle rectangle AEΔ donne, comme le texte : $2\overline{AE}^2 + 2\overline{E\Delta}^2 = 2\overline{A\Delta}^2$ (II) ; tandis qu'on a : $\overline{BA}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{AE}^2$ et $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{E\Gamma}^2$; donc : $\overline{BA}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{E\Gamma}^2 + 2\overline{AE}^2$, d'où, en présence de la relation (I), il vient : $\overline{BA}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = 2(\overline{B\Delta}^2 + \overline{E\Delta}^2 + \overline{AE}^2)$, d'où, en présence de la relation (II), il vient : $\overline{BA}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = 2(\overline{B\Delta}^2 + \overline{A\Delta}^2) = 2(\overline{\Delta\Gamma}^2 + \overline{A\Delta}^2)$.

V.

Proposition 123. — Ayant le rapport de la droite AB à la droite ΒΓ et l'aire comprise sous les droites ΓΑ, ΑΔ, si l'on prend la moyenne proportionnelle BE des droites ΔΒ, ΒΓ, démontrer que le carré de la droite AE est, à l'égard du carré de la droite ΕΓ, plus grand du rectangle compris sous les droites ΓΑ, ΑΔ, qu'en raison de la droite AB à la droite ΒΓ ([1]).

En effet, faisons en sorte qu'une autre droite ZE soit à la droite ΕΓ comme la droite AB est à la droite ΒΓ ; il s'ensuit que, par division, la droite ΖΓ est aussi à la droite ΓΕ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΒ. En conséquence, la droite entière AZ est à la droite entière BE comme la droite ΑΓ est à la droite ΒΓ ; donc, par permutation, la droite EB est à la droite ΒΓ comme la droite ZA est à la droite ΑΓ ([2]). Or, la droite ΔΕ est à la droite ΕΓ comme la droite EB est à la droite ΒΓ, parce qu'on a la moyenne proportionnelle ; donc, la droite ΕΔ est aussi à la droite ΓΕ comme la droite ZA est à la droite ΑΓ. Égalons aire à aire, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AZ, ΕΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΔΕ ([3]). Or,

1. C'est-à-dire qu'il faut démontrer la relation : $\frac{\overline{AE}^2 - \Gamma A \times A\Delta}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{AB}{B\Gamma}$. Ce lemme V, ou proposition 123, ainsi que le lemme suivant VI, ou proposition 124, doivent être considérés comme deux cas particuliers d'une même proposition démontrée par Robert Simson dans sa reconstitution du traité perdu d'Apollonius sur *Les Lieux plans* (*Apollonii Pergaei locorum planorum libri II restituti a Rob. Simson*. Glasguae, 1749, in-4°, voir pp. 136-146). On trouvera la même proposition dans la traduction de l'ouvrage de Simson donnée par Camerer sous le titre : *Apollonius von Pergen ebene Oerter. Wiederhergestellt von Robert Simson. Aus dem Lateinischen übersetzt von Johann Wilhelm Camerer*. Lipsiae, 1796, in-8° ; voir pp. 236-248.

2. Explicitement : Prenons un point Z tel que l'on ait : $\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{ZE - E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{AB - B\Gamma}{B\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{Z\Gamma}{E\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 12, énoncée p. 67, n. 1) : $\frac{Z\Gamma + A\Gamma}{E\Gamma + B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{AZ}{BE} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{BE}{B\Gamma} = \frac{AZ}{A\Gamma}$.

3. On a par hypothèse : $\Delta B \times B\Gamma = \overline{BE}^2$, d'où : $\frac{\Delta B}{BE} = \frac{BE}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{\Delta B - BE}{BE} =$

le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΓΕ surpasse le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΓ du rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΓ, et le rectangle [compris sous les droites ΑΓ, ΔΕ surpasse aussi le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΓ] (1) de ce que le rectangle [compris sous les droites ΑΖ, ΕΓ surpasse le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΓ ; donc, le rectangle] (2) compris sous les droites ΑΓ, ΔΕ surpasse le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΓ du rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΓ (3). Or, le carré de la droite ΑΕ surpasse aussi le rectangle compris sous les droites ΓΑ, ΑΔ de ce que le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΔΕ surpasse le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΓ ; donc, le carré de la droite ΑΕ surpasse le rectangle compris sous les droites ΓΑ, ΑΔ du rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΓ (4). Or, le rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΓ a avec le carré de la droite ΕΓ le même rapport que celui de la droite ΑΒ avec la droite ΒΓ ; de sorte que le carré de la droite ΑΕ est, à l'égard du carré de la droite ΕΓ, plus grand du rectangle compris sous les droites ΓΑ, ΑΔ, qu'en rapport de la droite ΑΒ à la droite ΒΓ (5).

$\frac{\mathrm{BE}-\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$ ou : $\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente : $\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{A\Gamma}}$, d'où : $\Delta\mathrm{E} \times \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AZ} \times \mathrm{E\Gamma}$.

1. et 2. Les deux phrases mises entre crochets ont été reconstituées conjecturalement par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 350, l. 40), d'une manière qui paraît introduire inutilement une relation intermédiaire.

3. On a : $\mathrm{AZ} = \mathrm{AE} + \mathrm{EZ}$, d'où, comme le texte : $\mathrm{AZ} \times \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} + \mathrm{EZ} \times \mathrm{E\Gamma}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note avant-précédente : $\Delta\mathrm{E} \times \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} + \mathrm{EZ} \times \mathrm{E\Gamma}$.

4. La relation de la note précédente donne : $\Delta\mathrm{E}\times\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AE}\times\mathrm{E\Gamma} = \mathrm{EZ}\times\mathrm{E\Gamma}$. Or, considérant la droite ΑΓ partagée inégalement en E, on a (Euclide, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2) : $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{AE} = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} + \overline{\mathrm{AE}}^2$ ou : $\mathrm{A\Gamma}(\Delta\mathrm{E} + \mathrm{A\Delta}) = \Delta\mathrm{E} \times \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} + \overline{\mathrm{AE}}^2$, d'où : $\Delta\mathrm{E} \times \mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} = \overline{\mathrm{AE}}^2 - \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta}$; donc, comme le texte : $\overline{\mathrm{AE}}^2 - \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta} = \mathrm{EZ} \times \mathrm{E\Gamma}$.

5. On a par construction : $\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\mathrm{ZE} \times \mathrm{E\Gamma}}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente : $\frac{\overline{\mathrm{AE}}^2 - \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta}}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$.

VI.

Proposition 124. — Soient le rapport de la droite AB à la droite BΓ et l'aire comprise sous les droites ΓA, AΔ. Si l'on prend la moyenne proportionnelle BE des droites ΔB, BΓ, je dis que le carré de la droite AE est, à l'égard du carré de la droite EΓ, plus grand du rectangle compris sous les droites ΓA, AΔ, qu'en rapport de la droite AB à la droite BΓ (1).

En effet, faisons en sorte qu'une autre droite EZ soit à la droite ΓE comme la droite AB est à la droite BΓ, il s'ensuit que, par division, la droite restante ZA est aussi à la droite restante BE comme la droite AΓ est à la droite BΓ (2). Par permutation, la droite EB est à la droite BΓ comme la droite ZA est à la droite AΓ. Or, la droite ΔE est

à la droite EΓ comme la droite EB est à la droite BΓ; donc, la droite ΔE est aussi à la droite ΓE comme la droite ZA est à la droite AΓ. Égalons l'aire à l'aire, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ZA, ΓE équivaut au rectangle compris sous les droites EΔ, AΓ (3). Ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites AE, EΓ conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΓA, AΔ; il s'ensuit que le carré entier de la droite AE équivaut au rectangle entier compris sous les droites ZE, EΓ augmenté du rectangle compris sous les droites ΓA, AΔ; de sorte que le carré de la droite AE est, à l'égard du carré de la droite EΓ, plus grand du rectangle compris sous les droites ΓA, AΔ, qu'en rapport de la droite AB à la droite BΓ;

---

1. Il faut démontrer la relation : $\frac{\overline{AE}^2 - \Gamma A \times A\Delta}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{AB}{B\Gamma}$, c'est-à-dire la même relation qui a été démontrée dans la proposition précédente; le point E étant pris ici à l'extérieur du segment AB.

2. Déterminons le point Z tel que l'on ait : $\frac{EZ}{\Gamma E} = \frac{AB}{B\Gamma}$ (I), d'où : $\frac{EZ - \Gamma E}{\Gamma E} = \frac{AB - B\Gamma}{B\Gamma}$ ou : $\frac{Z\Gamma}{\Gamma E} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{Z\Gamma - A\Gamma}{\Gamma E - B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{ZA}{BE} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$.

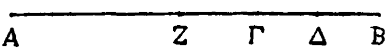
3. La dernière relation de la note précédente donne par permutation : $\frac{BE}{B\Gamma} = \frac{ZA}{A\Gamma}$ (I). Or, on a par construction : $\frac{\Delta B}{BE} = \frac{BE}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{\Delta B + BE}{BE + B\Gamma} = \frac{BE}{B\Gamma}$, ou comme le texte : $\frac{\Delta E}{E\Gamma} = \frac{BE}{B\Gamma}$, d'où, en présence de la relation (I), on a : $\frac{\Delta E}{E\Gamma} = \frac{ZA}{A\Gamma}$, d'où : $\Delta E \times A\Gamma = ZA \times E\Gamma$.

car le rectangle compris sous les droites ΖΕ, ΕΓ a le même rapport avec le carré de la droite ΕΓ. (1)

VII.

Proposition 125. — Soient la droite ΑΒ et deux points Γ, Δ ; je dis que si, l'on additionne le carré de la droite ΑΔ et l'aire qui a avec le carré de la droite ΔΒ le rapport de la droite ΑΓ à la droite ΓΒ, on obtient le carré de la droite ΑΓ augmenté de l'aire ayant avec le carré de la droite ΓΒ le rapport de la droite ΑΓ avec la droite ΓΒ et augmenté de l'aire ayant avec le carré de la droite ΓΔ le rapport de la droite ΑΒ à la droite ΒΓ (2).

Faisons en sorte que le rapport de la droite ΖΔ à la droite ΔΒ devienne le même que celui de la droite ΑΓ à la droite ΓΒ. Dès lors, par composition, la droite restante ΖΑ est aussi à la droite restante ΓΔ, c'est-à-dire que le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΓΔ est au carré de la droite ΓΔ, comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ (3) ; de sorte que le rectangle compris sous les droites ΖΔ, ΔΒ a même rapport avec le carré de la droite ΔΒ que la droite ΑΓ avec la droite ΓΒ ; que le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ a avec le carré



1. La dernière égalité de la note précédente, mise sous la forme : $(\mathrm{\Delta\Gamma}+\mathrm{\Gamma E})\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{ZA} \times \mathrm{E\Gamma}$ peut s'écrire : $\mathrm{\Delta\Gamma} \times \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{A\Gamma} + (\mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta}) = \mathrm{ZA} \times \mathrm{E\Gamma} + (\mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta})$ ou : $(\mathrm{\Delta\Gamma} + \mathrm{A\Delta})\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} = (\mathrm{ZA} + \mathrm{AE})\mathrm{E\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta}$ ou : $(\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + \mathrm{\Gamma E} \times \mathrm{A\Gamma}) + \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{ZE} \times \mathrm{E\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta}$ ou : $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{AE} + \mathrm{AE} \times \mathrm{E\Gamma} = \overline{\mathrm{AE}}^2 = \mathrm{ZE} \times \mathrm{E\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta}$, d'où : $\overline{\mathrm{AE}}^2 - \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta} = \mathrm{ZE} \times \mathrm{E\Gamma}$; donc : $\frac{\overline{\mathrm{AE}}^2 - \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta}}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2} = \frac{\mathrm{ZE} \times \mathrm{E\Gamma}}{\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2} = \frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}}$, d'où, en présence de la relation de position (I) de la note 2 de la page 665, il vient, comme dans le texte : $\frac{\overline{\mathrm{AE}}^2 - \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta}}{\mathrm{E\Gamma}^2} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$.

2. Il faut donc démontrer la relation : $\overline{\mathrm{A\Delta}}^2 + \frac{\overline{\mathrm{\Delta B}}^2 \times \mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} + \frac{\overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2 \times \mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$.

3. Soit Z le point tel que l'on ait : $\frac{\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma B}}$, d'où : $\frac{\mathrm{Z\Delta} + \mathrm{\Delta B}}{\mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma B}}{\mathrm{\Gamma B}}$ ou : $\frac{\mathrm{ZB}}{\mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{\Gamma B}}$; d'où : $\frac{\mathrm{AB} - \mathrm{ZB}}{\mathrm{\Gamma B} - \mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$ ou, comme le texte : $\frac{\mathrm{ZA}}{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où : $\frac{\mathrm{ZA} \times \mathrm{\Gamma\Delta}}{\overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$.

de la droite ΓΒ [le même rapport que la droite ΑΓ avec la droite ΓΒ] (1), et que le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΔΓ a avec le carré de la droite ΓΔ le même rapport que la droite ΑΒ avec la droite ΒΓ (2). Dès lors, je dis que le carré de la droite ΑΔ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΖ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ augmenté du rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΓΔ (3). Retranchons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites ΔΑ, ΑΓ, il se fait que le rectangle restant compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΖΔ, ΔΒ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΔΒ augmenté du rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΓΔ (4). Retranchons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΓΔ, il se fait donc que le rectangle compris sous les droites ΖΔ, ΔΓ conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΖΔ, ΔΒ, c'est-à-dire le rectangle entier compris sous les droites ΖΔ, ΓΒ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΔΒ. Or, il en est ainsi, car les droites ΑΓ, ΓΒ, ΖΔ, ΔΒ sont proportionnelles (5).

1. Restauration due à Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 353, l. 5).

2. La relation de construction : $\frac{Z\Delta}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$ de la note 3, p. 666 donne la proportion : $\frac{Z\Delta \times \Delta B}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$ (I) ; on a aussi la proportion : $\frac{A\Gamma \times \Gamma B}{\overline{\Gamma B}^2} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$ (II), et on a la dernière proportion de la note 3, page 666 : $\frac{ZA \times \Gamma\Delta}{\overline{\Gamma\Delta}^2} = \frac{AB}{B\Gamma}$ (III).

3. Les relations (I) et (III) de la note précédente donnent : $Z\Delta \times \Delta B = \frac{\overline{\Delta B}^2 \times A\Gamma}{\Gamma B}$ et $ZA \times \Gamma\Delta = \frac{\overline{\Gamma\Delta}^2 \times AB}{B\Gamma}$ d'où, par substitution dans la relation à démontrer (voir note 2, page 666), celle-ci devient : $\overline{A\Delta}^2 + Z\Delta \times \Delta B = \overline{A\Gamma}^2 + A\Gamma \times \Gamma B + ZA \times \Gamma\Delta$. Or, considérant la droite AB divisée en parties inégales en Γ, on a (Euclide, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2, c'est-à-dire l'identité $(a + b)\,a = a^2 + ab$) : $BA \times A\Gamma = \overline{A\Gamma}^2 + A\Gamma \times \Gamma B$; donc, la relation à démontrer devient : $\overline{A\Delta}^2 + Z\Delta \times \Delta B = BA \times A\Gamma + ZA \times \Gamma\Delta$.

4. La relation de la note précédente devient par différences d'aires : $(\overline{A\Delta}^2 - \Delta A \times A\Gamma) + Z\Delta \times \Delta B = (BA \times A\Gamma - \Delta A \times A\Gamma) + ZA \times \Gamma\Delta$. Or, considérant la droite ΑΔ partagée inégalement en Γ, on a (Euclide, liv. II, prop. 2 : « Si une droite est coupée à volonté, les rectangles contenus sous la droite entière et sous l'un et l'autre segment, sont égaux au carré de la droite entière ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 85) : $\overline{A\Delta}^2 = \Delta A \times \Gamma\Delta + \Delta A \times A\Gamma$, d'où : $\overline{A\Delta}^2 - \Delta A \times A\Gamma = \Delta A \times \Gamma\Delta$. D'autre part, on a : $BA \times A\Gamma - \Delta A \times A\Gamma = \Delta B \times A\Gamma$; donc, la relation à démontrer devient : $\Delta A \times \Gamma\Delta + Z\Delta \times \Delta B = \Delta B \times A\Gamma + ZA \times \Gamma\Delta$.

5. La dernière relation de la note précédente devient, par nouvelles différences d'aires : $(\Delta A \times \Gamma\Delta - AZ \times \Gamma\Delta) + Z\Delta \times \Delta B = \Delta B \times A\Gamma - AZ \times \Gamma\Delta + AZ \times \Gamma\Delta$

VIII.

Proposition 126. — Soient une droite AB donnée de position [ainsi que de grandeur] (1) et un point quelconque Γ (2) ; je dis qu'il y a sur la droite AB un point donné tel que le carré de la droite AΓ, augmenté de l'aire ayant un rapport donné avec le carré de la droite ΓB, équivaut à une aire donnée augmentée de l'aire ayant un rapport donné avec le carré de la droite comprise entre le point donné et le point Γ (3).

En effet, faisons en sorte que le rapport de la droite AΔ à la droite ΔB soit le même qu'un rapport donné ; il s'ensuit que le rapport de la droite AΔ à la droite ΔB est donné aussi ; en sorte que le point Δ est donné. Or, puisqu'on a une droite AB et deux points Δ, Γ, il s'ensuit que le

carré de la droite AΓ, augmenté de l'aire ayant avec le carré de la droite ΓB le même rapport que la droite AΔ avec la droite ΔB, équivaut au carré de la droite AΔ augmenté de l'aire ayant avec le carré de la droite ΔB le même rapport que la droite AΔ avec la droite ΔB et augmenté de l'aire ayant avec le carré de la droite ΔΓ le même rapport que la droite AB avec la droite BΔ. Or, l'aire ayant avec le carré de la droite ΔB le même rapport que la droite AΔ à la droite BΔ est le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB ; donc, le carré de la droite AΓ, augmenté de l'aire ayant avec le carré de la droite ΓB le même rapport que

ou, comme le texte : $Z\Delta \times \Gamma\Delta + Z\Delta \times \Delta B = \Delta B \times A\Gamma$, d'où : $Z\Delta\,(\Gamma\Delta + \Delta B) = \Delta B \times A\Gamma$ ou, comme le texte : $Z\Delta \times \Gamma B = \Delta B \times A\Gamma$; relation vérifiée par la relation de construction : $\frac{Z\Delta}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$.

1. Restauration de Camerer (καὶ μεγέθει), d'après celle de Simson, p. 166 de son ouvrage de reconstitution mentionné p. 663, n. 1.

2. Sous-entendu : sur la droite AB.

3. Cet énoncé un peu obscur peut s'exprimer en d'autres termes : Si on a le rapport : $\frac{A\Delta}{\Delta B} = m$; par conséquent, si on a le point Δ et l'aire rectangulaire $AB \times A\Delta$; et si l'on considère une aire α^2 telle que l'on ait : $\frac{\alpha^2}{\overline{\Gamma B}^2} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$, et une autre aire β^2 telle que l'on ait : $\frac{\beta^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2} = \frac{AB}{B\Delta}$, on doit démontrer que l'on aura la relation : $\overline{A\Gamma}^2 + \alpha^2 = AB \times A\Delta + \beta^2$.

la droite ΑΔ à la droite ΔΒ, aire qui est donnée, équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΑ, ΑΔ, qui est donné, augmenté de l'aire ayant avec le carré de la droite ΔΓ le même rapport que la droite ΑΒ avec la droite ΒΔ, aire qui est donnée (1).

Pareillement aussi, si le point donné est situé au delà de la droite ΑΒ, la démonstration suivra la même marche (2).

LIVRES I, II ET III DES PORISMES.

LEMME POUR LE PREMIER PORISME DU PREMIER LIVRE.

I

Proposition 127. — Soit la figure ΑΒΓΔΕΖΗ ; que la droite ΑΔ soit à la droite ΔΓ comme la droite ΑΖ est à la droite ΖΗ et menons la droite de jonction ΘΚ ; je dis que la droite ΘΚ est parallèle à la droite ΑΓ (3).

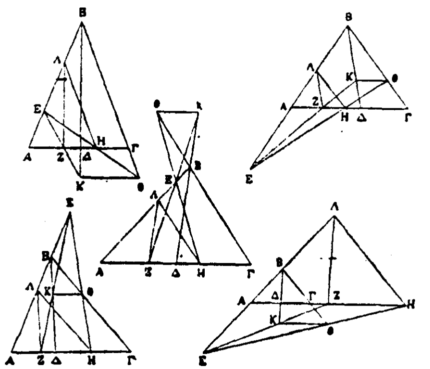
---

1. Le rapport $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta \mathrm{B}}$ étant donné, le point Δ est donné, d'où (Euclide, *Données*, prop. 7, énoncée p. 28, n. 4) le rectangle ΑΒ × ΑΔ est donné. Dès lors, on peut, comme dans le lemme VII (prop. 125) obtenir les aires : $\alpha^2 = \frac{\mathrm{A\Delta} \times \overline{\Gamma \mathrm{B}}^2}{\Delta \mathrm{B}}$, $\beta^2 = \frac{\mathrm{AB} \times \overline{\Delta\Gamma}^2}{\Delta \mathrm{B}}$ et $\gamma^2 = \frac{\mathrm{A\Delta} \times \overline{\Delta \mathrm{B}}^2}{\Delta \mathrm{B}} = \mathrm{A\Delta} \times \Delta\mathrm{B}$. Or, étant donnés la droite ΑΒ et les deux points Δ, Γ on se trouve dans les conditions du lemme VII prop. 125 qui a démontré la relation : $\overline{\mathrm{A}\Gamma}^2 + \alpha^2 = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 + \gamma^2 + \beta^2 = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 + \mathrm{A\Delta} \times \Delta\mathrm{B} + \beta^2$. Or, considérant la droite ΑΒ divisée en parties inégales en Δ, on a (Euclide, liv. II, prop. énoncée p. 232, n. 2, ou identité : $(a + b)\, a = a^2 + ab$) : $\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Delta} = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 + \mathrm{A\Delta} \times \Delta\mathrm{B}$; donc : $\overline{\mathrm{A}\Gamma}^2 + \alpha^2 = \mathrm{BA} \times \mathrm{A\Delta} + \beta^2$.

2. Michel Chasles a fait remarquer (*Aperçu historique*) que les huit lemmes de Pappus qui précèdent sur les Lieux Plans d'Apollonius peuvent être considérés tous comme des conséquences du second des théorèmes généraux de Stewart, c'est-à-dire que, si on a trois points A, C, B sur une ligne droite et un autre point D en dehors ou dans la direction de cette droite, on a la relation : $\overline{\mathrm{DA}}^2 \times \mathrm{BC} + \overline{\mathrm{DB}}^2 \times \mathrm{AC} - \overline{\mathrm{DB}}^2 \times \mathrm{AB} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{BC}$ (S. Matthew Stewart. *Some general theorems of considerable use in the higher mathematics*. Édimbourg, 1746, in-8°).

3. Cet énoncé sommaire est exprimé plus clairement par Robert Simson (voir l'ouvrage *Opera quaedam reliqua, etc.*, mentionné p. 486, n. 5) en un texte latin que nous traduisons : « Si, dans une droite, on a les points Α, Ζ, Δ, Η, tels que ΑΔ soit à ΔΓ comme ΑΖ est à ΖΗ ; si les droites ΖΕ, ΗΕ se brisent sur la droite ΑΒ ; si les droites ΔΒ, ΓΒ se brisent sur cette même droite ; si les droites issues des points Ζ, Δ se rencontrent au point Κ ; si les droites issues des points Η, Γ se rencontrent au point Θ, et si l'on mène la droite de jonction ΘΚ, la droite ΘΚ sera parallèle à la droites ΑΓ. » Ce lemme et les suivants, II, IV, V,

Menons par le point Z la droite ZΛ parallèle à la droite BΔ. Dès lors, puisque la droite AΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AZ est à la droite ZH, par inversion, composition et permutation, la droite ΓA est à la droite AH comme la droite AΔ est à la droite AZ, c'est-à-dire, à cause des parallèles, comme la droite BA est à la droite AΛ. En conséquence, la droite ΛH est parallèle à la droite BΓ ; donc, à cause des parallèles, la droite EK est à la droite KZ, et la droite EΘ est à la droite ΘH, comme la droite EB est à la droite BΛ ; donc, la droite EΘ est aussi à la droite ΘH comme la droite EK est à la droite KZ ; par conséquent, la droite ΘK est parallèle à la droite AΓ (1).



Au reste, cela se démontre de la manière suivante au moyen du rapport composé : Puisque la droite AΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AZ est à la droite ZH, par inversion, la droite ΓΔ est à la droite ΔA comme la droite HZ est à la droite ZA. Par composition, permutation et conversion, la droite AΓ est à la droite ΓH comme la droite AΔ est à la droite ΔZ (2). Mais, le

VI et VII (prop. 127, 128, 130, 131, 132 et 133) sont donc relatifs au quadrilatère coupé par une transversale, et établissent la relation qui existe entre les segments formés, sur cette transversale, par les quatre côtés du quadrilatère et ses deux diagonales. Le premier lemme (prop. 127) est toutefois relatif au cas où la transversale est parallèle à un côté du quadrilatère.

1. On a par hypothèse : $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AZ}{ZH}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}=\frac{ZH}{AZ}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma+A\Delta}{A\Delta}=\frac{ZH+AZ}{AZ}$ ou : $\frac{A\Gamma}{A\Delta}=\frac{AH}{AZ}$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{AH}=\frac{A\Delta}{AZ}$. Or, les droites BΔ, ΛZ sont parallèles par construction ; donc : $\frac{AB}{A\Lambda}=\frac{A\Delta}{AZ}$; donc : $\frac{A\Gamma}{AH}=\frac{AB}{A\Lambda}$, d'où similitude des triangles BAΓ, ΛAH, d'où parallélisme des droites ΛH, BΓ. Or, le parallélisme des droites BΔ, ΛZ, ou BK, ΛZ, donne aussi : $\frac{EK}{KZ}=\frac{EB}{B\Lambda}$, et les parallèles ΛH, BΓ, ou ΛH, BΘ, donnent : $\frac{EB}{B\Lambda}=\frac{E\Theta}{\Theta H}$; donc : $\frac{EK}{KZ}=\frac{E\Theta}{\Theta H}$, d'où, comme le texte, parallélisme des droites ΘK, AΓ.

2. On a par hypothèse : $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AZ}{ZH}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}=\frac{ZH}{AZ}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma+A\Delta}{A\Delta}=$

rapport de la droite AΔ à la droite ΔZ se compose de celui de la droite AB à la droite BE et de celui de la droite EΘ à la droite ΘH ; donc, le rapport composé de celui que la droite AB possède avec la droite BE et de celui que la droite EK possède avec la droite KZ est le même que le rapport composé de celui que la droite AB possède avec la droite BE et de celui que la droite EΘ possède avec la droite ΘH. Éliminons de part et d'autre le rapport de la droite AB à la droite BE ; il s'ensuit que le rapport restant de la droite EK à la droite KZ est le même que celui de la droite EΘ à la droite ΘH ; par conséquent, la droite ΘK est parallèle à la droite AΓ (1).

POUR LE SECOND PORISME.

II.

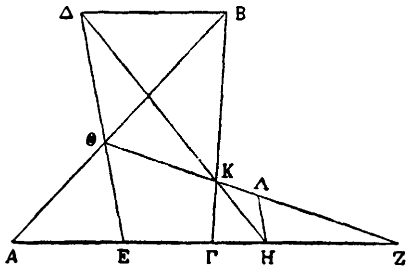
PROPOSITION 128. — Soit la figure ABΓΔEZHΘ ; que la droite AZ soit parallèle à la droite ΔB, et que la droite ΓH soit à la droite HZ comme la droite AE est à la droite EZ ; je dis que la ligne qui passe par les points Θ, K, Z est droite (2).

Menons par le point H la droite HΛ parallèle à la droite ΔE ; menons la droite de jonction ΘK et prolongeons-la jusqu'au point Λ. Dès lors, puisque la droite ΓH est à la droite HZ

$\frac{ZH + AZ}{AZ}$ ou : $\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{AH}{AZ}$, d'où : $\frac{A\Gamma}{AH} = \frac{A\Delta}{AZ}$, d'où : $\frac{A\Gamma}{A\Gamma - AH} = \frac{A\Delta}{A\Delta - AZ}$ ou, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{\Gamma H} = \frac{A\Delta}{\Delta Z}$.

1. Le parallélisme des droites BΔ, ΛZ donne : $\frac{A\Delta}{\Delta Z} = \frac{AB}{B\Lambda} = \frac{AB}{BE} \times \frac{BE}{B\Lambda}$, et le parallélisme des droites BΘ, ΛH donne : $\frac{BE}{B\Lambda} = \frac{E\Theta}{\Theta H}$; donc, comme le texte : $\frac{A\Delta}{\Delta Z} = \frac{AB}{BE} \times \frac{E\Theta}{\Theta H}$. D'autre part, on a : $\frac{A\Gamma}{\Gamma H} = \frac{AB}{B\Lambda} = \frac{AB}{BE} \times \frac{BE}{B\Lambda}$, et le parallélisme des droites BK, ΛZ donne : $\frac{EK}{KZ} = \frac{BE}{B\Lambda}$; donc : $\frac{A\Gamma}{\Gamma H} = \frac{AB}{BE} \times \frac{EK}{KZ}$. Dès lors, la dernière relation de la note précédente devient, comme le texte : $\frac{AB}{BE} \times \frac{EK}{KZ} = \frac{AB}{BE} \times \frac{E\Theta}{\Theta H}$ ou : $\frac{EK}{KZ} = \frac{E\Theta}{\Theta H}$, d'où parallélisme des droites ΘK, AΓ.

2. De même que dans le lemme précédent, la transversale est parallèle à un côté du quadrilatère.



comme la droite AE est la droite EZ, par permutation, la droite EZ est à la droite ZH comme la droite AE est à la droite ΓH. Or, la droite EΘ est à la droite HΛ comme la droite AE est à la droite ΓH (parce qu'il y a deux droites parallèles à deux droites, et par permutation) ; donc, la droite EΘ est à la droite HΛ comme la droite EZ est à la droite ZH (1). Et la droite EΘ est parallèle à la droite HΛ ; donc, la ligne qui passe par les points Θ, Λ, Z, [c'est-à-dire qui passe par les points Θ, K, Z] (2) est droite (3).

III.

Proposition 129. — Menons transversalement, sur trois droites AB, ΓA, ΔA, les droites ΘE, ΘΔ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΘB, ΔΓ est au rectangle compris sous les droites ΘΔ, BΓ comme le rectangle compris sous les droites ΘE, HZ est au rectangle compris sous les droites ΘH, ZE (4).

---

1. On a par hypothèse : $\frac{\Gamma H}{HZ}=\frac{AE}{EZ}$, d'où : $\frac{EZ}{HZ}=\frac{AE}{\Gamma H}$ (I). Or, les droites ΘΔ, HΛ sont parallèles par construction, d'où similitude des triangles KHΛ, ΔKΘ, d'où : $\frac{HK}{K\Delta}=\frac{H\Lambda}{\Delta\Theta}$. Or, les droites ΔB, ΓH sont parallèles par construction, d'où similitude des triangles ΓKH, BKΔ, d'où : $\frac{\Gamma H}{B\Delta}=\frac{HK}{K\Delta}$; donc : $\frac{\Gamma H}{B\Delta}=\frac{H\Lambda}{\Delta\Theta}$, d'où : $\frac{\Delta\Theta}{B\Delta}=\frac{H\Lambda}{\Gamma H}$. Or, les droites ΔB, AE sont parallèles, d'où similitude des triangles ΔΘB, AΘE, d'où : $\frac{\Delta\Theta}{B\Delta}=\frac{E\Theta}{AE}$; donc : $\frac{E\Theta}{AE}=\frac{H\Lambda}{\Gamma H}$. Permutons, on a : $\frac{E\Theta}{H\Lambda}=\frac{AE}{\Gamma H}$, d'où, en présence de la relation (I), il vient, comme dans le texte : $\frac{E\Theta}{H\Lambda}=\frac{EZ}{HZ}$.

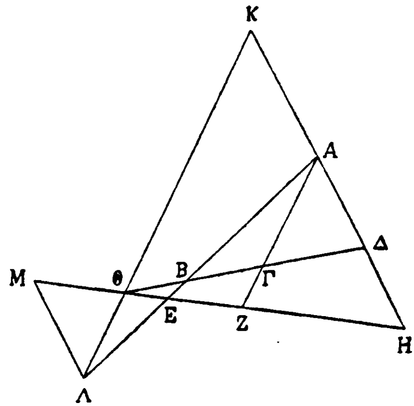
2. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 870, l. 2).

3. La relation de la note avant-précédente et le parallélisme des droites EΘ, HΛ permettent de conclure que les points Θ, K, Z sont en ligne droite, en vertu de la double démonstration de la proposition 13 du livre IV (voir p. 159 et notes).

La démonstration de ce lemme a permis à Chasles de reconstituer le second porisme du premier livre des porismes d'Euclide. Voir : *Les trois livres des Porismes, etc.*, p. 100.

1. Les manuscrits accompagnent cette proposition de plusieurs figures qui diffèrent d'après le point choisi comme origine des deux transversales. La version

Menons par le point Θ la droite ΚΛ parallèle à la droite ΖΓΑ, et que les droites ΔΑ, ΑΒ la rencontrent aux points Κ, Λ. D'autre part, menons par le point Λ la droite ΛΜ parallèle à la droite ΔΑ, et qu'elle rencontre la droite ΕΘ au point Μ. Dès lors, puisque la droite ΕΘ est à la droite ΘΛ comme la droite ΕΖ est à la droite ΖΑ, et que la droite ΘΛ est à la droite ΘΜ comme la droite ΑΖ est à la droite ΖΗ (car elles sont aussi comme la droite ΘΚ est à la droite ΘΗ, à cause des parallèles), il s'ensuit que, par raison d'identité, la droite ΕΘ est à la droite ΘΜ comme la droite ΕΖ est à la droite ΖΗ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΘΕ, ΗΖ équivaut au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΘΜ (2).



Mais, considérons un autre rectangle, compris sous les droites ΕΖ, ΘΗ ; le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΘΜ est donc au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΘΗ, c'est-à-dire que la droite ΘΜ est à la droite ΘΗ, ou que la droite ΛΘ est à la droite ΘΚ, comme le rectangle compris sous les droites ΕΘ, ΗΖ

latine de Commandin est accompagnée de sept figures (cfr. *loc. cit.*, p. 358). La première édition du texte grec du livre VII de Pappus, donnée par Gerhardt, présente la cinquième figure de Commandin ; tandis que l'édition critique de Hultsch, que nous suivons, adopte la seconde figure de Commandin, laquelle permet de suivre plus facilement la démonstration (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 870).

1. Les droites ΛΘ, ΑΖ étant parallèles par construction, les triangles ΘΕΛ, ΖΕΑ sont semblables ; donc : $\frac{E\Theta}{\Theta\Lambda} = \frac{EZ}{ZA}$ (I). Or, le parallélisme des droites ΚΗ, ΛΜ donne de même : $\frac{\Theta\Lambda}{\Theta M} = \frac{\Theta K}{\Theta H}$; tandis que le parallélisme des droites ΚΘ, ΑΖ donne de même : $\frac{\Theta K}{\Theta H} = \frac{ZA}{ZH}$; donc, comme le texte : $\frac{\Theta\Lambda}{\Theta M} = \frac{ZA}{ZH}$, d'où, par raison d'égalité avec la relation (I), ou par composition, on a : $\frac{E\Theta}{\Theta\Lambda} \times \frac{\Theta\Lambda}{\Theta M} = \frac{EZ}{ZA} \times \frac{ZA}{ZH}$ ou : $\frac{E\Theta}{\Theta M} = \frac{EZ}{ZH}$, d'où, comme le texte : $E\Theta \times ZH = EZ \times \Theta M$.

est au rectangle compris sous les droites EZ, HΘ (1). Pour les mêmes raisons, le rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΒΓ est au rectangle compris sous les droites ΘΒ, ΓΔ comme la droite ΚΘ est à la droite ΘΛ ; donc, par inversion, le rectangle compris sous les droites ΘΒ, ΓΔ est au rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΒΓ comme la droite ΛΘ est à la droite ΘΚ. Or, on a démontré que le rectangle compris sous les droites ΕΘ, ΗΖ est au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΗΘ comme la droite ΛΘ est à la droite ΘΚ ; donc, le rectangle compris sous les droites ΘΒ, ΓΔ est aussi au rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΒΓ comme le rectangle compris sous les droites ΕΘ, ΗΖ est au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΗΘ (2).

Au reste, la démonstration au moyen du rapport composé est la suivante : Puisque le rapport du rectangle compris sous les droites ΘΕ, ΗΖ au rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΖΕ se compose de celui que la droite ΘΕ possède avec la droite ΕΖ et de celui que la droite ΖΗ possède avec la droite ΗΘ, et que la droite ΘΛ est à la droite ΖΑ comme la droite ΘΕ est à la droite ΕΖ ; tandis que la droite ΖΑ est à la droite ΘΚ comme la droite ΖΗ est à la droite ΗΘ, il s'ensuit que le rapport du rectangle compris sous les droites ΘΕ, ΗΖ au rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΕΖ se compose de celui que la droite ΘΛ possède avec la droite ΖΑ et de celui que la droite ΖΑ possède avec la droite ΘΚ. Or, le rapport composé de celui de la droite ΘΛ à la droite ΖΑ et de celui de la droite ΖΑ à la droite ΘΚ est le même que celui de la droite ΘΛ à la droite ΘΚ ; par conséquent,

1. Considérant le rectangle $EZ \times \Theta H$, la dernière égalité de la note précédente donne : $\frac{EZ \times \Theta M}{EZ \times \Theta H} = \frac{\Theta M}{\Theta H} = \frac{E\Theta \times ZH}{EZ \times \Theta H}$. Or, $\frac{\Lambda\Theta}{\Theta K} = \frac{\Theta M}{\Theta H}$; donc, comme le texte : $\frac{\Lambda\Theta}{\Theta K} = \frac{E\Theta \times ZH}{EZ \times \Theta H}$.

2. Ce qui se démontre, comme l'a proposé Simson (cfr. *Opera quaedam, etc.*, p. 381) en prolongeant ΒΘ jusqu'à son point de rencontre avec ΛΜ, ou bien, en écrivant : $\frac{\Theta K \times A\Gamma}{\Lambda\Theta \times A\Gamma} = \frac{\Theta K}{\Lambda\Theta}$ ou : $\frac{\Theta K}{A\Gamma} \times \frac{A\Gamma}{\Lambda\Theta} = \frac{\Theta K}{\Lambda\Theta}$, et, considérant que la similitude de triangles donne : $\frac{\Theta\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\Theta K}{A\Gamma}$ et $\frac{B\Gamma}{\Theta B} = \frac{A\Gamma}{\Lambda\Theta}$, on a : $\frac{\Theta\Delta \times B\Gamma}{\Gamma\Delta \times \Theta B} = \frac{\Theta K}{\Lambda\Theta}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta B \times \Gamma\Delta}{\Theta\Delta \times B\Gamma} = \frac{\Lambda\Theta}{\Theta K}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente : $\frac{\Theta B \times \Gamma\Delta}{\Theta\Delta \times B\Gamma} = \frac{E\Theta \times ZH}{EZ \times \Theta H}$.

la droite ΘΛ est à la droite ΘK comme le rectangle compris sous les droites ΘE, HZ est au rectangle compris sous les droites ΘH, ZE. Pour les mêmes raisons, la droite ΘK est aussi à la droite ΘΛ comme le rectangle compris sous les droites ΘΔ, BΓ est au rectangle compris sous les droites ΘB, ΓΔ ; et, par inversion, la droite ΘΛ est à la droite ΘK comme le rectangle compris sous les droites ΘB, ΓΔ est au rectangle compris sous les droites ΘΔ, BΓ. Or, [la droite ΘΛ est aussi à la droite ΘK] (1) comme le rectangle compris sous les droites ΘE, ZH est au rectangle compris sous les droites ΘH, ZE ; [par conséquent] (2), le rectangle compris sous les droites ΘB, ΓΔ est aussi au rectangle compris sous les droites ΘΔ, BΓ [comme le rectangle compris sous les droites ΘE, ZH est au rectangle compris sous les droites ΘH, ZE] (3) (4).

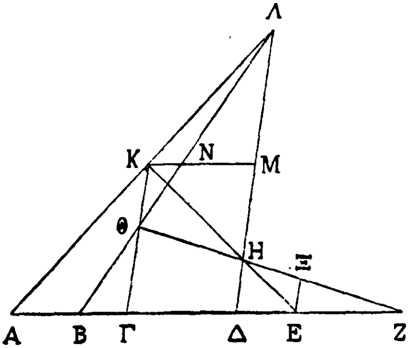
IV.

PROPOSITION 130. — Soit la figure ABΓΔEZHΘKΛ, et que le rectangle compris sous les droites AZ, ΔE soit au rectangle compris sous les droites AΔ, EZ comme le rectangle compris sous les droites AZ, BΓ est au rectangle compris sous les droites AB, ΓZ ; je dis que la ligne qui passe par les points Θ, H, Z est droite (5).

---

1. Restauration de Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 360, l. 24).
2. Restauration de Commandin (*Ibidem*).
3. Restauration de Commandin (*Ibidem*).
4. On peut écrire : $\frac{\Theta E \times HZ}{\Theta H \times ZE} = \frac{\Theta E}{ZE} \times \frac{HZ}{H\Theta}$. Or, en raison des parallèles AZ, ΘΛ, on a : $\frac{\Theta\Lambda}{Z A} = \frac{\Theta E}{ZE}$, et, en raison des parallèles KΘ, AZ, on a : $\frac{ZA}{\Theta K} = \frac{HZ}{H\Theta}$; donc : $\frac{\Theta E \times HZ}{\Theta H \times ZE} = \frac{\Theta\Lambda}{ZA} \times \frac{ZA}{\Theta K} = \frac{\Theta\Lambda}{\Theta K}$. On aura de même : $\frac{\Theta\Delta \times B\Gamma}{\Theta B \times \Gamma\Delta} = \frac{\Theta K}{\Theta\Lambda}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta\Lambda}{\Theta K} = \frac{\Theta B \times \Gamma\Delta}{\Theta\Delta \times B\Gamma}$; donc : $\frac{\Theta B \times \Gamma\Delta}{\Theta\Delta \times B\Gamma} = \frac{\Theta E \times HZ}{\Theta H \times ZE}$.
5. Les divers manuscrits accompagnent ce lemme de huit figures qui sont reproduites dans la version latine de Commandin (cfr. *loc. cit.*, pp. 360-361). Elles se rapportent aux quatre dispositions de points : AEΔΓBZ, ABΓΔEZ, AEΓΔBZ et ABΔΓEZ. Chasles a considéré, en outre, la disposition AEBZΓΔ (*Les trois livres des Porismes, etc.*, p. 102). La figure qui accompagne seule l'édition critique de Hultsch, et que nous reproduisons dans notre traduction, est celle dont la disposition des points est ABΓΔEZ, et dans laquelle les points qui doivent être démontrés situés sur la même droite se présentent dans l'ordre Θ, H, Z de la démonstration.

Puisque le rectangle compris sous les droites AZ, ΔE est au rectangle compris sous les droites AΔ, EZ comme le rectangle compris sous les droites AZ, BΓ est au rectangle compris sous les droites AB, ΓZ, par permutation, le rectangle compris sous les droites AB, ΓZ est au rectangle compris sous les droites AΔ, EZ comme le rectangle compris sous les droites AZ, BΓ est au rectangle compris sous les droites AZ, ΔE, c'est-à-dire comme la droite BΓ est à la droite ΔE.



Mais, si l'on mène par le point K la droite KM parallèle à la droite AZ, le rapport de la droite BΓ à la droite ΔE se compose de celui de la droite BΓ à la droite KN, de celui de la droite KN à la droite KM et de celui de la droite KM à la droite ΔE; tandis que le rapport du rectangle compris sous les droites AB, ΓZ au rectangle compris sous les droites AΔ, EZ se compose de celui de la droite BA à la droite AΔ et de celui de la droite ΓZ à la droite ZE. Éliminons de part et d'autre le rapport de la droite BA à la droite AΔ, qui est le même que celui de la droite NK à la droite KM; il s'ensuit que le rapport restant de la droite ΓZ à la droite ZE se compose de celui de la droite BΓ à la droite KN, c'est-à-dire celui de la droite ΘΓ à la droite KΘ, et de celui de la droite KM à la droite ΔE, c'est-à-dire celui de la droite KH à la droite HE [1]. Dès lors, la droite qui passe par les points Θ, H, Z est droite.

1. On a par hypothèse: $\frac{AZ \times \Delta E}{A\Delta \times EZ} = \frac{AZ \times B\Gamma}{AB \times \Gamma Z}$, d'où: $\frac{AB \times \Gamma Z}{A\Delta \times EZ} = \frac{AZ \times B\Gamma}{AZ \times \Delta E} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$ ou: $\frac{AB}{A\Delta} \times \frac{\Gamma Z}{EZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$ (I). Or, $\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} \times \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$, et, comme les droites KM, AZ sont parallèles par construction, on a : $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma}{KM} = \frac{B\Gamma}{KN} \times \frac{KN}{KM}$, d'où, comme le texte : $\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{KN} \times \frac{KN}{KM} \times \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{KN} \times \frac{KN}{KM} \times \frac{KM}{\Delta E}$, d'où la relation (I) devient : $\frac{AB}{A\Delta} \times \frac{\Gamma Z}{EZ} = \frac{B\Gamma}{KN} \times \frac{KN}{KM} \times \frac{KM}{\Delta E}$. Or, $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{KN}{KM}$; donc, comme le texte: $\frac{\Gamma Z}{EZ} = \frac{B\Gamma}{KN} \times \frac{KM}{\Delta E}$. Or, $\frac{B\Gamma}{KN} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta K}$ et $\frac{KM}{\Delta E} = \frac{KH}{HE}$; donc : $\frac{\Gamma Z}{EZ} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta K} \times \frac{KH}{HE}$.

En effet, si l'on mène par le point E la droite EΞ parallèle à la droite ΘΓ, et si l'on prolonge la droite de jonction ΘΗ jusqu'au point Ξ, le rapport de la droite ΚΗ à la droite ΗΕ est le même que celui de la droite ΚΘ à la droite ΕΞ ; tandis que le rapport composé de celui de la droite ΓΘ à la droite ΘΚ et de celui de la droite ΘΚ à la droite ΕΞ se réduit au rapport de la droite ΘΓ à la droite ΕΞ, et le rapport de la droite ΓΖ à la droite ΖΕ est le même que celui de la droite ΓΘ à la droite ΕΞ. En conséquence, la droite ΓΘ étant parallèle à la droite ΕΞ ; la ligne qui passe par les points Θ, Ξ, Ζ est droite (car cela est évident) ; en sorte que la ligne qui passe par les points Θ, Η, Ζ est droite aussi (1).

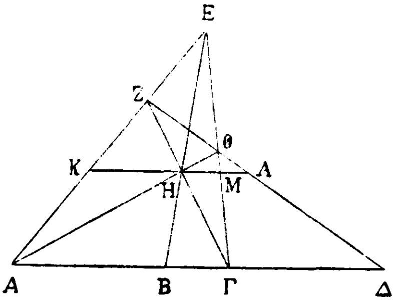
V.

Proposition 131. — Si on a la figure ΑΒΓΔΕΖΗΘ, il se fait que la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ comme la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ (2). Que la droite ΑΒ soit donc à la droite ΒΓ comme la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ ; je dis que la ligne qui passe par les points Α, Η, Θ est droite.

Menons par le point Η la droite ΚΛ parallèle à la droite ΑΔ. Dès lors, puisque la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ comme la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ ; mais, que la droite ΚΛ est à la droite ΛΗ comme la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ, et que la droite ΚΗ est à la droite ΗΜ comme la droite ΑΒ est à la

1. Les droites ΓΘ, ΕΞ étant parallèles par construction, on a : $\frac{\text{ΚΗ}}{\text{ΗΕ}}=\frac{\text{ΘΚ}}{\text{ΕΞ}}$; donc, la dernière égalité de la note précédente devient : $\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΕΞ}}=\frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΘΚ}}\times\frac{\text{ΘΚ}}{\text{ΕΞ}}$ ou, comme le texte : $\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΕΖ}}=\frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΕΞ}}$; relation qui, en présence du parallélisme des droites ΓΘ, ΕΞ, permet de conclure, en vertu de la proposition 13 du livre IV (voir p. 159 et notes) que les points Θ, Ξ, Ζ, c'est-à-dire les points Θ, Η, Ζ, sont en ligne droite.

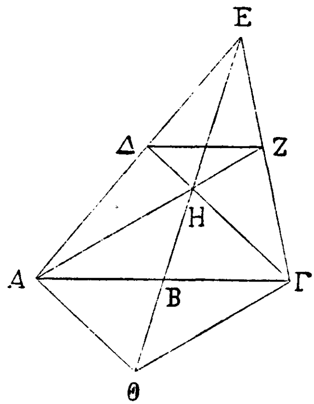
2. C'est-à-dire que, si, dans la figure indiquée, les constructions se présentent comme dans la figure de la proposition 127 ou lemme I (voir p. 669), on a : $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}}$. En d'autres termes, si l'on considère le quadrilatère ΕΖΗΘ, la transversale ΑΓ passe par les points de concours des côtés opposés, et les deux diagonales du quadrilatère divisent en parties proportionnelles la droite qui joint les points de concours des côtés opposés.



droite ΒΓ, il s'ensuit que la droite ΚΗ est aussi à la droite ΗΜ comme la droite ΚΛ est à la droite ΛΗ, et que la droite restante ΗΛ est à la droite ΛΜ comme la droite ΚΛ est à la droite ΛΗ, c'est-à-dire comme la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ. Par permutation, la droite ΓΔ est à la droite ΛΜ, c'est-à-dire la droite ΔΘ à la droite ΘΛ, comme la droite ΑΔ est à la droite ΗΛ ; et la droite ΗΛ est parallèle à la droite ΑΔ ; par conséquent, la ligne qui passe par les points Α, Η, Θ est droite ; car cela est manifeste (1).

VI.

Proposition 132. — Si l'on a de nouveau la figure ΑΒΓΔΕΖΗ, et si la droite ΔΖ est parallèle à la droite ΒΓ, la droite ΑΒ devient égale à la droite ΒΓ (2). Qu'elle lui soit donc égale ; je dis que l'on a les parallèles (3).



Il en est ainsi ; car, si nous posons, sur la droite ΕΒ, la droite ΒΘ égale à la droite ΗΒ, et si nous menons les droites de jonction ΑΘ, ΘΓ, on obtient

1. On a : $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$. Or, $\frac{K\Lambda}{\Lambda H}=\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ et $\frac{KH}{HM}=\frac{AB}{B\Gamma}$; donc : $\frac{KH}{HM}=\frac{K\Lambda}{\Lambda H}$, d'où : $\frac{K\Lambda - KH}{\Lambda H - HM}=\frac{K\Lambda}{\Lambda H}$ ou : $\frac{H\Lambda}{\Lambda M}=\frac{K\Lambda}{\Lambda H}$. Or, $\frac{K\Lambda}{\Lambda H}=\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$; donc, comme le texte : $\frac{H\Lambda}{\Lambda M}=\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{\Lambda M}=\frac{A\Delta}{H\Lambda}$. Or, $\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Lambda}=\frac{\Delta\Gamma}{\Lambda M}$; donc : $\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Lambda}=\frac{A\Delta}{H\Lambda}$; relation qui, en présence du parallélisme des droites ΗΛ, ΑΔ, permet de conclure, en vertu de la proposition 13 du livre IV (voir p. 159 et notes), que les points Α, Η, Θ sont en ligne droite.

2. Lemme dont Pappus ne démontre ici que la réciproque, et dont Commandin a donné une assez longue démonstration (cfr. *loc. cit.*, p. 364, *commentarius*, ll. 1-19). Ce lemme constitue d'ailleurs un cas particulier du lemme V, ou proposition 131, dans lequel la droite ΑΓ, qui joint les points de concours des côtés du quadrilatère ΕΔΗΖ, est parallèle à l'une des diagonales ΔΖ.

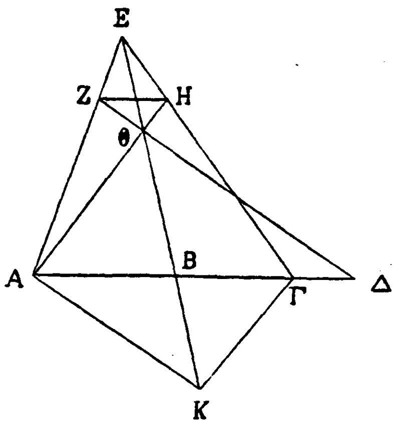
3. C'est-à-dire que si on a : ΑΒ = ΒΓ, les droites ΔΖ, ΑΓ seront parallèles.

le parallélogramme ΑΘΓΗ (1) et, par là même, la droite ΓΖ est à la droite ΖΕ comme la droite ΑΔ est à la droite ΔΕ (car chacun des dits rapports est le même que celui de la droite ΘΗ à la droite ΗΕ); de sorte que la droite ΔΖ est parallèle à la droite ΑΓ (2).

VII.

PROPOSITION 133. — Soit la figure ΑΒΓΔΕΖΗΘ, et que la droite ΒΑ soit la moyenne proportionnelle des droites ΔΒ, ΒΓ; je dis que la droite ΖΗ est parallèle à la droite ΑΓ (3).

Prolongeons la droite ΕΒ; menons par le point Α la droite ΑΚ parallèle à la droite ΔΖ, et menons la droite de jonction ΓΚ. Dès lors, puisque la droite ΑΒ est à la droite ΒΔ comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΑ, et que la droite ΚΒ est à la droite ΒΘ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΔ, il s'ensuit que la droite ΚΒ est aussi à la droite ΒΘ comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΑ. En conséquence, la droite ΑΘ est parallèle à la droite ΚΓ. Dès lors, la droite ΓΗ est de nouveau à la droite ΗΕ comme la droite ΑΖ est à la droite ΖΕ (car chacun de ces rapports est le même que celui de la droite ΚΘ à la droite ΘΕ); de sorte que la droite ΖΗ est parallèle à la droite ΑΓ (4).



1. Les diagonales ΑΓ, ΘΗ du quadrilatère ΑΗΓΘ se coupent en deux parties égales par construction; donc (EUCLIDE, liv. I, prop. 4, énoncée p. 124, n. 4), il y a égalité des triangles ΑΒΗ, ΓΒΘ et des triangles ΓΒΗ, ΑΒΘ, d'où (EUCLIDE, liv. I, prop. 27 énoncée p. 124, n. 5) parallélisme des droites ΑΗ, ΘΓ et des droites ΑΘ, ΗΓ; donc, le quadrilatère ΑΗΓΘ est un parallélogramme.

2. Le parallélisme des droites ΘΓ, ΗΖ donne: $\frac{\Theta H}{HE}=\frac{\Gamma Z}{ZE}$, et le parallélisme des droites ΘΑ, ΗΔ donne : $\frac{\Theta H}{HE}=\frac{A\Delta}{\Delta E}$; donc: $\frac{\Gamma Z}{ZE}=\frac{A\Delta}{\Delta E}$, d'où parallélisme des droites ΔΖ, ΑΓ.

3. Ce lemme considère le cas où la transversale passe par un seul point de concours des côtés du quadrilatère ΕΖΘΗ, et est parallèle à une diagonale.

4. On a par hypothèse : $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{\Gamma B}{AB}$. Or, la similitude des triangles ΑΒΚ, ΔΒΘ

VIII.

PROPOSITION 134. — Soit le bômisque (1) ΑΒΓΔΕΖΗ ; que la droite ΔΕ soit parallèle à la droite ΒΓ et la droite ΕΗ parallèle à la droite ΒΖ ; je dis que la droite ΔΖ est parallèle à la droite ΓΗ (2).

Menons les droites de jonction ΒΕ, ΔΓ, ΖΗ ; le triangle ΔΒΕ équivaut donc au triangle ΔΓΕ. Ajoutons de part et d'autre le triangle ΔΑΕ, il s'ensuit que le triangle entier ΑΒΕ équivaut au triangle entier ΓΔΑ. Derechef, puisque la droite ΒΖ est parallèle à la droite ΕΗ, le triangle ΒΖΕ équivaut au triangle ΒΖΗ. Retranchons de part et d'autre le triangle ΑΒΖ, il s'ensuit que le triangle restant ΑΒΕ équivaut au triangle restant ΑΗΖ. Mais, le

---

donne : $\frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{B\Theta}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Delta}}$; donc : $\frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{B\Theta}}=\frac{\Gamma\mathrm{B}}{\mathrm{AB}}$, d'où similitude des triangles ΑΒΘ, ΓΒΚ, d'où parallélisme des droites ΑΘ, ΚΓ, d'où : $\frac{\Gamma\mathrm{H}}{\mathrm{HE}}=\frac{\mathrm{K\Theta}}{\Theta\mathrm{E}}$ et $\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{ZE}}=\frac{\mathrm{K\Theta}}{\Theta\mathrm{E}}$; donc : $\frac{\Gamma\mathrm{H}}{\mathrm{HE}}=\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{ZE}}$, d'où parallélisme des droites ΖΗ, ΑΓ.

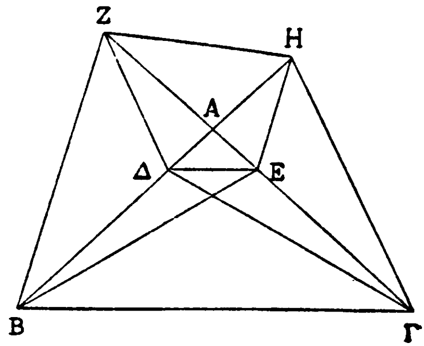
1. βωμίσκος, bômisque (autel) ; nom donné dans la *Stéréométrie* de Héron d'Alexandrie au solide compris sous deux faces rectangulaires parallèles, non semblables, et sous quatre faces trapèzes inclinées. (*Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae, edidit Fred. Hultsch.* Lipsiae, 1864, in-8°. *Stereometrica*, II, 40, p. 186). Si l'on désigne par a, b, et a' b' les côtés des faces rectangulaires parallèles, et par h la distance qui les sépare, ce solide a pour volume : $V=\left[\frac{a+a'}{2}\cdot\frac{b+b'}{2}+\frac{1}{3}\frac{a-a'}{2}\cdot\frac{b-b'}{2}\right]h$.

Ce n'est cependant pas ce solide que le lemme vise ici sous le nom de bômisque, mais bien la figure plane constituant la projection d'un solide compris sous deux faces quadrilatères parallèles et huit faces triangulaires passant par le sommet de l'un des quadrilatères et par un côté de l'autre.

2. Cet énoncé peut s'exprimer en d'autres termes : « Soient deux triangles ΒΖΓ, ΒΗΓ de même base et non équivalents. Si l'on mène la droite ΗΕ parallèle à la droite ΖΒ et la droite ΕΔ parallèle à la droite ΒΓ, la droite ΔΖ sera parallèle à la droite ΓΗ.

Chasles a dégagé le sens de ce lemme de la manière suivante : « Quand deux angles ont leurs côtés parallèles deux à deux, si, par le sommet de chacun d'eux, on mène une droite quelconque qui coupe les deux côtés de l'autre, les quatre points d'intersection sont deux à deux sur deux droites parallèles. » (*Les trois livres des Porismes, etc.*, p. 78). Il a du reste considéré aussi ce lemme comme un cas particulier d'une propriété relative à deux angles quelconques qu'il énonce : « Si, par les points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère, on mène deux droites quelconques qui rencontrent les quatre côtés en quatre points, ces points sont deux à deux sur quatre autres droites qui se coupent deux à deux sur les deux diagonales du quadrilatère ». (CHASLES, *Traité de géométrie supérieure*. Paris, 1852. Voir art. 404).

triangle ABE équivaut au triangle ΑΓΔ, donc, le triangle ΑΓΔ équivaut aussi au triangle AZH. Ajoutons de part et d'autre le triangle ΑΓΗ, il s'ensuit que le triangle entier ΓΔΗ équivaut au triangle entier ΓΖΗ. Et ces triangles sont sur la même base H ; donc, la droite ΓΗ est parallèle à la droite ΔΖ (1).



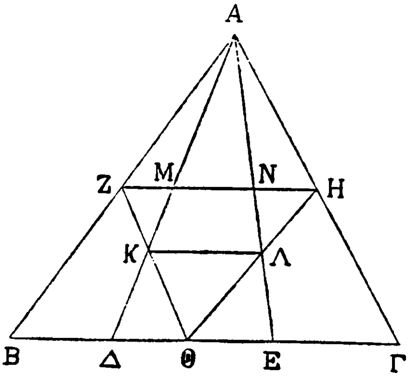
IX.

Proposition 135. — Soit le triangle ΑΒΓ ; menons, dans ce triangle, les droites ΑΔ, ΑΕ ; menons la droite ΖΗ parallèle à la droite ΑΓ ; brisons la ligne ΖΘΗ, et que la droite ΔΘ soit à la droite ΘΕ comme la droite ΒΘ est à la droite ΘΓ ; je dis que la droite ΚΛ est parallèle à la droite ΒΓ (2).

En effet, puisque la droite ΔΘ est à la droite ΘΕ comme la droite ΒΘ est à la droite ΘΓ, il s'ensuit que la droite restante ΒΔ est à la droite restante ΓΕ comme la droite ΔΘ est à la droite ΘΕ.

1. Considérant des triangles de même hauteur, on a : triangle ΔΒΕ = triangle ΔΓΕ, d'où : triangle ΔΒΕ + triangle ΔΑΕ = triangle ΔΓΕ + triangle ΔΑΕ ou, comme le texte : triangle ABE = triangle ΓΔΑ. De même, triangle BZE = triangle BZH, d'où : triangle BZE — triangle ABZ = triangle BZH — triangle ABZ ou, comme le texte : triangle ABE = triangle AHZ. Donc : triangle ΓΔΑ = triangle AHZ, d'où : triangle ΓΔΑ + triangle ΑΓΗ = triangle AHZ + triangle ΑΓΗ ou, comme le texte : triangle ΓΔΗ = triangle ΓΖΗ. Ces deux triangles équivalents ayant même base ont donc même hauteur, d'où parallélisme des droites ΔΖ, ΗΓ.

2. Chasles a fait remarquer que ce lemme IX, ou proposition 135, exprime la proposition suivante : Si par les sommets d'un trapèze on mène quatre droites concourantes en un même point, et par le point de rencontre S des deux côtés non parallèles une transversale parallèle aux deux autres côtés, laquelle rencontre les quatre droites en quatre points, le produit des distances du point S à deux de ces points est égal au produit des distances du même point S aux deux autres points » (Voir : *Les trois livres des Porismes, etc.*, p. 78). Exprimant ainsi que les quatre points déterminent une involution dont le point S est le point central, cette proposition est, comme l'a fait remarquer, en outre, Chasles, un cas particulier d'une propriété d'un quadrilatère quelconque, savoir que : « Les trois couples de droites menées d'un même point aux sommets opposés et aux points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère sont en involution » (Chasles, *Géométrie supérieure*, p. 249).



Or, la droite ZM est à la droite NH comme la droite BΔ est à la droite EΓ ; donc, la droite ΔΘ est aussi à la droite ΘE [comme la droite ZM est à la droite NH] (1). Par permutation, la droite NH est à la droite ΘE comme la droite ZM est à la droite ΔΘ. Mais, à cause des parallèles, la droite ZK est à la droite KΘ comme la droite ZM est à la droite ΔΘ ; tandis que la droite HΛ est à la droite ΛΘ comme la droite HN est à la droite ΘE ; donc, la droite HΛ est aussi à la droite ΛΘ comme la droite ZK est à la droite KΘ. En conséquence, la droite KΛ est parallèle à la droite HZ ; en sorte qu'elle est aussi parallèle à la droite ΓB (2).

X.

Proposition 136. — Menons d'un point Θ, sur les deux droites BAE, ΔAH, les deux droites ΔΘ, ΘE, et que le rectangle compris sous les droites ΘH, ZE soit au rectangle compris sous les droites ΘE, ZH comme le rectangle compris sous les droites ΔΘ, BΓ est au rectangle compris sous les droites ΔΓ, BΘ (3) ; je dis que la ligne qui passe par les points Γ, A, Z est droite (4).

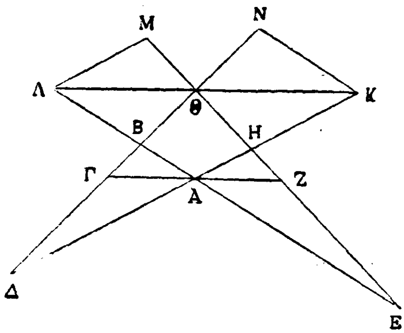
1. Lacune comblée par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 366, l. 7).

2. On a par hypothèse : $\frac{\Delta\Theta}{\Theta E}=\frac{B\Theta}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{B\Theta - \Delta\Theta}{\Theta\Gamma - \Theta E}=\frac{\Delta\Theta}{\Theta E}$ ou : $\frac{B\Delta}{\Gamma E}=\frac{\Delta\Theta}{\Theta E}$. Or, les droites ZH, BΓ sont parallèles par construction, d'où : $\frac{ZM}{NH}=\frac{B\Delta}{E\Gamma}$; donc : $\frac{\Delta\Theta}{\Theta E}=\frac{ZM}{NH}$, d'où : $\frac{NH}{\Theta E}=\frac{ZM}{\Delta\Theta}$. Or, le parallélisme des droites ZH, ΔE donne : $\frac{ZK}{K\Theta}=\frac{ZM}{\Delta\Theta}$ et $\frac{H\Lambda}{\Lambda\Theta}=\frac{NH}{\Theta E}$; donc : $\frac{H\Lambda}{\Lambda\Theta}=\frac{ZK}{K\Theta}$, d'où parallélisme des droites KΛ, ZH, ΓB.

3. C'est-à-dire déterminons, sur les droites ΔΘ, ΘE deux points Γ et Z tels que l'on ait : $\frac{\Theta H \times ZE}{\Theta E \times ZH}=\frac{\Delta\Theta \times B\Gamma}{\Delta\Gamma \times B\Theta}$.

4. Ce lemme est en réalité la réciproque du lemme III ou proposition 129 (voir p. 672).

Menons par le point Θ la droite ΚΛ parallèle à la droite ΓΑ, et qu'elle rencontre les droites ΑΒ, ΑΔ aux points Κ, Λ. Menons par le point Λ la droite ΛΜ parallèle à la droite ΑΔ, et prolongeons la droite ΕΘ jusqu'au point Μ. Enfin, menons par le point Κ la droite ΚΝ parallèle à la droite ΑΒ, et prolongeons la droite ΔΘ jusqu'au point Ν. Dès lors, puisque, en raison des parallèles, la droite ΔΓ est à la droite ΓΒ comme la droite ΔΘ est à la droite ΘΝ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΓΒ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΘΝ [1]. Mais, soit un autre rectangle, compris sous les droites ΔΓ, ΒΘ ; le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΘΝ est donc au rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΒΘ, c'est-à-dire que la droite ΘΝ est à la droite ΘΒ, comme le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΒΓ est au rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΒΘ. Mais, on a supposé que le rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΖΕ est au rectangle compris sous les droites ΘΕ, ΖΗ comme le rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΒΓ est au rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΒΘ ; tandis que la droite ΚΘ est à la droite ΘΛ, c'est-à-dire que, à cause des parallèles, la droite ΗΘ est à la droite ΘΜ, c'est-à-dire que le rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΖΕ est au rectangle compris sous les droites ΘΜ, ΖΕ, comme la droite ΘΝ est à la droite ΘΒ ; donc, le rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΖΕ est au rectangle compris sous les droites ΘΜ, ΖΕ comme le rectangle compris sous les droites ΘΗ, ΖΕ est au rectangle compris sous les droites ΘΕ, ΖΗ. En conséquence, [le rectangle compris sous les



1. Considérant les parallèles de construction ΘΚ, ΓΑ, on a : $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma A}=\frac{\Delta\Theta}{\Theta K}$, et, considérant en outre les parallèles de construction ΝΚ, ΒΑ, on a : $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Theta K}{\Theta N}$; donc : $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma A}\times\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta\Theta}{\Theta K}\times\frac{\Theta K}{\Theta N}$ ou, comme le texte : $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma B}=\frac{\Delta\Theta}{\Theta N}$, d'où : $\Delta\Gamma \times \Theta N = \Delta\Theta \times \Gamma B$.

droites ΘE, ZH] [1] équivaut [au rectangle compris sous les droites ΘM, ZE, et] [2] la droite HZ est donc à la droite ZE comme la droite ΘM est à la droite ΘE. Par composition et permutation, la droite ΘE est à la droite EZ comme la droite ME est à la droite EH. Mais, la droite ΛE est à la droite EA comme la droite ME est à la droite EH ; donc, la droite ΘE est aussi à la droite EZ comme la droite ΛE est à la droite EA. En conséquence, la droite AZ est parallèle à la droite KΛ. Mais, la droite ΓA lui est aussi parallèle ; donc, la ligne ΓAZ est droite [3] ; ce qu'il fallait démontrer.

Les cas de ce lemme, qui est réciproque, se présentent de la même manière que ceux qui ont été exposés précédemment [4].

XI.

Proposition 137. — Soient le triangle ABΓ et la droite AΔ parallèle à la droite BΓ, et que la droite ΔE, menée transversalement, rencontre la droite BΓ au point E ; je dis que la droite ΓB est à la droite BE comme le rectangle compris sous les droites ΔE, ZH est au rectangle compris sous les droites EZ, HΔ [5].

---

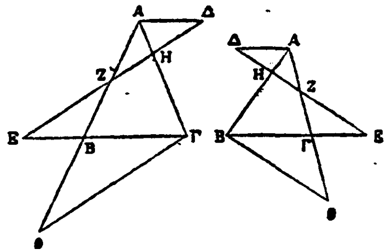
1. et 2. Lacunes comblées par Commandin (Cfr. *loc. cit.*, p. 366, dernière ligne).

3. Considérant auxiliairement le rectangle $\Delta\Gamma \times B\Theta$, la dernière égalité de la note 1 de la page 683 donne : $\frac{\Delta\Gamma \times \Theta N}{\Delta\Gamma \times B\Theta} = \frac{\Theta N}{B\Theta} = \frac{\Delta\Theta \times \Gamma B}{\Delta\Gamma \times B\Theta}$. Or, on a par hypothèse : $\frac{\Theta H \times ZE}{\Theta E \times ZH} = \frac{\Delta\Theta \times \Gamma B}{\Delta\Gamma \times B\Theta}$; donc : $\frac{\Theta N}{B\Theta} = \frac{\Theta H \times ZE}{\Theta E \times ZH}$. Or, les parallèles NK, AB donnent : $\frac{K\Theta}{\Theta\Lambda} = \frac{\Theta N}{B\Theta}$, et les parallèles HK, ΛM donnent : $\frac{\Theta H}{\Theta M} = \frac{K\Theta}{\Theta\Lambda}$, d'où : $\frac{\Theta H}{\Theta M} = \frac{\Theta N}{B\Theta}$, d'où : $\frac{\Theta H \times ZE}{\Theta M \times ZE} = \frac{\Theta N}{B\Theta}$; donc, comme le texte : $\frac{\Theta H \times ZE}{\Theta M \times ZE} = \frac{\Theta H \times ZE}{\Theta E \times ZH}$, d'où : $\Theta E \times ZH = \Theta M \times ZE$, d'où : $\frac{ZH}{ZE} = \frac{\Theta M}{\Theta E}$, d'où : $\frac{ZH + ZE}{ZE} = \frac{\Theta M + \Theta E}{\Theta E}$ ou : $\frac{EH}{ZE} = \frac{ME}{\Theta E}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta E}{ZE} = \frac{ME}{EH}$. Mais, les parallèles ΛM, AH donnent : $\frac{\Lambda E}{EA} = \frac{ME}{EH}$; donc : $\frac{\Theta E}{ZE} = \frac{\Lambda E}{EA}$, d'où parallélisme des droites AZ, KΛ. Or, les droites ΓA, KΛ sont parallèles par construction ; donc les points Γ, A, Z sont en ligne droite.

4. C'est-à-dire que les différents cas présentés par ce lemme sont les mêmes que ceux du lemme réciproque III, ou proposition 129, lesquels ont été représentés dans les diverses figures qui accompagnent le texte dans les manuscrits.

5. Ce lemme constitue un cas particulier du lemme III (ou proposition 129), dans lequel l'une des transversales est parallèle à l'une des trois droites.

Menons par le point Γ la droite ΓΘ parallèle à la droite ΔE, et prolongeons la droite AB jusqu'au point Θ. Dès lors, puisque la droite ΓΘ est à la droite ZH comme la droite ΓA est à la droite AH, et que la droite EΔ est à la droite ΔH comme la droite ΓA est à la droite AH, il s'ensuit que la droite ΘΓ est aussi à la droite ZH comme la droite EΔ est à la droite ΔH. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΓΘ, ΔH équivaut au rectangle compris sous les droites EΔ, ZH. Mais, soit un autre rectangle, compris sous les droites EZ, HΔ. Dès lors, le rectangle compris sous les droites ΓΘ, ΔH est au rectangle compris sous les droites ΔH, EZ, c'est-à-dire que la droite ΓB est à la droite BE, comme le rectangle compris sous les droites ΔE, ZH est au rectangle compris sous les droites ΔH, EZ. En conséquence, la droite ΓB est à la droite BE comme le rectangle compris sous les droites ΔE, ZH est au rectangle compris sous les droites EZ, HΔ (1). Les choses restent les mêmes si la parallèle AΔ est menée de l'autre côté, et si l'on mène du point Δ la droite ΔE au delà du point Γ (2).



XII.

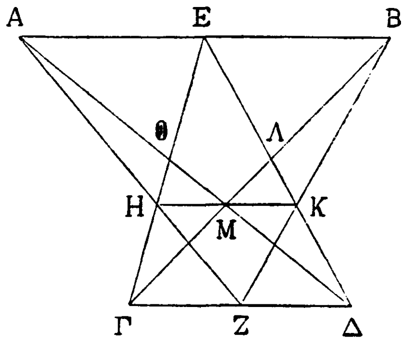
PROPOSITION 138. — Ces choses une fois démontrées, il faudra faire voir que, si l'on a des parallèles AB, ΓΔ ; s'il leur tombe

1. Les parallèles de construction ΓΘ, ZH donnent : $\frac{\Gamma\Theta}{ZH}=\frac{\Gamma A}{AH}$, et les parallèles d'hypothèse EΓ, AΔ donnent : $\frac{E\Delta}{\Delta H}=\frac{\Gamma A}{AH}$; donc : $\frac{\Gamma\Theta}{ZH}=\frac{E\Delta}{\Delta H}$, d'où, comme le texte : $\Gamma\Theta \times \Delta H = E\Delta \times ZH$. Dès lors, on peut écrire : $\frac{\Gamma\Theta \times \Delta H}{EZ \times \Delta H}=\frac{\Gamma\Theta}{EZ}=\frac{E\Delta \times ZH}{EZ \times \Delta H}$. Or, les parallèles ΘΓ, EZ donnent : $\frac{\Gamma B}{BE}=\frac{\Gamma\Theta}{EZ}$; donc, comme le texte : $\frac{\Gamma B}{BE}=\frac{E\Delta \times ZH}{EZ \times \Delta H}$.

2. C'est-à-dire que, si les constructions se présentent comme dans la seconde figure, on aura de même : $\frac{B\Gamma}{\Gamma E}=\frac{E\Delta \times ZH}{EZ \times \Delta H}$.

des droites ΑΔ, ΑΖ, ΒΓ, ΒΖ (1), et si l'on mène les droites de jonction ΕΔ, ΕΓ (2), la ligne qui passe par les points Η, Μ, Κ est droite (3).

En effet, puisque ΔΑΖ est un triangle ; que la droite ΑΕ est parallèle à la droite ΔΖ et que la droite ΕΓ est menée transversalement en rencontrant la droite ΔΖ au point Γ, le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΗΘ est, en vertu du lemme précédent, au rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΘΕ comme la droite ΔΖ est à la droite ΖΓ. Derechef, puisque ΓΒΖ est un triangle ; que la droite ΒΕ est menée parallèlement à la droite ΓΔ et que la droite ΔΕ est menée transversalement en rencontrant la droite ΓΖΔ au point Δ, le rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΛΚ est au rectangle compris sous les droites ΔΚ, ΛΕ comme la droite ΓΖ est à la droite ΖΔ ; donc, inversement, le rectangle compris sous les droites ΔΚ, ΛΕ est au rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΛΚ comme la droite ΔΖ est à la droite ΖΓ. Or, le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΗΘ est aussi au rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΘΕ comme la droite ΔΖ est à la droite ΖΓ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΔΚ, ΛΕ est aussi au rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΚΛ comme le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΗΘ est au rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΘΕ (4).



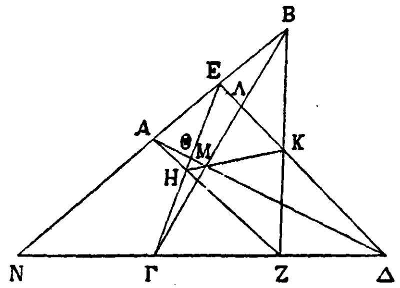
1. Sous-entendu : parmi lesquelles ΑΔ et ΒΓ se coupent au point Μ.
2. Sous-entendu : reliant un point Ε, situé entre les points Α, Β, avec les points Δ et Γ, et dont l'une ΕΔ coupe la droite ΒΖ au point Κ, et dont l'autre ΕΓ coupe la droite ΑΖ au point Η.
3. Chasles a considéré ce lemme comme exprimant la propriété de l'hexagone inscrit à deux droites, à savoir que, quand les sommets d'un hexagone sont situés trois à trois sur deux droites, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite (*Les trois livres des Porismes, etc.*, p. 77).
4. Le texte présente ici la petite interpolation : ἀνῆκται εἰς τὸ πρὸ ἑνός, (cela) ramène au (lemme) qui précède d'un celui-ci (cfr. Hultsch, vol. II, p. 884, l. 26). C'est-à-dire que la relation où en arrive le texte ramène à ce qui a déjà été démontré au lemme X ou proposition 136 (voir p. 682).

Dès lors, puisque les deux droites ΕΓ, ΕΔ sont menées transversalement sur les deux droites ΓΜΛ, ΔΜΘ, et que le rectangle compris sous les droites ΔΚ, ΕΛ est au rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΛΚ comme le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΗΘ est au rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΘΕ, la ligne qui passe par les points Η, Μ, Κ est droite ; car cela a été démontré précédemment (1).

XIII.

Proposition 139. — Que les droites ΑΒ, ΓΔ ne soient, par contre, pas parallèles, mais qu'elles se rencontrent au point Ν ; je dis que la ligne qui passe par les points Η, Μ, Κ est de nouveau droite (2).

Puisque les deux droites ΓΕ, ΓΔ sont menées transversalement du même point Γ sur les trois droites ΑΝ, ΑΖ, ΑΔ, le rectangle compris sous les droites ΓΝ, ΖΔ est au rectangle compris sous les droites ΝΔ, ΓΖ comme le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΗΘ est au rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΘΕ. Derechef, puisque les deux droites ΔΕ, ΔΝ sont menées transversalement du même point Δ sur les trois droites ΒΝ, ΒΓ, ΒΖ, le rectangle compris sous les droites ΔΚ, ΕΛ est au rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΚΛ comme le rectangle compris sous les droites ΝΓ, ΖΔ est au rectangle compris sous les droites ΝΔ, ΖΓ. Mais, on a démontré que le rectangle



1. Considérant le triangle ΔΑΖ, les parallèles ΑΕ, ΔΖ et la transversale ΕΓ, le lemme XI, ou proposition 137, a démontré qu'on a : $\frac{\Gamma E \times H\Theta}{\Gamma H \times \Theta E} = \frac{\Delta Z}{Z\Gamma}$. De même, considérant le triangle ΓΒΖ, les parallèles ΒΕ, ΓΔ et la transversale ΔΕ, on a : $\frac{\Delta E \times \Lambda K}{\Delta K \times \Lambda E} = \frac{Z\Gamma}{\Delta Z}$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta K \times \Lambda E}{\Delta E \times \Lambda K} = \frac{\Gamma E \times H\Theta}{\Gamma H \times \Theta E}$, expression qui, en présence des droites ΕΓ, ΕΔ tombant du point Ε sur les droites ΓΛ, ΔΘ, ramène au lemme X, ou proposition 136, en vertu duquel les points Η, Μ, Κ sont en ligne droite.

2. Même lemme que le précédent dans le cas général des droites non parallèles.

compris sous les droites ΓE, HΘ est au rectangle compris sous les droites ΓH, ΘE comme le rectangle compris sous les droites NΓ, ZΔ est au rectangle compris sous les droites NΔ, ΓZ ; donc, le rectangle compris sous les droites ΔK, EΛ est aussi au rectangle compris sous les droites ΔE, KΛ comme le rectangle compris sous les droites ΓE, ΘH est au rectangle compris sous les droites ΓH, ΘE (1). En conséquence, en vertu de ce qui a été exposé précédemment, la ligne qui passe par les points H, M, K est droite (2).

XIV.

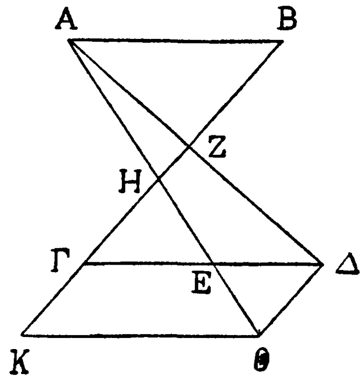
Proposition 140. — Que la droite AB soit parallèle à la droite ΓΔ ; menons transversalement les droites AE, ΓB, et soit, sur la droite BH, un point Z tel que le rectangle compris sous les droites ΓB, HZ soit au rectangle compris sous les droites ZB, ΓH comme la droite ΔE est à la droite EΓ ; je dis que la ligne qui passe par les points A, Z, Δ est droite (3).

Menons par le point Δ la droite ΔΘ parallèle à la droite BΓ ; prolongeons la droite AE jusqu'au point Θ ; menons par le point Θ la droite ΘK parallèle à la droite ΓΔ, et prolongeons la droite BΓ jusqu'au point K. Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites ΓB, ZH est au rectangle compris sous les droites ZB, ΓH comme la droite ΔE est à la droite EΓ, et que la droite ΔΘ

1. Le texte présente ici la petite interpolation que nous traduisons : « ce qui ramène au (lemme) dix et sur les parallèles » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. II, p. 886, l. 21). C'est-à-dire que l'expression où en arrive le texte, ramène à ce qui a été démontré au lemme X qui fait intervenir des droites parallèles.

2. Les trois droites AN, AZ, AΔ étant coupées par les deux droites ΓE, ΓΔ, le lemme III, ou proposition 129 (voir p. 672) a démontré qu'on a : $\frac{\Gamma N \times Z\Delta}{N\Delta \times \Gamma Z} = \frac{\Gamma E \times H\Theta}{\Gamma H \times \Theta E}$. De même, les trois droites BN, BΓ, BZ coupées par les deux droites ΔE, ΔN, donnent : $\frac{\Delta K \times E\Lambda}{\Delta E \times K\Lambda} = \frac{N\Gamma \times Z\Delta}{N\Delta \times Z\Gamma}$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta K \times E\Lambda}{\Delta E \times K\Lambda} = \frac{\Gamma E \times H\Theta}{\Gamma H \times \Theta E}$; expression qui, en vertu du lemme X, ou proposition 136, entraîne la situation des points H, M, K sur une même ligne droite ; ce que l'on reconnaîtra facilement en observant que la littération EΘHΓMΛKΔ de la figure relative au présent lemme correspond à la littération ΘBΓΔAHZE de la figure relative au lemme X (ou proposition 136).

3. Ce lemme constitue la réciproque du lemme XI, ou proposition 137 (voir p. 684).



est à la droite ΓH, ou que le rectangle compris sous les droites ΔΘ, BZ est au rectangle compris sous les droites ΓH, BZ, comme la droite ΔE est à la droite EΓ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites BΓ, ZH équivaut au rectangle compris sous les droites ΔΘ, BZ. Par conséquent, en proportion, la droite ΔΘ [est à la droite HZ] (1), c'est-à-dire la droite ΓK à la droite HZ, comme la droite ΓB est à la droite BZ ; donc, la droite entière KB est à la droite entière BH comme la droite KΓ est à la droite ZH, c'est-à-dire comme la droite ΔΘ est à la droite ZH. Mais, à cause des parallèles, la droite ΘA est à la droite AH comme la droite KB est à la droite BH et comme la droite ΔΘ est à la droite ZH. De plus les droites ΔΘ, ZH sont parallèles ; donc, la ligne qui passe par les points A, Z, Δ est droite (2).

XV.

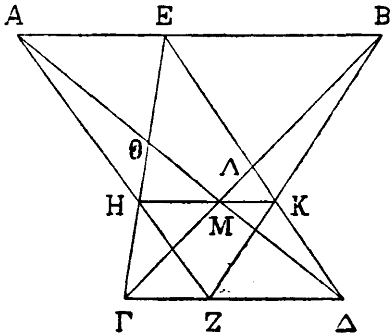
Proposition 141. — Cela étant considéré au préalable, que la droite AB soit parallèle à la droite ΓΔ ; que les droites AZ, ZB, ΓE, EΔ tombent sur cette dernière, et menons les droites

1. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 888, l. 3).

2. On a par hypothèse : $\frac{\Gamma B \times HZ}{BZ \times \Gamma H} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$. Or, les parallèles de construction ΔΘ, HΓ donnent : $\frac{\Delta\Theta}{\Gamma H} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{\Delta\Theta \times BZ}{\Gamma H \times BZ} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$; donc : $\frac{\Delta\Theta \times BZ}{\Gamma H \times BZ} = \frac{\Gamma B \times HZ}{BZ \times \Gamma H}$, d'où, comme le texte : $\Delta\Theta \times BZ = \Gamma B \times HZ$, d'où : $\frac{\Delta\Theta}{HZ} = \frac{\Gamma B}{BZ}$ ou : $\frac{\Gamma K}{HZ} = \frac{\Gamma B}{BZ}$, d'où : $\frac{\Gamma K + \Gamma B}{HZ + BZ} = \frac{\Gamma K}{HZ}$ ou, comme le texte : $\frac{KB}{BH} = \frac{\Gamma K}{HZ} = \frac{\Delta\Theta}{HZ}$. Or, les parallèles de construction AB, KΘ donnent : $\frac{\Theta H}{HA} = \frac{KH}{HB}$, d'où : $\frac{\Theta H + HA}{HA} = \frac{KH + HB}{HB}$ ou : $\frac{A\Theta}{HA} = \frac{KB}{HB}$; donc, comme le texte : $\frac{A\Theta}{HA} = \frac{\Delta\Theta}{HZ}$; expression qui, en présence du parallélisme des droites ΔΘ, ZH permet de conclure, en vertu de la proposition 13 du livre IV (voir p. 159 et notes) que les points A, Z, Δ sont sur la même ligne droite.

de jonction ΒΓ, ΗΚ ; je dis que la ligne qui passe par les points Α, Μ, Δ est droite (1).

Menons la droite de jonction ΔΜ et prolongeons-la jusqu'au point Θ (2). Dès lors, puisque la droite ΒΕ est menée du sommet Β du triangle ΒΓΖ, parallèlement à la droite ΓΔ, et que la droite ΔΕ est menée transversalement, le rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΚΛ est au rectangle compris sous les droites ΕΛ, ΚΔ comme la droite ΓΖ est à la droite ΖΔ (3). Or, le rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΘΕ est au rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΗΘ comme le rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΚΛ est au rectangle compris sous les droites ΔΚ, ΛΕ (car les deux droites ΕΓ, ΕΔ sont menées transversalement du même point Ε sur les droites ΓΛ, ΔΘ, ΗΚ) ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΗΘ est au rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΘΕ comme la droite ΔΖ est à la droite ΖΓ. Et la ligne qui passe par les points Θ, Μ, Δ est droite ; donc, en vertu du lemme qui précède, la ligne qui passe par les points Α, Μ, Δ est droite aussi (4).



1. Ce lemme a été énoncé plus explicitement comme suit par R. Simson (cfr. *Opera quaedam reliqua, etc.*, p. 416) : « Sit AB parallela rectae ΓΔ, et a punctis A, B, inflectantur ad ΓΔ rectae AZ, BZ ; a punctis vero Γ, Δ ad AB inflectantur ΓΕ, ΔΕ, sitque H intersectio ipsarum AZ, ΓΕ, et K intersectio reliquarum BZ, ΔΕ, et ducatur ΒΓ, quac occurrat junctae HK in M ; erunt B, M, Δ puncta in recta linea ».

2. C'est-à-dire jusqu'au point de concours Θ avec la transversale ΓΕ.

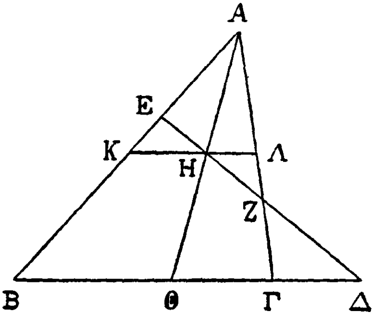
3. Considérant le triangle ΓΒΖ, la parallèle ΒΕ à la base ΓΖ et la transversale ΔΕ, on se trouve dans les conditions du lemme XI, ou proposition 137 (voir p. 684), qui a démontré qu'on a la relation : $\frac{\Delta E \times K\Lambda}{E\Lambda \times K\Delta} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$.

4. Considérant que deux droites ΕΓ, ΕΔ sont menées transversalement du même point Ε sur trois droites ΓΛ, ΔΘ, ΗΚ ou, plus exactement, sur trois droites ΜΓ, ΜΘ, ΜΗ, on se trouve dans les conditions du lemme III, ou proposition 129 (voir p. 672), qui a démontré qu'on a la relation : $\frac{\Gamma H \times \Theta E}{\Gamma E \times H\Theta} = \frac{\Delta E \times K\Lambda}{\Delta K \times \Lambda E}$; donc, en présence de la relation de la note précédente, on a comme le texte : $\frac{\Gamma E \times H\Theta}{\Gamma H \times \Theta E} = \frac{Z\Delta}{\Gamma Z}$; relation qui permet de conclure, en vertu

XVI.

PROPOSITION 142. — Menons d'un même point Δ, sur deux droites AB, AΓ, les deux droites ΔB, ΔE ; prenons sur celles-ci les points H, Θ, et que le rectangle compris sous les droites BΘ, ΓΔ soit au rectangle compris sous les droites BΔ, ΓΘ comme le rectangle compris sous les droites EH, ZΔ est au rectangle compris sous les droites ΔE, HZ ; je dis que la ligne qui passe par les points A, H, Θ est droite [1].

Menons par le point H la droite KΛ parallèle à la droite BΔ. Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites BΘ, ΓΔ est au rectangle compris sous les droites BΔ, ΓΘ comme le rectangle compris sous les droites EH, ZΔ est au rectangle compris sous les droites ΔE, ZH ; mais, que le rapport du rectangle compris sous les droites EH, ZΔ au rectangle compris sous les droites ΔE, HZ se compose de celui que possède la droite HE avec la droite EΔ, c'est-à-dire la droite KH avec la droite BΔ, et de celui que possède la droite ΔZ avec la droite ZH, c'est-à-dire la droite ΓΔ avec la droite HΛ ; tandis que le rapport du rectangle compris sous les droites BΘ, ΓΔ au rectangle compris sous les droites BΔ, ΓΘ se compose de celui que possède la droite ΘB avec la droite BΔ et de celui que possède la droite ΔΓ avec la droite ΓΘ, il s'ensuit que le rapport composé de celui de la droite KH à la droite BΔ et de celui de la droite ΔΓ à la droite HΔ est le même que le rapport composé de celui de la droite BΘ à la droite BΔ et de celui de la droite ΔΓ à la droite ΓΘ. Or, le rapport de la droite KH à la droite BΔ se



du lemme précédent XI, ou proposition 140, que les points A, Θ, Δ sont en ligne droite. Or, les points Θ, M, Δ sont sur une même droite par construction ; donc, les points A, M, Δ sont sur une même droite.

1. Ce lemme est le même que le lemme X (proposition 136) démontré d'une autre manière.

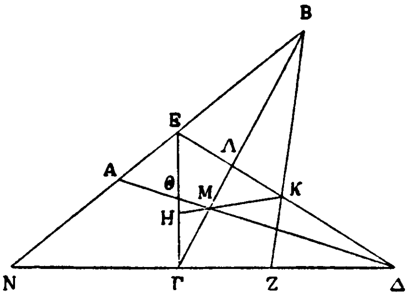
compose de celui de la droite KH à la droite BΘ et de celui de la droite BΘ à la droite BΔ ; donc, le rapport composé de celui de la droite KH à la droite BΘ, de celui de la droite BΘ à la droite BΔ et de celui de la droite ΔΓ à la droite HΛ est le même que le rapport qui se compose de celui de la droite BΘ à la droite BΔ et de celui de la droite ΔΓ à la droite ΓΘ. Éliminons de part et d'autre le rapport de la droite BΘ à la droite BΔ, il s'ensuit que le rapport restant composé de celui de la droite KH à la droite BΘ et de celui de la droite ΔΓ à la droite HΛ est le même que celui de la droite ΔΓ à la droite ΓΘ, c'est-à-dire le rapport composé de celui de la droite ΔΓ à la droite HΛ et de celui de la droite HΛ à la droite ΘΓ. Éliminons de nouveau de part et d'autre le rapport de la droite ΔΓ à la droite HΛ, il s'ensuit que le rapport restant de la droite KH à la droite BΘ est le même que celui de la droite HΛ à la droite ΘΓ, et, par permutation, la droite BΘ est à la droite ΘΓ comme la droite KH est à la droite HΛ. Or, les droites KΛ, BΓ sont parallèles ; donc, la ligne qui passe par les points A, H, Θ est droite (1).

1. En notations usuelles, on a par hypothèse : $\frac{B\Theta \times \Gamma\Delta}{B\Delta \times \Gamma\Theta} = \frac{EH \times Z\Delta}{\Delta E \times ZH}$. Or, $\frac{EH \times Z\Delta}{\Delta E \times ZH} = \frac{EH}{\Delta E} \times \frac{Z\Delta}{ZH}$, d'où, considérant que la similitude des triangles ΓΔZ, ΛHZ donne : $\frac{\Gamma\Delta}{H\Lambda} = \frac{Z\Delta}{ZH}$, et que la similitude des triangles KHE, BΔE donne : $\frac{KH}{B\Delta} = \frac{EH}{\Delta E}$, il vient, comme dans le texte : $\frac{EH \times Z\Delta}{\Delta E \times ZH} = \frac{KH}{B\Delta} \times \frac{\Gamma\Delta}{H\Lambda}$. D'autre part : $\frac{B\Theta \times \Gamma\Delta}{B\Delta \times \Gamma\Theta} = \frac{B\Theta}{B\Delta} \times \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Theta}$; donc, comme le texte : $\frac{KH}{B\Delta} \times \frac{\Gamma\Delta}{H\Lambda} = \frac{B\Theta}{B\Delta} \times \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Theta}$. Or, $\frac{KH}{B\Delta} = \frac{KH}{B\Theta} \times \frac{B\Theta}{B\Delta}$; donc : $\frac{KH}{B\Theta} \times \frac{B\Theta}{B\Delta} \times \frac{\Gamma\Delta}{H\Lambda} = \frac{B\Theta}{B\Delta} \times \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Theta}$ ou : $\frac{KH}{B\Theta} \times \frac{\Gamma\Delta}{H\Lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Theta} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Lambda} \times \frac{H\Lambda}{\Gamma\Theta}$ ou : $\frac{KH}{B\Theta} = \frac{H\Lambda}{\Gamma\Theta}$, d'où, comme le texte : $\frac{B\Theta}{\Gamma\Theta} = \frac{KH}{H\Lambda}$, d'où : $\frac{B\Theta + \Gamma\Theta}{\Gamma\Theta} = \frac{KH + H\Lambda}{H\Lambda}$ ou : $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{K\Lambda}{H\Lambda}$. Dès lors, développant ce que la fin de la démonstration sous-entend, la similitude des triangles AΓB, AΛK donne : $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A\Lambda}{K\Lambda}$, d'où : $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} \times \frac{B\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{A\Lambda}{K\Lambda} \times \frac{K\Lambda}{H\Lambda}$ ou : $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{A\Lambda}{H\Lambda}$; expression qui, en présence des parallèles de construction HΛ, ΓΘ ou, comme dit le texte, KΛ, BΓ, permet de conclure, en vertu de la proposition 13 du livre IV (voir. p. 159 et notes), que les points A, H, Θ sont sur une même droite.

XVII.

PROPOSITION 143. — Mais, que la droite AB ne soit pas parallèle à la droite ΓΔ, et qu'elle la rencontre au point N [1].

Dès lors, puisque les deux droites ΔE, ΔN sont menées transversalement du même point Δ sur les trois droites BN, BΓ, BZ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΔE, KΛ est au rectangle compris sous les droites EΛ, KΔ comme le rectangle compris sous les droites NΔ, ΓZ est au rectangle compris sous les droites NΓ, ΔZ [2]. Or, le rectangle compris sous les droites EΘ, ΓH est au rectangle compris sous les droites EΓ, ΘH comme le rectangle compris sous les droites EΔ, KΛ est au rectangle compris sous les droites EΛ, KΔ (car on a de nouveau les deux droites EΓ, EΔ tombant d'un même point E sur les trois droites ΓΛ, ΔΘ, HK) [3] ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites NΔ, ΓZ est au rectangle compris sous les droites NΓ, ZΔ comme le rectangle compris sous les droites EΘ, ΓH est au rectangle compris sous les droites EΓ, ΘH. Or, en vertu du lemme précédent, la ligne qui passe par les points A, Θ, Δ est droite ; donc, la ligne qui passe par les points A, M, Δ est droite aussi [4].



1. Ce lemme considère le cas du lemme XV (proposition 141) dans lequel les droites AB, ΓΔ ne sont plus parallèles (voir p. 689). L'énoncé se complète donc en disant : « que les droites AZ (non indiquée sur la figure), ZB, ΓE, EΔ tombent sur les droites AB, ΓΔ, et menons les droites de jonction BΓ, HK ; je dis que la ligne qui passe par les points A, M, Δ est droite ».

2. Considérant les droites ΔE, ΔN tombant sur les trois droites BN, BΓ, BZ, on retrouve les conditions du lemme III (prop. 129) qui a démontré que l'on a la relation : $\frac{\Delta E \times K\Lambda}{E\Lambda \times K\Delta} = \frac{N\Delta \times \Gamma Z}{N\Gamma \times \Delta Z}$.

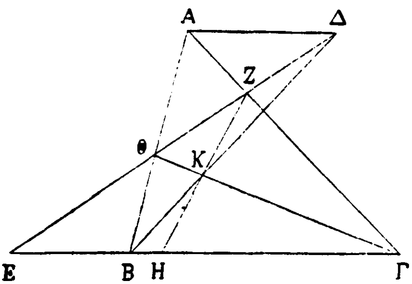
3. Considérant d'autre part les droites EΓ, EΔ tombant sur les droites MΛ, MΔ, MK ou, comme dit le texte, sur les trois droites ΓΛ, ΔΘ, HK, le même lemme III, ou proposition 129, donne : $\frac{E\Theta \times \Gamma H}{E\Gamma \times \Theta H} = \frac{\Delta E \times K\Lambda}{E\Lambda \times K\Delta}$.

4. Les expressions des deux notes précédentes donnent, comme le texte : $\frac{N\Delta \times \Gamma Z}{N\Gamma \times \Delta Z} = \frac{E\Theta \times \Gamma H}{E\Gamma \times \Theta H}$; expression qui, en présence des deux droites ΓN, ΓE

XVIII.

PROPOSITION 144. — Soit le triangle ΑΒΓ ; menons la droite ΑΔ parallèle à la droite ΒΓ ; menons transversalement les droites ΔΕ, ΖΗ, et que la droite ΒΗ soit à la droite ΗΓ comme le carré de la droite ΕΒ est au rectangle compris sous les droites ΕΓ, ΓΒ ; je dis que, si l'on mène la droite de jonction ΒΔ, la ligne qui passe par les points Θ, Κ, Γ est droite (1).

Puisque la droite ΒΗ est à la droite ΗΓ comme le carré de la droite ΕΒ est au rectangle compris sous les droites ΕΓ, ΓΒ, apposons donc de part et d'autre (2) le rapport de la droite ΓΕ à la droite ΕΒ qui est le même que celui du rectangle compris sous les droites ΕΓ, ΓΒ au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΓ. En conséquence, le rapport du carré de la droite ΕΒ au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΓ, c'est-à-dire celui de la droite ΕΒ à la droite ΒΓ, est le même que le rapport composé de celui de la droite ΒΗ à la droite ΗΓ et de celui du rectangle compris sous les droites ΕΓ, ΓΒ au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΓ, qui est le même que celui de la droite ΕΓ à la droite ΕΒ ; de sorte que le rapport du carré de la droite ΕΒ au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΓ se compose de celui que possède la droite ΒΗ avec la droite ΗΓ et de celui que



menées du même point Γ sur les deux droites ΑΝ, ΑΗΖ (cette dernière non tracée sur la figure), et de deux points Δ, Η pris sur les droites ΓΝ, ΓΕ, réalise les conditions du lemme XVI (ou prop. 142) qui a démontré que les points Α, Θ, Δ sont sur une même droite ; donc, les points Α, Μ, Δ sont aussi sur une même droite.

1. La concision de cet énoncé le rend un peu obscur. Il faut entendre que la transversale ΔΕ est quelconque, coupant en Ζ, Θ les côtés ΑΓ, ΑΒ du triangle ΑΒΓ, et que la transversale ΖΗ, reliant le point Ζ à un point Η, pris tel que l'on ait : $\frac{BH}{H\Gamma} = \frac{\overline{EB}^2}{E\Gamma \times \Gamma B}$, coupe au point Κ la droite de jonction ΒΔ.

2. κοινὸς ἄρα προσκείσθω (apposons donc de part et d'autre), expression qu'il faut entendre ici, non pas dans le sens habituel d'ajouter, mais dans le sens de multiplier par.

possède la droite ΕΓ avec la droite ΕΒ, lequel est le même que celui du rectangle compris sous les droites ΕΓ, ΒΗ au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΓΗ [1]. Or, en vertu d'un lemme qui précède, le rectangle compris sous les droites ΔΖ, ΘΕ est au rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΖΘ comme la droite ΕΒ est à la droite ΒΓ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΔΖ, ΘΕ est au rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΖΘ comme le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΒΗ est au rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΕΒ ; donc, la ligne qui passe par les points Θ, Κ, Γ est droite [2] ; car cela est démontré dans les cas des lemmes réciproques [3].

XIX.

Proposition 145. — Menons transversalement, d'un point Ε, les deux droites ΕΖ, ΕΒ sur les trois droites ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, et que la droite ΘΕ soit à la droite ΘΗ comme la droite ΕΖ est à la droite ΖΗ ; je dis que la droite ΕΔ est aussi à la droite ΔΓ comme la droite ΒΕ est à la droite ΒΓ [4].

---

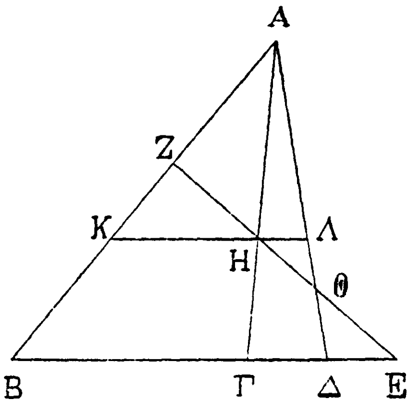
1. Explicitement, on a par hypothèse : $\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{H\Gamma}} = \frac{\overline{\mathrm{EB}}^2}{\mathrm{E\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B}}$. Multiplions les deux membres de cette expression par $\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{EB}}$ ou, ce qui revient au même, par $\frac{\mathrm{E\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B}}{\mathrm{EB} \times \mathrm{\Gamma B}}$; donc : $\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{H\Gamma}} \times \frac{\mathrm{E\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B}}{\mathrm{EB} \times \mathrm{\Gamma B}} = \frac{\overline{\mathrm{EB}}^2}{\mathrm{E\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B}} \times \frac{\mathrm{E\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B}}{\mathrm{EB} \times \mathrm{\Gamma B}}$ ou, comme le texte : $\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{H\Gamma}} \times \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{EB}} = \frac{\overline{\mathrm{EB}}^2}{\mathrm{EB} \times \mathrm{\Gamma B}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{\Gamma B}}$ ou, comme le texte, dont la prolixité fait cependant supposer quelques remaniements de scoliaste : $\frac{\mathrm{BH} \times \mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma} \times \mathrm{EB}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{\Gamma B}}$.

2. Considérant le triangle ΑΒΓ, les parallèles ΑΔ, ΒΓ et la transversale ΔΕ coupant les côtés ΑΒ, ΑΓ en Θ et Ζ, le lemme XI, ou proposition 137 (voir p. 684), a démontré qu'on a : $\frac{\Delta\mathrm{Z} \times \Theta\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E} \times \mathrm{Z}\Theta} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{\Gamma B}}$, d'où, en présence de la dernière expression de la note précédente, on a : $\frac{\Delta\mathrm{Z} \times \Theta\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E} \times \mathrm{Z}\Theta} = \frac{\mathrm{BH} \times \mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma} \times \mathrm{EB}}$. Dès lors, considérant les deux droites ΒΚΔ, ΗΚΖ coupées par les droites ΕΔ, ΕΗ issues du même point Ε, sur lesquelles les points Θ, Γ sont pris tels qu'ils satisfassent à l'expression qui précède, le lemme XVI, ou proposition 142, démontre que les points Θ, Κ, Γ sont sur la même ligne droite.

3. A moins d'avoir été interpolée par un scoliaste, cette phrase semble renvoyer au lemme X, ou proposition 136, d'où, en présence de la relation de la note précédente, on peut tirer la même conclusion. Or, ce lemme X est en réalité la réciproque du lemme III, ou proposition 129.

4. Ce lemme est un cas particulier du lemme III, ou proposition 129.

Menons par le point H la droite ΛK parallèle à la droite BE. Dès lors, puisque la droite EΘ est à la droite ΘH comme la droite EZ est à la droite ZH ; mais que la droite EB est à la droite HK comme la droite EZ est à la droite ZH, et que la droite ΔE est à la droite HΛ comme la droite EΘ est à la droite ΘH, il s'ensuit que la droite ΔE est aussi à la droite HΛ comme la droite BE est à la droite HK. Par permutation, la droite KH est à la droite HΛ comme la droite EB est à la droite EΔ. Or, la droite BΓ est à la droite ΓΔ comme la droite KH est à la droite HΛ ; donc, la droite BΓ est aussi à la droite ΓΔ comme la droite BE est à la droite EΔ. Par permutation, la droite EΔ est à la droite ΔΓ comme la droite EB est à la droite BΓ (1).



Les cas se démontrent de la même manière (2).

XX.

Proposition 146. — Soient deux triangles ABΓ, ΔEZ ayant les angles A, Δ égaux ; je dis que le triangle ABΓ est au triangle ΔEZ comme le rectangle compris sous les droites BA, AΓ est au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ (3).

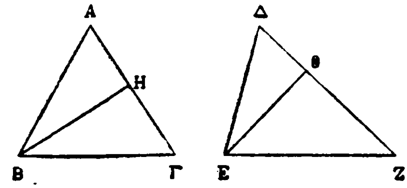
---

1. On a par hypothèse : $\frac{E\Theta}{\Theta H}=\frac{EZ}{HZ}$. Or, les parallèles de construction KH, BE donnent : $\frac{EB}{HK}=\frac{EZ}{ZH}$, et les parallèles HΛ, ΔE donnent : $\frac{\Delta E}{H\Lambda}=\frac{E\Theta}{\Theta H}$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta E}{H\Lambda}=\frac{EB}{HK}$, d'où : $\frac{HK}{H\Lambda}=\frac{EB}{\Delta E}$. Or, les parallèles KΛ, BΔ donnent : $\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{HK}{H\Lambda}$; donc : $\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{EB}{\Delta E}$, d'où comme le texte : $\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma}=\frac{EB}{B\Gamma}$.

2. C'est-à-dire que la démonstration est la même pour les différentes positions du point E.

3. En d'autres termes : quand deux triangles ont deux angles égaux, leurs surfaces sont dans le même rapport que les rectangles des côtés qui comprennent ces angles.

Menons les perpendiculaires BH, EΘ. Dès lors, puisque l'angle A est égal à l'angle Δ, et que l'angle H est égal à l'angle Θ, la droite ΔE est donc à la droite EΘ comme la droite AB est à la droite BH. Mais, le rectangle compris sous les droites BA, AΓ est au rectangle compris sous les droites BH, AΓ comme la droite AB



est à la droite BH, et le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ est au rectangle compris sous les droites EΘ, ΔZ comme la droite ΔE est à la droite EΘ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ est au rectangle compris sous les droites EΘ, ΔZ comme le rectangle compris sous les droites BA, AΓ est au rectangle compris sous les droites BH, AΓ, et permutons. Mais, le triangle ABΓ est au triangle ΔEZ comme le rectangle compris sous les droites BH, AΓ est au rectangle compris sous les droites EΘ, ΔZ (car les droites BH, EΘ sont respectivement les perpendiculaires des dits triangles) ; par conséquent, le triangle ABΓ est au triangle ΔEZ comme le rectangle compris sous les droites BA, AΓ est au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ [1].

XXI.

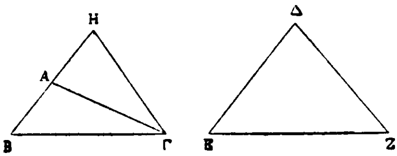
Proposition 147. — Que les angles A, Δ soient maintenant égaux à deux angles droits ; je dis que le triangle ABΓ est de nouveau au triangle ΔEZ comme le rectangle compris sous les droites BA, AΓ est au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ [2].

Prolongeons la droite BA ; posons la droite AH égale à la

1. On a par hypothèse : angle A = angle Δ ; donc, les triangles rectangles semblables BAH, EΔΘ donnent : $\frac{\Delta E}{E\Theta} = \frac{AB}{BH}$. Or, $\frac{AB \times A\Gamma}{BH \times A\Gamma} = \frac{AB}{BH}$ et $\frac{\Delta E \times \Delta Z}{E\Theta \times \Delta Z} = \frac{\Delta E}{E\Theta}$; donc : $\frac{\Delta E \times \Delta Z}{E\Theta \times \Delta Z} = \frac{AB \times A\Gamma}{BH \times A\Gamma}$, d'où : $\frac{BH \times A\Gamma}{E\Theta \times \Delta Z} = \frac{AB \times A\Gamma}{\Delta E \times \Delta Z}$. Or, $\frac{\text{triangle } AB\Gamma}{\text{triangle } \Delta EZ} = \frac{BH \times A\Gamma}{E\Theta \times \Delta Z}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{triangle } AB\Gamma}{\text{triangle } \Delta EZ} = \frac{AB \times A\Gamma}{\Delta E \times \Delta Z}$.

2. En d'autres termes : quand deux triangles ont deux angles supplémentaires, leurs surfaces sont dans le même rapport que les rectangles des côtés qui comprennent ces angles.

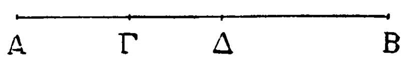
droite BA et menons la droite de jonction ΓΗ. Dès lors, puisque les angles A, Δ sont égaux à deux droits, mais que les angles compris sous les droites BA, ΑΓ et sous les droites ΓΑ, ΑΗ sont aussi égaux à deux angles droits, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΓΑ, ΑΗ est égal à l'angle Δ. En conséquence, le triangle ΑΗΓ est au triangle ΔΕΖ comme le rectangle compris sous les droites ΗΑ, ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ. Or, la droite ΗΑ est égale à la droite AB, et le triangle ΗΑΓ équivaut au triangle ΑΒΓ ; donc, le triangle ΑΒΓ est au triangle ΔΕΖ comme le rectangle compris sous les droites BA, ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΕΔ, ΔΖ (1).



XXII.

Proposition 148. — Soit la droite AB ; soient deux points Γ, Δ sur cette droite, et que deux fois le rectangle compris sous les droites AB, ΓΔ soit équivalent au carré de la droite ΓΒ ; je dis que le carré de la droite ΑΔ équivaut aussi aux carrés des droites ΑΓ, ΔΒ.

En effet, puisque deux fois le rectangle compris sous les droites AB, ΓΔ équivaut au carré de la droite ΓΒ, retranchons de part et d'autre deux fois le rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΓ ; il s'ensuit que deux fois le rectangle restant compris sous les droites ΑΔ, ΓΔ équivaut aux carrés des droites ΓΔ, ΔΒ. Retranchons de part et d'autre le carré de la droite ΓΔ, il s'ensuit que deux fois le



1. On a par hypothèse : angle A + angle Δ = 2 angles droits. Or, $\widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Gamma AH} = 2$ angles droits ; donc : $\widehat{\Gamma AH} =$ angle Δ ; donc (lemme XX ou proposition 146) : $\frac{\text{triangle } AH\Gamma}{\text{triangle } \Delta EZ} = \frac{HA \times A\Gamma}{E\Delta \times \Delta Z}$. Or, on a par construction : AH = AB ; donc (Euclide, liv. VI, prop. 1, énoncée p. 383, n. 1) : triangle ΗΑΓ = triangle ΑΒΓ, d'où, comme le texte : $\frac{\text{triangle } AB\Gamma}{\text{triangle } \Delta EZ} = \frac{AB \times A\Gamma}{E\Delta \times \Delta Z}$.

rectangle restant compris sous les droites AΓ, ΓΔ, conjointement avec le carré de la droite ΓΔ, équivaut au carré de la droite ΔB. Ajoutons de part et d'autre le carré de la droite AΓ, il s'ensuit que le carré de la droite AΔ équivaut aux carrés des droites AΓ, ΔB (1).

XXIII.

Proposition 149. — Que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ soit équivalent au carré de la droite BΔ; je dis qu'on obtient trois choses : le rectangle compris sous la somme des droites AΔ, ΔΓ et la droite BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ; puis le rectangle compris sous la somme des droites AΔ, ΔΓ et la droite BΓ équivaut au carré de la droite ΔΓ; enfin, le rectangle compris sous la somme des droites AΔ, ΔΓ et la droite BA équivaut au carré de la droite AΔ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au carré de la droite BΔ, il s'ensuit, en proportion, puis de droite entière à droite entière, puis par inversion, enfin, par composition, que la droite ΓΔ est à la droite ΔB comme la somme des droites ΓΔ, ΔA est à la droite ΔA; donc, le rectangle compris sous la somme des droites AΔ, ΔΓ et la droite BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ (2).

D'autre part, puisque la droite entière AΔ est à la droite

1. On a par hypothèse : $2AB \times \Gamma\Delta = \overline{\Gamma B}^2$, d'où : $2AB \times \Gamma\Delta - 2B\Delta \times \Gamma\Delta = \overline{\Gamma B}^2 - 2B\Delta \times \Gamma\Delta$ ou : $2(AB - B\Delta)\,\Gamma\Delta = (\Gamma\Delta + B\Delta)^2 - 2B\Delta \times \Gamma\Delta$ ou : $2A\Delta \times \Gamma\Delta = \overline{\Gamma\Delta}^2 + 2BA \times \Gamma\Delta + \overline{B\Delta}^2 - 2B\Delta \times \Gamma\Delta$ ou, comme le texte : $2A\Delta \times \Gamma\Delta = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{B\Delta}^2$, d'où: $2A\Delta \times \Gamma\Delta - \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{B\Delta}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2$ ou : $2(A\Gamma + \Gamma\Delta)\,\Gamma\Delta - \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{B\Delta}^2$ ou: $2A\Gamma \times \Gamma\Delta + 2\overline{\Gamma\Delta}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{B\Delta}^2$, d'où : $\overline{A\Gamma}^2 + 2A\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Delta}^2$ ou : $(A\Gamma + \Gamma\Delta)^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Delta}^2$ ou, comme le texte: $\overline{A\Delta}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Delta}^2$.

2. On a par hypothèse : $\overline{B\Delta}^2 = AB \times B\Gamma$, d'où : $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{AB}{B\Delta}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 12, énoncée p. 67, n. 1) : $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{B\Delta + AB}{B\Gamma + B\Delta}$ ou : $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta}$, d'où : $\frac{B\Gamma + B\Delta}{B\Delta} = \frac{\Gamma\Delta + A\Delta}{A\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta} = \frac{\Gamma\Delta + A\Delta}{A\Delta}$, d'où : $A\Delta \times \Gamma\Delta = (\Gamma\Delta + A\Delta)\,B\Delta$.

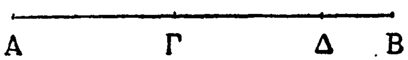
entière ΔΓ comme la droite ΔB est à la droite BΓ, par composition, la droite ΔΓ est à la droite ΓB comme la somme des droites AΔ, ΔΓ est à la droite ΔΓ ; donc, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ et la droite ΓB équivaut au carré de la droite ΔΓ (1).

D'autre part, puisque la droite entière AΔ est à la droite entière ΔΓ comme la droite AB est à la droite BΔ, il s'ensuit que, par inversion et par composition, la droite ΔA est à la droite AB comme la somme des droites ΓΔ, ΔA est à la droite ΔA ; donc, le rectangle compris sous la somme des droites AΔ, ΔΓ et la droite AB équivaut au carré de la droite AΔ (2).

XXIV.

Proposition 150. — Soit la droite AB ; soient deux points Γ, Δ, et que le carré de la droite ΓΔ soit équivalent à deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΔB ; je dis que le carré de la droite AB équivaut aux carrés des droites AΔ, ΓB.

En effet, puisque le carré de la droite ΓΔ équivaut à deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΔB, [il s'ensuit que deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB] (3) équivaut au carré de la droite ΓΔ augmenté de deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ.



Ajoutons de part et d'autre le carré de la droite AΓ, il s'ensuit que deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB, conjointement avec le carré de la droite AΓ, équivaut au carré de la droite AΔ. Ajoutons de part et d'autre le carré de la droite BΓ,

1. La proportion $\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$ de la note précédente donne : $\frac{B\Delta+B\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A\Delta+\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}$ ou : $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}=\frac{A\Delta+\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}$, d'où, comme le texte : $\overline{\Gamma\Delta}^2=(A\Delta+\Gamma\Delta)\,B\Gamma$.

2. La même relation d'hypothèse $\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{AB}{B\Delta}$ donne : $\frac{B\Delta+AB}{B\Gamma+B\Delta}=\frac{AB}{B\Delta}$ ou : $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{B\Delta}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}=\frac{B\Delta}{AB}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma+A\Delta}{A\Delta}=\frac{B\Delta+AB}{AB}$ ou : $\frac{\Delta\Gamma+A\Delta}{A\Delta}=\frac{A\Delta}{AB}$, d'où, comme le texte : $(\Delta\Gamma+A\Delta)\,AB=\overline{A\Delta}^2$.

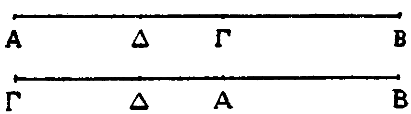
3. Restauration de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 276, l. 40).

il s'ensuit que le carré entier de la droite AB équivaut aux carrés des droites AΔ, ΓB (1).

XXV.

PROPOSITION 151. — Que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ soit équivalent au carré de la droite BΔ ; je dis qu'on obtient trois choses : le rectangle compris sous l'excédent des droites AΔ, ΔΓ et la droite BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ ; le rectangle compris sous l'excédent des droites AΔ, ΔΓ et la droite BΓ équivaut au carré de la droite ΔΓ, et le rectangle compris sous l'excédent des droites AΔ, ΔΓ et la droite BA équivaut au carré de la droite AΔ (2).

En effet, puisque la droite BΔ est à la droite BΓ comme la droite AB est à la droite BΔ, il s'ensuit, droite restante à droite restante et par division, que la droite AΔ est à la droite ΔB comme l'excédent des droites AΔ, ΔΓ est à la droite ΔΓ ; donc, le rectangle compris sous l'excédent des droites AΔ, ΔΓ et la droite ΔB équivaut au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ (3).



D'autre part, puisque la droite restante AΔ est à la droite restante ΔΓ comme la droite ΔB est à la droite BΓ, par division la droite ΔΓ est à la droite ΓB comme l'excédent des droites AΔ, ΔΓ est à la droite ΔΓ ; donc, le rectangle compris sous

1. On a par hypothèse : $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Delta B} = \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2$, d'où : $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Delta B} + 2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta} = \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$ ou, comme le texte : $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} = \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$, d'où : $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} = \overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$ ou, comme le texte : $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} = (\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta})^2 = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$, d'où : $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} + \overline{\mathrm{\Gamma B}}^2 = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 + \overline{\mathrm{\Gamma B}}^2$ ou, comme le texte : $(\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma B})^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 + \overline{\mathrm{\Gamma B}}^2$.

2. L'expression ἡ τῶν AΔ, ΔΓ ὑπεροχὴ, l'excédent des (droites) AΔ, ΔΓ, signifiant aussi bien $\mathrm{A\Delta} - \mathrm{\Delta\Gamma}$ que $\mathrm{\Delta\Gamma} - \mathrm{A\Delta}$, on aura de même dans le cas de $\mathrm{A\Delta} < \mathrm{\Delta\Gamma}$ indiqué sur la seconde ligne de la figure : $\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta\Gamma} = (\mathrm{\Delta\Gamma} - \mathrm{A\Delta})\,\mathrm{B\Delta}$, etc.

3. On a par hypothèse : $\mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma} = \overline{\mathrm{B\Delta}}^2$, doù : $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où : $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{AB} - \mathrm{B\Delta}}{\mathrm{B\Delta} - \mathrm{B\Gamma}}$ ou : $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}}$, d'où : $\frac{\mathrm{AB} - \mathrm{B\Delta}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Delta} - \mathrm{\Delta\Gamma}}{\mathrm{\Delta\Gamma}}$ ou : $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Delta} - \mathrm{\Delta\Gamma}}{\mathrm{\Delta\Gamma}}$, d'où : $\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta\Gamma} = (\mathrm{A\Delta} - \mathrm{A\Gamma})\,\mathrm{B\Delta}$.

l'excédent des droites ΑΔ, ΔΓ et la droite ΒΓ équivaut au carré de la droite ΔΓ [1].

D'autre part, puisque la droite ΑΒ est à la droite ΒΔ comme la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ, il s'ensuit que, par inversion et division, la droite ΔΑ est à la droite ΑΒ comme l'excédent des droites ΑΔ, ΔΓ est à la droite ΔΑ ; donc, le rectangle compris sous l'excédent des droites ΑΔ, ΔΓ et la droite ΑΒ équivaut au carré de la droite ΑΔ [2].

XXVI.

Proposition 152. — Que le carré de la droite ΑΔ soit au carré de la droite ΔΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ équivaut au carré de la droite ΒΔ.

Posons la droite ΔΕ égale à la droite ΓΔ ; il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΑΓ, conjointement avec le carré de la droite ΓΔ, c'est-à-dire avec le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ, équivaut au carré de la droite ΑΔ. Dès lors, puisque le carré de la droite ΑΔ

est au carré de la droite ΔΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ, par division, le rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΒ, c'est-à-dire comme le rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΑΓ est au rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΒΓ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΒΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔΕ. En proportion et par division, la droite ΔΒ est à la droite ΒΓ comme

1. La proportion de la note précédente $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}$ donne : $\frac{AB - B\Delta}{B\Delta - B\Gamma}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}$ ou : $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{A\Delta - \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{B\Delta - B\Gamma}{B\Gamma}$ ou : $\frac{A\Delta - \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$, d'où, comme le texte : $(A\Delta - \Delta\Gamma)\, B\Gamma = \overline{\Delta\Gamma}^2$.

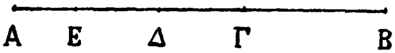
2. La proportion d'hypothèse de la note 3, page 701 $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{B\Delta}{B\Gamma}$ donne: $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{AB - B\Delta}{B\Delta - B\Gamma}$ ou : $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où: $\frac{B\Delta}{AB}=\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$, d'où : $\frac{AB - B\Delta}{AB}=\frac{A\Delta - \Delta\Gamma}{A\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{A\Delta - \Delta\Gamma}{A\Delta}$, d'où : $\overline{A\Delta}^2 = (A\Delta - \Delta\Gamma)\, AB$.

la droite AΔ est à la droite ΔE, c'est-à-dire à la droite ΔΓ ; donc, la droite restante AB est à la droite restante BΔ comme la droite BΔ est à la droite BΓ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au carré de la droite BΔ (1).

XXVII.

Proposition 153. — Que le carré de la droite AΔ soit de nouveau au carré de la droite ΔΓ comme la droite AB est à la droite BΓ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au carré de la droite BΔ.

Posons pareillement (2) la droite ΔE égale à la droite ΓΔ ; il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΓA, AE, conjointement avec le carré de la droite ΓΔ, c'est-à-dire avec le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔΓ, équivaut au carré de la droite AΔ. Or, par division, le rectangle compris sous les droites ΓA, AE est au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔΓ comme la droite AΓ est à la droite ΓB, c'est-à-dire comme [le rectangle compris sous les droites EA, AΓ est au rectangle compris sous les droites EA, ΓB] (3) ; donc, le rectangle compris sous les droites AE, ΓB équivaut au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔΓ. En proportion et par compo-



1. On a par construction : $\Delta E = \Gamma\Delta$. Considérant la droite ΓE coupée en parties égales en Δ, et à laquelle on ajoute la droite ΓA, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3), c'est-à-dire qu'on a l'identité $(a+b)\,b + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $(a+b)^2$: $EA \times A\Gamma + \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{A\Delta}^2$ (I). Or, on a par hypothèse : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2} = \frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{A\Delta}^2 - \overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2} = \frac{AB - B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où, considérant que (I) donne : $EA \times A\Gamma = \overline{A\Delta}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2$, et que $\overline{\Delta\Gamma}^2 = \Gamma\Delta \times \Delta E$, on a, comme le texte : $\frac{EA \times A\Gamma}{\Gamma\Delta \times \Delta E} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{EA \times A\Gamma}{EA \times B\Gamma}$, d'où : $\Gamma\Delta \times \Delta E = EA \times B\Gamma$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} = \frac{EA}{\Delta E}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta - B\Gamma}{B\Gamma}$ $\frac{EA - \Delta E}{\Delta E}$ ou : $\frac{\Delta B}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{A\Delta - \Delta B}{\Delta\Gamma - B\Gamma} = \frac{\Delta B}{B\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{\Delta B}{B\Gamma}$, d'où : $AB \times B\Gamma = \overline{B\Delta}^2$.

2. C'est-à-dire comme dans le lemme précédent, ou proposition 152.

3. Reconstitution de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 378, l. 34).

sition, la droite ΔB est à la droite BΓ comme la droite AΔ est à la droite ΔE, c'est-à-dire à la droite ΔΓ ; par conséquent, la droite entière AB est à la droite entière BΔ comme la droite BΔ est à la droite BΓ ; donc, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ équivaut au carré de la droite BΔ (1).

XXVIII.

Proposition 154. — Que les droites AΔ, ΔΓ soient tangentes au cercle ABΓ ; menons la droite de jonction AΓ et menons transversalement une droite quelconque ΔB (2) ; je dis que la droite BZ est à la droite ZE comme la droite BΔ est à la droite ΔE (3).

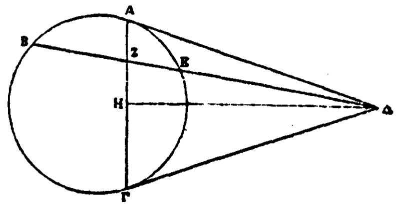
En effet, puisque la droite AΔ est égale à la droite ΔΓ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ, conjointement avec le carré de la droite ZΔ, équivaut au carré de la droite ΔA (4). Mais, le rectangle compris sous les droites AZ, ZΓ

1. On a par construction : $\Delta E = \Gamma\Delta$. Considérant la droite EΓ coupée en parties égales en Δ, à laquelle on ajoute la droite AE, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $A\Gamma \times AE + \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{A\Delta}^2$ (I). Or, on a par hypothèse : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2} = \frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{A\Delta}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2} = \frac{AB - B\Gamma}{B\Gamma}$, d'où, considérant que (I) donne : $A\Gamma \times AE = \overline{A\Delta}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2$, et que $\overline{\Gamma\Delta}^2 = E\Delta \times \Gamma\Delta$, on a : $\frac{A\Gamma \times AE}{E\Delta \times \Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AE \times A\Gamma}{AE \times B\Gamma}$, d'où, comme le texte : $E\Delta \times \Gamma\Delta = AE \times B\Gamma$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} = \frac{AE}{E\Delta}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta + B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AE + E\Delta}{E\Delta}$ ou : $\frac{\Delta B}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{E\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 12, énoncée p. 67, n. 1) : $\frac{\Delta B}{B\Gamma} = \frac{\Delta B + A\Delta}{B\Gamma + \Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Delta B}$, d'où, comme le texte : $\overline{\Delta B}^2 = AB \times B\Gamma$.

2. La version latine de Commandin omet de traduire les mots τυχοῦσα ἡ ΔB (la droite quelconque ΔB) ; de sorte que la démonstration lui a paru s'appliquer au cas plus simple de la droite ΔB perpendiculaire à la droite AΓ, et qu'il fausse ainsi complètement la démonstration de Pappus.

3. Ce lemme établit la propriété du pôle et de la polaire dans le cercle.

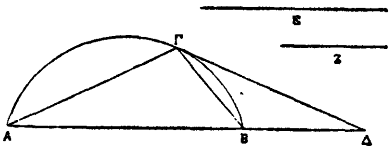
4. La concision du texte fait supposer ici une lacune ou le renvoi tacite à la proposition 53 du livre VI (voir p. 452, n. 3), dans laquelle la relation $AZ \times Z\Gamma + \overline{Z\Delta}^2 = \overline{\Delta A}^2$ a déjà été invoquée. Quoi qu'il en soit, cette relation se démontre à la manière d'Euclide, soit en considérant un cercle auxiliaire de diamètre BE, soit en considérant, comme l'a indiqué Simson (cfr. *loc. cit.*, p. 519), la perpendiculaire ΔH (en pointillé dans la figure). En effet, on a : $AH = H\Gamma$, d'où, considérant la droite AΓ partagée en parties égales en H et inégales en Z, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3), c'est-à-dire qu'en appliquant l'identité : $(a-b)\,b + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, on a : $AZ \times Z\Gamma + \overline{ZH}^2 = \overline{AH}^2$, d'où : $AZ \times Z\Gamma + \overline{ZH}^2 + \overline{H\Delta}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{H\Delta}^2$ ou : $AZ \times Z\Gamma + \overline{Z\Delta}^2 = \overline{\Delta A}^2$.



équivaut au rectangle compris sous les droites BZ, ZE, et le carré de la droite ΔA équivaut au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE ; donc, le rectangle compris sous droites BZ, ZE, conjointement avec le carré de la droite ΔZ, équivaut au rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE. Or, s'il en est ainsi, la droite BZ devient à la droite ZE comme la droite BΔ est à la droite ΔE (1).

XXIX.

PROPOSITION 155. — Étant donné le segment (2) décrit sur la droite AB, y briser la droite AΓB dans un rapport donné (3).



Que la chose soit obtenue, et menons du point Γ la tangente ΓΔ ; il s'ensuit que la droite AΔ est à la droite ΔB comme le carré de la droite AΓ est au carré de la droite BΓ (4). Or, le rapport du carré de la droite AΓ [au carré de la droite ΓB est donné ; en sorte que le rapport de la droite AΔ] (5) à la

1. On a (EUCLIDE, liv. III, prop. 35, énoncée p. 149, n. 5) : $AZ \times Z\Gamma = BZ \times ZE$, et on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4) $\overline{\Delta A}^2 = B\Delta \times \Delta E$, d'où la dernière relation de la note précédente devient : $BZ \times ZE + \overline{Z\Delta}^2 = B\Delta \times \Delta E$ ou : $BZ\,(Z\Delta - \Delta E) + Z\Delta\,(B\Delta - BZ) = B\Delta\,(Z\Delta - ZE)$ ou : $BZ \times \Delta E = B\Delta \times ZE$; d'où, comme le texte : $\frac{BZ}{ZE} = \frac{B\Delta}{\Delta E}$.

2. Sous-entendu : τοῦ κύκλου, (le segment) de cercle.

3. C'est-à-dire inscrire, dans le segment de cercle, les droites AΓ, ΓB de manière que AΓ soit à ΓB dans un rapport donné.

4. On a (EUCLIDE, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4) : $\overline{\Delta\Gamma}^2 = A\Delta \times \Delta B$; d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} \times \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \times \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ ou : $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$ (I). Or, considérant la tangente ΓΔ et la corde ΓB on a (EUCLIDE, liv. III, prop. 32, énoncée p. 203, n. 2) : $\widehat{\Delta\Gamma B} = \widehat{\Delta A\Gamma}$, d'où similitude des triangles ΓΔB, AΔΓ, d'où : $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$, d'où la relation (I) devient, comme le texte : $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2}$.

5. Lacune comblée par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 380, l. 33).

droite BΔ est donné aussi. Et les points A, B sont donnés ; donc, le point Δ est donné ; en sorte que le point Γ est donné aussi (1).

La synthèse du problème se fera donc de la manière suivante : Soit le segment ABΓ, et soit le rapport (2) de la droite E à la droite Z. Faisons en sorte que la droite AΔ soit à la droite ΔB comme le carré de la droite E est au carré de la droite Z ; menons la tangente ΔΓ et menons les droites de jonction AΓ, ΓB ; je dis que les droites AΓ, ΓB satisfont au problème.

En effet, puisque la droite AΔ est à la droite ΔB comme le carré de la droite E est au carré de la droite Z, et que le carré de la droite AΓ est au carré de la droite ΓB comme la droite AΔ est à la droite ΔB (en raison de ce que la droite ΓΔ est tangente) (3), il s'ensuit que le carré de la droite AΓ est aussi au carré de la droite ΓB comme le carré de la droite E est au carré de la droite Z ; en sorte que la droite AΓ est aussi à la droite ΓB comme la droite E est à la droite Z. En conséquence, la ligne AΓB satisfait au problème (4).

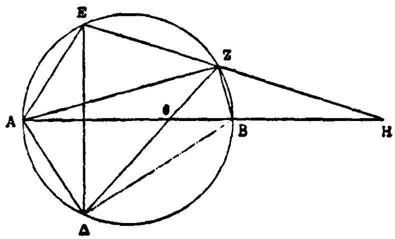
XXX.

Proposition 156. — Soit le cercle dont le diamètre est la droite AB, et soit la perpendiculaire ΔE menée d'un point quelconque sur ce diamètre ; menons transversalement la droite ΔZ ; menons la droite de jonction EZ que nous prolongeons, et soit H le point où cette droite rencontre le diamètre. Je dis que la droite AΘ est à la droite ΘB comme la droite AH est à la droite HB (5).

---

1. Le problème étant supposé résolu, le rapport $\frac{\text{A}\Gamma}{\text{B}\Gamma}$ est donné, d'où, en vertu de la dernière relation de la note 3 de la page 705, le rapport $\frac{\text{A}\Delta}{\Delta\text{B}}$ est donné aussi. Or, les points A, B sont donnés ; donc, Δ est donné, d'où (Euclide, *Données*, prop. 91, énoncée p. 619, n. 4) la tangente ΔΓ est donnée ; donc, comme le texte, le point Γ est donné.
2. Sous-entendu : δοθείς, donné.
3. Voir notes plus haut.
4. La construction (synthèse) du problème se réduit donc à déterminer le point Δ tel que l'on ait : $\frac{\text{A}\Delta}{\Delta\text{B}} = \frac{\text{E}}{\text{Z}}$, et à déterminer le point Γ en menant la tangente ΔΓ.
5. En d'autres termes : Les droites qui relient les extrémités d'une corde

Menons les droites de jonction ΔA, AE, AZ. Dès lors, puisque la droite ΔE est perpendiculaire sur le diamètre, l'angle compris sous les droites ΔA, AB est égal à l'angle compris sous les droites BA, AE. Mais, l'angle compris sous les droites ΔA, AB est égal à l'angle compris sous les droites ΘZ, ZB situé dans le même segment, et l'angle compris sous les droites BA, AE est égal à l'angle compris sous les droites BZ, ZH situé à l'extérieur du quadrilatère ; par conséquent, l'angle compris sous les droites BZ, ZH est égal à l'angle compris sous les droites ΘZ, ZB [1]. Et l'angle compris sous les droites AZ, ZB est droit ; donc, en raison d'un lemme, la droite AΘ est à la droite ΘB comme la droite AH est à la droite HB [2].



XXXI.

Proposition 157. — Soit le demi-cercle décrit sur la droite AB ; menons par les points A, B les lignes droites BΔ, AE à angles

---

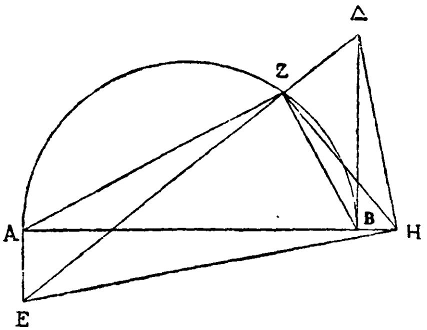
à un point quelconque de la circonférence du cercle divisent harmoniquement le diamètre prolongé perpendiculaire à cette corde.

1. La corde EΔ perpendiculaire au diamètre donne (Euclide, liv. III, prop 3, énoncée p. 140, n. 3, et liv. I, prop. 4, énoncée p. 434, n. 5) : $\widehat{\Delta AB} = \widehat{BAE}$. Or, on a d'une part, dans un même segment : $\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Delta ZB}$ (ou $\widehat{\Theta ZB}$), et d'autre part, en considérant le quadrilatère inscrit AEZB, on a : $\widehat{BZH} + \widehat{EZB} = 2$ angles droits $= \widehat{EZB} + \widehat{BAE}$, d'où : $\widehat{BZH} = \widehat{BAE}$; donc, comme le texte : $\widehat{BZH} = \widehat{\Theta ZB}$.

2. Le petit lemme qui constitue la proposition 52 du livre VI (voir p. 449) a démontré que, si on a : $\frac{A\Theta}{\Theta B} = \frac{AH}{HB}$ et $\widehat{BZH} = \widehat{\Theta ZB}$, si on mène la droite de jonction AZ, on aura : $\widehat{AZB} = 1$ angle droit. C'est donc l'une des deux réciproques que comporte cette proposition qui est invoquée ici, c'est-à-dire que : ayant $\widehat{BZH} = \widehat{\Theta ZB}$ et $\widehat{AZB} = 1$ angle droit, on aura, comme le texte : $\frac{A\Theta}{\Theta B} = \frac{AH}{HB}$. Les deux propositions réciproques de la proposition 52 du livre VI ont été démontrées par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 223, *commentarius*, ll. 21-40). Celle des deux réciproques qui est invoquée ici par Pappus a fait, en outre, l'objet d'une démonstration par R. Simson (cfr. *Opera quaedam, etc.*, p. 461), laquelle a été reproduite dans son texte latin par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, *appendix* p. 1267).

droits sur la droite AB ; menons une droite quelconque ΔE, et que la ligne droite ZH, allant du point Z à angles droits sur la droite ΔE, rencontre la droite AB au point H ; je dis que le rectangle compris sous les droites AE, BΔ équivaut au rectangle compris sous les droites AH, HB (1).

Dès lors, je dis que la droite HB est à la droite BΔ comme la droite EA est à la droite AH. Les côtés situés autour d'angles égaux sont proportionnels ; donc, je dis que l'angle compris sous les droites AH, HE est égal à l'angle compris sous les droites BΔ, ΔH. Mais, l'angle compris sous les droites AH, HE est égal à l'angle compris sous les droites AZ, ZE situé dans le même segment et, derechef, l'angle compris sous les droites BΔ, ΔH est égal à l'angle compris sous les droites BZ, ZH situé dans le même segment ; donc, je dis que l'angle compris sous les droites AZ, ZE est égal à l'angle compris sous les droites BZ, ZH. Or, il lui est égal ; car chacun des angles compris sous les droites AZ, ZB et sous les droites EZ, ZH est droit (2).



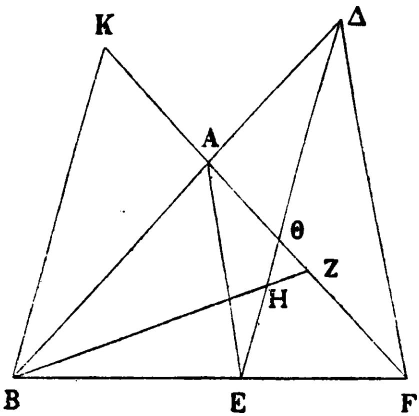
1. En d'autres termes : La corde perpendiculaire à une droite reliant un point fixe du diamètre à un point quelconque de la circonférence du cercle intercepte, sur les tangentes aux extrémités de ce diamètre, deux segments dont le rectangle équivaut au rectangle constant des segments déterminés par le point fixe sur le diamètre.

2. La relation $AE \times B\Delta = AH \times HB$ étant supposée vraie, il s'ensuit : $\frac{HB}{B\Delta} = \frac{EA}{AH}$, d'où, menant les droites HE, HΔ, les triangles HAE, HBΔ sont semblables, d'où, comme le texte : $\widehat{AHE} = \widehat{B\Delta H}$ (I). Or, les angles EAH, EZH sont droits ; donc (Euclide, liv. III, prop. 31, énoncée p. 54, n. 1), les points E, A, Z, H sont sur la circonférence du cercle de diamètre EH, d'où, considérant les angles appuyés sur le même arc : $\widehat{AHE} = \widehat{AZE}$. Et pareillement, les angles ΔZH, ΔBH étant droits, les points H, B, Z, Δ sont sur la circonférence du cercle de diamètre ΔH, d'où : $\widehat{B\Delta H} = \widehat{BZH}$; donc, l'égalité (I) devient, comme le texte : $\widehat{AZE} = \widehat{BZH}$. Or, on a cette égalité, car $\widehat{AZB} = \widehat{EZH} = 1$ angle droit ; donc : $\widehat{AZB} - \widehat{EZB} = \widehat{EZH} - \widehat{EZB}$ ou : $\widehat{AZE} = \widehat{BZH}$.

XXXII.

Proposition 158. — Soit le triangle ΑΒΓ ayant la droite ΑΒ égale à la droite ΑΓ [1] ; prolongeons la droite ΑΒ jusqu'au point Δ, et menons transversalement, du point Δ, la droite ΔΕ faisant le triangle ΒΔΕ équivalent au triangle ΑΒΓ. Je dis que, si l'on divise en deux parties égales, par la droite ΒΖ, l'un des côtés égaux situé devant le triangle équivalent, il se fera que le carré de la droite ΑΖ est au carré de la droite ΖΘ comme la somme des droites ΖΒ, ΒΗ est à la droite ΖΗ.

Menons par le point Β la droite ΒΚ parallèle à la droite ΔΕ, et prolongeons la droite ΑΓ jusqu'au point Κ. Je dis que le carré de la droite ΑΖ est au carré de la droite ΖΘ comme la somme des droites ΖΚ, ΚΘ est à la droite ΖΘ, c'est-à-dire comme le rectangle compris sous la somme des droites ΖΚ, ΚΘ et la droite ΖΘ est au carré de la droite ΖΘ ; par conséquent, que le rectangle compris sous la somme des droites ΖΚ, ΚΘ et la droite ΖΘ, c'est-à-dire l'excédent des carrés des droites ΖΚ, ΚΘ, équivaut au carré de la droite ΑΖ ; donc, que l'excédent des carrés des droites ΚΖ, ΖΑ est le carré de la droite ΚΘ [2]. Mais, l'excédent des carrés des droites ΚΖ, ΖΑ



1. R. Simson a fait remarquer que la démonstration s'applique à un triangle quelconque : « Nihil est in demonstratione quod pendet ex aequalitate laterum ΑΒ, ΒΓ ; tenet enim in quocunque triangulo. Propositio igitur sine dubio est corrupta » (cfr. *Opera quaedam reliqua, etc.*, p. 523). Du reste, Chasles a tiré de ce lemme un porisme général, quel que soit le triangle (cfr. *Les trois livres de Porismes, etc.*, Porisme CCVII, p. 306).

2. Explicitement : On suppose vraie la relation : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{Z\Theta}^2} = \frac{ZB + BH}{ZH}$ (I), et il faut en vérifier les conséquences. Or, les parallèles de construction ΚΒ, ΔΕ (ou ΘΗ) donnent : $\frac{ZB}{ZH} = \frac{KZ}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{2ZB}{ZH} = \frac{2KZ}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{2ZB - ZH}{ZH} = \frac{2KZ - Z\Theta}{Z\Theta}$

est le rectangle compris sous les droites ΓΚ, ΚΑ ; donc, je dis que le rectangle compris sous les droites ΓΚ, ΚΑ équivaut au carré de la droite ΘΚ. En conséquence, je dis que la droite ΚΘ est à la droite ΚΑ, c'est-à-dire la droite ΔΒ à la droite ΒΑ, comme la droite ΓΚ est à la droite ΚΘ, c'est-à-dire comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΕ. Or, il en est ainsi ; car la droite ΑΕ est parallèle à la droite ΔΓ, puisque le triangle ΔΒΕ équivaut au triangle ΑΒΓ, et que, si l'on retranche de part et d'autre le triangle ΑΒΕ, le triangle restant ΔΑΕ équivaut au triangle restant ΑΓΕ, et que ces triangles sont sur la même base [1].

XXXIII.

Proposition 159. — Soit le cercle décrit autour du diamètre ΑΒ ; prolongeons la droite ΑΒ ; qu'elle soit perpendiculaire à une droite ΔΕ, et posons le carré de la droite ΖΗ équivalent au rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΒ. Je dis que, si l'on

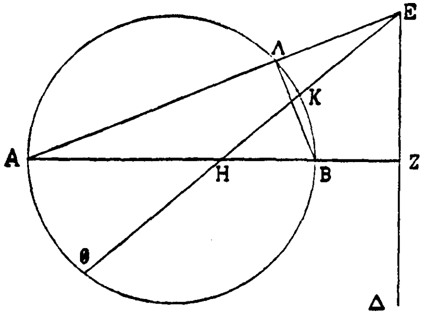
---

ou : $\frac{\text{ZB} + (\text{ZB} - \text{ZH})}{\text{ZH}} = \frac{\text{KZ} + (\text{KZ} - \text{Z}\Theta)}{\text{Z}\Theta}$ ou : $\frac{\text{BZ} + \text{BH}}{\text{ZH}} = \frac{\text{KZ} + \text{K}\Theta}{\text{Z}\Theta}$, d'où la relation (I) devient, comme le texte : $\frac{\overline{\text{AZ}}^2}{\overline{\text{Z}\Theta}^2} = \frac{\text{KZ} + \text{K}\Theta}{\text{Z}\Theta} = \frac{(\text{KZ} + \text{K}\Theta)\,\text{Z}\Theta}{\overline{\text{Z}\Theta}^2}$; donc : $\overline{\text{AZ}}^2 = (\text{KZ} + \text{K}\Theta)\,\text{Z}\Theta$ (II). Or, considérant ΚΘ comme étant la seconde moitié d'une droite divisée en deux parties égales en Κ, à laquelle on ajoute la droite ΘΖ, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3), c'est-à-dire que l'identité $(a + b)\,b + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2} + b)^2$ donne : $(\text{Z}\Theta + 2\text{K}\Theta)\,\text{Z}\Theta + \overline{\text{K}\Theta}^2 = \overline{\text{KZ}}^2$ ou : $(\text{KZ} + \text{K}\Theta)\,\text{Z}\Theta + \overline{\text{K}\Theta}^2 = \overline{\text{KZ}}^2$, d'où : $(\text{KZ} + \text{K}\Theta)\,\text{Z}\Theta = \overline{\text{KZ}}^2 - \overline{\text{K}\Theta}^2$, d'où la relation (II) devient : $\overline{\text{AZ}}^2 = \overline{\text{KZ}}^2 - \overline{\text{K}\Theta}^2$, d'où, comme le texte : $\overline{\text{K}\Theta}^2 = \overline{\text{KZ}}^2 - \overline{\text{AZ}}^2$.

1. La fin de la démonstration se déroule comme suit : Considérant que la droite ΑΓ a été divisée en deux parties égales en Ζ, si on lui ajoute la droite ΑΚ, on a comme dans la note précédente (Euclide, liv. II, prop. 6) : $\Gamma\text{K} \times \text{KA} + \overline{\text{AZ}}^2 = \overline{\text{KZ}}^2$, d'où : $\Gamma\text{K} \times \text{KA} = \overline{\text{KZ}}^2 - \overline{\text{AZ}}^2$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente, on a, comme le texte : $\overline{\text{K}\Theta}^2 = \Gamma\text{K} \times \text{KA}$, d'où : $\frac{\text{K}\Theta}{\text{KA}} = \frac{\Gamma\text{K}}{\text{K}\Theta}$ (III). Or, ΘΔ est parallèle à ΒΚ, et les triangles semblables ainsi formés ΚΑΒ, ΔΑΘ donnent : $\frac{\text{A}\Delta}{\text{AB}} = \frac{\text{A}\Theta}{\text{KA}}$, d'où : $\frac{\text{A}\Delta + \text{AB}}{\text{AB}} = \frac{\text{A}\Theta + \text{KA}}{\text{KA}}$ ou : $\frac{\text{B}\Delta}{\text{AB}} = \frac{\text{K}\Theta}{\text{KA}}$, et, d'autre part, les parallèles ΒΚ, ΕΘ donnent : $\frac{\Gamma\text{B}}{\text{BE}} = \frac{\Gamma\text{K}}{\text{K}\Theta}$; donc, la relation (III) devient, comme le texte : $\frac{\Delta\text{B}}{\text{BA}} = \frac{\Gamma\text{B}}{\text{BE}}$; relation qui entraîne le parallélisme des droites ΑΕ, ΔΓ. Or, ce parallélisme se vérifie ; car on a par construction : triangle ΔΒΕ = triangle ΑΒΓ, d'où : triangle ΔΒΕ — triangle ΑΒΕ = triangle ΑΒΓ — triangle ΑΒΕ, ou : triangle ΔΑΕ = triangle ΑΓΕ. Or, ces triangles équivalents ont même base ΑΕ, donc leurs sommets Δ, Γ sont situés sur une parallèle à la droite ΑΕ, dernière vérification que le texte sous-entend.

prend un point quelconque tel que E, et si la droite de jonction menée de ce point au point H est prolongée jusqu'au point Θ, il se fera que le rectangle compris sous les droites ΘE, EK équivaut au carré de la droite EH (1).

Menons les droites de jonction AE, BΛ ; il s'ensuit que l'angle Λ est droit. Or, l'angle Z est droit aussi ; donc, le rectangle compris sous les droites AE, EΛ équivaut au rectangle compris sous les droites AZ, ZB augmenté du carré de la droite ZE (2). Mais, le rectangle compris sous les droites AE, EΛ équivaut au rectangle compris sous les droites ΘE, EK, et le rectangle compris sous les droites AZ, ZB équivaut au carré de la droite ZH ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΘE, EK équivaut aux carrés des droites EZ, ZH, c'est-à-dire au carré de la droite EH (3).



XXXIV.

PROPOSITION 160. — Que la droite AΔ soit à la droite ΔΓ comme la droite AB est à la droite BΓ, et coupons la droite AΓ en deux parties égales au point E ; je dis qu'on aura trois choses : le rectangle compris sous les droites BE, EΔ équivalent au carré de la droite EΓ, le rectangle compris sous les droites BΔ, ΔE

1. En d'autres termes : Un point H étant donné sur le diamètre AB d'un cercle, si l'on prend sur le prolongement du diamètre le point Z tel que l'on ait : $AZ \times ZB = \overline{ZH}^2$, et que, par ce point, on élève la perpendiculaire au diamètre, toute droite menée par le point H rencontre le cercle en deux points, et la perpendiculaire en un troisième point, tel que le carré de sa distance au point H équivaut au rectangle compris sous ses distances aux deux points du cercle.

2. On a : $\overline{AE}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{ZE}^2$. Or, la similitude des triangles AΛB, AZE donne : $\frac{A\Lambda}{AZ} = \frac{AB}{AE}$, d'où : $A\Lambda \times AE = AB \times AZ$; donc : $\overline{AE}^2 - A\Lambda \times AE = \overline{AZ}^2 - AB \times AZ + \overline{ZE}^2$ ou : $AE\,(AE - A\Lambda) = AZ\,(AZ - AB) + \overline{ZE}^2$ ou, comme le texte : $AE \times \Lambda E = AZ \times ZB + \overline{ZE}^2$.

3. On a : $AE \times \Lambda E = \Theta E \times EK$, et l'on a par construction $\overline{ZH}^2 = AZ \times ZB$; donc, la dernière égalité de la note précédente devient : $\Theta E \times EK = \overline{ZH}^2 + \overline{ZE}^2 = \overline{EH}^2$.

équivalent au rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ et le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ équivalent au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΔ.

En effet, puisque la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ, il s'ensuit que, par composition, puis considérant les moitiés des antécédents et, enfin, par conversion, la droite ΕΓ est à la droite ΕΔ comme la droite ΒΕ est à la droite ΕΓ; donc, le rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΔ équivaut au carré de la droite ΕΓ (1).

Retranchons de part et d'autre le carré de la droite ΔΕ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ (2). Derechef, le rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΔ étant équivalent au carré de la droite ΕΓ, retranchons les deux termes du carré de la droite ΒΕ ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ équivaut au rectangle restant compris sous les droites ΕΒ, ΒΔ (3).

Mais, que le rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ soit maintenant équivalent au rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ, et coupons la droite ΑΓ en deux parties égales au point Ε ; je dis que la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ, ajoutons

1. On a par hypothèse : $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B}\Gamma}$, d'où : $\frac{\mathrm{A\Delta}+\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}$ ou : $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{A}\Gamma+2\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}$, d'où : $\frac{\frac{1}{2}\mathrm{A}\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{A}\Gamma+2\mathrm{B}\Gamma)}{\mathrm{B}\Gamma}$ ou : $\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{B}\Gamma}$, d'où : $\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\mathrm{E}\Gamma-\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EB}-\mathrm{B}\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\mathrm{E}\Delta}=\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{E}\Gamma}$, d'où : $\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2=\mathrm{EB}\times\mathrm{E}\Delta$.

2. La dernière égalité de la note précédente peut s'écrire : $\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2-\overline{\Delta\mathrm{E}}^2=\mathrm{EB}\times\mathrm{E}\Delta-\overline{\Delta\mathrm{E}}^2$. Or, la droite ΑΓ étant partagée en parties égales en Ε et inégales en Δ, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3), c'est-à-dire que l'identité $(a-b)\,b+(b-\frac{a}{2})^2=(\frac{a}{2})^2$ donne : $\mathrm{A\Delta}\times\Delta\Gamma+\overline{\Delta\mathrm{E}}^2=\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2$, d'où : $\mathrm{A\Delta}\times\Delta\Gamma=\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2-\overline{\Delta\mathrm{E}}^2$; et on a d'autre part : $\mathrm{EB}\times\mathrm{E}\Delta-\overline{\Delta\mathrm{E}}^2=(\mathrm{EB}-\Delta\mathrm{E})\,\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta\times\Delta\mathrm{E}$; donc, comme le texte : $\mathrm{A\Delta}\times\Delta\Gamma=\mathrm{B}\Delta\times\Delta\mathrm{E}$.

3. La dernière égalité de la note 1 ci-dessus peut s'écrire : $\overline{\mathrm{EB}}^2-\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2=\overline{\mathrm{EB}}^2-\mathrm{EB}\times\mathrm{E}\Delta$ ou : $\overline{\mathrm{EB}}^2-\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2=\mathrm{EB}\,(\mathrm{EB}-\mathrm{E}\Delta)=\mathrm{EB}\times\mathrm{B}\Delta$. Or, considérant la droite ΑΓ coupée en deux parties égales en Ε, à laquelle on ajoute la droite ΓΒ, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2=\overline{\mathrm{EB}}^2$, d'où : $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma=\overline{\mathrm{EB}}^2-\overline{\mathrm{E}\Gamma}^2$; donc, comme le texte : $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{EB}\times\mathrm{B}\Delta$.

de part et d'autre le carré de la droite ΔE ; il s'ensuit que le rectangle entier compris sous les droites BE, EΔ équivaut au carré de la droite ΓE (1). Dès lors, en proportion, puis par conversion, puis considérant deux fois les antécédents, et par division, la droite AΔ est à la droite ΔΓ comme la droite AB est à la droite BΓ (2).

XXXV.

Proposition 161. — Les choses étant telles (3), soit le cercle décrit autour du diamètre AB ; prolongeons la droite AB ; qu'elle soit perpendiculaire sur une droite quelconque ΔE, et qu'il soit fait en sorte que la droite AH soit à la droite HB comme la droite AZ est à la droite ZB ; je dis que, si l'on prend de nouveau (4) un point quelconque tel que E sur la droite EΔ, et si la droite de jonction EH est prolongée jusqu'au point Θ, il se fait que la droite ΘH est à la droite HK comme la droite ΘE est à la droite EK (5).

Prenons le centre Λ du cercle et menons la perpendiculaire ΛM du point Λ sur la droite EΘ ; il s'ensuit que la droite KM est égale à la droite MΘ (6). Or, puisque chacun des angles M, Z

1. Soit en seconde hypothèse : $B\Delta \times \Delta E = A\Delta \times \Delta\Gamma$, d'où : $B\Delta \times \Delta E + \overline{\Delta E}^2 = A\Delta \times \Delta\Gamma + \overline{\Delta E}^2$. Or, on a d'une part : $B\Delta \times \Delta E + \overline{\Delta E}^2 = (B\Delta + \Delta E)\,\Delta E = BE \times \Delta E$ et, d'autre part, considérant la droite AΓ divisée en parties égales en E et inégales en Δ, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $A\Delta \times \Delta\Gamma + \overline{E\Delta}^2 = \overline{\Gamma E}^2$; donc, comme le texte : $BE \times \Delta E = \overline{\Gamma E}^2$.

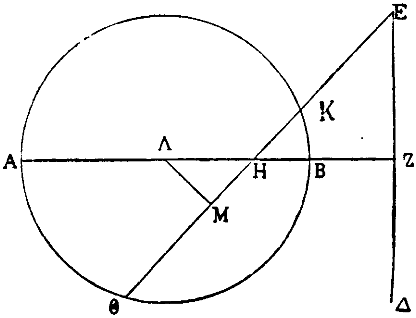
2. La dernière égalité de la note précédente donne : $\frac{\Gamma E}{\Delta E} = \frac{BE}{\Gamma E}$, d'où : $\frac{\Gamma E}{\Gamma E - \Delta E} = \frac{BE}{BE - \Gamma E}$ ou : $\frac{\Gamma E}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{\Gamma B}$, d'où : $\frac{2\Gamma E}{\Gamma\Delta} = \frac{2BE}{\Gamma B}$, d'où : $\frac{2\Gamma E - \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{2BE - \Gamma B}{\Gamma B}$ ou : $\frac{A\Gamma - \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{2(E\Gamma + \Gamma B) - \Gamma B}{\Gamma B}$ ou : $\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma + \Gamma B}{\Gamma B}$ ou, comme le texte : $\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Gamma B}$.

3. C'est-à-dire les trois égalités du lemme XXXIV, ou proposition 160, étant démontrées.

4. πάλιν, de nouveau, c'est-à-dire probablement comme dans le lemme XXXIII ou proposition 159.

5. Ce lemme se confond en quelque sorte avec le lemme XXVIII, ou proposition 154 (voir p. 704), pour établir la propriété du pôle et de la polaire dans le cercle ; car, le point H, intérieur dans ce lemme-ci, correspond au point Δ extérieur au cercle dans l'autre lemme ; tandis que la polaire EΔ du point H correspond ici à la polaire AΓ du point Δ dans l'autre lemme.

6. Euclide, liv. III, prop. 3, énoncée p. 140, n. 3.



est droit, les points E, Z, Λ, M sont dans un cercle ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ZH, HΛ équivaut au rectangle compris sous les droites EH, HM. Mais le rectangle compris sous les droites ZH, HΛ équivaut au rectangle compris sous les droites AH, HB (parce que la droite AH est à la droite HB comme la droite AZ est à la droite ZB, et que la droite AB est coupée en deux parties égales au point Λ) ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites EH, HM équivaut au rectangle compris sous les droites AH, HB, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites ΘH, HK (car ces droites sont dans un cercle). Et la droite ΘK est coupée en deux parties égales au point M ; donc, en raison du lemme qui précède, il se fait que la droite ΘH est à la droite HK comme la droite ΘE est à la droite EK [1].

XXXVI.

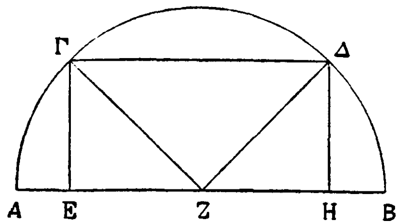
PROPOSITION 162. — Soient le demi-cercle décrit sur la droite AB et la droite ΓΔ parallèle à la droite AB, et menons les perpendiculaires ΓE, ΔH ; je dis que la droite AE est égale à la droite HB [2].

Prenons le centre Z du cercle et menons les droites de jonction

1. On a : $\widehat{\mathrm{HM\Lambda}} = \widehat{\mathrm{HZE}} = 1$ angle droit ; donc, les points E, Z, M, Λ sont sur la circonférence du cercle de diamètre ΛE, d'où, considérant les sécantes ZΛ, EM de ce cercle, on a : $\mathrm{ZH} \times \mathrm{H\Lambda} = \mathrm{EH} \times \mathrm{HM}$. Or, considérant qu'on a par hypothèse : $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{ZB}}$, et que AB est divisé en deux parties égales en Λ, on se trouve dans les conditions pour lesquelles le lemme XXXIV, ou proposition 160, a démontré trois égalités, notamment : $\mathrm{ZH} \times \mathrm{H\Lambda} = \mathrm{AH} \times \mathrm{HB}$; donc, comme le texte : $\mathrm{EH} \times \mathrm{HM} = \mathrm{AH} \times \mathrm{HB}$. Or, les sécantes AB, ΘK donnent : $\mathrm{AH} \times \mathrm{HB} = \Theta\mathrm{H} \times \mathrm{HK}$; donc : $\mathrm{EH} \times \mathrm{HM} = \Theta\mathrm{H} \times \mathrm{HK}$; relation qui, en présence de la droite ΘK coupée en deux parties égales en M, réalise les conditions dans lesquelles le lemme XXXIV, ou proposition 160, a démontré en second lieu qu'on a, comme le texte : $\frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{HK}} = \frac{\Theta\mathrm{E}}{\mathrm{EK}}$.

2. En d'autres termes : Les perpendiculaires abaissées des extrémités d'une corde parallèle au diamètre sur ce diamètre y découpent des droites égales à partir des extrémités du diamètre.

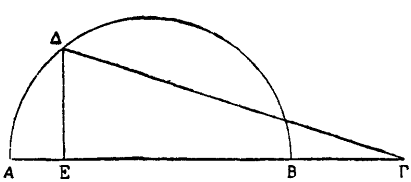
ΓZ, ZΔ ; il s'ensuit que la droite ΓZ est égale à la droite ZΔ ; de sorte que le carré de la droite ΓZ est aussi égal au carré de la droite ZΔ. Mais, les carrés des droites ΓE, EZ valent le carré de la droite ΓZ, et les carrés des droites ΔH, HZ valent le carré de la droite ΔZ ; donc les carrés des droites ΓE, EZ valent aussi les carrés des droites ZH, HΔ ; carrés dont celui de la droite ΓE est égal à celui de la droite ΔH ; donc, le carré restant de la droite EZ est égal au carré restant de la droite ZH ; donc, la droite EZ est égale à la droite ZH. Or, la droite entière AZ est aussi égale à la droite entière ZB ; donc, la droite restante AE est égale à la droite restante HB ; ce qu'il fallait démontrer.



XXXVII.

PROPOSITION 163. — Soit le demi-cercle décrit sur la droite AB ; menons la droite ΓΔ d'un point quelconque Γ (1), et menons la perpendiculaire ΔE ; je dis que le carré de la droite AΓ excède le carré de la droite ΓΔ du rectangle compris sous la somme des droites AΓ, ΓB et la droite AE.

Dès lors (2), je dis que le carré de la droite AΓ équivaut au carré de la droite ΔΓ, c'est-à-dire aux carrés des droites ΔE, EΓ, augmenté du rectangle compris sous la somme des droites AΓ, ΓB et la droite AE. En conséquence, je dis que, si l'on retranche de part et d'autre le rectangle compris sous les droites ΓA, AE, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓE équivaut au carré de la droite ΔE, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites AE, EB augmenté du carré de la droite ΓE



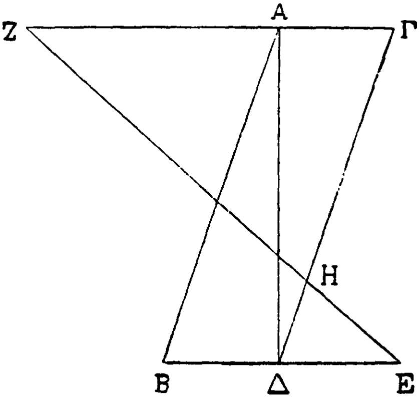
1. C'est-à-dire d'un point quelconque pris sur le prolongement du diamètre.
2. Sous-entendu : si la relation est vraie.

et du rectangle compris sous les droites AE, ΓB. Si l'on retranche de part et d'autre le carré de la droite ΓE, je dis que le rectangle compris sous les droites AE, EΓ équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EB augmenté du rectangle compris sous les droites AE, BΓ. Or, il en est ainsi (1).

POUR LE PORISME DU PREMIER LIVRE.

XXXVIII.

Proposition 164. — Le parallélogramme AΔ étant donné de position, mener transversalement, d'un point donné E (2), la droite EZ, faisant en sorte que le triangle ZΓH soit équivalent à ce parallélogramme AΔ (3).



Que cela soit obtenu. Dès lors, puisque le triangle ZΓH équivaut au parallélogramme AΔ, et que le parallélogramme AΔ est le double du triangle AΓΔ, il s'ensuit que le triangle ZΓH est aussi le double du triangle AΓΔ. Or, le rectangle compris sous les droites ZΓ, ΓH est au rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ comme triangle est à triangle,

1. Explicitement : Supposons vraie la relation $\overline{A\Gamma}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2 = (A\Gamma + \Gamma B)\,AE$. Dès lors, on a : $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + (A\Gamma + \Gamma B)\,AE = \overline{\Delta E}^2 + \overline{E\Gamma}^2 + (A\Gamma + \Gamma B)\,AE$, d'où : $\overline{A\Gamma}^2 - A\Gamma \times AE = AE \times EB + \overline{E\Gamma}^2 + (A\Gamma + \Gamma B)\,AE - A\Gamma \times AE$ ou : $A\Gamma(A\Gamma - AE) = AE \times EB + \overline{E\Gamma}^2 + A\Gamma \times AE + \Gamma B \times AE - A\Gamma \times AE$ ou, comme le texte : $A\Gamma \times E\Gamma = AE \times EB + \overline{E\Gamma}^2 + \Gamma B \times AE$, d'où : $A\Gamma \times E\Gamma - \overline{E\Gamma}^2 = AE \times EB + \overline{E\Gamma}^2 + \Gamma B \times AE - \overline{E\Gamma}^2$ ou : $(A\Gamma - E\Gamma)\,E\Gamma = AE \times EB + \Gamma B \times AE$ ou, comme le texte : $AE \times E\Gamma = AE \times EB + \Gamma B \times AE$. Or, cette dernière relation est vraie, car elle se réduit à la relation de construction : $E\Gamma = EB + \Gamma B$; donc, la relation d'hypothèse est vraie aussi.

2. Le point E est donné sur le côté BΔ prolongé du parallélogramme dans la figure qui accompagne le texte des manuscrits. Simson a cependant étendu le problème au cas du point E situé « in angulo qui deinceps est angulo AΓΔ » (Cfr. *Opera quaedam, etc.*, p. 529).

3. En d'autres termes : Mener, dans un parallélogramme, par un point donné sur un de ses côtés, une droite formant avec deux autres côtés un triangle équivalent à ce parallélogramme.

parce que ces triangles sont placés autour du même angle Γ ; et le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΔ est donné; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΖΓ, ΓΗ est donné aussi. De plus, la droite ΕΖ est menée transversalement du point donné Ε, pour section d'aire (1), sur les droites ΑΓ, ΓΔ données de position ; donc, la droite ΕΖ est donnée de position (2).

La synthèse se fera de la manière suivante : Soit ΑΔ le parallélogramme donné de position, et soit Ε le point donné. Menons du point Ε, transversalement sur les droites ΖΓ, ΓΔ données de position, la droite ΕΖ découpant une aire qui, comprise sous les droites ΖΓ, ΓΗ, soit équivalente à une aire donnée, double de celle qui est comprise sous les droites ΑΓ, ΓΔ (3), et on démontrera, comme dans l'analyse (4), que le triangle ΖΓΗ équivaut au parallélogramme ΑΔ. En conséquence, la droite ΕΖ satisfait au problème. Il est donc évident que cette droite est la seule, parce qu'elle a été aussi la seule (5).

---

1. εἰς χωρίου ἀποτομήν. Voir au sujet de cette expression le développement de la note suivante.

2. Le problème étant supposé résolu, on a par hypothèse : triangle ΖΓΗ = parallélogramme ΑΓΒΔ. Or, parallélogramme ΑΓΒΔ = 2 triangles ΑΓΔ ; donc : triangle ΖΓΗ = 2 triangles ΑΓΔ. Or, les deux triangles ΖΓΗ et ΑΓΔ ayant même angle Γ, le lemme XX (ou proposition 146, voir p. 696) a démontré qu'on a : $\frac{\text{Z}\Gamma \times \Gamma\text{H}}{\text{A}\Gamma \times \Gamma\Delta} = \frac{\text{triangle Z}\Gamma\text{H}}{\text{triangle A}\Gamma\Delta}$; donc : $\text{Z}\Gamma \times \Gamma\text{H} = 2\text{A}\Gamma \times \Gamma\Delta$. Or l'aire $\text{A}\Gamma \times \Gamma\Delta$ est donnée ; donc, l'aire $\text{Z}\Gamma \times \Gamma\text{H}$ est donnée aussi. Or, pour séparer cette aire donnée $\text{Z}\Gamma \times \Gamma\text{H}$, la droite ΕΖ a été menée transversalement, conformément à la solution d'un problème posé par Apollonius dans son traité perdu de *La Section d'Aire* ; problème qui, d'après la reconstitution conjecturale de ce traité donné par Halley (cfr. *loc. cit.*, p. 145), serait celui du premier cas du troisième lieu du premier livre.

3. La manière de déterminer le point Η et, par suite, la direction de la droite ΕΖ, n'est pas indiquée ou rappelée par Pappus, qui la suppose connue à son époque. Une solution de ce problème a été donnée par Commandin, qui la fait précéder de cette phrase : « Non docet Pappus quo inveniendum sit punctum H. Sed verisimile est hoc apparere in libris de *Spatii Sectione* ab Apollonio conscriptis qui injuria temporum ad manus nostras non pervenerunt » (Cfr. *loc. cit.*, p. 388, *commentarius*, ll. 16-35).

4. C'est-à-dire en raisonnant comme dans la première partie analytique de la proposition.

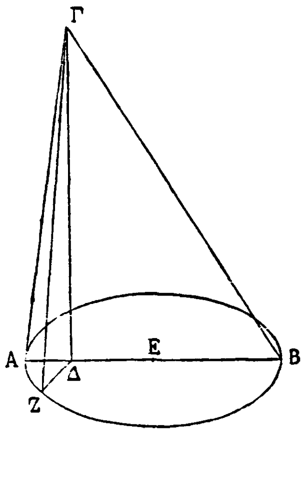
5. D'après Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 919, l. 18), et conformément au sentiment de Robert Simson (cfr. *Opera quaedam reliqua, etc.*, p. 528), cette phrase trop concise, ou peut-être lacuneuse, indique que la droite ΕΖ est la seule qui résolve le problème, parce qu'elle constituerait aussi la seule solution du problème correspondant du traité perdu de *La Section d'Aire* d'Apollonius.

LEMMES RELATIFS AU PREMIER LIVRE DES CONIQUES [1].

I.

PROPOSITION 165. — Soit le cône dont la base est le cercle AB et le sommet le point Γ. Dès lors, si le cône est isocèle, il est évident que toutes les droites qui tombent du point Γ sur le cercle AB [2] sont égales entre elles, et, s'il est scalène, il s'agit de trouver quelle est la droite la plus grande et quelle est la plus petite.

Menons du point Γ la perpendiculaire sur le plan du cercle AB ; qu'elle tombe d'abord à l'intérieur du cercle AB, et que ce soit la droite ΓΔ. Prenons le centre E du cercle ; prolongeons la droite de jonction ΔE de part et d'autre jusqu'aux points A, B et menons les droites de jonction AΓ, ΓB. Je dis que la droite BΓ est la plus grande et que la droite AΓ est la plus petite de toutes celles qui tombent du point Γ sur le cercle AB.

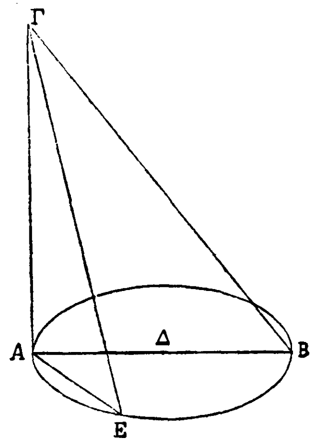


En effet, menons encore une autre droite ΓZ et menons la droite de jonction ΔZ ; il s'ensuit que la droite BΔ est plus grande que la droite ΔZ [3]. Or, la droite ΓΔ est commune et les angles au point Δ sont droits ; donc, la droite BΓ est plus grande que la droite ΓZ. De la même manière, la droite ΓZ est aussi plus grande que la droite ΓA ; de sorte que la droite ΓB est la plus grande et la droite ΓA la plus petite.

PROPOSITION 166. — Mais, que la perpendiculaire menée de nouveau du point Γ tombe sur la circonférence du cercle AB,

1. C'est-à-dire lemmes qui sont utilisés dans les démonstrations des propositions du livre I des *Coniques* d'Apollonius.
2. C'est-à-dire sur la circonférence du cercle AB.
3. EUCLIDE, liv. III, prop. 7, énoncée p. 398, n. 4.

et que ce soit la droite ΓΑ. Menons de nouveau la droite ΑΔ reliant au centre Δ du cercle ; prolongeons-la jusqu'au point Β, et menons la droite de jonction ΒΓ. Je dis que la droite ΒΓ est la plus grande et la droite ΑΓ la plus petite.



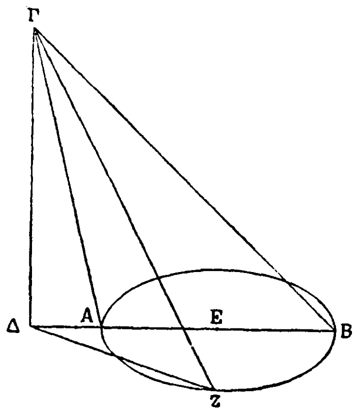
Il est évident que la droite ΓΒ est plus grande que la droite ΓΑ (1). Menons encore une autre droite ΓΕ et menons la droite de jonction ΑΕ. Puisque la droite ΑΒ est un diamètre, elle est plus grande que la droite ΑΕ (2). Et la droite ΑΓ est perpendiculaire sur ces droites (3) ; donc, la droite ΓΒ est plus grande que la droite ΓΕ. De même, elle est aussi plus grande que toutes les autres droites. On démontrera de la même manière que la droite ΕΓ est plus grande que la droite ΓΑ ; en sorte que la droite ΒΓ est la plus grande et la droite ΓΑ la plus petite des droites qui tombent du point Γ sur le cercle ΑΒ.

Proposition 167. — Les mêmes choses étant supposées, que la perpendiculaire tombe en dehors du cercle ; que ce soit la droite ΓΔ ; prolongeons la droite de jonction ΔΕ menée sur le centre Ε du cercle, et menons les droites de jonction ΑΓ, ΒΓ. Je dis encore que la droite ΒΓ est la plus grande et la droite ΑΓ la plus petite de toutes les droites qui tombent du point Γ sur le cercle ΑΒ.

Il est d'ailleurs évident que la droite ΒΓ est plus grande que la droite ΓΑ. Or, je dis qu'elle est aussi la plus grande de toutes celles qui se jettent du point Γ à la circonférence du cercle ΑΒ.

En effet, jetons encore une autre droite ΓΖ et menons la droite de jonction ΔΖ. Dès lors, puisque la droite ΒΔ passe par

1. Euclide, liv. I, prop. 19, énoncée p. 434, n. 7.
2. Euclide, liv. III, prop. 15 : « Dans un cercle, le diamètre est la plus grande de toutes les droites, et parmi les autres, celle qui est plus près du centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 150.
3. Euclide, liv. XI, définition 3, énoncée p. 328, n. 4.



le centre, la droite ΔB est plus grande que la droite ΔZ [1]. Et la droite ΔΓ est perpendiculaire sur ces droites, parce qu'elle est aussi perpendiculaire au plan [2] ; donc, la droite BΓ est plus grande que la droite ΓZ. Elle est pareillement plus grande que toutes les autres ; donc, la droite ΓB est la plus grande. Mais je dis aussi que la droite AΓ est la plus petite. En effet, puisque la droite AΔ est plus petite que la droite ΔZ [3], et que la droite ΔΓ est perpendiculaire à ces droites, il s'ensuit que la droite AΓ est plus petite que la droite ΓZ. Elle est de même plus petite aussi que toutes les autres droites ; par conséquent, la droite AΓ est la plus petite et la droite BΓ la plus grande de toutes les droites qui sont jetées du point Γ à la circonférence du cercle AB.

SUR LES DÉFINITIONS DES CONIQUES

C'est avec raison qu'Apollonius ajoute : « prolongée de part et d'autre » à « si d'un point à la circonférence du cercle... » [4],

1. EUCLIDE, liv. III, prop. 8 : « Si, hors d'un cercle, on prend un point quelconque; si, de ce point, on mène à ce cercle des droites ; si une d'elles est menée par le centre, et les autres comme on voudra ; parmi les droites menées à la circonférence concave, la plus grande est celle qui passe par le centre, et parmi les autres, celle qui est plus éloignée de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui s'en éloigne davantage ; mais parmi les droites menées à la circonférence convexe, la plus petite est celle qui est entre le point pris hors du cercle et le diamètre et, parmi les autres, celle qui est plus près de la plus petite est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage ; et du point pris hors du cercle, on ne peut mener à la circonférence, de l'un et l'autre côté de la plus petite, que deux droites égales ». Voir trad. de Peyrard, vol I, p. 132.

2. Sous-entendu : τοῦ AB κύκλου, du cercle AB.

3. EUCLIDE, liv. III, prop. 8.

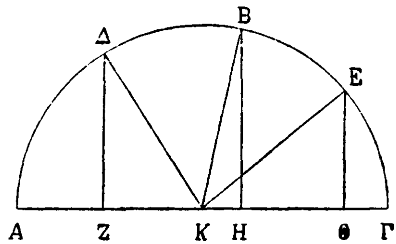
4. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I. *Définitions premières*, déf. 1 : « Si d'un certain point, l'on mène à une circonférence de cercle, non située dans le même plan que ce point, une droite prolongée de part et d'autre, et si, le point restant fixe, la droite circulant suivant la circonférence, reprend la position d'où elle a commencé de se mouvoir, j'appelle surface conique celle qui, décrite par la

parce qu'il fait voir clairement quelle est la génération d'un cône quelconque. En effet, si le cône est isocèle, il est superflu de prolonger, attendu que la droite qui circule touche continuellement la circonférence du cercle, parce que le point est toujours également distant de la circonférence du cercle. Mais, puisque le cône peut aussi être oblique, et qu'il y a dans le cône oblique, comme on l'a exposé plus haut, un côté maximum et un côté minimum, il a nécessairement ajouté « est prolongée », afin que la plus petite droite, continuellement prolongée, soit augmentée jusqu'à devenir égale à la plus grande et touche, comme celle-ci, la circonférence du cercle.

II.

Proposition 168. — Soit la ligne ΑΒΓ; soit la droite ΑΓ donnée de position, et que toutes les perpendiculaires amenées de la ligne sur la droite ΑΓ le soient de telle sorte que le carré de chacune d'elles soit équivalent au rectangle compris sous les segments de la base qu'elle découpe ; je dis que la ligne ΑΒΓ est une circonférence de cercle, et que la droite ΑΓ est son diamètre.

En effet, menons des points Δ, Β, Ε les perpendiculaires ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. Dès lors, le carré de la droite ΔΖ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ, le carré de la droite ΒΗ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΗ, ΗΓ, et le carré de la droite ΕΘ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΘ, ΘΓ. Coupons la droite ΑΓ en deux parties égales au point Κ, et menons les droites de jonction ΔΚ, ΚΒ, ΚΕ. En conséquence, puisque le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΓ, conjointement avec le carré de la droite ΖΚ, équivaut au carré de la droite ΑΚ ; mais que le rectangle compris



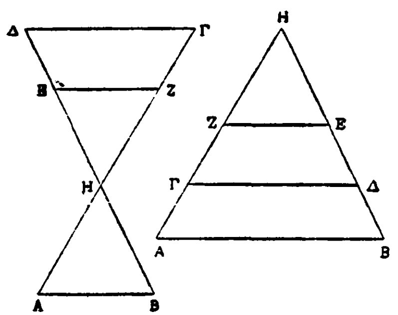
droite, est composée de deux surfaces opposées suivant le sommet, dont chacune croît vers l'infini, la droite génératrice étant elle-même prolongée vers l'infini. J'appelle sommet de cette surface le point fixe, et son axe la droite menée par le point et le centre du cercle. » Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 3.

sous les droites AZ, ZΓ équivaut au carré de la droite ΔZ, il s'ensuit que le carré de la droite ΔZ, conjointement avec le carré de la droite ZK, c'est-à-dire le carré de la droite ΔK, équivaut au carré de la droite AK ; donc, la droite AK est égale à la droite KΔ (1). On démontre de la même manière que chacune des droites BK, EK est aussi égale à la droite AK ou à la droite KΓ ; donc, la ligne ABΓ est un arc du cercle décrit autour du centre K, c'est-à-dire autour du diamètre AΓ.

III.

Proposition 169. — Soient les trois droites parallèles AB, ΓΔ, EZ, et menons transversalement sur celles-ci les deux droites AHZΓ, BHEΔ (2) ; je dis que le rectangle compris sous les droites AH, HZ est au carré de la droite HΓ comme le rectangle compris sous les droites AB, EZ est au carré de la droite ΓΔ.

En effet, puisque la droite AH est à la droite HZ, c'est-à-dire que le rectangle compris sous les droites AH, HZ est au carré de la droite HZ, comme la droite AB est à la droite ZE, c'est-à-dire comme le rectangle compris sous les droites AB, ZE est au carré de la droite ZE, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AH, HZ est au carré de la droite HZ comme le rectangle compris sous les droites AB, ZE est au carré de la droite ZE. Mais, le carré de la droite ZH est aussi au carré de la droite HΓ comme le carré de la droite ZE est au carré de la droite ΔΓ ; donc, par raison d'identité, le rectangle compris sous les droites AH, HZ est au carré de



1. Considérant la droite AΓ coupée en parties égales en K et inégales en Z, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $AZ \times Z\Gamma + \overline{ZK}^2 = \overline{AK}^2$. Or, on a par hypothèse : $AZ \times Z\Gamma = \overline{\Delta Z}^2$; donc : $\overline{\Delta Z}^2 + \overline{ZK}^2 = \overline{AK}^2$ ou : $\overline{\Delta K}^2 = \overline{AK}^2$, d'où : $\Delta K = AK$.

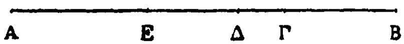
2. Les droites AHZΓ, BHEΔ correspondent dans la seconde figure aux droites AΓZH, BΔEH.

la droite ΗΓ comme le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΖΕ est au carré de la droite ΓΔ (1).

IV.

Proposition 170. — Que la droite ΑΔ soit à la droite ΔΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ et coupons la droite ΑΓ en deux parties égales au point Ε ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΒΕ, ΕΔ équivaut au carré de la droite ΕΓ ; que le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ, et que le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΕΒ, ΒΔ.

En effet, puisque la droite ΑΔ est à la droite ΔΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ, par composition, puis, considérant la moitié des antécédents et par conversion, la droite ΓΕ est à la droite ΕΔ comme la droite ΒΕ est à la droite ΕΓ. En conséquence, le rectangle compris



sous les droites ΒΕ, ΕΔ équivaut au carré de la droite ΓΕ (2). Retranchons de part et d'autre le carré de la droite ΕΔ, il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΕ (3). Or, puisque le

1. On a par similitude de triangles : $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HZ}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{ZE}}$, d'où : $\frac{\mathrm{AH}\times\mathrm{HZ}}{\overline{\mathrm{HZ}}^2}=\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{ZE}}{\overline{\mathrm{ZE}}^2}$. Or, on a aussi : $\frac{\mathrm{HZ}}{\mathrm{H\Gamma}}=\frac{\mathrm{ZE}}{\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{\overline{\mathrm{HZ}}^2}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{ZE}}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}$, d'où, par raison d'identité : $\frac{\mathrm{AH}\times\mathrm{HZ}}{\overline{\mathrm{H\Gamma}}^2}=\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{ZE}}{\overline{\Gamma\Delta}^2}$.

2. On a par hypothèse : $\frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où : $\frac{\mathrm{A}\Delta+\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$ ou : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où : $\frac{\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}}{\Delta\Gamma}=\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma})}{\mathrm{B\Gamma}}$ ou : $\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{E\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$, d'où : $\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}-\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{E\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{B\Gamma}}$ ou : $\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{E}\Delta}=\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{E\Gamma}}$, d'où, comme le texte : $\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2=\mathrm{EB}\times\mathrm{E}\Delta$.

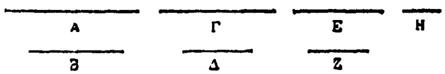
3. La dernière égalité de la note précédente peut s'écrire : $\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{E}\Delta}^2=\mathrm{EB}\times\mathrm{E}\Delta-\mathrm{E}\Delta^2$. Or, considérant la droite ΑΓ coupée en parties égales en Ε et inégales en Δ, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $\mathrm{A}\Delta\times\Delta\Gamma+\overline{\mathrm{E}\Delta}^2=\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2$, d'où : $\mathrm{A}\Delta\times\Delta\Gamma=\overline{\mathrm{E\Gamma}}^2-\overline{\mathrm{E}\Delta}^2$. Considérant d'autre part la droite ΕΒ coupée en parties inégales en Δ, on a (Euclide, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2) : $\mathrm{EB}\times\mathrm{E}\Delta=\mathrm{E}\Delta\times\mathrm{B}\Delta+\overline{\mathrm{E}\Delta}^2$, d'où : $\mathrm{E}\Delta\times\mathrm{B}\Delta=\mathrm{EB}\times\mathrm{E}\Delta-\overline{\mathrm{E}\Delta}^2$; donc, comme le texte : $\mathrm{A}\Delta\times\Delta\Gamma=\mathrm{E}\Delta\times\mathrm{B}\Delta$.

rectangle compris sous les droites BE, EΔ équivaut au carré de la droite EΓ, retranchons l'un et l'autre du carré de la droite BE, il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites AB, BΓ équivaut au rectangle compris sous les droites EB, BΔ (1). En conséquence, les trois expressions sont obtenues.

V.

Proposition 171. — Que la grandeur A ait avec la grandeur B le rapport composé de celui que la grandeur Γ possède avec la grandeur Δ et de celui que la grandeur E possède avec la grandeur Z ; je dis que la grandeur Γ a aussi avec la grandeur Δ le rapport composé de celui que la grandeur A possède avec la grandeur B et de celui que la grandeur Z possède avec la grandeur E.

En effet, faisons en sorte que le rapport de la grandeur Δ à une grandeur H soit le même que celui de la grandeur E à la grandeur Z. Dès lors, puisque le rapport de A à B se compose de celui de Γ à Δ et de celui de E à Z qui est celui de Δ à H ; mais, que le rapport composé de celui que Γ a avec Δ et de celui que Δ a avec H est celui de Γ à H, il s'ensuit que Γ est à H comme A est à B. Or, puisque Γ a avec Δ le rapport composé de celui que Γ possède avec H et de celui que H possède avec Δ ; mais, que le rapport de Γ à H a été démontré être le même que celui de A à B, et que, par inversion, le rapport de H à Δ est le même que celui de Z à E, il s'ensuit que Γ a aussi avec Δ le rapport composé de celui que A possède avec B et de celui que Z possède avec E (2).



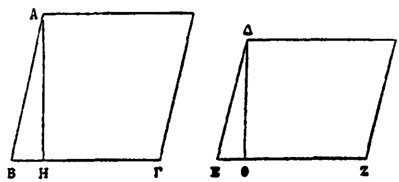
1. La dernière égalité de la note 2 de la page 723 donne : $\overline{BE}^2 - \overline{E\Gamma}^2 = BE^2 - EB \times E\Delta$ (I). Or, la droite AΓ divisée en parties égales en E, à laquelle on ajoute la droite ΓB donne (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\overline{BE}^2 - \overline{E\Gamma}^2 = AB \times B\Gamma$. D'autre part, la droite EB coupée inégalement en Δ donne (Euclide, liv. II, prop. 2, énoncée p. 667, n. 4) : $\overline{BE}^2 = EB \times E\Delta + EB \times B\Delta$ d'où : $\overline{BE}^2 - EB \times E\Delta = EB \times B\Delta$; donc, l'expression (I) devient, comme dans le texte : $AB \times B\Gamma = EB \times B\Delta$.

2. Posons : $\frac{\Delta}{H} = \frac{E}{Z}$ (I). Or, on a par hypothèse : $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \times \frac{E}{Z}$; donc :

VI.

Proposition 172. — Soient deux parallélogrammes équiangles ΑΒΓ, ΔΕΖ ayant l'angle B égal à l'angle E ; je dis que le parallélogramme ΑΓ est au parallélogramme ΔΖ comme le rectangle compris sous les droites AB, ΒΓ est au rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΕΖ.

Si les angles B, E sont droits, la chose est manifeste. S'il n'en est pas ainsi, menons les perpendiculaires AH, ΔΘ. Dès lors, puisque l'angle B est égal à l'angle E et l'angle droit H égal à l'angle Θ, le triangle ABH est donc équiangle au triangle ΔΕΘ. En conséquence, la droite ΕΔ est à la droite ΔΘ comme la droite BA est à la droite AH. Mais, le rectangle compris sous les droites AB, ΒΓ est au rectangle compris

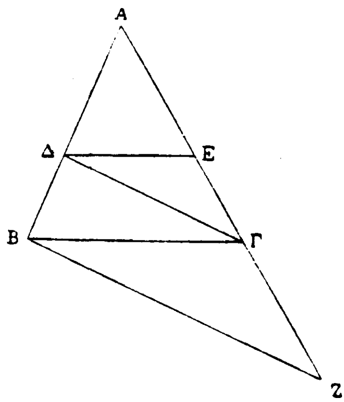


sous les droites AH, ΒΓ comme la droite BA est à la droite AH, et le rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΕΖ est au rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΕΖ comme la droite ΕΔ est à la droite ΔΘ ; donc, par permutation, le rectangle compris sous les droites AH, ΒΓ, c'est-à-dire le parallélogramme ΑΓ, est au rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΕΖ, c'est-à-dire le parallélogramme ΔΖ, comme le rectangle compris sous les droites AB, ΒΓ est au rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΕΖ.

VII.

Proposition 173. — Soit le triangle ΑΒΓ ; que la droite ΒΓ soit parallèle à la droite ΔΕ et posons le rectangle compris sous les droites ΖΑ, ΑΕ équivalent au carré de la droite ΓΑ ; je dis que, si l'on mène les droites de jonction ΔΓ, ΒΖ, la droite ΒΖ est parallèle à la droite ΔΓ.

$\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}\times\frac{\Delta}{H}=\frac{\Gamma}{H}$ (II). Or, $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Gamma}{H}\times\frac{H}{\Delta}$; donc, les expressions (I) et (II) donnent : $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{A}{B}\times\frac{Z}{E}$.

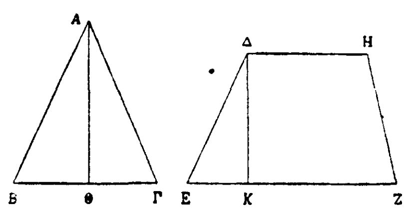


La chose est manifeste ; car, puisque la droite ΓA est à la droite AE comme la droite ZA est à la droite AΓ, et, qu'en raison de la parallèle, la droite BA est à la droite AΔ [comme la droite ΓA est à la droite AE] (1), il s'ensuit que la droite BA est aussi à la droite AΔ comme la droite ZA est à la droite AΓ. En conséquence, les droites ΔΓ, BZ sont parallèles.

VIII.

Proposition 174. — Soient le triangle ABΓ et le trapèze ΔEZH, tels que l'angle compris sous les droites AB, BΓ soit égal à l'angle compris sous les droites ΔE, EZ ; je dis que le triangle ABΓ est au trapèze ΔEZH comme le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au rectangle compris sous la somme des droites ΔH, EZ et la droite ΔE.

Menons les perpendiculaires AΘ, ΔK. Or, puisque l'angle compris sous les droites AB, BΓ est égal à l'angle compris sous les droites ΔE, EZ, et que l'angle droit Θ est égal à l'angle droit K, il s'ensuit que la droite ΔE est à la droite ΔK comme la droite BA est à la droite AΘ. Mais, le rectangle compris sous les droites AB, BΓ est au rectangle compris sous les droites AΘ, BΓ comme la droite BA est à la droite AΘ ; tandis que le rectangle compris sous la somme des droites ΔH, EZ et la droite ΔE est au rectangle compris sous la somme des droites ΔH, EZ et la droite ΔK comme la droite EΔ est à la droite ΔK, et le triangle ABΓ est la moitié du rectangle compris sous les droites AΘ, BΓ, tandis que le trapèze ΔEZH est la moitié du rectangle compris sous la somme des droites ΔH, EZ



1. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 928, l. 28).

et la droite ΔK ; par conséquent, le triangle ΑΒΓ est au trapèze ΔΕΖΗ comme le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ est au rectangle compris sous la somme des droites ΔΗ, ΕΖ et la droite ΔΕ.

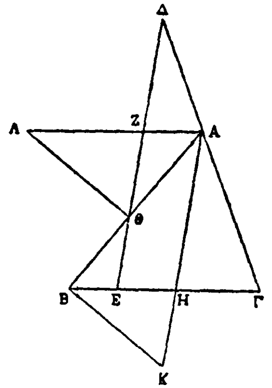
[Et si on a le triangle ΑΒΓ et le parallélogramme ΔΖ, il se fait de la même manière que le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ est à deux fois le rectangle compris sous les droites ΔΕ ΕΖ comme le triangle ΑΒΓ est au parallélogramme ΔΕΖΗ. Et il ressort manifestement de ces choses que, si ΔΖ est un parallélogramme, et s'il équivaut au triangle ΑΒΓ, le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ devient équivalent à deux fois le rectangle compris sous les droites ΔΕ, ΕΖ ; tandis que, si ΔΖ est un trapèze, le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ devient équivalent au rectangle compris sous la somme des droites ΔΗ, ΕΖ et la droite ΔΕ ; ce qu'il fallait démontrer] [1].

IX.

Proposition 175. — Soit le triangle ΑΒΓ et, la droite ΓΑ étant prolongée, menons transversalement une droite quelconque ΔΕ. Menons la droite ΑΗ parallèle à cette dernière droite et la droite ΑΖ parallèle à la droite ΒΓ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΔΖ, ΖΘ est au carré de la droite ΖΑ comme le carré de la droite ΑΗ est au rectangle compris sous les droites ΒΗ, ΗΓ.

Posons le rectangle compris sous les droites ΑΗ, ΗΚ équivalent au rectangle compris sous les droites ΒΗ, ΗΓ ; le rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΛ équivalent au rectangle compris sous les droites ΔΖ, ΖΘ, et menons les droites de jonction ΒΚ, ΘΛ. Dès lors, puisque l'angle Γ est égal à l'angle compris sous les droites ΒΚ, ΚΗ et que, dans un cercle, l'angle compris sous les droites ΔΑ, ΑΛ est égal à l'angle compris sous les droites ΖΘ, ΘΛ, il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΗΚ, ΚΒ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΖΘ, ΘΛ. Mais, l'angle au point Η est aussi égal à l'angle au point Ζ ; donc,

1. Le passage que nous plaçons entre crochets paraît avoir été ajouté en fin de démonstration par un commentateur.



la droite ΛZ est à la droite ZΘ comme la droite BH est à la droite HK (1). Or, puisque la droite ΘE est à la droite EB comme la droite AH est à la droite HB et, qu'en raison des parallèles, la droite ZΘ est à la droite ZA comme la droite ΘE est à la droite EB, il s'ensuit que la droite ΘZ est à la droite ZA comme la droite AH est à la droité HB. Dès lors, puisque la droite ΘZ est à la droite ZA comme la droite AH est à la droite HB, et qu'une autre droite ΛZ est au conséquent qu'est la droite ZΘ comme la droite BH est à la droite HK, il s'ensuit que, par raison d'égalité en proportion troublée, la droite ΛZ est à la droite ZA comme la droite AH est à la droite HK (2). Mais, le carré de la droite AH est au rectangle compris sous les droites AH, HK, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites BH, HΓ, comme la droite AH est à la droite HK ; tandis que le rectangle compris sous les droites ΛZ, ZA, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΔZ, ZΘ, est au carré de la droite ZA comme la droite ΛZ est à la droite ZA ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΔZ, ZΘ est au carré de la droite ZA comme le carré de la droite AH est au rectangle compris sous les droites BH, HΓ (3).

1. On a par construction : $AH \times HK = BH \times H\Gamma$ (I) ; donc les points A, Γ, K, B sont concycliques, d'où : $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{BKA}$. On a aussi par construction : $AZ \times Z\Lambda - \Delta Z \times Z\Theta$ (II) ; donc, les points Δ, A, Θ, Λ sont concycliques: d'où : $\widehat{\Delta A\Lambda} = \widehat{\Delta\Theta\Lambda}$. Or, les parallèles ΛA, BΓ donnent : $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta A\Lambda}$; donc, $\widehat{BKA} = \widehat{\Delta\Theta\Lambda}$ (ou, comme le texte : $\widehat{HKB} = \widehat{Z\Theta\Lambda}$). Or, ZAHE est un parallélogramme ; donc : $\widehat{BHK} = \widehat{\Lambda Z\Theta}$; donc, les triangles BHK, ΛZΘ sont semblables, d'où : $\frac{\Lambda Z}{Z\Theta} = \frac{BH}{HK}$.

2. Les parallèles ΘE, AH donnent : $\frac{\Theta E}{EB} = \frac{AH}{BH}$, et les parallèles ZA, BE donnent : $\frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{\Theta E}{EB}$; donc : $\frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{AH}{BH}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente, on a, par raison d'égalité en proportion troublée (Euclide, liv. V, prop. 23, énoncée p. 228, n. 1) : $\frac{\Lambda Z}{Z\Theta} \times \frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{BH}{HK} \times \frac{AH}{BH}$ ou, comme le texte : $\frac{\Lambda Z}{ZA} = \frac{AH}{HK}$.

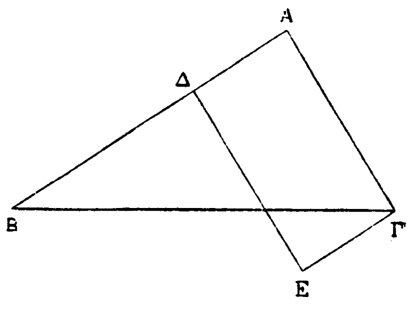
3. On a : $\frac{\overline{AH}^2}{AH \times HK} = \frac{AH}{HK}$ ou, d'après la relation de construction (I) de

D'autre part, au moyen du rapport composé, puisque le rapport de la droite AH à la droite HB est celui de la droite ΘE à la droite EB, c'est-à-dire de la droite ΘZ à la droite ZA, et que le rapport de la droite AH à la droite HΓ est le même que celui de la droite ΔE à la droite EΓ, c'est-à-dire de la droite ΔZ à la droite ZA, il s'ensuit que le rapport composé de celui que la droite AH possède avec la droite HB et de celui que la droite AH possède avec la droite HΓ, ce qu'est celui du carré de la droite AH au rectangle compris sous les droites BH, HΓ, est le même que le rapport composé de celui de la droite ΘZ à la droite ZA et de celui de la droite ΔZ à la droite ZA ; ce qu'est celui du rectangle compris sous les droites ΔZ, ZΘ au carré de la droite ZA (1).

LEMMES POUR LE LIVRE II DES CONIQUES.

I.

Proposition 176. — Étant données deux droites AB, BΓ et une droite ΔE, appliquer, sur les droites AB, BΓ, une droite égale et parallèle à la droite ΔE (2).



Cela est manifeste ; car, si nous menons par le point E une droite EΓ parallèle à la droite AB,

la note 1 de la page 728 : $\frac{\overline{AH}^2}{BH \times H\Gamma} = \frac{AH}{HK}$. On a aussi : $\frac{\Delta Z \times ZA}{\overline{ZA}^2} = \frac{\Delta Z}{ZA}$ ou, d'après la relation de construction (II) de la note 1 de la page 728 : $\frac{\Delta Z \times Z\Theta}{\overline{ZA}^2} = \frac{\Delta Z}{ZA}$; donc, la dernière relation de la note précédente devient, comme le texte : $\frac{\Delta Z \times Z\Theta}{\overline{ZA}^2} = \frac{\overline{AH}^2}{BH \times H\Gamma}$.

1. La similitude de triangles donne : $\frac{AH}{HB} = \frac{\Theta E}{EB} = \frac{\Theta Z}{ZA}$ et $\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{\Delta E}{E\Gamma} = \frac{\Delta Z}{ZA}$, d'où : $\frac{AH}{BH} \times \frac{AH}{H\Gamma} = \frac{\Theta Z}{ZA} \times \frac{\Delta Z}{ZA}$ ou, comme le texte : $\frac{\overline{AH}^2}{HB \times H\Gamma} = \frac{\Theta Z \times \Delta Z}{\overline{ZA}^2}$.

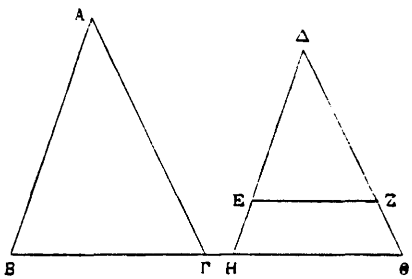
2. Les manuscrits présentent la figure que nous reproduisons ; elle permet donc d'énoncer le lemme en ces autres termes : L'angle compris sous deux droites AB, BΓ étant donné, et une droite ΔE ayant une de ses extrémités sur la droite AB étant donnée de position et de grandeur, construire un triangle ABΓ ayant le côté AΓ égal et parallèle à la droite ΔE.

et par le point Γ une droite ΓA parallèle à la droite ΔE, la droite AΓ sera égale et parallèle à la droite ΔE, parce que AΓEΔ est un parallélogramme, et cette droite est appliquée sur les droites données AB, BΓ.

II.

Proposition 177. — Soient deux triangles ABΓ, ΔEZ ; que la droite ΔE soit à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ, et que la droite AB soit parallèle à la droite ΔE et la droite BΓ parallèle à la droite EZ ; je dis que la droite AΓ est parallèle à la droite ΔZ.

Prolongeons la droite BΓ, et qu'elle rencontre les droites ΔE, ΔZ aux points H, Θ. Dès lors, puisque la droite ΔE est à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ, et que les angles B, E sont égaux, parce que deux droites sont parallèles à deux droites, il s'ensuit que l'angle Γ est aussi égal à l'angle Z, c'est-à-dire à l'angle Θ, parce que les droites EZ, HΘ sont parallèles. En conséquence, la droite AΓ est parallèle à la droite ΔΘ.

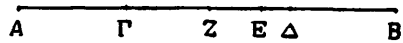


III.

Proposition 178. — Soit la droite AB ; que les droites AΓ, ΔB soient égales, et prenons un point quelconque E entre les points Γ, Δ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ, équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EB (1).

1. Ce lemme est invoqué tacitement dans la démonstration de la proposition XXIII du livre II des *Coniques* d'Apollonius, énoncée comme suit : « Si, dans des sections opposées conjuguées, l'on mène une droite partant du centre à l'une quelconque des sections, et si l'on mène, à cette droite, une parallèle rencontrant trois sections adjacentes, le rectangle compris sous les segments de la parallèle ainsi menée, obtenus entre les trois sections, vaut le double du carré de la droite partant du centre ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 141.

Coupons la droite ΓΔ en deux parties égales au point Z [de quelque manière que cela puisse se présenter par rapport au point E] (1). Et puisque le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB, conjointement avec le carré de la droite ZΔ, équivaut au carré de la droite ZB ; mais, que le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ, conjointement avec le carré de la droite ZE, équivaut au carré de la droite ZΔ ; tandis que le carré de la droite ZB équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EB conjointement avec le carré de la droite ZE, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ et le carré de la droite ZE, équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EB augmenté du carré de la droite ZE. Retranchons de part et d'autre le carré de la droite ZE, il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites AΔ, ΔB, conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ, équivaut au rectangle compris sous les droites AE, EB (2).



IV.

PROPOSITION 179. — Soit la droite AB ; que les droites AΓ, ΔB soient égales, et prenons un point quelconque E entre les points Γ, Δ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AE, EB équivaut au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ augmenté du rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ (3).

1. La phrase mise entre crochets a été interpolée (cfr. HULTSCH, *loc. cit.* vol. II, p. 934, l. 19).

2. Considérant la droite AB coupée en parties égales en Z et inégales en Δ, on a (EUCLIDE, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $A\Delta \times \Delta B + \overline{Z\Delta}^2 = \overline{ZB}^2$. Considérant la droite ΓΔ coupée en parties égales en Z et inégales en E, on a de même : $\Gamma E \times E\Delta + \overline{ZE}^2 = \overline{Z\Delta}^2$, et, considérant la droite AB coupée en parties égales en Z et inégales en E, on a de même $AE \times EB + \overline{ZE}^2 = \overline{ZB}^2$; donc : $A\Delta \times \Delta B + \Gamma E \times E\Delta + \overline{ZE}^2 = AE \times EB + \overline{ZE}^2$ ou, comme le texte : $A\Delta \times \Delta B + \Gamma E \times E\Delta = AE \times EB$.

3. Ce lemme IV (ou proposition 179) est identique au lemme III (ou proposition 178) énoncé d'une manière un peu différente. Eutocius en donne deux démonstrations distinctes dans son commentaire sur les *Coniques* d'Apollonius (*Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg*. Lipsiae, 1893, 2 vol. in-8°. Voir vol. II, p. 302).

En effet, coupons la droite ΓΔ en deux parties égales au point Z [de quelque manière qu'il puisse se présenter pour le point E] (1) ; la droite entière AZ est donc égale à la droite entière ZB. En conséquence, le rectangle compris sous les droites AE, EB, conjointement avec le carré de la droite EZ, équivaut au carré de la droite AZ, et le rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ, conjointement avec le carré de la droite ΓZ, équivaut au carré de la droite AZ ; de sorte que le rectangle compris sous les droites AE, EB, conjointement avec le carré de la droite EZ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ augmenté du carré de la droite ΓZ. Mais, le carré de la droite ΓZ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ augmenté du carré de la droite EZ ; retranchons de part et d'autre le carré de la droite EZ ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites AE, EB équivaut au rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ augmenté du rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ (2).

V.

Proposition 180. — Soient deux triangles ABΓ, ΔEZ, et que l'angle Γ soit égal à l'angle Z et l'angle B plus grand que l'angle E ; je dis que la droite BΓ a avec la droite ΓA un rapport plus petit que celui de la droite EZ avec la droite ZΔ.

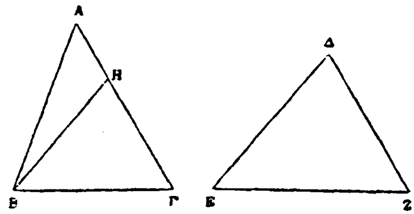
Construisons l'angle compris sous les droites ΓB, BH égal à l'angle E. Or, l'angle Γ est égal à l'angle Z ; donc, la droite EZ est à la droite ZΔ comme la droite BΓ est à la droite ΓH (3).

1. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 936, l. 4).

2. La droite AB coupée en parties égales en Z et inégales en E donne (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $AE \times EB + \overline{EZ}^2 = \overline{AZ}^2$; et, la droite ΓΔ coupée en deux parties égales en Z, à laquelle on ajoute la droite AΓ, donne (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\Delta A \times A\Gamma + \overline{\Gamma Z}^2 = \overline{AZ}^2$; donc, comme le texte : $AE \times EB + \overline{EZ}^2 = \Delta A \times A\Gamma + \overline{\Gamma Z}^2$. Or, la droite ΓΔ coupée en parties égales en Z et inégales en E, donne (Euclide, liv. II, prop. 5) : $\Gamma E \times E\Delta + \overline{EZ}^2 = \overline{\Gamma Z}^2$; donc : $AE \times EB + \overline{EZ}^2 = \Delta A \times A\Gamma + \Gamma E \times E\Delta + \overline{EZ}^2$ ou, comme le texte : $AE \times EB = \Delta A \times A\Gamma + \Gamma E \times E\Delta$.

3. Euclide, liv. VI, prop. 4, énoncée p. 27, n. 1.

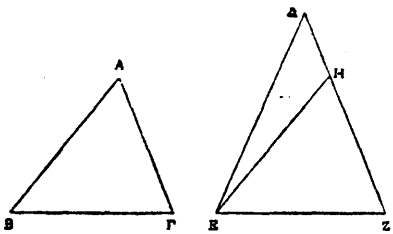
Mais, la droite ΒΓ a avec la droite ΓΑ un rapport plus petit que celui de la droite ΒΓ avec la droite ΓΗ (1) ; par conséquent, la droite ΒΓ a aussi avec la droite ΓΑ un rapport plus petit que celui de la droite ΕΖ avec la droite ΖΔ.



VI.

Proposition 181. — Que la droite ΒΓ ait avec la droite ΓΑ un rapport par contre plus grand que celui de la droite ΕΖ avec la droite ΖΔ, et que l'angle Γ soit égal à l'angle Ζ ; je dis que l'angle Β est, au contraire, plus petit que l'angle Ε.

En effet, puisque la droite ΒΓ a avec la droite ΓΑ un rapport plus grand que celui de la droite ΕΖ avec la droite ΖΔ, si nous faisons en sorte que la droite ΕΖ soit à une certaine droite comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΑ, elle le sera donc à une droite plus petite que la droite ΖΔ (2). Qu'elle le soit à la droite ΖΗ, et menons la droite de jonction ΕΗ. Et les côtés situés autour des angles égaux sont proportionnels ; donc, l'angle Β est égal à l'angle compris sous les droites ΖΕ, ΕΗ (3); angle plus petit que l'angle Ε.



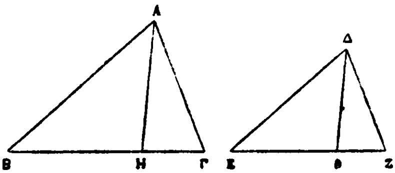
VII.

Proposition 182. — Soient les triangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ, et menons transversalement les droites ΑΗ, ΔΘ de manière que le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ soit au carré de la

1. Euclide, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6.
2. Euclide, liv. V, prop. 10, énoncée p. 36, n. 1.
3. Euclide, liv. VI, prop. 6, énoncée p. 158, n. 2.

droite ΖΔ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ est au carré de la droite ΓΑ ; je dis que le triangle ΑΗΓ est aussi semblable au triangle ΔΘΖ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ est au carré de la droite ΖΔ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ est au carré de la droite ΓΑ ; mais, que le rapport du rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ au carré de la droite ΓΑ se compose de celui que la droite ΒΓ possède avec la droite ΓΑ et de celui que la droite ΗΓ possède avec la droite ΓΑ, tandis que le rapport du rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ au carré de la droite ΖΔ se compose de celui que la droite ΕΖ possède avec la droite ΖΔ et de celui que la droite ΘΖ possède avec la droite ΖΔ ; rapports dont celui de la droite ΒΓ à la droite ΓΑ est le même que celui de la droite ΕΖ à la droite ΖΔ, à cause de la similitude des triangles, il s'ensuit que le rapport restant de la droite ΗΓ à la droite ΓΑ est le même que celui de la droite ΘΖ à la droite ΖΔ. Et ces droites sont situées autour d'angles égaux ; donc, le triangle ΑΓΗ est semblable au triangle ΔΖΘ (1).



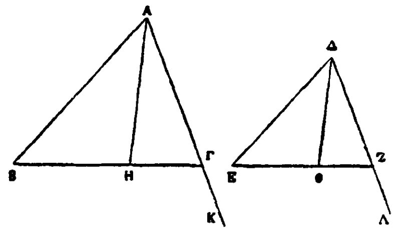
VIII.

Proposition 183. — La démonstration au moyen du rapport composé étant donc telle qu'elle vient d'être exposée, démontrons maintenant sans faire usage du rapport composé.

Posons d'une part le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΚ équivalent au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ ; donc,

---

1. On a par hypothèse : $\frac{\mathrm{EZ} \times \mathrm{Z\Theta}}{\mathrm{Z\Delta}^2} = \frac{\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma H}}{\mathrm{\Gamma A}^2}$, d'où : $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{Z\Delta}} \times \frac{\mathrm{Z\Theta}}{\mathrm{Z\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma A}} \times \frac{\mathrm{\Gamma H}}{\mathrm{\Gamma A}}$. Or, les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, semblables par construction, donnent (Euclide, liv. VI, prop. 4, énoncée p. 27, n. 1) : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma A}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{Z\Delta}}$; donc, comme le texte : $\frac{\mathrm{Z\Theta}}{\mathrm{Z\Delta}} = \frac{\mathrm{\Gamma H}}{\mathrm{\Gamma A}}$; relation qui, en présence de l'égalité des angles Γ, Ζ entraîne (Euclide, liv. VI, prop. 6, énoncée p. 158, n. 2) la similitude des triangles ΑΓΗ, ΔΖΘ.



droite ΑΓ est à la droite ΓΗ la comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΚ. Posons d'autre part le rectangle compris sous les droites ΔΖ, ΖΛ équivalent au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ ; donc, la droite ΔΖ est à la droite ΖΘ comme la droite ΕΖ est à la droite ΖΛ. Or, on a supposé que le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΔΖ, ΖΛ, est au carré de la droite ΔΖ, c'est-à-dire la droite ΛΖ à la droite ΖΔ, comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΚ, est au carré de la droite ΑΓ, c'est-à-dire comme la droite ΚΓ est à la droite ΓΑ. Mais, par similitude, la droite ΕΖ est aussi à la droite ΖΔ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΑ ; par conséquent, la droite ΕΖ est aussi à la droite ΖΛ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΚ. Mais, on a démontré que la droite ΑΓ est à la droite ΓΗ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΚ, et la droite ΔΖ est à la droite ΖΘ comme la droite ΕΖ est à la droite ΖΛ ; donc, la droite ΔΖ est aussi à la droite ΖΘ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΗ. Et ces droites sont situées autour d'angles égaux ; donc, le triangle ΑΓΗ est semblable au triangle ΔΖΘ [1].

De la même manière, le triangle ΑΗΒ est aussi semblable au triangle ΔΘΕ, parce que le triangle ΑΒΓ est aussi semblable au triangle ΔΕΖ [2].

---

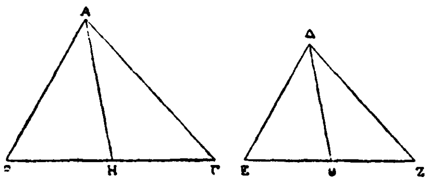
1. On a par construction : $\mathrm{A\Gamma} \times \Gamma\mathrm{K} = \mathrm{B\Gamma} \times \Gamma\mathrm{H}$ (I), et $\Delta\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}\Lambda = \mathrm{EZ} \times \mathrm{Z}\Theta$ (II), d'où : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Gamma\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Gamma\mathrm{K}}$ (III), et $\frac{\Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}\Theta} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{Z}\Lambda}$ (IV). Or, par hypothèse : $\frac{\mathrm{EZ} \times \mathrm{Z}\Theta}{\Delta\mathrm{Z}^2} = \frac{\mathrm{B\Gamma} \times \Gamma\mathrm{H}}{\mathrm{A\Gamma}^2}$ ou, en présence des relations (I) et (II) : $\frac{\Delta\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}\Lambda}{\Delta\mathrm{Z}^2} = \frac{\mathrm{A\Gamma} \times \Gamma\mathrm{K}}{\mathrm{A\Gamma}^2}$ ou : $\frac{\mathrm{Z}\Lambda}{\Delta\mathrm{Z}} = \frac{\Gamma\mathrm{K}}{\mathrm{A\Gamma}}$. Or, la similitude des triangles donne : $\frac{\mathrm{EZ}}{\Delta\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}}$, d'où par raison d'identité avec la relation précédente (Euclide, liv. V, prop. 22, énoncée p. 34, n. 1) : $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{Z}\Lambda} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Gamma\mathrm{K}}$, d'où, en présence des relations (III) et (IV) on a, comme le texte : $\frac{\Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}\Theta} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Gamma\mathrm{H}}$. Or, ces droites proportionnelles comprennent des angles égaux ; donc les triangles ΑΓΗ, ΔΖΘ sont semblables.

2. Hultsch attribue cette dernière phrase à un interpolateur (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 940, l. 4).

IX.

PROPOSITION 184. — Que le triangle ΑΒΓ soit semblable au triangle ΔΕΖ et le triangle ΑΗΒ semblable au triangle ΔΕΘ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ est au carré de la droite ΖΔ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ est au carré de la droite ΓΑ.

En effet, puisque, en raison de la similitude, l'angle entier Α est égal à l'angle entier Δ, et l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΗ égal à celui qui est compris sous les droites ΕΔ, ΔΘ, il s'ensuit que l'angle restant compris sous les droites ΗΑ, ΑΓ est égal à l'angle compris sous les droites ΘΔ, ΔΖ. Mais, l'angle Γ est aussi égal à l'angle Ζ ; donc, la droite ΘΖ est à la droite ΖΔ comme la droite ΗΓ est à la droite ΓΑ. Mais, la droite ΕΖ est aussi à la droite ΖΔ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΑ ; donc, le rapport composé est le même que le rapport composé. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ est au carré de la droite ΖΔ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ est au carré de la droite ΓΑ (1).

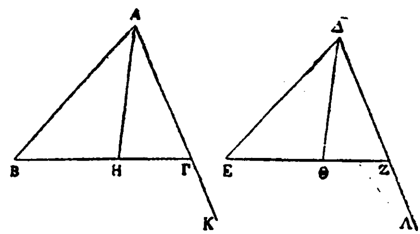


X.

PROPOSITION 185. — D'une manière différente, sans intervention du rapport composé.

Posons le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΚ équivalent au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ et le rectangle compris sous les droites ΔΖ, ΖΛ équivalent au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ ; la droite ΑΓ sera de nouveau à la droite ΓΗ

1. On a : $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = \widehat{\mathrm{E\Delta Z}}$ et $\widehat{\mathrm{BAH}} = \widehat{\mathrm{E\Delta\Theta}}$, d'où : $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} - \widehat{\mathrm{BAH}} = \widehat{\mathrm{E\Delta Z}} - \widehat{\mathrm{E\Delta\Theta}}$ ou : $\widehat{\mathrm{HA\Gamma}} = \widehat{\mathrm{\Theta\Delta Z}}$. Or, $\widehat{\mathrm{A\Gamma H}} = \widehat{\mathrm{\Delta Z\Theta}}$; donc : $\frac{\Theta Z}{Z\Delta} = \frac{H\Gamma}{\Gamma A}$. Or, on a par hypothèse : $\frac{EZ}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Gamma A}$; donc : $\frac{EZ}{Z\Delta} \times \frac{\Theta Z}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Gamma A} \times \frac{H\Gamma}{\Gamma A}$ ou, comme le texte : $\frac{EZ \times \Theta Z}{Z\Delta^2} = \frac{B\Gamma \times H\Gamma}{\Gamma A^2}$.



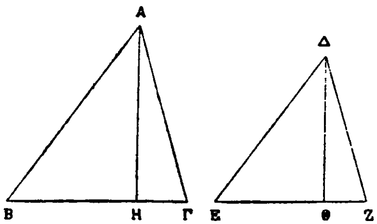
comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΚ ; tandis que la droite ΔΖ sera à la droite ΖΘ comme la droite ΕΖ est à la droite ΖΛ ; et on démontre, comme plus haut [1], que la droite ΔΖ est à la droite ΖΘ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΗ. En conséquence, la droite ΕΖ est à la droite ΖΛ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΚ. Mais, par raison de similitude, la droite ΕΖ est aussi à la droite ΖΔ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΑ ; donc, par raison d'égalité, la droite ΛΖ est à la droite ΖΔ, c'est-à-dire que le rectangle compris sous les droites ΛΖ, ΖΔ, constituant le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ, est au carré de la droite ΖΔ comme la droite ΚΓ est à la droite ΓΑ, c'est-à-dire comme le rectangle compris sous les droites ΚΓ, ΓΑ, constituant le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ, est au carré de la droite ΑΓ ; ce qu'il fallait démontrer [2].

On démontre de la même manière que, si le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ est au carré de la droite ΖΔ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ est au carré de la droite ΑΓ, et si le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΔΕΖ, le triangle ΑΒΗ est aussi semblable au triangle ΔΕΘ.

XI.

Proposition 186. — Soient les deux triangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ et menons les perpendiculaires ΑΗ, ΔΘ ; je dis que le

1. Voir lemme IX ou proposition 184.
2. Posons $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma K} = \mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma H}$ (I), et $\Delta\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}\Lambda = \mathrm{EZ} \times \mathrm{Z}\Theta$ (II), d'où : $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma K}}$ et $\frac{\Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}\Theta} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{Z}\Lambda}$. Or, on démontre comme dans la proposition précédente (lemme IX ou proposition 184) que l'on a : $\frac{\Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}\Theta} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}}$; donc : $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{Z}\Lambda} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma K}}$. Or, par hypothèse de similitude, on a : $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{Z}\Delta} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma A}}$; donc (Euclide, liv. V, prop. 22, énoncée p. 34, n. 1) : $\frac{\mathrm{Z}\Lambda}{\mathrm{Z}\Delta} = \frac{\mathrm{\Gamma K}}{\mathrm{\Gamma A}}$ ou : $\frac{\mathrm{Z}\Delta \times \mathrm{Z}\Lambda}{\mathrm{Z}\Delta^2} = \frac{\mathrm{\Gamma A} \times \mathrm{\Gamma K}}{\mathrm{\Gamma A}^2}$, d'où, en présence des relations (I) et (II) on a, comme le texte : $\frac{\mathrm{EZ} \times \mathrm{Z}\Theta}{\mathrm{Z}\Delta^2} = \frac{\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{\Gamma H}}{\mathrm{\Gamma A}^2}$.



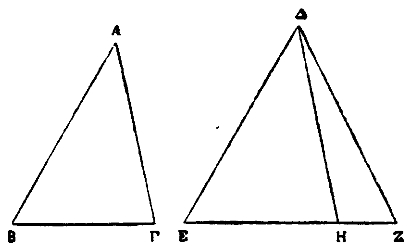
rectangle compris sous les droites EΘ, ΘZ est au carré de la droite ΘΔ comme le rectangle compris sous les droites BH, HΓ est au carré de la droite AH.

Cela est manifeste, parce que les choses sont semblables à celles qui précèdent (1).

XII.

Proposition 187. — Que l'angle B soit égal à l'angle E et l'angle A plus petit que l'angle Δ; je dis que la droite ΓB a avec la droite BA un rapport plus petit que celui de la droite ZE avec la droite EΔ.

En effet, puisque l'angle A est plus petit que l'angle Δ, construisons l'angle compris sous les droites EΔ, ΔH qui lui soit égal. En conséquence, la droite EH est à la droite EΔ comme la droite ΓB est à la droite BA (2). Mais, la droite EH a aussi avec la droite EΔ un rapport plus petit que celui de la droite ZE avec la droite EΔ (3) ; donc, la droite ΓB a aussi avec la droite BΔ un rapport plus petit que celui de la droite ZE avec la droite EΔ. Et tous les cas analogues se démontrent en suivant la même marche.



XIII.

Proposition 188. — Que le rectangle compris sous les droites EΘ, ΘZ soit au carré de la droite ΔΘ comme le rectangle compris

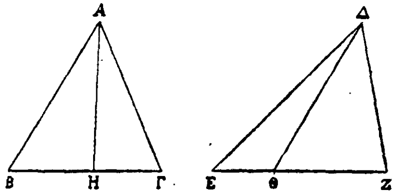
1. On aura, comme dans le lemme IX, ou proposition 184 : $\frac{E\Theta}{\Theta\Delta}=\frac{BH}{AH}$ et $\frac{Z\Theta}{\Theta\Delta}=\frac{\Gamma H}{AH}$, d'où : $\frac{E\Theta}{\Theta\Delta}\times\frac{Z\Theta}{\Theta\Delta}=\frac{BH}{AH}\times\frac{\Gamma H}{AH}$ ou, comme dans l'énoncé : $\frac{E\Theta\times Z\Theta}{\Theta\Delta^2}=\frac{BH\times\Gamma H}{AH^2}$.

2. Euclide, liv. VI, prop. 4, énoncée p. 27, n. 1.

3. Euclide, liv. VI, prop. 8, énoncée p. 49, n. 1.

sous les droites BH, HΓ est au carré de la droite AH ; que la droite BH soit égale à la droite HΓ et que la droite HΓ ait avec la droite HA un rapport plus petit que celui de la droite ZΘ à la droite ΘΔ; je dis que la droite ZΘ est plus grande que la droite ΘE.

En effet, puisque le carré de la droite ΓH a avec le carré de la droite HA un rapport plus petit que celui du carré de la droite ZΘ avec le carré de la droite ΘΔ, mais, que le carré de la droite ΓH équivaut au rectangle compris sous les droites BH, HΓ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites BH, HΓ a avec le carré de la droite AH un rapport plus petit que celui du carré de la droite ZΘ au carré de la droite ΘΔ.



Mais, on a supposé que le rectangle compris sous les droites EΘ, ΘZ est au carré de la droite ΘΔ comme le rectangle compris sous les droites BH, HΓ est au carré de la droite AH ; donc, le rectangle compris sous les droites EΘ, ΘZ a aussi avec le carré de la droite ΘΔ un rapport plus petit que celui du carré de la droite ZΘ au carré de la droite ΘΔ. En conséquence, le carré de la droite ZΘ est plus grand que le rectangle compris sous les droites EΘ, ΘZ ; de sorte que la droite ZΘ est plus grande que la droite ΘE [1].

LEMMES RELATIFS AU LIVRE III DES CONIQUES

I.

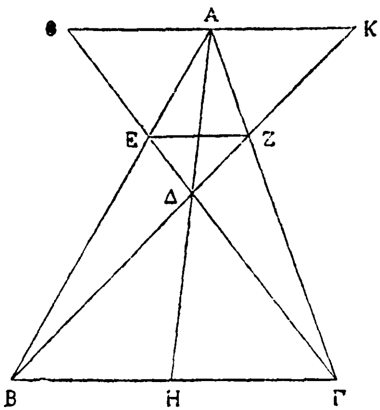
PROPOSITION 189. — Soit la figure ABΓΔEZH ; que la droite BH soit égale à la droite HΓ ; je dis que la droite EZ est parallèle à la droite BΓ [2].

---

1. On a par hypothèse : $\frac{H\Gamma}{HA} < \frac{Z\Theta}{\Theta\Delta}$, d'où : $\frac{\overline{H\Gamma}^2}{\overline{HA}^2} < \frac{\overline{Z\Theta}^2}{\overline{\Theta\Delta}^2}$. On a aussi par hypothèse : $H\Gamma = BH$, d'où : $\overline{H\Gamma}^2 = BH \times H\Gamma$; donc : $\frac{BH \times H\Gamma}{\overline{HA}^2} < \frac{\overline{Z\Theta}^2}{\overline{\Theta\Delta}^2}$. Enfin, on a par hypothèse : $\frac{E\Theta \times Z\Theta}{\overline{\Theta\Delta}^2} = \frac{BH \times H\Gamma}{\overline{HA}^2}$; donc : $\frac{E\Theta \times Z\Theta}{\overline{\Theta\Delta}^2} < \frac{\overline{Z\Theta}^2}{\overline{\Theta\Delta}^2}$, d'où : $\overline{Z\Theta}^2 > E\Theta \times Z\Theta$, d'où, comme le texte : $Z\Theta > \Theta E$.

2. L'énoncé de ce petit lemme paraît être incomplet pour autant qu'on le sépare de la proposition VIII du livre III des *Coniques* d'Apollonius (voir trad.

Menons par le point A la droite ΘK parallèle à la droite ΒΓ, et prolongeons les droites BZ, ΓE jusqu'aux points K, Θ. Dès lors, puisque la droite BH est égale à la droite HΓ, la droite ΘA est donc aussi égale à la droite AK ([1]) ; donc la droite ΒΓ est à la droite KA, c'est-à-dire la droite ΓZ à la droite ZA, comme la droite ΒΓ est à la droite ΘA ([2]), c'est-à-dire comme la droite BE est à la droite EA. En conséquence, la droite EZ est parallèle à la droite ΒΓ ([3]).



II.

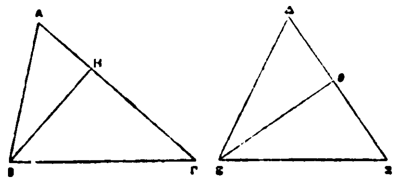
Proposition 190. — Soient deux triangles ΑΒΓ, ΔEZ ayant les angles A, Δ égaux, et que le rectangle compris sous les droites BA, AΓ soit équivalent au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ ; je dis que le triangle équivaut aussi au triangle.

Menons les perpendiculaires BH, EΘ ; il s'ensuit que la droite EΘ est à la droite EΔ comme la droite HB est à la

de P. Ver Eecke, p. 196), dans laquelle le point A est le centre d'une hyperbole à deux branches, les droites BA, AΓ des demi-diamètres, les droites BΔ, ΓΔ les tangentes à l'une des deux branches de la courbe et Δ le point de rencontre de ces tangentes. Au cours de la démonstration de sa proposition, Apollonius conclut en invoquant : 1° que la droite menée par le centre A et par le point de concours Δ des tangentes coupe en deux parties égales la droite ΒΓ qui relie les points de contact des tangentes ; ce qu'il a déjà démontré dans la proposition XXXIX de son livre II (voir trad. précitée, p. 153) ; 2° que les triangles ZΔΓ, EΔB sont équivalents ; ce qu'il a déjà démontré à la proposition I du livre III (voir trad. précitée, p. 189), et 3° que la droite EZ est parallèle à la droite de jonction ΒΓ des points de contact des tangentes ; ce qu'il ne démontre pas, et justifie le présent lemme de Pappus.

1. Euclide, liv. VI, prop. 4, énoncée p. 27, n. 1.
2. Euclide, liv. VI, prop. 7, énoncée p. 160, n. 5.
3. Euclide, liv. VI, prop. 2 : « Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 293.

droite BA ; donc, le rectangle compris sous les droites EΘ, ΔZ est aussi au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ comme le rectangle compris sous les droites BH, AΓ est au rectangle compris sous les droites BA, AΓ. Or, le rectangle compris sous les droites BA, AΓ équivaut au rectangle compris sous les droites EΔ, ΔZ ; donc, le rectangle compris sous

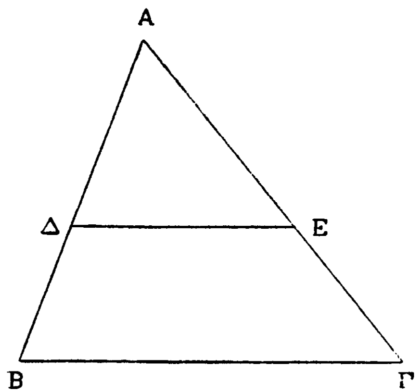


les droites BH, AΓ équivaut aussi au rectangle compris sous les droites EΘ, ΔZ. Mais, le triangle ABΓ est la moitié du rectangle compris sous les droites BH, AΓ, et le triangle ΔEZ est la moitié du rectangle compris sous les droites EΘ, ΔZ ; par conséquent, le triangle ABΓ équivaut au triangle ΔEZ (1).

D'ailleurs, il est clair aussi que les parallélogrammes, doubles de ces triangles, sont équivalents.

III.

Proposition 191. — Soient le triangle ABΓ et la droite ΔE parallèle à la droite BΓ; je dis que le triangle ABΓ est au triangle AΔE comme le carré de la droite AB est au carré de la droite AΔ.



En effet, puisque le triangle ABΓ est semblable au triangle AΔE, il s'ensuit que le triangle ABΓ a avec le triangle AΔE un rapport double de celui de la droite BA à la droite AΔ. Mais, le carré de la droite BA a avec le carré de la droite AΔ un rapport double de celui de la

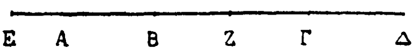
1. On a par hypothèse : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, d'où similitude des triangles rectangles AHB, ΔΘE, d'où : $\frac{E\Theta}{E\Delta} = \frac{HB}{BA}$, d'où : $\frac{E\Theta \times \Delta Z}{E\Delta \times \Delta Z} = \frac{HB \times A\Gamma}{BA \times A\Gamma}$. Or, par hypothèse : $BA \times A\Gamma = E\Delta \times \Delta Z$; donc : $HB \times A\Gamma = E\Theta \times \Delta Z$. Or, triangle $AB\Gamma = \frac{1}{2} HB \times A\Gamma$ et triangle $\Delta EZ = \frac{1}{2} E\Theta \times \Delta Z$, donc : triangle $AB\Gamma$ = triangle ΔEZ.

droite BA avec la droite AΔ ; donc, le triangle ABΓ est au triangle AΔE comme le carré de la droite BA est au carré de la droite AΔ (1).

IV.

Proposition 192. — Que les droites AB, ΓΔ soient égales, et soit un point quelconque E ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΓE, EB excède le rectangle compris sous les droites ΓA, AB du rectangle compris sous les droites ΔE, EA (2).

Coupons la droite BΓ en deux parties égales au point Z ; le point Z est donc aussi le point de division en deux parties égales de la droite AΔ. Et puisque le rectangle compris sous les droites ΓE, EB, conjointement avec le carré de la droite BZ, équivaut au carré de la droite EZ ; mais, que le rectangle compris sous les droites ΔE, EA, conjointement avec le carré de la droite AZ, équivaut aussi au carré de la droite EZ, et que le carré de la droite AZ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓA, AB conjointement avec le carré de la droite BZ, retranchons de part et d'autre le carré de la droite BZ ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites ΓE, EB équivaut au rectangle compris sous les droites ΓA, AB augmenté du rectangle compris sous les droites ΔE, EA ; de sorte que le rectangle compris sous les droites ΓE, EB excède le rectangle compris sous les droites ΓA, AB du rectangle compris sous les droites ΔE, EA ; ce qu'il fallait démontrer (3).

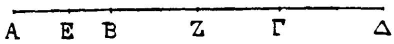


1. On a (Euclide, liv. VI, prop. 19, énoncée p. 265, n. 1) : $\frac{\text{triangle AB}\Gamma}{\text{triangle A}\Delta\text{E}} = \frac{BA}{A\Delta} \times \frac{BA}{A\Delta} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{A\Delta}^2}$.

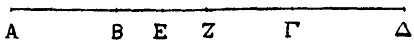
2. Ce lemme est destiné à éclaircir la fin assez concise de la démonstration de la proposition XXVI du livre III des *Coniques* d'Apollonius, relative aux segments découpés par les deux branches d'une hyperbole et par les deux asymptotes sur une parallèle à l'axe transverse (Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 229 et notes). La figure qui accompagne le petit lemme de Pappus correspond comme suit à la figure de la proposition d'Apollonius : la droite AΔ est une parallèle à l'axe transverse comprise entre les deux branches de l'hyperbole ; les points B, Γ sont les intersections de cette parallèle avec les asymptotes ; le point Z est son intersection avec l'axe conjugué non transverse, et le point E est son intersection avec une parallèle quelconque à l'axe non transverse.

3. Considérant la droite BΓ coupée en deux parties égales en Z, à laquelle on ajoute la droite EB, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) :

PROPOSITION 193. — Si le point est situé entre les points A, B, le rectangle compris sous les droites ΓE, EB sera inférieur de la même aire au rectangle compris sous les droites ΓA, AB ; ce qui se démontre de la même manière [1].



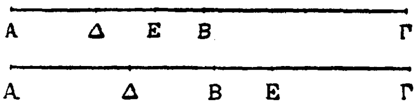
PROPOSITION 194. — Mais, si le point est situé entre les points B, Γ, le rectangle compris sous les droites ΓE, EB sera inférieur au rectangle compris sous les droites AE, EΔ du rectangle compris sous les droites AB, BΔ ; et ce, en suivant la même marche [2].



V.

PROPOSITION 195. — Que la droite AB soit égale à la droite BΓ, et soient deux points Δ, E ; je dis que quatre fois le carré de la droite AB vaut deux fois le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ conjointement avec deux fois le rectangle compris sous les droites AE, EΓ et deux fois les carrés des droites BΔ, BE [3].

Cela est manifeste ; car, en raison de la division en deux parties égales, deux fois le carré de la droite AB équivaut à deux fois le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔΓ augmenté de deux fois le carré de la droite ΔB, et deux fois le carré de la



$E\Gamma \times EB + \overline{BZ}^2 = \overline{EZ}^2$. Puis, considérant la droite AΔ coupée en deux parties égales, à laquelle on ajoute la droite EA, on a de même : $\Delta E \times EA + \overline{AZ}^2 = \overline{EZ}^2$; donc : $E\Gamma \times EB + \overline{BZ}^2 = \Delta E \times EA + \overline{AZ}^2$. Considérant enfin la droite BΓ coupée en deux parties égales en Z, à laquelle on ajoute la droite AB, on a de même : $\Gamma A \times AB + \overline{BZ}^2 = \overline{AZ}^2$; donc : $E\Gamma \times EB + \overline{BZ}^2 = \Delta E \times EA + \Gamma A \times AB + \overline{BZ}^2$ ou : $E\Gamma \times EB = \Delta E \times EA + \Gamma A \times AB$, d'où, comme le texte : $E\Gamma \times EB - \Gamma A \times AB = \Delta E \times EA$.

1. Si le point E est situé entre les points A et B, on démontrera de même qu'on a la relation : $\Gamma A \times AB - \Gamma E \times EB = \Delta E \times EA$.

2. Si le point E est situé entre les points B et Γ, on démontrera de même qu'on a la relation : $AE \times E\Delta - \Gamma E \times EB = AB \times B\Delta$.

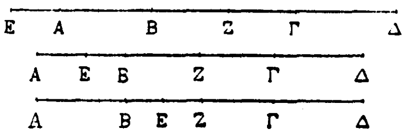
3. En d'autres termes : Soient, sur une droite AΓ, la droite AB égale à la droite BΓ et deux points quelconques Δ, E ; il faut démontrer la relation : $4\overline{AB}^2 = 2[A\Delta \times \Delta\Gamma + AE \times E\Gamma + \overline{B\Delta}^2 + \overline{BE}^2]$.

droite AB équivaut à deux fois le rectangle compris sous les droites AE, EΓ augmenté de deux fois le carré de la droite EB [1].

VI.

PROPOSITION 196. — Que la droite AB soit égale à la droite ΓΔ, et soit le point E ; je dis que les carrés des droites AE, EΔ valent les carrés des droites BE, EΓ augmentés de deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ [2].

Coupons la droite BΓ en deux parties égales au point Z. Dès lors puisque deux fois le carré de la droite ΔZ vaut deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ augmenté de deux fois le carré de la droite ΓZ, si on ajoute de part et d'autre deux fois le carré de la droite EZ, il s'ensuit que deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ, augmenté de deux fois les carrés des droites ΓZ, ZE, vaut deux fois les carrés des droites ΔZ, ZE. Mais, deux fois les carrés des droites ΔZ, ZE équivaut aux carrés des droites AE, EΔ [3], et deux fois les carrés des droites ΓZ, ZE



1. Considérant la droite AΓ coupée en deux parties égales en B et inégales en Δ, on a (EUCLIDE, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3, c'est-à-dire l'indentité $(\frac{a}{2})^2 = b(a - b) + (b - \frac{a}{2})^2$) : $\overline{AB}^2 = A\Delta \times \Delta\Gamma + \overline{\Delta B}^2$. D'autre part, considérant la droite AΓ coupée en parties égales en B et inégales en E, on a de même : $\overline{\Lambda B}^2 = AE \times E\Gamma + \overline{EB}^2$; donc, comme le texte, on a : $4\overline{AB}^2 = 2A\Delta \times \Delta\Gamma + 2AE \times E\Gamma + 2(\overline{B\Delta}^2 + \overline{EB}^2)$.

2. En d'autres termes : Si, sur la droite AΔ, on a AB = ΓΔ et un point quelconque E pris sur le prolongement de la droite AΔ, ou entre les points A, B, ou entre les points B, Z, on aura la relation : $\overline{AE}^2 + \overline{E\Delta}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{E\Gamma}^2 + 2A\Gamma \times \Gamma\Delta$. Ce petit lemme démontre la relation à laquelle Apollonius est amené au cours de la démonstration de la proposition XXIX du livre III des *Coniques* (voir trad. de P. Ver Eecke, p. 235, et p. 236 et notes). La figure qui accompagne le lemme correspond comme suit à la figure de la proposition d'Apollonius : La droite AΔ est une parallèle à l'axe transverse comprise entre les deux branches d'une hyperbole ; les points B, Γ sont les intersections de cette parallèle avec les deux asymptotes ; le point Z est l'intersection de la parallèle avec l'axe conjugué non transverse, et le point E est l'intersection de cette parallèle avec une autre parallèle à l'axe non transverse.

3. EUCLIDE, liv. II, prop. 10 : Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le carré de la droite entière avec la droite ajoutée et le carré de la droite ajoutée étant pris ensemble, sont doubles du carré de la moitié de la droite entière et du carré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite ». Voir trad. de Peyrard, vol. I, p. 105.

équivaut aux carrés des droites BE, EΓ ; par conséquent, les carrés des droites AE, EΔ valent les carrés des droites BE, EΓ augmentés de deux fois le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓΔ (1).

VII.

Proposition 197. — Que le rectangle compris sous les droites BA, AΓ, conjointement avec le carré de la droite ΓΔ, soit équivalent au carré de la droite ΔA ; je dis que la droite ΓΔ est égale à la droite ΔB.

En effet, retranchons de part et d'autre le carré de la droite ΓΔ ; [il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites BA, AΓ équivaut à l'excédent des carrés des droites AΔ, ΔΓ, c'est-à-dire aux rectangles compris sous les droites ΔA, AΓ et sous les droites AΓ, ΓΔ. Et puisque le rectangle compris sous les droites BA, AΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ augmenté du rectangle compris sous les droites BΔ, AΓ, retranchons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites ΔA, AΓ] (2), il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites AΓ, ΔB équivaut au rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓA ; donc, la droite ΔΓ est égale à la droite ΔB ; ce qu'il fallait démontrer (3).

1. Considérant la droite AΔ coupée en parties égales en Z et inégales en Γ, on a (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3) : $\overline{\Delta Z}^2 = A\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma Z}^2$ d'où : $2\overline{\Delta Z}^2 = 2A\Gamma \times \Gamma\Delta + 2\overline{\Gamma Z}^2$, d'où : $2(\overline{\Delta Z}^2 + \overline{EZ}^2) = 2A\Gamma \times \Gamma\Delta + 2(\overline{\Gamma Z}^2 + \overline{EZ}^2)$ Or, considérant la droite AB coupée en deux parties égales en Z, à laquelle on ajoute la droite EA, en invoquant la proposition 10 du livre II d'Euclide, énoncée dans la note précédente, c'est-à-dire en appliquant l'identité : $(a+b)^2 + b^2 = 2[(\frac{a}{2})^2 + (b + \frac{a}{2})^2]$, on a : $\overline{AE}^2 + \overline{E\Delta}^2 = 2(\overline{\Delta Z}^2 + \overline{EZ}^2)$. Et, de même, considérant la droite BΓ coupée en parties égales en Z, à laquelle on ajoute la droite EB, on a : $\overline{BE}^2 + \overline{E\Gamma}^2 = 2(\overline{\Gamma Z}^2 + \overline{EZ}^2)$; donc, comme le texte : $\overline{AE}^2 + \overline{E\Delta}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{E\Gamma}^2 + 2A\Gamma \times \Gamma\Delta$.

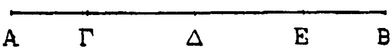
2. Restauration due à Halley (cfr. *Apollonii Pergaei Conicorum, etc.*, p. 155, ll. 15-20), d'après les conjectures de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 402, *commentarius*), et adoptée dans l'édition critique de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 402, ll. 19-22).

3. On a par hypothèse : $BA \times A\Gamma + \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{A\Delta}^2$, d'où : $BA \times A\Gamma = \overline{A\Delta}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2$. Or, considérant la droite AΔ coupée d'une manière quelconque en Γ, on a (Euclide, liv. II, prop. 2, énoncée p. 667, n. 4) : $\overline{A\Delta}^2 = A\Delta \times A\Gamma + A\Delta \times \Gamma\Delta$;

VIII.

PROPOSITION 198. — Que le rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ, conjointement avec le carré de la droite ΓΔ, soit équivalent au carré de la droite ΔΒ ; je dis que la droite ΑΔ est égale à la droite ΔΒ.

Posons la droite ΔΕ égale à la droite ΓΔ ; il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΒΕ, conjointement avec le carré de la droite ΔΕ, c'est-à-dire avec le carré de la droite ΓΔ, équivaut au carré de la droite ΔΒ, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ conjointement avec le carré de la droite ΓΔ ; de sorte que le rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΒΕ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ. En conséquence, la droite ΑΓ est égale à la droite ΕΒ. Mais, la droite ΓΔ est aussi égale à la droite ΔΕ ; donc, la droite entière ΑΔ est égale à la droite entière ΔΒ (1).



IX.

PROPOSITION 199. — Que le rectangle compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ, conjointement avec le carré de la droite ΔΒ, soit de nouveau équivalent au carré de la droite ΑΔ ; je dis que la droite ΓΔ est égale à la droite ΔΒ.

Posons la droite ΕΑ égale à la droite ΔΒ. Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites ΒΑ, ΑΓ, conjointement avec le carré de la droite ΔΒ, c'est-à-dire avec le carré de la droite ΕΑ,

---

donc : $\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Gamma\Delta} - \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2 = \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{A\Gamma} + (\mathrm{A\Delta} - \mathrm{\Gamma\Delta})\,\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$. Or, $\mathrm{BA} \times \mathrm{A\Gamma} = (\mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta B})\,\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Delta B} \times \mathrm{A\Gamma}$; donc : $\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Delta B} \times \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta}$ ou, comme le texte : $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{\Delta B} \times \mathrm{A\Gamma}$ ou : $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{\Delta B}$.

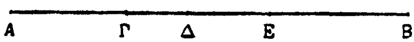
1. Considérant la droite ΓΕ coupée en deux parties égales en Δ, à laquelle on ajoute la droite ΕΒ, on a (EUCLIDE, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\mathrm{\Gamma B} \times \mathrm{EB} + \overline{\mathrm{\Delta E}}^2 = \overline{\mathrm{\Delta B}}^2$ ou : $\mathrm{\Gamma B} \times \mathrm{EB} + \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2 = \overline{\mathrm{\Delta B}}^2$. Or, on a par hypothèse : $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} + \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2 = \overline{\mathrm{\Delta B}}^2$; donc : $\mathrm{\Gamma B} \times \mathrm{EB} + \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2 = \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} + \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}^2$ ou : $\mathrm{\Gamma B} \times \mathrm{EB} = \mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B}$, d'où : $\mathrm{EB} = \mathrm{A\Gamma}$, d'où : $\mathrm{EB} + \mathrm{\Delta E} = \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta}$ ou : $\mathrm{\Delta B} = \mathrm{A\Delta}$.

équivaut au carré de la droite ΑΔ, retranchons de part et d'autre le rectangle compris sous les droites ΔΑ, ΑΓ ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites ΒΔ, ΑΓ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΑΓ, conjointement avec le carré de la droite ΕΑ, ce qui constitue le rectangle compris sous les droites ΓΕ, ΕΑ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΓ (1). En conséquence, la droite ΕΑ, c'est-à-dire la droite ΒΔ, est égale à la droite ΔΓ (2).

X.

Proposition 200. — Soit la droite ΑΒ sur laquelle trois points Γ, Δ, Ε sont tels que la droite ΒΕ soit égale à la droite ΕΓ, et le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΔ équivalent au carré de la droite ΕΓ ; je dis que la droite ΒΔ est à la droite ΔΓ comme la droite ΒΑ est à la droite ΑΓ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΔ équivaut au carré de la droite ΕΓ, il s'ensuit qu'en proportion, par conversion, en considérant deux fois les antécédents et par division, la droite ΒΔ est à la droite ΔΓ comme la droite ΒΑ est à la droite ΑΓ (3).



1. On a par hypothèse : $BA \times A\Gamma + \overline{\Delta B}^2 = \overline{A\Delta}^2$. Or, par construction : $EA = \Delta B$; donc : $BA \times A\Gamma + \overline{EA}^2 = \overline{A\Delta}^2$, d'où : $BA \times A\Gamma - A\Delta \times A\Gamma + \overline{EA}^2 = \overline{A\Delta}^2 - A\Delta \times A\Gamma$ ou : $B\Delta \times A\Gamma + \overline{EA}^2 = A\Delta \times \Gamma\Delta$, ou : $EA \times A\Gamma + \overline{EA}^2 = A\Delta \times \Gamma\Delta$, ou : $E\Gamma \times EA = A\Delta \times \Gamma\Delta$.

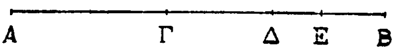
2. La dernière expression de la note précédente donne : $\frac{E\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Delta}{EA}$, d'où : $\frac{E\Gamma + \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Delta + EA}{EA}$ ou : $\frac{E\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{E\Delta}{EA}$, d'où : $\Gamma\Delta = EA = \Delta B$.

3. On a par construction : $\overline{E\Gamma}^2 = AE \times E\Delta$, d'où : $\frac{E\Gamma}{E\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{E\Gamma}{E\Gamma - E\Delta} = \frac{AE}{AE - E\Gamma}$, ou : $\frac{E\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{A\Gamma}$, d'où : $\frac{2E\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{2AE}{A\Gamma}$, d'où : $\frac{2E\Gamma - \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{2AE - A\Gamma}{A\Gamma}$. Or, par construction : $BE = E\Gamma$, et $2AE = AE + A\Gamma + \Gamma E = AB + A\Gamma$; donc, $\frac{2BE - \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{AB + A\Gamma - A\Gamma}{A\Gamma}$ ou : $\frac{\Delta B}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

XI.

Proposition 201. — Que le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ soit de nouveau équivalent au carré de la droite ΓΕ, et la droite ΑΓ égale à la droite ΓΕ ; je dis que le rectangle compris sous les [droites ΑΒ, ΒΕ équivaut au rectangle compris sous] (1) les droites ΓΒ, ΒΔ.

En effet, puisque le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ équivaut au carré de la droite ΓΕ, en proportion, la droite ΓΕ, c'est-à-dire la droite ΑΓ, est à la droite ΓΔ comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΕ, c'est-à-dire à la droite ΓΑ. Et, considérant droite entière à droite entière, puis par conversion, puis en égalant aire à aire, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΕ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΒΔ (2).



Il est manifeste que le rectangle compris sous les droites ΑΔ, ΔΕ équivaut aussi au rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΓ ; car, si on retranche le carré de la droite ΓΔ de part et d'autre dans l'égalité du carré de la droite ΓΕ au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΔ, il en est ainsi (3).

XII.

Proposition 202. — Menons transversalement par le même point Ε les trois droites ΑΕΔ, ΒΕΓ, ΖΕΗ sur les deux parallèles

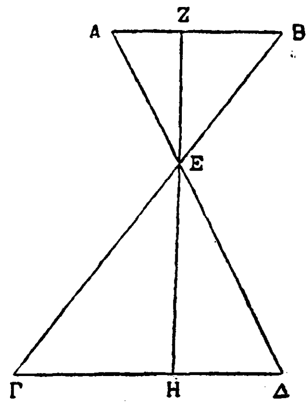
1. Restauration proposée d'abord par Halley (cfr. *loc. cit.*, p. 156, l. 4), et adoptée dans l'édition de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 950, l. 24).

2. On a par construction: $\overline{\Gamma E}^2 = B\Gamma \times \Gamma\Delta$, d'où: $\frac{\Gamma E}{\Gamma\Delta}=\frac{B\Gamma}{\Gamma E}$. Or, on a par construction : $A\Gamma = \Gamma E$; donc : $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. V, prop. 12 énoncée p. 67, n. 1) : $\frac{A\Gamma + B\Gamma}{\Gamma\Delta + A\Gamma}=\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ ou : $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ ou : $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{\Gamma E}$, d'où : $\frac{AB}{AB - A\Delta}=\frac{B\Gamma}{B\Gamma - \Gamma E}$ ou : $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{B\Gamma}{BE}$, d'où, comme le texte: $AB \times BE = B\Gamma \times B\Delta$.

3. On a par construction : $\overline{\Gamma E}^2 = B\Gamma \times \Gamma\Delta$, d'où : $\overline{\Gamma E}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2 = B\Gamma \times \Gamma\Delta - \overline{\Gamma\Delta}^2$. Or, la droite ΑΕ divisée en parties égales en Γ et inégales en Δ donne (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 2) : $A\Delta \times \Delta E = \overline{\Gamma E}^2 - \overline{\Gamma\Delta}^2$, et la droite ΒΓ divisée en Δ, donne (Euclide, liv. II, prop. 3, énoncée p. 232, n. 2) : $B\Delta \times \Gamma\Delta = B\Gamma \times \Gamma\Delta - \overline{\Gamma\Delta}^2$; donc, comme le texte : $A\Delta \times \Delta E = B\Delta \times \Gamma\Delta$.

AB, ΓΔ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ est au rectangle compris sous les droites ΓH, HΔ comme le rectangle compris sous les droites AE, EB est au rectangle compris sous les droites AZ, ZB.

La chose est manifeste au moyen du rapport composé ; car la droite AZ est à la droite HΔ comme la droite AE est à la droite EΔ ; tandis que la droite ZB est à la droite HΓ comme la droite BE est à la droite EΓ, et les aires s'établissent au moyen de ces rapports ; donc, le rapport est conservé [1].



La chose est aussi manifeste de la manière suivante, sans intervention du rapport composé.

En effet, puisque la droite EΔ est à la droite EΓ comme la droite AE est à la droite EB, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΔE, EΓ est aussi au carré de la droite EΓ comme le rectangle compris sous les droites AE, EB est au carré de la droite EB. Mais, le carré de la droite EΓ est aussi au carré de la droite ΓH comme le carré de la droite BE est au carré de la droite BZ ; donc, par raison d'égalité, le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ est au carré de la droite ΓH comme le rectangle compris sous les droites AE, EB est au carré de la droite ZB. Mais, le carré de la droite ΓH est aussi au rectangle compris sous les droites ΓH, HΔ comme le carré de la droite ZB est au rectangle compris sous les droites BZ, ZA ; donc, par raison d'égalité, le rectangle compris sous les droites ΓE, EΔ est au rectangle compris

1. μένει, leçon donnée par Heiberg (cfr. *Apollonii Pergaei quae graece exstant, etc.*, vol. II, *Pappi lemmata in conicorum libros I-IV*, p. 164, l. 25), au lieu de la leçon γίνεται de l'édition de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 952, l. 13).

On a, en effet, par similitude de triangles : $\frac{AZ}{H\Delta}=\frac{AE}{E\Delta}$ et $\frac{ZB}{H\Gamma}=\frac{BE}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{AZ}{H\Delta}\times\frac{ZB}{H\Gamma}=\frac{AE}{E\Delta}\times\frac{BE}{E\Gamma}$ ou : $\frac{AZ \times ZB}{H\Delta \times H\Gamma}=\frac{AE \times BE}{E\Delta \times E\Gamma}$, d'où, comme l'énoncé $\frac{E\Delta \times E\Gamma}{H\Delta \times H\Gamma}=\frac{AE \times BE}{AZ \times ZB}$.

sous les droites ΓΗ, ΗΔ comme le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΒ est au rectangle compris sous les droites ΑΖ, ΖΒ (1).

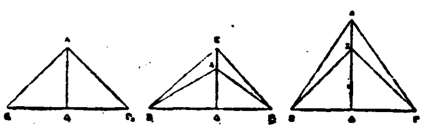
LEMMES RELATIFS AU LIVRE V DES CONIQUES.

I.

Proposition 203. — Soit le triangle ΑΒΓ et menons la perpendiculaire ΑΔ ; je dis que, si le rectangle compris sous les droites ΒΔ, ΔΓ est équivalent au carré de la droite ΑΔ, l'angle Α est droit ; s'il est plus grand, l'angle est obtus, et s'il est plus petit, l'angle est aigu.

Que le rectangle soit d'abord équivalent. Il s'ensuit que les droites sont en proportion. Et elles sont placées autour d'angles égaux ; donc, l'angle Α est égal à l'angle situé au point Δ ; de sorte que l'angle placé au point Α est droit (2).

Mais, que le rectangle soit plus grand. Posons qu'il est équivalent au carré de la droite ΔΕ et menons les droites de jonction ΒΕ, ΕΓ ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΒΕ, ΕΓ est droit. Et l'angle Α est plus grand que cet angle ; donc, l'angle Α est obtus (3).



Enfin, que le rectangle soit, au contraire, plus petit ; posons que le carré de la droite ΔΖ lui est équivalent et menons les droites de jonction ΒΖ, ΖΓ. L'angle

1. On a par similitude de triangles : $\frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΒ}}$, d'où : $\frac{\text{ΕΔ} \times \text{ΕΓ}}{\overline{\text{ΕΓ}}^2} = \frac{\text{ΑΕ} \times \text{ΕΒ}}{\overline{\text{ΕΒ}}^2}$. Or, $\frac{\overline{\text{ΕΓ}}^2}{\overline{\text{ΓΗ}}^2} = \frac{\overline{\text{ΕΒ}}^2}{\overline{\text{ΒΖ}}^2}$; donc : $\frac{\text{ΕΔ} \times \text{ΕΓ}}{\overline{\text{ΓΗ}}^2} = \frac{\text{ΑΕ} \times \text{ΕΒ}}{\overline{\text{ΒΖ}}^2}$. Or, $\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΗΔ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΑ}}$, d'où : $\frac{\overline{\text{ΓΗ}}^2}{\text{ΓΗ} \times \text{ΗΔ}} = \frac{\overline{\text{ΒΖ}}^2}{\text{ΒΖ} \times \text{ΖΑ}}$; donc, par raison d'égalité : $\frac{\text{ΕΔ} \times \text{ΕΓ}}{\text{ΓΗ} \times \text{ΗΔ}} = \frac{\text{ΑΕ} \times \text{ΕΒ}}{\text{ΒΖ} \times \text{ΖΑ}}$.

2. Soit, en première hypothèse : $\text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ} = \overline{\text{ΑΔ}}^2$, d'où : $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}}$, d'où similitude des triangles ΒΔΑ, ΑΔΓ, d'où similitude aussi des triangles ΑΒΔ, ΓΒΑ, d'où : $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΒΔΑ}} = 1$ angle droit.

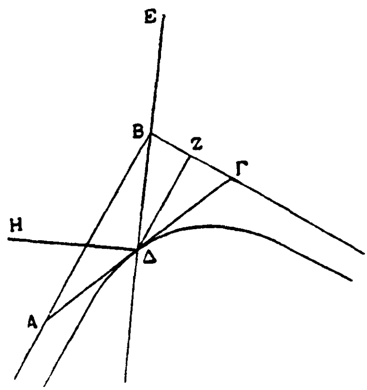
3. Soit en seconde hypothèse : $\text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ} > \overline{\text{ΑΔ}}^2$. Posons : $\text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ} = \overline{\text{ΕΔ}}^2$; donc, en vertu de la démonstration en première hypothèse : $\widehat{\text{ΒΕΓ}} = 1$ angle droit. Or, $\widehat{\text{ΒΑΓ}} > \widehat{\text{ΒΕΓ}}$; donc : $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ est obtus.

compris sous les droites BZ, ZΓ sera droit. Et l'angle situé au point A est plus petit que cet angle ; donc, l'angle A est aigu (1).

II.

PROPOSITION 204. — Deux droites AB, BΓ étant données de position (2) et le point Δ étant donné, décrire par le point Δ une hyperbole à l'égard des asymptotes (3) AB, BΓ.

Que la chose soit réalisée. Le centre de l'hyperbole est donc le point B. Menons la droite de jonction ΔB et prolongeons-la ; cette droite est donc un diamètre. Posons la droite BE égale à la droite ΔB ; il s'ensuit que cette droite est donnée ; en sorte que le point E, extrémité du diamètre, est donné. Menons du point Δ la perpendiculaire ΔZ sur la droite BΓ ; il s'ensuit que le point Z est donné (4). Posons la droite ZΓ égale à la droite BZ ; donc, le point Γ est donné aussi. Prolongeons la droite de jonction ΓΔ jusqu'au point A ; cette droite est donc donnée de position. Or, la droite AB est aussi donnée de position ; donc,



le point A est donné (5). Mais, le point Γ est donné aussi ; donc, la droite AΓ est donnée de grandeur. De plus, la droite AΔ sera

1. Soit en troisième hypothèse : $B\Delta \times \Delta\Gamma < \overline{A\Delta}^2$. Posons : $B\Delta \times \Delta\Gamma = \overline{\Delta Z}^2$; donc $\widehat{BZ\Gamma} = 1$ angle droit. Or, $\widehat{BA\Gamma} < \widehat{BZ\Gamma}$; donc : $\widehat{BA\Gamma}$ est aigu.

2. Halley (cfr. *Apollonii Pergaei Conicorum, etc.*) ajoute ici conjecturalement πρὸς ὀρθὰς, à (angles) droits, parce que la solution du problème montre aussitôt que Pappus vise le cas de l'hyperbole équilatère ; le cas des asymptotes faisant un angle quelconque a déjà été résolu au livre IV, proposition 33. Voir p. 214 et notes.

3. περὶ ἀσυμπτώτους, voir, au sujet de cette expression, p. 211, n. 2.

4. La droite ΔZ est donnée de position (EUCLIDE, *Données*, prop. 28, énoncée p. 231, n. 4), et la droite BZ est donnée de grandeur (EUCLIDE, *Données*, prop 32, « Si, des droites parallèles données de position, on mène une ligne droite faisant des angles donnés, la droite menée est donnée de grandeur ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 349) ; donc le point Z est donné.

5. EUCLIDE, *Données*, prop. 25, énoncée p. 214, n. 6.

égale à la droite ΔΓ, parce que la droite BZ est aussi égale à la droite ZΓ (1). Que la droite ΔH soit le côté droit (2) de la figure appliquée sur la droite EΔ ; il s'ensuit que chacune des droites AΔ, ΔΓ est en puissance du quart du rectangle compris sous les droites EΔ, ΔH. Mais, ces droites sont aussi en puissance du quart du carré de la droite AΓ ; donc, le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔH équivaut au carré de la droite AΓ (3). Or, le carré de la droite AΓ est donné ; donc, le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔH est donné aussi. Et la droite EΔ est donnée ; donc, la droite HΔ est donnée aussi ; de sorte que le point H est donné. Dès lors, puisque deux droites EΔ, ΔH établies perpendiculairement entre elles dans un plan sont données de position ; que, du point donné Δ, il surgit, sous l'angle des droites AΔ, ΔB, une hyperbole dont le diamètre est la droite EΔ et le sommet le point Δ ; que les droites menées d'une manière ordonnée dans l'angle donné compris sous les droites AΔ, ΔB sont en puissance des aires qui, appliquées suivant la droite ΔH, et ayant comme largeurs les droites que ces droites menées découpent sur le diamètre prolongé jusqu'au point Δ, sont excédantes de figures semblables à la figure comprise sous les droites EΔ, ΔH (4), il s'ensuit que la section (5) est donnée de position.

La synthèse du problème se fera donc de la manière suivante (6) : Soient AB, BΓ les deux droites données de position, et soit Δ le point donné. Prolongeons la droite de jonction ΔB jusqu'au point E en posant la droite BE égale à cette droite. Menons la perpendiculaire ΔZ et posons la droite ZΓ égale à la droite BZ. Prolongeons la droite de jonction ΓΔ jusqu'au point A ;

1. La droite ΔZ est perpendiculaire à la droite BΓ par construction, et BZ = ZΓ ; donc : AΔ = ΔΓ.

2. ὀρθία (sous-entendu πλευρά) τοῦ πρὸς τῇ EΔ εἴδους, le côté droit de la figure appliquée sur (le diamètre) EΔ, c'est-à-dire le côté perpendiculaire de la figure rectangulaire EΔ × HΔ ; expression par laquelle Apollonius désigne le paramètre.

3. On a (APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. III, énoncée p. 215, n. 2) : $\overline{A\Delta}^2 = \overline{\Delta\Gamma}^2 = \frac{1}{4}\, E\Delta \times \Delta H$. Or, $\overline{A\Delta}^2 = \overline{\Delta\Gamma}^2 = \frac{1}{4}\, \overline{A\Gamma}^2$; donc, $E\Delta \times \Delta H = \overline{A\Gamma}^2$.

4. Toute la phrase qui précède caractérise l'hyperbole dans les termes employés par Apollonius dans la proposition LIV du livre I des *Coniques* (Voir l'énoncé de cette proposition p. 216, n. 2).

5. C'est-à-dire la section conique hyperbole.

6. Voir APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. IV, énoncée p. 214, n. 3.

approprions (1) à la droite ΔE une droite ΔH, et posons le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔH équivalent au carré de la droite AΓ. Enfin, décrivons l'hyperbole autour du diamètre ΔE comme nous l'avons dit dans l'analyse (2) ; je dis qu'elle satisfait au problème.

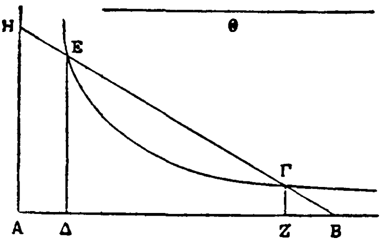
En effet, puisque la droite BZ est égale à la droite ZΓ, la droite AΔ est donc aussi égale à la droite ΔΓ. En conséquence, le carré de chacune des droites AΔ, ΔΓ est le quart du carré de la droite AΓ, c'est-à-dire du rectangle compris sous les droites EΔ, ΔH, c'est-à-dire de la figure appliquée au diamètre EΔ. Or, s'il en est ainsi, il a été démontré dans le second livre (3) que les droites AB, BΓ sont les asymptotes de l'hyperbole (4).

III.

PROPOSITION 205. — Soient la droite AB donnée de position et le point Γ donné. Menons transversalement une droite BΓ ; posons la droite donnée BΔ (5), et élevons la perpendiculaire ΔE ; je dis que le point E est lié à l'hyperbole (6) qui passe par le point Γ.

Menons la perpendiculaire ΓZ [et posons la droite ZA égale à la droite BΔ] (7) ; il s'ensuit que le point A est donné (8). Élevons la perpendiculaire AH ; la droite AH qui rencontre au point H la droite BΓ prolongée est donc donnée de position (9). En conséquence, les droites BA, AH étant données de position, et le point Γ étant donné, l'hyperbole décrite (10) à l'égard des asymptotes HA, AB passera aussi par le point E, parce que la droite BΓ est égale

1. Sous-entendu πρὸς ὀρθὰς, c'est-à-dire approprions (à angles droits) sur ΔE une droite ΔH de longueur telle que l'on ait $E\Delta \times \Delta H = \overline{A\Gamma}^2$.
2. C'est-à-dire dans la première partie analytique de la solution.
3. C'est-à-dire dans le livre II des *Coniques* d'Apollonius.
4. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. I, énoncée p. 217, n. 6.
5. C'est-à-dire posons la droite BΔ égale à une droite Θ donnée de grandeur.
6. Le texte porte ici l'interpolation : θέσει κώνου τομῆς, (lié à) la section de cône (donnée) de position (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 958, l. 18).
7. Restauration de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 408, l. 24).
8. La droite ΓZ est donnée (EUCLIDE, *Données*, prop. 30, énoncée p. 229, n. 2) et (EUCLIDE, *ibidem*, prop. 25, énoncée p. 214, n. 6), le point Z est donné ; donc (EUCLIDE, *ibidem*, prop. 27, énoncée p. 24, n. 2), le point A est donné.
9. EUCLIDE, *Données*, prop. 29, énoncée p. 198, n. 4.
10. Sous-entendu : διὰ τοῦ Γ, par le (point) Γ.



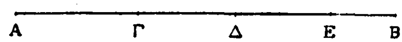
à la droite EH (puisque la droite entière [BE] [1] est aussi égale [à la droite HΓ]) [2] [3], et cette hyperbole sera établie conformément à ce qui a été exposé précédemment [4].

La synthèse se fera de la manière suivante : Soit AB la droite donnée de position ; soit Γ le point donné, et soit BΓ la droite menée transversalement. Soit donnée la droite Θ à laquelle, ayant mené la perpendiculaire ΓZ, la droite ZA soit égale ; élevons la perpendiculaire AH, et qu'elle rencontre la droite BΓ au point H. Enfin, décrivons par le point donné Γ l'hyperbole à l'égard des asymptotes HA, AB. Je dis qu'elle satisfait au problème, c'est-à-dire que, si l'on mène une perpendiculaire EΔ, la droite BΔ devient égale à la droite Θ. Or, cela est manifeste à cause des asymptotes ; car, la droite EH est égale à la droite ΓB ; de sorte que la droite AΔ est aussi égale à la droite ZB ; par conséquent, la droite entière AZ, c'est-à-dire la droite Θ, est égale à la droite BΔ.

IV.

Proposition 206. — Que le carré de la droite BΔ soit au carré de la droite ΔΓ comme la droite BA est à la droite AΓ ; je dis que la droite AΔ est la moyenne proportionnelle des droites BA, AΓ.

Posons la droite ΔE égale à la droite ΓΔ ; il s'ensuit que, par division, le rectangle compris sous les droites ΓB, BE est au carré de la droite EΔ comme la droite BΓ est à la droite ΓA, c'est-à-dire comme le rectangle compris sous les droites ΓB, BE est au rectangle compris sous les droites AΓ, EB. En conséquence, le rectangle compris sous les droites AΓ, EB équivaut au carré de la droite ΔE, c'est-à-dire



1. et 2. Restaurations dues à Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 408, l. 10).

3. On a par construction : ZA = BΔ, d'où : ΓH = BE, d'où ΓH — EΓ = BE — EΓ ou : HE = ΓB.

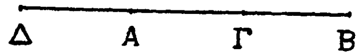
4. C'est-à-dire que l'hyperbole sera donnée en raisonnant comme dans la partie analytique du lemme III ou proposition 204.

au rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔE. Par proportion et composition, la droite ΔA est à la droite AΓ comme la droite BΔ est à la droite ΔE, c'est-à-dire à la droite ΔΓ ; par conséquent, considérant droite entière à droite entière, la droite AΔ est à la droite AΓ comme la droite BA est à la droite AΔ ; en sorte que la droite AΔ est la moyenne proportionnelle des droites BA, AΓ (1).

V.

Proposition 207. — Que le rectangle compris sous les droites AB, BΓ soit équivalent à deux fois le carré de la droite AΓ ; je dis que la droite AΓ est égale à la droite ΓB.

Posons la droite AΔ égale à la droite AΓ ; le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔA sera donc équivalent au rectangle compris sous les droites AB, BΓ ; et, en présence d'un même rectangle, la droite ΔA, c'est-à-dire la droite AΓ, est donc égale à la droite ΓB (2).



VI.

Proposition 208. — Décrivons les hyperboles ΔZ [HE] (3) à l'égard des mêmes asymptotes AB, BΓ ; je dis qu'elles ne se rencontrent pas.

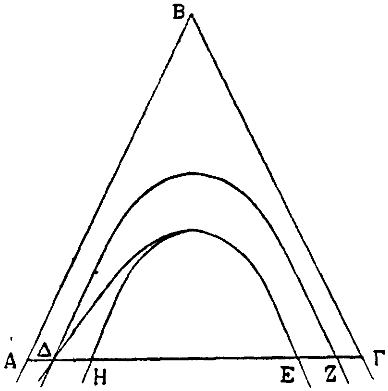
---

1. On a par hypothèse : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{BA}{A\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{B\Delta}^2-\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{BA-A\Gamma}{A\Gamma}=\frac{\Gamma B}{A\Gamma}$. Or, on a par construction : $E\Delta=\Delta\Gamma$, et la droite ΓE, divisée en parties égales en Δ, à laquelle on ajoute la droite EB, donne (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $\overline{B\Delta}^2-\overline{\Delta\Gamma}^2=\Gamma B\times BE$; donc, comme le texte : $\frac{\Gamma B\times BE}{\overline{E\Delta}^2}=\frac{\Gamma B}{A\Gamma}=\frac{\Gamma B\times BE}{A\Gamma\times BE}$, d'où : $\overline{E\Delta}^2=A\Gamma\times BE$ ou : $\Gamma\Delta\times E\Delta=A\Gamma\times BE$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma}=\frac{BE}{E\Delta}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta+A\Gamma}{A\Gamma}=\frac{BE+E\Delta}{E\Delta}$ ou : $\frac{A\Delta}{A\Gamma}=\frac{\Delta B}{E\Delta}=\frac{\Delta B}{\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{A\Delta}{A\Gamma}=\frac{A\Delta+\Delta B}{A\Gamma+\Gamma\Delta}=\frac{AB}{A\Delta}$, d'où : $\overline{A\Delta}^2=AB\times A\Gamma$.

2. On a par hypothèse : $AB\times B\Gamma=2\overline{A\Gamma}^2$. Or, on a par construction : $A\Delta=A\Gamma$, d'où : $2A\Delta\times A\Delta=\Gamma\Delta\times A\Delta=2\overline{A\Gamma}^2$; donc, comme le texte : $\Gamma\Delta\times A\Delta=AB\times B\Gamma$, d'où : $\Gamma\Delta\times A\Delta+A\Delta\times B\Gamma=AB\times B\Gamma+A\Delta\times B\Gamma$ ou : $(\Gamma\Delta+B\Gamma)\,A\Delta=(AB+A\Delta)\,B\Gamma$ ou : $\Delta B\times A\Delta=\Delta B\times B\Gamma$, d'où : $A\Delta=B\Gamma$ ou : $A\Gamma=B\Gamma$.

3. Correction de Hultsch ; les manuscrits donnant par erreur ΔE. La figure qui accompagne le texte de Hultsch, et que nous reproduisons dans notre traduction, rétablit d'ailleurs aussi l'hyperbole HE qui manque dans la figure des divers manuscrits (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 963, l. 1).

En effet, qu'elles se rencontrent au point Δ, s'il se peut, et menons transversalement du point Δ la droite ΑΔΕΖΓ sur les sections (1). Dès lors, en raison de la section ΔΖ, la droite ΑΔ est égale à la droite ΖΓ, et, en raison de la section ΔΕ, la droite ΑΔ est égale à la droite ΕΓ (2) ; de sorte que la droite ΓΖ est égale à la droite ΓΕ ; ce qui est impossible. En conséquence, les sections ne se rencontrent pas,



Je dis, en outre, que les sections prolongées à l'infini, se rapprochent davantage l'une de l'autre, et en arrivent à une distance continuellement plus petite (3).

En effet, menons encore une autre droite ΘΚ (4), et soit le diamètre ...... (5), dont l'extrémité est le point Μ .... (6) Dès lors, le côté transverse (7) sera au côté droit (8) comme le rectangle compris sous les droites ΜΛ, ΛΝ est au carré de la droite ΛΞ, et le côté transverse sera au côté droit comme le

1. C'est-à-dire sur les sections coniques hyperboles.

2. Apollonius, *Les Coniques*, liv. II, prop. VIII : « Lorsqu'une droite rencontre une hyperbole en deux points, et qu'on la prolonge de part et d'autre, elle rencontrera les asymptotes ; tandis que les droites qui en sont découpées à partir de la section jusqu'aux asymptotes seront égales ». Voir trad. de Paul Ver Eecke, p. 124.

3. La seconde partie de cette démonstration est lacuneuse et fortement altérée ; elle n'appartient probablement pas à Pappus.

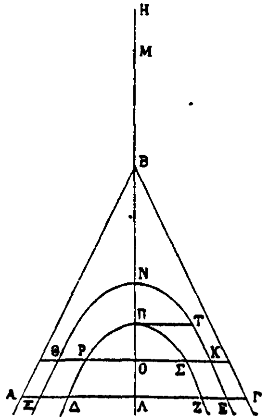
4. Le texte dit simplement ἑτέρα ἡ ΘΚ. D'après Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 962, l. 12), qui suit en cela Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 410, l. 1), il faut sous-entendre ici le mot εὐθεῖα, et interpréter : « une autre (droite) ΘΚ », contrairement à l'opinion de Halley qui a sous-entendu le mot ὑπερβολή, hyperbole, et a traduit : « Ducatur enim alia hyperbola ΘΝΚ » (Voir premier folio non numéroté précédant le livre V dans son édition des *Coniques* d'Apollonius).

5. Lacune dans tous les manuscrits, non comblée conjecturalement par Hultsch, dont la version latine seule propose de dire : « sitque (hyperbolae ΞΕ) diametrus (ΝΜ) », c'est-à-dire : soit le diamètre (ΝΜ) de (l'hyperbole ΞΕ). (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 963, l. 17).

6. Lacune non comblée conjecturalement par Hultsch, mais que Halley a proposé de combler par les mots : ἔστω καὶ τῆς ΔΠΖ διάμετρος ἡ ΠΗ, c'est-à-dire : soit aussi ΠΗ le diamètre de (l'hyperbole) ΔΠΖ.

7. C'est-à-dire le diamètre transverse ΜΝ.

8. C'est-à-dire le paramètre correspondant au diamètre transverse considéré.



rectangle compris sous les droites HO, OΠ est au carré de la droite OP (1) ; de sorte que le rectangle compris sous les droites HO, OΠ est au carré de la droite OP comme le rectangle compris sous les droites MΛ, ΛN est au carré de la droite ΛΞ, et permutons (2). Or, le rectangle compris sous les droites MΛ, ΛN est plus grand que le rectangle compris sous les droites HO, OΠ ; donc, la droite ΞZ est plus grande que la droite ΘΣ (3). Or, en raison des sections, le rectangle compris sous les droites ZΞ, ΞΔ équivaut au rectangle compris sous les droites ΣΘ, ΘP ; donc, la droite ΞΔ est plus

---

1. Apollonius, *Les Coniques*, liv. I, prop. XXI : « Si, dans l'hyperbole, dans l'ellipse, ou dans la circonférence de cercle, l'on amène des droites d'une manière ordonnée sur le diamètre, leurs carrés seront aux aires délimitées sous les droites qu'elles découpent, à partir des extrémités du côté transverse de la figure, comme le côté droit de la figure est au côté transverse ; et ils seront entre eux comme les aires délimitées sous les droites découpées comme nous venons de le dire ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 43.

2. La proposition d'Apollonius énoncée dans la note précédente donne pour l'hyperbole ΞNE : $\frac{\text{diamètre transverse MN}}{\text{paramètre correspondant}} = \frac{M\Lambda \times \Lambda N}{\overline{\Lambda\Xi}^2}$ (I), et, pour l'hyperbole ΔΠZ : $\frac{\text{diamètre transverse H}\Pi}{\text{paramètre correspondant}} = \frac{HO \times O\Pi}{\overline{OP}^2}$ (II). Or, ces deux hyperboles semblables donnent (Apollonius, *Les Coniques*, liv. VI, prop. XII : « Si les figures construites sur les axes d'hyperboles ou d'ellipses sont semblables, ces sections seront aussi semblables ; et si ces sections sont semblables, les figures construites sur les axes sont semblables ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 493) : rectangle diam. MN × paramètre de MN semblable à rectangle diam. HΠ × paramètre de HΠ, d'où : $\frac{\text{diamètre H}\Pi}{\text{paramètre correspondant}} = \frac{\text{diamètre MN}}{\text{paramètre correspondant}}$, d'où, en présence des relations (I) et (II), on a : $\frac{HO \times O\Pi}{\overline{OP}^2} = \frac{M\Lambda \times \Lambda N}{\overline{\Lambda\Xi}^2}$, et, par permutation, comme le texte : $\frac{\overline{\Lambda\Xi}^2}{\overline{OP}^2} = \frac{M\Lambda \times \Lambda N}{HO \times O\Pi}$.

3. La droite MN divisée en deux parties égales en B, à laquelle on ajoute la droite NΛ donne (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $M\Lambda \times \Lambda N = \overline{B\Lambda}^2 - \overline{BN}^2$; et, de même, la droite HΠ divisée en deux parties égales en B, à laquelle on ajoute la droite ΠO, donne : $HO \times O\Pi = \overline{BO}^2 - \overline{B\Pi}^2$. Or, $B\Lambda > BO$ et $BN < B\Pi$; donc : $\overline{B\Lambda}^2 - \overline{BN}^2 > \overline{BO}^2 - \overline{B\Pi}^2$, d'où, comme le texte : $M\Lambda \times \Lambda N > HO \times O\Pi$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente : $\overline{\Lambda\Xi}^2 > \overline{OP}^2$, d'où : $\Lambda\Xi > OP$, relation inutilement démontrée, probablement par nn interpolateur, pour conclure que $\Xi Z > \Theta\Sigma$; car $\Lambda\Xi > \Theta O$, et $\Lambda Z > O\Sigma$, d'où : $\Lambda\Xi + \Lambda Z > \Theta O + O\Sigma$, ou: $\Xi Z > \Theta\Sigma$.

petite que la droite ΘP (1); de sorte que les sections en arrivent à des distances continuellement plus petites. [Mais, elles seront aussi adjacentes (2) ; car si chacune d'elles arrive plus près des asymptotes, il est clair qu'il en est de même entre elles] (3).

VII.

Proposition 209. — Que la droite ΔE soit à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ, et la droite EΔ à la droite ΔΘ comme la droite BA est à la droite AH ; je dis que le cube de la droite AH, conjointement avec le cube ayant avec le cube de la droite HB le même rapport que celui du carré de la droite AΓ au carré de la droite ΓB, est au cube de la droite ΔΘ, conjointement avec le cube ayant avec le cube de la droite ΘE le même rapport que celui du carré de la droite ΔZ au carré de la droite ZE, comme le solide ayant comme base le carré de la droite AΓ et comme hauteur la droite AB est au solide ayant comme base le carré de la droite ΔZ et comme hauteur la droite ΔE (4).

---

1. La démonstration découle de la proposition X du livre II des *Coniques* d'Apollonius, énoncée : « Lorsqu'une droite qui coupe une section rencontre chacune des asymptotes, le rectangle délimité sous les droites découpées entre les asymptotes et la section, équivaut au quart de la figure qu'on obtient sur le diamètre qui coupe en deux parties égales les droites amenées parallèlement à la droite menée ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 125.

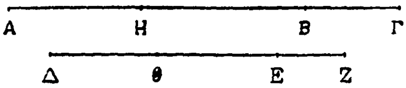
En effet, si Θ', K' sont les points où la sécante ΘK rencontre les asymptotes, l'hyperbole ΔΠZ donne : $\Theta P' \times PK' = A\Delta \times \Delta\Gamma$ (I), et l'hyperbole ΞNE donne: $\Theta'\Theta \times \Theta K' = A\Xi \times \Xi\Gamma$ (II). Or, en raison de l'égalité des segments $\Theta'P$ et $\Sigma K'$, en vertu de la proposition 193 (voir p. 743), on a: $\Theta'P \times PK' = K'\Theta \times \Theta\Theta' + \Sigma\Theta \times \Theta P$, et, de même pour la droite AΞΔZΓ sur laquelle les segments AΞ, EΓ sont égaux, on a : $A\Delta \times \Delta\Gamma = A\Xi \times \Xi\Gamma + Z\Xi \times \Xi\Delta$; donc, d'après (I) on a : $K'\Theta \times \Theta\Theta' + \Sigma\Theta \times \Theta P = A\Xi \times \Xi\Gamma + Z\Xi \times \Xi\Delta$, d'où, d'après (II), il vient, comme le texte: $\Sigma\Theta \times \Theta P \times Z\Xi \times \Xi\Delta$. Or on a démontré plus haut qu'on a: $Z\Xi > \Sigma\Theta$; donc, comme le texte: $\Xi\Delta < \Theta P$.

2. C'est-à-dire adjacentes aussi loin qu'on les prolonge.

3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 964, l. 1).

4. Cet énoncé, un peu compliqué, s'exprime donc : $\dfrac{\overline{AH}^3 + \overline{HB}^3 \times \dfrac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\Gamma B}^2}}{\overline{\Delta\Theta}^3 + \overline{\Theta E}^3 \times \dfrac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{ZE}^2}} = \dfrac{\overline{A\Gamma}^2 \times AB}{\overline{\Delta Z}^2 \times \Delta E}$.

En effet, puisque la droite ZΔ est à la droite ΔE comme la droite ΓA est à la droite AB, il s'ensuit que le carré de la droite ZΔ est aussi au carré de la droite ΔE comme le carré de la droite ΓA est au carré de la droite AB. Mais, le solide ayant comme base le carré de la droite AΓ et comme hauteur la droite AB est au cube de la droite AB comme le carré de la droite ΓA est au carré de la droite AB (la droite AB étant la hauteur commune) ; tandis que le solide ayant comme base le carré de la droite ΔZ et comme hauteur la droite ΔE est au cube de la droite ΔE comme le carré de la droite ZΔ est au carré de la droite ΔE (la droite EΔ étant la hauteur commune) ; donc, on a cela en proportion et en permutation (1). Or, le cube de la droite AH est aussi au cube de la droite ΔΘ, et le cube de la droite HB au cube de la droite ΘE, comme le cube de la droite AB est au cube de la droite ΔE (2). Mais, le cube ayant avec le cube de la droite HB le rapport du carré de la droite AΓ au carré de la droite ΓB est au cube ayant avec le cube de la droite ΘE le rapport du carré de la droite ΔZ au carré de la droite ZE [comme le cube de la droite HB est au cube de la droite ΘE] (3) ; donc, tous les antécédents sont à tous les conséquents comme un antécédent est à un conséquent. Dès lors, le cube de la droite AH, conjointement avec le cube ayant avec le cube de la droite HB le rapport du carré de la droite AΓ au carré de la droite BΓ, est



1. On a par hypothèse : $\frac{\Delta E}{EZ} = \frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{EZ}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{AB}$, d'où : $\frac{EZ + \Delta E}{\Delta E} = \frac{B\Gamma + AB}{AB}$ ou, comme le texte : $\frac{Z\Delta}{\Delta E} = \frac{\Gamma A}{AB}$, d'où : $\frac{\overline{Z\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2} = \frac{\overline{\Gamma A}^2}{\overline{AB}^2}$. Or, $\frac{\overline{Z\Delta}^2 \times \Delta E}{\overline{\Delta E}^3} = \frac{\overline{Z\Delta}^2}{\overline{\Delta E}^2}$ et $\frac{\overline{\Gamma A}^2 \times AB}{\overline{AB}^3} = \frac{\overline{\Gamma A}^2}{\overline{AB}^2}$; donc : $\frac{\overline{Z\Delta}^2 \times \Delta E}{\overline{\Delta E}^3} = \frac{\overline{\Gamma A}^2 \times AB}{\overline{AB}^3}$, d'où, par permutation : $\frac{\overline{AB}^3}{\overline{\Delta E}^3} = \frac{\overline{\Gamma A}^2 \times AB}{\overline{Z\Delta}^2 \times \Delta E}$.

2. On a par hypothèse : $\frac{E\Delta}{\Delta\Theta} = \frac{AB}{AH}$, d'où : $\frac{AH}{\Delta\Theta} = \frac{AB}{E\Delta}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{AH}^3}{\overline{\Delta\Theta}^3} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{E\Delta}^3}$. Or, on a : $\frac{AH}{\Delta\Theta} = \frac{AB - AH}{E\Delta - \Delta\Theta} = \frac{HB}{\Theta E}$, d'où : $\frac{\overline{AH}^3}{\overline{\Delta\Theta}^3} = \frac{\overline{HB}^3}{\overline{\Theta E}^3}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{HB}^3}{\overline{\Theta E}^3} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{E\Delta}^3}$.

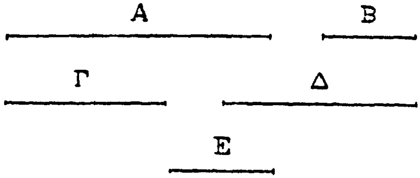
3. Restauration de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 413, *commentarius*, l. 51).

au cube de la droite ΔΘ, conjointement avec le cube ayant avec le cube de la droite ΘE le rapport du carré de la droite ΔZ au carré de la droite EZ, comme le solide ayant comme base le carré de la droite AΓ et comme hauteur la droite AB est au solide ayant comme base le carré de la droite ΔZ et comme hauteur la droite ΔE (1).

VIII.

Proposition 210. — Que la grandeur A, conjointement avec la grandeur B, soit égale à la grandeur Γ conjointement avec la grandeur Δ; je dis que la grandeur Δ excède la grandeur B de ce que la grandeur A excède la grandeur Γ.

En effet, soit E la grandeur dont la grandeur A excède la grandeur Γ; il s'ensuit que la grandeur A équivaut aux grandeurs Γ, E. Ajoutons de part et d'autre la grandeur B; il s'ensuit que les grandeurs A, B valent les grandeurs Γ, E, B. Mais, on a supposé que les grandeurs A, B valent les grandeurs Γ, Δ; donc, les grandeurs Γ, Δ valent les grandeurs Γ, E, B. Retranchons de part et d'autre la



1. La relation d'hypothèse : $\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{AB}{B\Gamma}$ donne : $\frac{\Delta E+EZ}{EZ}=\frac{AB+B\Gamma}{B\Gamma}$ ou : $\frac{\Delta Z}{EZ}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{EZ}^2}=\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2}$; donc, on peut écrire : $\frac{\overline{HB}^3\times\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2}}{\overline{\Theta E}^3\times\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{EZ}^2}}=\frac{\overline{HB}^3}{\overline{\Theta E}^3}$, d'où, en présence des deux dernières relations de la note 2, page 759 : $\frac{\overline{HB}^3\times\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2}}{\overline{\Theta E}^3\times\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{EZ}^2}}=\frac{\overline{AH}^3}{\overline{\Delta\Theta}^3}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{\Delta E}^3}$, d'où : $\frac{\overline{AH}^3+\overline{HB}^3\times\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2}}{\overline{\Delta\Theta}^3+\overline{\Theta E}^3\times\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{\Delta Z}^2}}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{\Delta E}^3}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note 1, page 759, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{AH}^3+\overline{HB}^3\times\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2}}{\overline{\Delta\Theta}^3+\overline{\Theta E}^3\times\frac{\overline{\Delta Z}^2}{\overline{\Delta Z}^2}}=\frac{\overline{\Gamma A}^2\times AB}{\overline{Z\Delta}^2\times\Delta E}$.

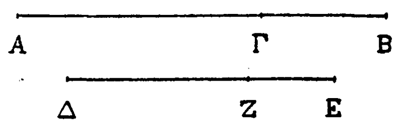
grandeur Γ ; il s'ensuit que la grandeur restante Δ vaut les grandeurs B, E ; de sorte que la grandeur Δ excède la grandeur B de la grandeur E. En conséquence, la grandeur Δ excède la grandeur B de ce que la grandeur A excède la grandeur Γ.

On démontrera de la même manière que, si la grandeur Δ excède la grandeur B de ce que la grandeur A excède la grandeur Γ, les grandeurs A, B sont égales aux grandeurs Γ, Δ [1].

IX.

Proposition 211. — Soient deux grandeurs AB, BΓ ; je dis que la grandeur ayant un certain rapport avec la grandeur AB excède la grandeur ayant même rapport avec la grandeur AΓ de la grandeur ayant même rapport avec la grandeur ΓB [2].

En effet, soit ΔE la grandeur ayant un certain rapport avec la grandeur AB et ΔZ la grandeur ayant même rapport avec la grandeur AΓ ; il s'ensuit que la grandeur restante EZ est celle qui a même rapport avec la grandeur restante BΓ. Et la grandeur EZ est l'excédent dont la grandeur ΔE surpasse la grandeur ΔZ, c'est-à-dire l'excédent dont la grandeur ayant un certain rapport avec la grandeur AB surpasse la grandeur ayant même rapport avec la grandeur AΓ [3].



X.

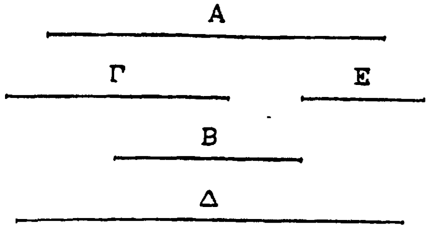
Proposition 212. — Que la grandeur A excède la grandeur Γ d'une grandeur plus petite que celle dont la grandeur Δ excède la grandeur B ; je dis que les grandeurs A, B sont plus petites que les grandeurs Γ, Δ.

1. En notations usuelles, posons : $E = A - \Gamma$, d'où : $A = \Gamma + E$, d'où : $A + B = \Gamma + E + B$. Or, on a par hypothèse : $A + B = \Gamma + \Delta$; donc : $\Gamma + \Delta = \Gamma + E + B$ ou : $\Delta = E + B$; donc : $E = \Delta - B$; donc : $A - \Gamma = \Delta - B$. On démontrera de même que, si $A - \Gamma = \Delta - B$, on a : $A + B = \Delta + \Gamma$.

2. Algébriquement, si l'on pose : $\frac{x}{AB} = \frac{y}{A\Gamma} = \frac{z}{\Gamma B}$, on a : $x - y = z$.

3. Soit : $\frac{\Delta E}{AB} = \frac{\Delta Z}{A\Gamma}$, d'où : $\frac{\Delta E}{AB} = \frac{\Delta E - \Delta Z}{AB - A\Gamma} = \frac{ZE}{B\Gamma}$.

En effet, soit E la grandeur dont la grandeur A excède la grandeur Γ ; il s'ensuit que les grandeurs A, B valent les grandeurs Γ, E, B. Or, puisque la grandeur A excède la grandeur Γ d'une grandeur plus petite que celle dont la grandeur Δ excède la grandeur B, et que la grandeur A excède la grandeur Γ de la grandeur E, il s'ensuit que la grandeur E est plus petite que l'excédent des grandeurs Δ, B ; de sorte que les grandeurs E, B sont plus petites que la grandeur Δ. Ajoutons de part et d'autre la grandeur Γ, il s'ensuit que les grandeurs Γ, E, B sont plus petites que les grandeurs Γ. Δ. Mais, on a démontré que les grandeurs Γ, E, B valent les grandeurs A, B ; donc, les grandeurs A, B sont plus petites que les grandeurs Γ, Δ [1].



LEMMES POUR LE LIVRE VI DES CONIQUES.

I.

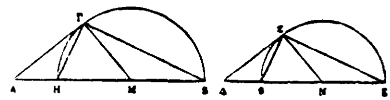
Proposition 213. — Soient deux triangles obtusangles ΑΒΓ, ΔΕΖ ayant les angles Γ, Ζ obtus et les angles aigus Α, Δ égaux, Menons les droites ΓΗ, ΖΘ perpendiculaires aux droites ΒΓ, ΕΖ, et que le rectangle compris sous les droites ΕΔ, ΔΘ soit au carré de la droite ΔΖ comme le rectangle compris sous les droites ΒΑ, ΑΗ est au carré de la droite ΑΓ ; je dis que le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΔΕΖ.

En effet, décrivons des demi-cercles sur les droites ΗΒ, ΕΘ ; ils passeront donc par les points Γ, Ζ [2]. [Qu'ils y passent, et que ce soient les demi-cercles ΗΓΒ, ΕΖΘ] [3]. Les droites ΑΓ, ΔΖ

1. Posons : $E = A - \Gamma$, d'où : $A = \Gamma + E$, d'où : $A + B = \Gamma + E + B$ (I). Or, par hypothèse : $A - \Gamma < \Delta - B$ ou : $E < \Delta - B$, d'où : $E + B < \Delta$, d'où : $\Gamma + E + B < \Gamma + \Delta$, d'où, en présence de la relation (I), on a, comme le texte : $A + B < \Gamma + \Delta$.

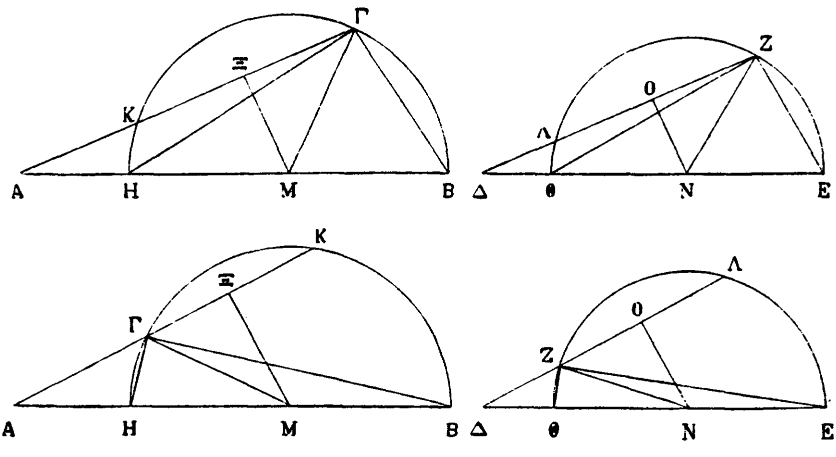
2. Euclide, liv. III, prop. 31, énoncée p. 54, n. 1.

3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 968, l. 21).



sont donc tangentes ou non aux demi-cercles. Si elles sont tangentes, il est évident que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont semblables ; car, si nous prenons les centres Μ, Ν, et menons les droites de jonction ΜΓ, ΝΖ, les angles compris sous les droites ΜΓ, ΓΑ et sous les droites ΝΖ, ΖΔ seront droits (1). Et les angles Α, Δ sont égaux ; donc, l'angle compris sous les droites ΑΜ, ΜΓ est égal à l'angle compris sous les droites ΔΝ, ΝΖ. Et les moitiés de ces angles sont aussi égales ; donc, l'angle Β est aussi égal à l'angle Ε. Mais, l'angle Α est aussi égal à l'angle Δ ; par conséquent, les triangles sont semblables (2).

Mais, que les droites ne soient pas tangentes ; qu'elles coupent les demi-cercles en des points Κ, Λ et menons les perpendiculaires



ΜΞ, ΝΟ. Dès lors, la droite ΚΞ est égale à la droite ΞΓ et la droite ΛΟ égale à la droite ΟΖ. Or, le triangle ΑΜΞ est semblable au triangle ΔΝΟ ; donc, la droite ΟΔ est à la droite ΔΝ comme la droite ΞΑ est à la droite ΑΜ. Mais, puisque le rectangle com-

1. EUCLIDE, liv. III, prop. 18, énoncée p. 142, n. 2.

2. On a par hypothèse : angle Α = angle Δ. Or, $\widehat{M\Gamma A} = \widehat{NZ\Delta} = 1$ angle droit ; donc : $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{\Delta NZ}$. Or, $\widehat{\Gamma BM} = \frac{1}{2}\,\widehat{AM\Gamma}$ et $\widehat{ZEN} = \frac{1}{2}\,\widehat{\Delta NZ}$; donc : $\widehat{\Gamma BM} = \widehat{ZEN}$, d'où similitude des triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ.

pris sous les droites EΔ, ΔΘ est au carré de la droite ΔZ comme le rectangle compris sous les droites BA, AH est au carré de la droite AΓ, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΛΔ, ΔZ est au carré de la droite ΔZ, c'est-à-dire que la droite ΛΔ est à la droite ΔZ, comme le rectangle compris sous les droites KA, AΓ est au carré de la droite AΓ, c'est-à-dire comme la droite KA est à la droite AΓ ; en sorte que la droite OΔ est aussi à la droite ΔZ comme la droite ΞA est à la droite AΓ. Mais, la droite OΔ est aussi à la droite ΔN comme la droite ΞA est à la droite AM [à cause de la similitude des triangles] (1) ; donc, par raison d'égalité, la droite ZΔ est à la droite ΔN comme la droite ΓA est à la droite AM. Et ces droites proportionnelles sont situées autour d'angles égaux A, Δ; donc, l'angle compris sous les droites AM, MΓ est égal à l'angle compris sous les droites ΔN, NZ. Et les moitiés de ces angles sont égales ; donc, l'angle B est égal à l'angle E. Mais, par hypothèse, l'angle A est aussi égal à l'angle Δ ; par conséquent, le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔEZ (2).

Au reste, la réciproque du lemme est manifeste. Le triangle ABΓ étant semblable au triangle ΔEZ, et les angles compris sous les droites BΓ, ΓH et sous les droites EZ, ZΘ étant droits, il faut démontrer que le rectangle compris sous les droites EΔ, ΔΘ est au carré de la droite ΔZ comme le rectangle compris sous les droites BA, AH est au carré de la droite AΓ.

En effet, en raison de la similitude des triangles, la droite EΔ est à la droite ΔZ comme la droite BA est à la droite AΓ, et la

1. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 972, l. 14).

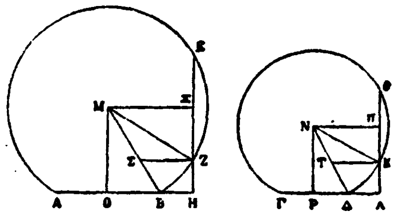
2. On a par hypothèse : $\widehat{\Xi A M} = \widehat{O \Delta N}$ (I) et, par construction : $K\Xi = \Xi\Gamma$ et $AO = OZ$, d'où similitude des triangles AMΞ, ΔNO, d'où, comme le texte : $\frac{O\Delta}{\Delta N} = \frac{\Xi A}{AM}$ (II). D'autre part, on a par hypothèse : $\frac{E\Delta \times \Delta\Theta}{\Delta Z^2} = \frac{BA \times AH}{A\Gamma^2}$. Or, $\Lambda\Delta \times \Delta Z = E\Delta \times \Delta\Theta$ et $KA \times A\Gamma = BA \times AH$; donc : $\frac{\Lambda\Delta \times \Delta Z}{\Delta Z^2} = \frac{KA \times A\Gamma}{A\Gamma^2}$ ou : $\frac{\Lambda\Delta}{\Delta Z} = \frac{KA}{A\Gamma}$, d'où : $\frac{\Lambda\Delta + \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{KA + A\Gamma}{A\Gamma}$ ou : $\frac{2\Lambda\Delta + 2\Lambda O}{\Delta Z} = \frac{2KA + 2K\Xi}{A\Gamma}$ ou : $\frac{O\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Xi A}{A\Gamma}$, d'où, par raison d'égalité avec la relation (II) : $\frac{\Delta Z}{\Delta N} = \frac{A\Gamma}{AM}$, d'où, en présence de la relation (I), les triangles ΔNZ, AMΓ sont semblables, d'où : $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{\Delta NZ}$. Or, $\widehat{AM\Gamma} = 2\widehat{AB\Gamma}$ et $\widehat{\Delta NZ} = 2\widehat{\Delta EZ}$; donc : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$, d'où similitude des triangles ABΓ, ΔEZ.

droite ΘΔ est à la droite ΔZ comme la droite HA est à la droite AΓ, et considérons le rapport composé (1).

II.

Proposition 214. — Soient, sur les droites AB, ΓΔ, deux segments semblables plus grands que le demi-cercle ; menons les perpendiculaires EZH, ΘΚΛ, et que la droite ΘΛ soit à la droite ΛΚ comme la droite EH est à la droite HZ. Il faut démontrer que l'arc BZ est semblable à l'arc ΔΚ.

Prenons les centres M, N ; menons les perpendiculaires MΞ, MO, NΠ, NP, et menons les droites de jonction MB, NΔ ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites OM, MB est égal à l'angle compris sous les droites PN, NΔ (car les angles sont égaux dans les segments ; de sorte que les moitiés sont aussi égales). Et les angles O, P sont droits ; donc, l'angle compris sous les droites MB, BO est égal à l'angle compris sous les droites NΔ, ΔP.



Menons les droites ZΣ, KT parallèles aux droites AB, ΓΔ, et menons les droites de jonction MZ, NK ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites MΣ, ΣZ est aussi égal à l'angle compris sous les droites NT, TK (2). Or, puisque la droite ΘΛ est à la droite ΛΚ comme la droite EH est à la droite HZ, la droite ΠΛ est donc à la droite ΛΚ comme la droite ΞH est à la droite HZ ; de sorte que la droite ΛΠ est à la droite ΚΠ, c'est-à-dire la droite ΔN à la droite NT, [c'est-à-dire la droite KN

1. On a, par similitude de triangles : $\frac{E\Delta}{\Delta Z} = \frac{BA}{A\Gamma}$ et $\frac{\Theta\Delta}{\Delta Z} = \frac{HA}{A\Gamma}$, d'où : $\frac{E\Delta}{\Delta Z} \times \frac{\Theta\Delta}{\Delta Z} = \frac{BA}{A\Gamma} \times \frac{AH}{A\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{E\Delta \times \Theta\Delta}{\Delta Z^2} = \frac{BA \times AH}{A\Gamma^2}$.

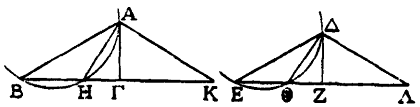
2. Les segments de cercles étant semblables par hypothèse, les angles aux centres AMB, ΓNΔ sont donc égaux, d'où, considérant les moitiés : $\widehat{OMB} = \widehat{PN\Delta}$, d'où similitude des triangles MOB, NPΔ, d'où : $\widehat{MBO} = \widehat{N\Delta P}$, d'où : $\widehat{B\Sigma Z} = \widehat{\Delta TK}$, d'où, comme le texte : $\widehat{M\Sigma Z} = \widehat{NTK}$.

à la droite NT] (1), comme la droite HΞ est à la droite ΞZ, c'est-à-dire comme la droite MB est à la droite MΣ, c'est-à-dire comme la droite ZM est à la droite MΣ. Et les angles compris sous les droites MΣ, ΣZ et sous les droites NT, TK sont égaux ; tandis que les angles compris sous les droites MZ, ZΣ et sous les droites NK, KT sont aigus ; donc, l'angle compris sous les droites ΣM, MZ est égal à l'angle compris sous les droites TN, NK. En conséquence, l'arc BZ est semblable à l'arc ΔK (2).

III.

PROPOSITION 215. — Soient deux triangles ABΓ, ΔEZ ayant les angles Γ, Z droits ; menons les droites AH, ΔΘ sous les angles égaux compris sous les droites BA, AH et sous les droites EΔ, ΔΘ, et que le rectangle compris sous les droites EZ, ZΘ soit au carré de la droite ZΔ comme le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓH est au carré de la droite AΓ ; je dis que le triangle ABΓ est semblable [au triangle ΔEZ] (3).

En effet, décrivons autour des triangles ABH, ΔEΘ les segments de cercles BHA, EΘΔ. [Ils sont semblables] (4). Les droites AΓ, ΔZ sont donc tangentes ou non aux segments. Qu'elles soient d'abord tangentes. Dès lors, le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓH équivaut au carré de la droite AΓ, c'est-



1. Restauration de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 419, l. 3).

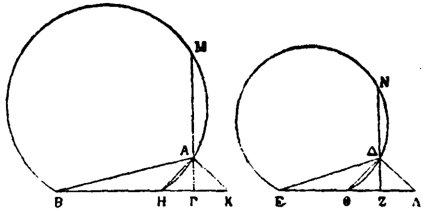
2. On a par hypothèse : $\frac{\Theta\Lambda}{\Lambda K}=\frac{EH}{HZ}$, d'où : $\frac{\Theta\Lambda+\Lambda K}{\Lambda K}=\frac{EH+HZ}{HZ}$ ou : $\frac{2(\Pi K+\Lambda K)}{\Lambda K}=\frac{2(\Xi Z+HZ)}{HZ}$ ou : $\frac{\Pi\Lambda}{\Lambda K}=\frac{\Xi H}{HZ}$, d'où : $\frac{\Pi\Lambda}{\Pi\Lambda-\Lambda K}=\frac{\Xi H}{\Xi H-HZ}$ ou, comme le texte : $\frac{\Pi\Lambda}{\Pi K}=\frac{\Xi H}{\Xi Z}$. Or, $\frac{\Delta N}{NT}=\frac{KN}{NT}=\frac{\Pi\Lambda}{\Pi K}$ et $\frac{MB}{M\Sigma}=\frac{ZM}{M\Sigma}=\frac{\Xi H}{Z\Xi}$; donc, comme le texte : $\frac{KN}{NT}=\frac{ZM}{M\Sigma}$, d'où, en présence de la dernière égalité d'angle de la note 2, page 765, et considérant que l'on a : $M Z\Sigma < 1$ angle droit $>$ NKT, on a (EUCLIDE, liv. VI, prop. 7, énoncée p. 160, n. 5) : triangle MΣZ semblable à triangle NTK, d'où, comme le texte : $\widehat{\Sigma MZ}=\widehat{TNK}$, d'où similitude des arcs BZ, ΔK.

3. Restauration de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 420, l. 12).

4. La phrase mise entre crochets est une interpolation (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. II, p. 974, l. 5).

à-dire que, si nous menons la droite AK à angles droits sur la droite AH, il équivaut au rectangle compris sous les droites HΓ, ΓK, et le rectangle compris sous les droites EZ, ZΘ équivaut au carré de la droite ΔZ, c'est-à-dire que, si nous menons la perpendiculaire ΔΛ à la droite ΔΘ, il équivaut au rectangle compris sous les droites ΘZ, ZΛ ; de sorte que la droite BΓ est égale à la droite ΓK et la droite EZ égale à la droite ZΛ. Et les droites AΓ, ΔZ sont perpendiculaires ; donc, l'angle compris sous les droites BA, AK est double de l'angle compris sous les droites BA, AΓ, et l'angle compris sous les droites EΔ, ΔΛ est double de l'angle compris sous les droites EΔ, ΔZ. Et les angles compris sous les droites BA, AK et sous les droites EΔ, ΔΛ sont égaux (car l'angle compris sous les droites BA, AH est égal à l'angle compris sous les droites EΔ, ΔΘ et l'angle droit compris sous les droites HA, AK égal à l'angle droit compris sous les droites ΘΔ, ΔΛ) ; par conséquent, les angles compris sous les droites BA, AΓ et sous les droites EΔ, ΔZ sont égaux. Mais, les angles Γ, Z sont droits aussi ; donc, le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔEZ ; ce qu'il fallait démontrer [1].

Mais, que les droites AΓ, ΔZ ne soient pas tangentes et coupent aux points M, N. Dès lors, le rectangle compris sous les droites ΔZ, ZN est au carré de la droite ΔZ, c'est-à-dire la droite NZ est à la droite ΔZ, [comme le rectangle compris sous les droites AΓ, ΓM est au carré de la droite AΓ, c'est-à-dire] [2] comme la droite MΓ est à la droite ΓA. Et les segments plus grands BAH, EΔΘ



1. Si les perpendiculaires AΓ, ΔZ sont tangentes aux arcs de cercles, on a (Euclide, liv. III, prop. 36, énoncée p. 142, n. 4) : $B\Gamma \times \Gamma H = \overline{A\Gamma}^2 = \Gamma H \times \Gamma K$ et $EZ \times Z\Theta = \overline{\Delta Z}^2 = Z\Theta \times Z\Lambda$, d'où, comme le texte : $B\Gamma = \Gamma K$ et $EZ = Z\Lambda$, d'où égalité des triangles rectangles AΓB, AΓK et des triangles rectangles ΔZE, ΔZΛ, d'où : $\widehat{BAK} = 2\widehat{BA\Gamma}$ et $\widehat{E\Delta\Lambda} = 2\widehat{E\Delta Z}$. Or, par hypothèse : $\widehat{BAH} = \widehat{E\Delta\Theta}$ et, par construction : $\widehat{HAK} = \widehat{\Theta\Delta\Lambda} = 1$ angle droit ; donc : $\widehat{BAH} + \widehat{HAK} = \widehat{E\Delta\Theta} + \widehat{\Theta\Delta\Lambda}$, ou : $\widehat{BAK} = \widehat{E\Delta\Lambda}$; donc : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, d'où, en présence des angles droits Γ, Z, similitude des triangles ABΓ, ΔEZ.

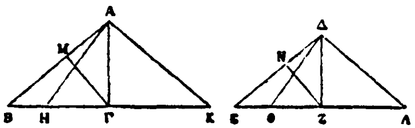
2. Restauration de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 420, l. 46).

sont semblables [1] ; donc, l'arc AH est semblable à l'arc ΔΘ ; de sorte que l'angle B est égal à l'angle E. En conséquence, le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΔΕΖ [2].

MÊME LEMME D'UNE MANIÈRE DIFFÉRENTE.

Soient les deux triangles ayant les angles Γ, Ζ droits ; menons les droites AH, ΔΘ sous les angles égaux compris sous les droites ΒΑ, AH et sous les droites ΕΔ, ΔΘ, et que le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ soit au carré de la droite ΔΖ comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ est au carré de la droite ΑΓ ; je dis que le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΔΕΖ.

Menons les droites AK, ΔΛ perpendiculaires aux droites AH, ΔΘ ; il s'ensuit que le carré de la droite ΑΓ équivaut au rectangle compris sous les droites ΗΓ, ΓΚ, et que le carré de la droite ΔΖ équivaut au rectangle compris sous les droites ΘΖ, ΖΛ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ est au rectangle compris sous les droites ΘΖ, ΖΛ, c'est-à-dire la droite ΕΖ est à la droite ΖΛ, comme le rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ est au rectangle compris sous les droites ΗΓ, ΓΚ, c'est-à-dire comme la droite ΒΓ est à la droite ΓΚ. Menons les droites ΓΜ, ΖΝ parallèlement aux droites AK, ΔΛ; il s'ensuit que la droite ΕΝ est à la droite ΝΔ comme la droite ΒΜ est à la droite ΜΑ. Et les angles situés aux points Γ, Ζ sont droits ;



1. C'est-à-dire les segments ΒΜΑΗ, ΕΝΔΘ, plus grands que le demi-cercle, sont semblables.

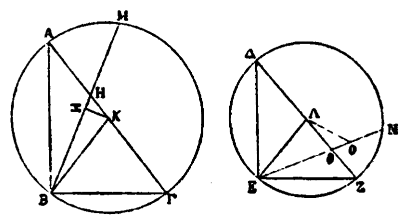
2. On a par hypothèse : $\frac{EZ \times Z\Theta}{\Delta Z^2} = \frac{B\Gamma \times \Gamma H}{A\Gamma^2}$. Or, $\Delta Z \times ZN = EZ \times Z\Theta$ et $A\Gamma \times \Gamma M = B\Gamma \times \Gamma H$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta Z \times ZN}{\Delta Z^2} = \frac{A\Gamma \times \Gamma M}{A\Gamma^2}$ ou : $\frac{ZN}{\Delta Z} = \frac{\Gamma M}{A\Gamma}$, relation qui, en présence des segments ΒΜΑΗ, ΕΝΔΘ plus grands que le demi-cercle, ramène au lemme II, ou proposition 214, qui a démontré que, dans ces conditions, l'arc AH est semblable à l'arc ΔΘ, d'où : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$, d'où similitude des triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ.

tandis que les angles situés aux points M, N sont égaux aux angles compris sous les droites BA, AK et sous les droites EΔ, ΔΛ ; donc, en raison de ce qui a été écrit précédemment, le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔEZ (1).

IV.

PROPOSITION 216. — Soient deux triangles ayant les angles aux points B, E droits ; menons transversalement les droites BH, EΘ sous les angles égaux compris sous les droites AH, HB et sous les droites ΔΘ, ΘE, et que le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘZ soit au carré de la droite ΘE comme le rectangle compris sous les droites AH, HΓ est au carré de la droite HB. Il faut démontrer que le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔEZ.

Circonscrivons des cercles, et prenons leurs centres K, Λ. Il est évident que ces centres sont situés des mêmes côtés des points H, Θ. En effet, que le point K soit, si possible, situé entre les points Γ, H, tandis que le point Λ est situé entre les points Δ, Θ ; prolongeons les droites BH, EΘ jusqu'aux points M, N, et menons du point K la droite KΞ perpendiculaire sur la droite MB. Qu'elle tombe donc



1. On a (EUCLIDE, liv. VI, prop. 8, énoncée p. 54, n. 2) : $\overline{A\Gamma}^2 = \Gamma H \times \Gamma K$ et $\overline{\Delta Z}^2 = Z\Theta \times Z\Lambda$. Or, on a par hypothèse : $\frac{EZ \times Z\Theta}{\overline{\Delta Z}^2} = \frac{B\Gamma \times \Gamma H}{\overline{A\Gamma}^2}$; donc : $\frac{EZ \times Z\Theta}{Z\Theta \times Z\Lambda} = \frac{B\Gamma \times \Gamma H}{\Gamma H \times \Gamma K}$ ou, comme le texte : $\frac{EZ}{Z\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Gamma K}$. D'autre part, on a : $\frac{EN}{N\Lambda} = \frac{EZ}{Z\Lambda}$ et $\frac{BM}{M\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Gamma K}$; donc : $\frac{EN}{N\Lambda} = \frac{BM}{M\Lambda}$. Or, $\widehat{BAH} = \widehat{E\Delta\Theta}$ et $\widehat{HAK} = \widehat{\Theta\Delta\Lambda}$ d'où : $\widehat{BAH} + \widehat{HAK} = \widehat{E\Delta\Theta} + \widehat{\Theta\Delta\Lambda}$ ou : $\widehat{BAK} = \widehat{E\Delta\Lambda}$; donc : $\widehat{BM\Gamma} = \widehat{ENZ}$. A partir de ce point, la démonstration incomplète semble devoir se poursuivre comme suit : Les relations précédentes donnent : $\frac{EN}{N\Lambda} = \frac{EZ}{Z\Lambda} = \frac{BM}{M\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Gamma K}$, d'où : $\frac{EN}{EZ} = \frac{N\Lambda}{Z\Lambda} = \frac{BM}{B\Gamma} = \frac{M\Lambda}{\Gamma K}$, d'où : $\frac{EN}{EZ} = \frac{BM}{B\Gamma}$, d'où, en présence de la dernière égalité d'angles, on a (EUCLIDE, liv. VI, prop. 7, énoncée p. 160, n. 5) : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$. Or, les angles en Γ et Z étant droits, les triangles ABΓ, ΔEZ *sont semblables*.

entre les points H, B (1), et l'angle compris sous les droites AH, HB en devient obtus (2). Et cet angle est égal à l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ (3) ; donc, l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ est aussi obtus ; donc, l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΝ est aigu ; de sorte que la perpendiculaire menée du point Λ sur la droite EN tombe entre les points Θ, N. Qu'elle tombe ainsi et que ce soit la droite ΛΟ. En conséquence, la droite NO est égale à la droite OE ; de sorte que la droite NO est plus grande que la droite ΘΕ ; donc, à fortiori, la droite ΝΘ est plus grande que la droite ΘΕ, et le rectangle compris sous les droites ΝΘ, ΘΕ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ, est plus grand que le carré de la droite ΕΘ. Et le rectangle compris sous les droites AH, HΓ est au carré de la droite HB comme le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ est au carré de la droite ΘΕ ; ce qui serait absurde ; car le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ est plus petit que le carré de la droite ΘΕ, parce que la droite MH est plus petite que la droite HB et que le rectangle compris sous les droites MH, HB est plus petit que le carré de la droite HB (4). En conséquence, si le centre K est situé entre les points H, Γ, le centre Λ ne sera pas situé entre les points Δ, Θ.

Qu'il soit donc situé entre les points Θ, Z, et menons, comme tantôt, la perpendiculaire ΛΟ. Dès lors, puisque le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΝΘ, ΘΕ, est au carré de la droite ΘΕ, c'est-à-dire

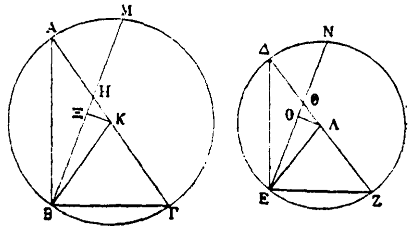
1. La leçon des manuscrits πεσεῖται ἄρα (elle tombera donc) paraît vicieuse à Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 979, en note) ; car le point Ξ peut tomber entre les points H, M ou sur le point H. Halley avait déjà proposé la correction πιπτέτω (qu'elle tombe) ; ce qui correspond à la démonstration paraissant viser intentionnellement l'un des cas qui peuvent se présenter pour le point Ξ.

2. Dans le triangle ΚΞΗ, l'angle $\widehat{\Xi H K}$ étant aigu, l'angle $\widehat{AHB}$ est donc obtus.

3. Par hypothèse.

4. Si $NO > \Theta E$, on a : $N\Theta > \Theta E$, d'où : $N\Theta \times \Theta E > \overline{\Theta E}^2$. Or (Euclide, liv. VI, prop. 35, énoncée p. 149, n. 5) : $\Delta\Theta \times \Theta Z = N\Theta \times \Theta E$; donc : $\Delta\Theta \times \Theta Z > \overline{\Theta E}^2$; relation impossible, car, ayant par hypothèse : $\frac{AH \times H\Gamma}{\overline{HB}^2} = \frac{\Delta\Theta \times \Theta Z}{\overline{\Theta E}^2}$, on devrait donc avoir aussi $AH \times H\Gamma > \overline{HB}^2$. Or, il n'en est pas ainsi, car $MH < HB$, d'où : $MH \times HB < \overline{HB}^2$ ou : $AH \times H\Gamma < \overline{HB}^2$; donc : $\Delta\Theta \times \Theta Z < \overline{\Theta E}^2$.

la droite NΘ à la droite ΘE, comme le rectangle compris sous les droites AH, HΓ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites MH, HB, est au carré de la droite HB, c'est-à-dire comme la droite MH est à la droite HB, et que les droites BM, NE sont coupées en deux parties égales aux points Ξ, O, il s'ensuit que



la droite EO est à la droite OΘ comme la droite BΞ est à la droite ΞH (1). Mais, la droite ΘO est aussi à la droite OΛ comme la droite HΞ est à la droite ΞK (car les angles Ξ, O sont droits, et les angles aux points H, Θ sont égaux) ; donc, par raison d'égalité, la droite EO est à la droite OΛ comme la droite BΞ est à la droite ΞK. Et ces droites sont situées autour d'angles égaux ; donc, l'angle compris sous les droites BK, KΞ est égal à l'angle compris sous les droites EΛ, ΛO (2). Or, l'angle compris sous les droites ΞK, KH est aussi égal à l'angle compris sous les droites OΛ, ΛΘ ; donc, l'angle compris sous les droites BK, KH est égal à l'angle entier compris sous les droites EΛ, ΛΘ. Et leurs moitiés sont égales ; donc, l'angle compris sous les droites AΓ, ΓB est égal à l'angle compris sous les droites ΔZ, ZE. Et les angles B, E sont droits ; par conséquent, le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔEZ (3).

---

1. On a par hypothèse : $\frac{\Delta\Theta \times \Theta Z}{\Theta E^2} = \frac{AH \times H\Gamma}{HB^2}$. Or, $\Delta\Theta \times \Theta Z = N\Theta \times \Theta E$ et $AH \times H\Gamma = MH \times HB$; donc : $\frac{N\Theta \times \Theta E}{\Theta E^2} = \frac{MH \times HB}{HB^2}$ ou, comme le texte : $\frac{N\Theta}{\Theta E} = \frac{MH}{HB}$, d'où : $\frac{N\Theta + \Theta E}{\Theta E} = \frac{MH + HB}{HB}$ ou : $\frac{NE}{\Theta E} = \frac{MB}{HB}$, d'où : $\frac{\frac{1}{2}NE}{\Theta E} = \frac{\frac{1}{2}MB}{HB}$ ou : $\frac{EO}{\Theta E} = \frac{B\Xi}{HB}$, d'où : $\frac{\Theta E}{EO} = \frac{HB}{B\Xi}$, d'où : $\frac{\Theta E - EO}{EO} = \frac{HB - B\Xi}{B\Xi}$ ou : $\frac{O\Theta}{EO} = \frac{\Xi H}{B\Xi}$, d'où, comme le texte : $\frac{EO}{O\Theta} = \frac{B\Xi}{\Xi H}$.

2. On a par hypothèse : $\widehat{AHB} = \widehat{\Delta\Theta E}$, d'où similitude des triangles rectangles HΞK, ΘOΛ, d'où : $\frac{\Theta O}{O\Lambda} = \frac{H\Xi}{\Xi K}$, d'où, par raison d'égalité avec la dernière relation de la note précédente, on a : $\frac{EO}{O\Lambda} = \frac{B\Xi}{\Xi K}$, d'où, en présence des angles droits en Ξ et en O, les triangles BΞK, EOΛ sont semblables, d'où, comme le texte : $\widehat{BK\Xi} = \widehat{E\Lambda O}$.

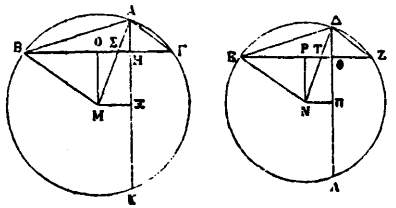
3. Les triangles HΞK, ΘOΛ sont semblables (voir note précédente) ; donc,

Au reste, la réciproque de ce lemme est manifeste aussi : Si le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΔΕΖ et le triangle ΗΒΓ semblable au triangle ΘΕΖ, je dis que le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΖ est au carré de la droite ΘΕ comme le rectangle compris sous les droites ΑΗ, ΗΓ est au carré de la droite ΗΒ [1].

V.

Proposition 217. — Soient deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ ayant les angles Α, Δ, égaux, mais non droits ; menons les perpendiculaires ΑΗ, ΔΘ ; que le rectangle compris sous les droites ΕΘ, ΘΖ soit au carré de la droite ΔΘ comme le rectangle compris sous les droites ΒΗ, ΗΓ est au carré de la droite ΑΗ, et soient ΒΗ, ΕΘ les grands segments des droites ΒΓ, ΕΖ ; je dis que le triangle ΑΒΗ est semblable au triangle ΔΕΘ et le triangle restant semblable au triangle restant.

Circonscrivons des cercles ; prolongeons les droites ΑΗ, ΔΘ jusqu'aux points Κ, Λ ; prenons les centres Μ, Ν des cercles, et menons, de ces centres, les perpendiculaires ΜΞ, ΜΟ, ΝΠ, ΝΡ sur les droites ΑΚ, ΒΓ, ΔΛ, ΕΖ. La droite ΛΘ est donc à la droite ΘΔ comme la droite ΚΗ est à la droite ΗΑ, conformément à ce qui a été démontré précédemment ; de sorte que la droite ΔΠ est aussi à la droite ΠΘ comme la droite ΑΞ est à la droite ΞΗ [2]. Menons les droites de jonction ΑΜ, ΔΝ. Or, la



$\widehat{\Xi K H} = \widehat{O\Lambda\Theta}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente : $\widehat{BK\Xi} + \widehat{\Xi KH} = \widehat{E\Lambda O} + \widehat{O\Lambda\Theta}$ ou, comme le texte : $\widehat{BKH} = \widehat{E\Lambda\Theta}$, d'où (Euclide, liv. III, prop. 20, énoncée p. 147, n. 8) : $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta Z E}$, d'où similitude de triangles rectangles ΑΒΓ, ΔΕΖ.

1. Le texte présente ici l'interpolation : διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, c'est-à-dire : à cause de la similitude des triangles (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, p. 980, l. 19).

2. Comme au début de la seconde partie de la démonstration du lemme IV ou proposition 216, on a par hypothèse : $\frac{E\Theta \times \Theta Z}{\Delta\Theta^2} = \frac{BH \times H\Gamma}{AH^2}$. Or, $\Lambda\Theta \times \Delta\Theta = E\Theta \times \Theta Z$ et $KH \times AH = BH \times H\Gamma$; donc : $\frac{\Lambda\Theta \times \Delta\Theta}{\Delta\Theta^2} = \frac{KH \times AH}{AH^2}$ ou,

droite AM est à la droite MΣ comme la droite AΞ est à la droite ΞH et la droite ΔN à la droite NT comme la droite ΔΠ à la droite ΠΘ ; par conséquent, la droite ΔN est à la droite NT comme la droite AM est à la droite MΣ (1). Menons les droites de jonction BM, EN. Dès lors, puisque le segment BAΓ est semblable au segment EΔZ, il s'ensuit que le segment restant BKΓ est aussi sembable au segment restant EΛZ. En conséquence, les angles dans ces segments sont égaux, et les moitiés de ces angles sont égales aussi ; donc, les angles compris sous les droites BM, MO et sous les droites EN, NP sont égaux (2) [dans le premier des deux cas, tandis que, dans le second, il est évident que, d'après la figure adjacente, l'angle compris sous les droites BM, MO est égal à l'angle compris sous les droites EN, NP ; car ces angles sont situés dans les segments BAΓ, EΔZ] (3). En conséquence, la droite EN est à la droite NP, c'est-à-dire la droite ΔN à la droite NP, comme la droite BM est à la droite MO, c'est-à-dire comme la droite AM est à la droite MO. Or, la droite ΔN est aussi à la droite NT comme la droite AM est à la droite MΣ ; donc, par raison d'égalité, la droite PN est à la droite NT comme la droite MO est à la droite MΣ. Et les angles O, P sont droits,

---

comme le texte : $\frac{\Lambda\Theta}{\Delta\Theta}=\frac{KH}{HA}$, d'où : $\frac{\Lambda\Theta}{\Lambda\Theta - \Delta\Theta}=\frac{KH}{KH - HA}$ ou : $\frac{\Lambda\Theta}{2(\Delta\Pi - \Delta\Theta)}=\frac{KH}{2(A\Xi - HA)}$ ou : $\frac{\Lambda\Theta}{\Pi\Theta}=\frac{KH}{\Xi H}$, d'où : $\frac{\Lambda\Theta - \Pi\Theta}{\Pi\Theta}=\frac{KH - \Xi H}{\Xi H}$ ou : $\frac{\Pi\Lambda}{\Pi\Theta}=\frac{\Xi K}{\Xi H}$ ou, comme le texte : $\frac{\Delta\Pi}{\Pi\Theta}=\frac{A\Xi}{\Xi H}$.

1. Le parallélisme des droites ΣH, MΞ donne : $\frac{AM}{M\Sigma}=\frac{A\Xi}{\Xi H}$, et le parallélisme des droites TΘ, NΠ donne : $\frac{\Delta N}{NT}=\frac{\Delta\Pi}{\Pi\Theta}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente, on a : $\frac{\Delta N}{NT}=\frac{AM}{M\Sigma}$.

2. On a par hypothèse : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, d'où similitude des segments de cercles BAΓ, EΔZ, d'où similitude des segments complémentaires BKΓ, EΛZ ; donc, les angles aux centres BMΓ, ENZ sont égaux, d'où, considérant leurs moitiés : $\widehat{BMO} = \widehat{ENP}$.

3. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 982, ll. 14-18) comme une interpolation de scoliaste faisant allusion à la figure relative au cas des angles aigus égaux BAΓ, EΔZ. On a, en effet, dans ce cas : $\widehat{BA\Gamma} = \frac{1}{2}\widehat{BM\Gamma}$ et $\widehat{E\Delta Z} = \frac{1}{2}\widehat{ENZ}$. Or, $\widehat{BMO} = \frac{1}{2}\widehat{BM\Gamma}$ et $\widehat{ENP} = \frac{1}{2}\widehat{ENZ}$; donc : $\widehat{BMO} = \widehat{ENP}$. *(Voir la figure de la page 775).*

tandis que chacun des angles Σ, T est aigu ; donc, l'angle compris sous les droites OM, MΣ est égal à l'angle compris sous les droites PN, NT. Mais, l'angle compris sous les droites BM, MO est aussi égal à l'angle compris sous les droites EN, NP ; donc, l'angle compris sous les droites BM, MΣ est aussi égal à l'angle compris sous les droites EN, NT ; de sorte que l'angle Γ est aussi égal à l'angle Z (1). En conséquence, les triangles sont semblables tous à tous (2).

La démonstration de l'un des cas [relatifs aux angles obtus ou aigus] (3) étant donnée ci-dessus, on peut aussi exposer l'autre cas de la manière suivante : Supposons, en effet, que les angles égaux étant d'abord obtus, la proposition ait été démontrée de la manière qui précède, et qu'il faille démontrer que les triangles sont semblables si les angles égaux compris sous les droites BA, AΓ et sous les droites EΔ, ΔZ sont aigus.

Circonscrivons de nouveau des cercles et, les droites AH, ΔΘ étant prolongées jusqu'aux points K, Λ, menons les droites de jonction BK, KΓ, EΛ, ΛZ. Les angles obtus compris sous les droites BK, KΓ et sous les droites EΛ, ΛZ sont donc égaux (4).

---

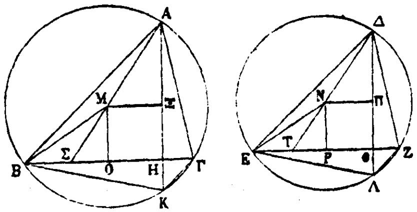
1. Il résulte de la dernière égalité de la note 2, page 773, que les triangles rectangles BMO, ENP sont semblables ; donc : $\frac{EN}{NP} = \frac{BM}{MO}$. Or, $\Delta N = EN$ et $AM = BM$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta N}{NP} = \frac{AM}{MO}$, d'où, par raison d'identité avec la dernière relation de la note 1, page 773, on a : $\frac{NP}{NT} = \frac{MO}{M\Sigma}$; relation qui, en présence des angles droits O, P et des angles aigus MΣO, NTP, entraîne (Euclide, liv. VI, prop. 7, énoncée p. 160, n. 5) la similitude des triangles MOΣ, NPT, d'où, comme le texte : $\widehat{OM\Sigma} = \widehat{PNT}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note 2, page 773 : $\widehat{BMO} + \widehat{OM\Sigma} = ENP + PNT$, ou comme le texte : $\widehat{BM\Sigma} = \widehat{ENT}$. Or, ces angles au centre sont mesurés respectivement par les arcs BA, EΔ ; donc, considérant les angles à la circonférence mesurés par ces mêmes arcs, on a : $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{EZ\Delta}$.

2. On a par hypothèse : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente, on a : triangle ABΓ semblable au triangle ΔEZ ; puis : triangle ABH semblable au triangle ΔEΘ et, enfin, triangle AHΓ semblable au triangle ΔΘZ.

3. Hultsch considère comme interpolation les mots que nous mettons entre crochets (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 984, l.1).

4. Les segments de cercles BAΓ, EΔZ étant semblables par hypothèse, les segments complémentaires BKΓ, EΛZ sont aussi semblables ; donc : $\widehat{BK\Gamma} = \widehat{E\Lambda Z}$.

Et puisque le rectangle compris sous les droites EΘ, ΘZ, c'est-à-dire compris sous les droites ΔΘ, ΘΛ, est au carré de la droite ΔΘ, c'est-à-dire la droite ΛΘ à la droite ΘΔ, comme le rectangle compris sous les droites BH, HΓ, c'est-à-dire compris sous les droites AH, HK, est au carré de la droite AH, c'est-à-dire comme la droite KH est à la droite HA, il s'ensuit que le carré de la droite ΔΘ est aussi au carré de la droite ΘΛ comme le carré de la droite AH est au carré de la droite HK.



Or, le rectangle compris sous les droites EΘ, ΘZ est aussi au carré de la droite ΔΘ comme le rectangle compris sous les droites BH, HΓ est au carré de la droite AH ; donc, par raison d'égalité, le rectangle compris sous les droites EΘ, ΘZ est au carré de la droite ΘΛ comme le rectangle compris sous les droites BH, HΓ est au carré de la droite HK. Et les angles obtus compris sous les droites BK, KΓ et sous les droites EΛ, ΛZ sont égaux ; tandis que les droites KH, ΛΘ sont perpendiculaires ; par conséquent, en raison de ce qui a été démontré précédemment, le triangle BKH est semblable au triangle EΛΘ et le triangle ΓKH semblable au triangle ZΛΘ ; de sorte que le triangle ABH est aussi semblable au triangle ΔEΘ et le triangle AHΓ semblable au triangle ΔΘZ. En conséquence, le triangle entier ABΓ est semblable au triangle entier ΔEZ [1].

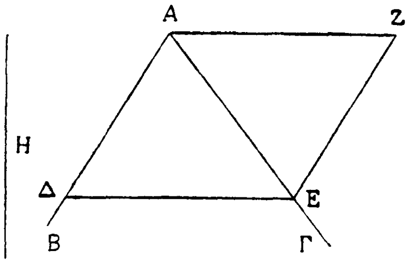
---

1. Explicitement, on a par hypothèse : $\frac{E\Theta \times \Theta Z}{\Delta\Theta^2} = \frac{BH \times H\Gamma}{AH^2}$ (I). Or : $\Delta\Theta \times \Theta\Lambda = E\Theta \times \Theta Z$ et $AH \times HK = BH \times H\Gamma$; donc : $\frac{\Delta\Theta \times \Theta\Lambda}{\Delta\Theta^2} = \frac{AH \times HK}{AH^2}$ ou: $\frac{\Theta\Lambda}{\Delta\Theta} = \frac{HK}{AH}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta\Theta}^2}{\Theta\Lambda^2} = \frac{\overline{AH}^2}{HK^2}$, d'où, par raison d'égalité avec la relation (I), on a : $\frac{E\Theta \times \Theta Z}{\Theta\Lambda^2} = \frac{BH \times H\Gamma}{HK^2}$; relation qui, en présence de l'égalité des angles obtus BKΓ, EΛZ, et des angles droits en H et en Θ, fait retomber sur le premier cas des angles obtus égaux, pour lequel il a été démontré plus haut que l'on a : triangle BKH semblable au triangle EΛΘ et triangle ΓKH semblable au triangle ZΛΘ. Or, le triangle ΓKH est semblable au triangle ABH, et le triangle ZΛΘ est semblable au triangle ΔEΘ ; donc, le triangle ABH est semblable au triangle ΔEΘ. D'autre part, l'égalité des

VI.

PROPOSITION 218. — Les droites AB, AΓ étant données de position, mener la droite de juxtaposition ΔE [1], et faire en sorte que la droite ΔE soit donnée [2].

Que cela soit obtenu, et menons par le point A la droite AZ parallèle à la droite ΔE. Cette droite est donc de juxtaposition. Et le point A est donné ; donc, la droite AZ est donnée de position [3]. Menons par le point E la droite EZ parallèle à la droite AB ; il s'ensuit que la droite AZ est égale à la droite ΔE. Et la droite ΔE est donnée; donc, la droite AZ est donnée aussi. Mais, elle est donnée aussi de position, et le point A est donné ; donc, le point Z est donné aussi [4]. Or, la droite ZE a été menée par le point donné Z de juxtaposition à la droite AB; donc, la droite ZE est donnée de position. Mais, la droite AΓ est donnée aussi de position ; donc, le point E est donné [5]. Et la droite ΔE a été menée de juxtaposition par ce point ; donc, la droite ΔE est donnée de position.



La synthèse du problème se fera de la manière suivante : Soient AB, BΓ les deux droites données de position ; soit H la droite donnée de grandeur ; soit AZ la droite à laquelle on mène de juxtaposition et posons la droite AZ égale à la droite H. Menons par le point Z la droite ZE parallèle à la droite AB, et par le

angles Λ, Z dans le segment EΔ donne : triangle EΛΘ semblable au triangle ΔΘZ ; donc : le triangle AΓH est semblable au triangle ΔΘZ. Enfin, considérant les sommes de triangles semblables on a : triangle ABΓ semblable au triangle ΔEZ.

1. παρὰ θέσει, de juxtaposition, c'est-à-dire parallèle à une droite donnée de position (EUCLIDE, *Données*, déf. 15, énoncée p. 198, n. 3).

2. Sous-entendu : τῷ μεγέθει, de grandeur.

3. EUCLIDE, *Données*, prop. 28, énoncée p. 231, n. 4.

4. EUCLIDE, *ibidem*, prop. 27, énoncée p. 24, n. 2.

5. EUCLIDE, *ibidem*, prop. 25, énoncée p. 214, n. 6.

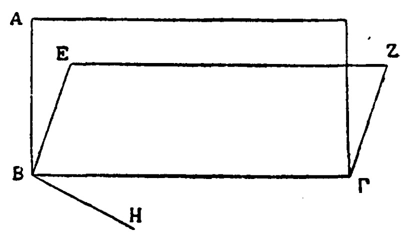
point E la droite EΔ parallèle à la droite AZ ; je dis que la droite ΔE satisfait au problème.

En effet, puisque la droite ΔE est égale à la droite AZ ; mais, que la droite AZ est égale à la droite H, c'est-à-dire à la droite donnée, il s'ensuit que la droite ΔE est égale à la droite donnée H. En conséquence, la droite ΔE satisfait au problème. Et il est évident qu'elle est la seule ; car, la droite plus rapprochée du point A est continuellement plus petite que celle qui en est plus éloignée.

VII.

Proposition 219. — Soient deux plans ABΓ, EBZ établis sur la même droite BΓ, perpendiculaires sur le même plan sous-jacent ; je dis que les droites AB, BE, BΓ sont dans un même plan.

En effet, menons du point B la droite HB perpendiculaire à la droite BΓ dans le plan sous-jacent ; il s'ensuit que la droite HB sera aussi perpendiculaire au plan EBZ ; de sorte qu'elle est aussi perpendiculaire à la droite BE. Pour les mêmes raisons, elle est aussi perpendiculaire à la droite AB. Or, la droite BH est aussi perpendiculaire à la droite BΓ ; donc, la droite BH est établie perpendiculaire aux trois droites AB, BE, BΓ au point de contact B. En conséquence, les droites AB, BE, BΓ sont dans un seul plan, en vertu du livre XI des *Éléments* (1).



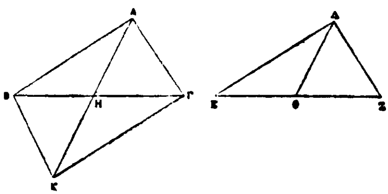
VIII.

Proposition 220. — Soient deux triangles ABΓ, ΔEZ ayant les angles A, Δ droits ; menons les droites AH, ΔΘ sous les angles

1. Euclide, liv. XI, prop. 5 : « Si trois droites se rencontrent, et si une droite leur est perpendiculaire à leur commune section, ces trois droites sont dans un seul plan ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 13.

égaux compris sous les droites AH, HB et sous les droites ΔΘ, ΘΕ, et que la droite ΕΘ soit à la droite ΘΖ comme la droite BH est à la droite HΓ; je dis que le triangle ABH est semblable au triangle ΔΕΘ et le triangle ΑΗΓ semblable au triangle ΔΘΖ.

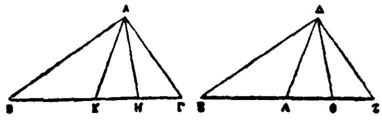
Prolongeons la droite AH; faisons en sorte que la droite ΓΗ soit à la droite HK comme la droite ΔΘ est à la droite ΘΕ, et menons les droites de jonction BK, ΚΓ; il s'ensuit que l'angle compris sous les droites ΔΕ, ΕΘ est égal à l'angle compris sous les droites ΓΚ, ΚΗ. Or, puisque la droite ΕΘ est à la droite ΘΖ comme la droite BH est à la droite ΗΓ, et que la droite ΔΘ est à la droite ΘΕ comme la droite ΓΗ est à la droite HK, il s'ensuit que, par raison d'égalité en proportion troublée, la droite ΔΘ est à la droite ΘΖ comme la droite BH est à la droite HK. Et ces droites sont situées autour d'angles égaux; donc, l'angle compris sous les droites BK, KH est égal à l'angle Z. Or, on a démontré que l'angle compris sous les droites ΓΚ, KH est aussi égal à l'angle E, et la somme des angles E, Z constitue un angle droit; donc, l'angle compris sous les droites BK, ΚΓ est droit. Mais, par hypothèse, l'angle compris sous les droites BA, ΑΓ est droit aussi; par conséquent, les points A, B, Γ, K sont dans un cercle; donc, l'angle compris sous les droites AK, ΚΓ, c'est-à-dire l'angle compris sous les droites ΔΕ, ΕΘ, est aussi égal à l'angle compris sous les droites AB, ΒΓ. Mais, par hypothèse, l'angle compris sous les droites AH, HB est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ; donc, le triangle ABH est semblable au triangle ΔΕΘ et, pour les mêmes raisons, le triangle ΑΗΓ est aussi semblable au triangle ΔΘΖ (1).



1. On a par construction : $\widehat{AHB} = \widehat{\Gamma HK} = \widehat{\Delta\Theta E}$ et $\frac{H\Gamma}{HK} = \frac{\Delta\Theta}{E\Theta}$ (I), d'où similitude des triangles ΔΘΕ, ΓΗΚ, d'où : $\widehat{\Delta E\Theta} = \widehat{\Gamma KH}$ (II). Or, on a par hypothèse : $\frac{E\Theta}{\Theta Z} = \frac{BH}{H\Gamma}$; donc, par égalité en proportion troublée avec la relation (I) (Euclide, liv. V, prop. 23, énoncée p. 228, n. 1), ou par produit, on a : $\frac{E\Theta}{\Theta Z} \times \frac{\Delta\Theta}{E\Theta} = \frac{BH}{H\Gamma} \times \frac{H\Gamma}{HK}$ ou, comme le texte : $\frac{\Delta\Theta}{\Theta Z} = \frac{BH}{HK}$; relation qui, en présence de l'égalité $\widehat{AH\Gamma} = \widehat{\Delta\Theta Z}$, entraîne la similitude des triangles BHK, ΔΘΖ,

MIEUX D'UNE MANIÈRE DIFFÉRENTE.

Que les droites ΒΓ, ΕΖ soient coupées en deux parties égales aux points Κ, Λ et menons les droites de jonction ΑΚ, ΔΛ. Dès lors, puisque la droite ΕΘ est à la droite ΘΖ comme la droite ΒΗ est à la droite ΗΓ, par composition, considération des moitiés des antécédents et conversion, la droite ΛΖ, c'est-à-dire la droite ΔΛ, est à la droite ΛΘ comme la droite ΓΚ, c'est-à-dire la droite ΑΚ, est à la droite ΚΗ. Et les angles situés aux points Η, Θ sont égaux, tandis que chacun des angles compris sous les droites ΚΑ, ΑΗ et sous les droites ΛΔ, ΔΘ est aigu ; par conséquent, l'angle compris sous les droites ΑΚ, ΚΗ est égal à l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΛΘ. Et leurs moitiés sont égales ; donc, l'angle Β est aussi égal à l'angle Ε. Mais, l'angle Η est aussi égal à l'angle Θ ; donc, le triangle ΑΒΗ est semblable au triangle ΔΕΘ. Pour les mêmes raisons, le triangle ΑΗΓ est aussi semblable au triangle ΔΘΖ (1).



---

d'où, comme le texte : $\widehat{BKH} = \widehat{\Delta Z\Theta}$, d'où, en présence de l'égalité (II), on a : $\widehat{BKH} + \widehat{\Gamma KH} = \widehat{\Delta Z\Theta} + \widehat{\Delta E\Theta}$. Or, on a par hypothèse : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z} = 1$ angle droit ; donc : $\widehat{\Delta Z\Theta} + \widehat{\Delta E\Theta} = 1$ angle droit, d'où : $\widehat{BKH} + \widehat{\Gamma KH} = \widehat{BK\Gamma} = 1$ angle droit. Les points A, B, K, Γ sont dès lors sur la circonférence du cercle de diamètre ΒΓ ; donc : $\widehat{AK\Gamma} = \widehat{AB\Gamma}$, d'où, en présence de l'égalité (II) on a : $\widehat{\Delta E\Theta} = \widehat{AB\Gamma}$. Or, par hypothèse : $\widehat{AHB} = \widehat{\Delta\Theta E}$; donc, les triangles ΑΒΗ, ΔΕΘ sont semblables, et l'on démontrerait de même la similitude des triangles ΑΗΓ, ΔΘΖ.

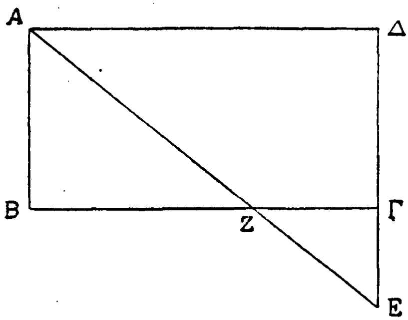
1. On a par hypothèse : $\frac{E\Theta}{\Theta Z} = \frac{BH}{H\Gamma}$, d'où : $\frac{E\Theta + \Theta Z}{\Theta Z} = \frac{BH + H\Gamma}{H\Gamma}$ ou : $\frac{EZ}{\Theta Z} = \frac{B\Gamma}{H\Gamma}$, d'où : $\frac{\frac{1}{2} EZ}{\Theta Z} = \frac{\frac{1}{2} B\Gamma}{H\Gamma}$ ou : $\frac{\Lambda Z}{\Theta Z} = \frac{K\Gamma}{H\Gamma}$, d'où : $\frac{\Lambda Z}{\Lambda Z - \Theta Z} = \frac{K\Gamma}{K\Gamma - H\Gamma}$ ou : $\frac{\Lambda Z}{\Lambda\Theta} = \frac{K\Gamma}{KH}$. Or, on a par hypothèse : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z} = 1$ angle droit, d'où, considérant les rayons des cercles de diamètres ΒΓ, ΕΖ, on a : $\Delta\Lambda = \Lambda Z$ et $AK = K\Gamma$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda\Theta} = \frac{AK}{KH}$; relation, qui, en présence des angles ΑΗΚ, ΔΘΛ égaux par hypothèse et des angles aigus ΚΑΗ, ΛΔΘ, entraîne (EUCLIDE, liv. VI, prop. 7, énoncée p. 160, n. 5) la similitude des triangles ΚΑΗ, ΛΔΘ ; d'où, comme le texte : $\widehat{AKH} = \widehat{\Delta\Lambda\Theta}$, d'où, considérant les angles au centre et à la circonférence des cercles de diamètres ΒΓ, ΕΖ, on a :

LEMMES RELATIFS AUX LIVRES VII ET VIII DES CONIQUES.

I.

PROPOSITION 221. — Soit le parallélogramme rectangle ΑΒΓΔ et menons transversalement la droite EZA ; je dis que le rectangle compris sous les droites EA, AZ équivaut au rectangle compris sous les droites ZB, ΒΓ augmenté du rectangle compris sous les droites ΕΔ, ΔΓ.

En effet, puisque le carré de la droite EZ équivaut aux carrés des droites ΕΓ, ΓΖ, et que les carrés des droites EA, AZ valent les carrés des droites ΕΔ, ΔΑ, c'est-à-dire les carrés des droites ΕΔ, ΓΒ augmentés des carrés des droites AB, BZ, c'est-à-dire des carrés des droites ΓΔ, BZ, il s'ensuit que deux fois le rectangle restant compris sous les droites EA, AZ équivaut à deux fois le rectangle compris sous les droites ΕΔ, ΔΓ augmenté de deux fois le rectangle compris sous les droites ZB, ΒΓ ; donc, le rectangle simple compris sous les droites EA, AZ équivaut au rectangle compris sous les droites ΕΔ, ΔΓ augmenté du rectangle compris sous les droites ZB, ΒΓ ; ce qu'il fallait démontrer (1).



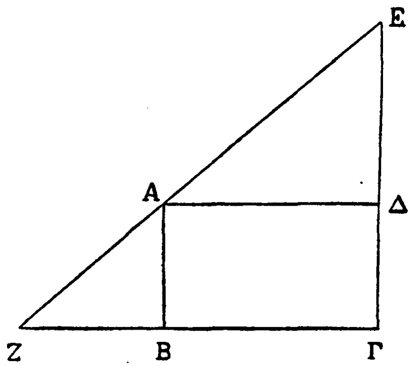
$\widehat{ABH} = \frac{1}{2}\widehat{AKH}$ et $\widehat{\Delta E\Theta} = \frac{1}{2}\Delta\Lambda\Theta$; donc : $\widehat{ABH} = \widehat{\Delta E\Theta}$. Or, par hypothèse : $\widehat{AHB} = \widehat{\Delta\Theta E}$, d'où similitude des triangles ABH, ΔΕΘ. On aurait de même : triangle ΑΗΓ semblable au triangle ΔΘΖ.

1. On a : $\overline{EZ}^2 = \overline{E\Gamma}^2 + \overline{\Gamma Z}^2$ (I) et $\overline{EA}^2 + \overline{AZ}^2 = \overline{E\Delta}^2 + \overline{\Delta A}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BZ}^2 = \overline{E\Delta}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{BZ}^2$ (II), d'où par différence des relations (I) et (II) on a : $\overline{EA}^2 + \overline{AZ}^2 - \overline{EZ}^2 = \overline{E\Delta}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{BZ}^2 - \overline{E\Gamma}^2 - \overline{\Gamma Z}^2 = (\overline{E\Delta}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 - \overline{E\Gamma}^2) + (\overline{B\Gamma}^2 + \overline{BZ}^2 - \overline{\Gamma Z}^2)$ (III). Or, on a, d'une part : $\overline{EA}^2 + \overline{AZ}^2 - \overline{EZ}^2 = (AZ + EZ)^2 + \overline{AZ}^2 - \overline{EZ}^2 = 2\overline{AZ}^2 + 2AZ \times EZ = 2(EZ + AZ)\,AZ = 2EA \times AZ$. Et l'on a d'autre part : $\overline{E\Delta}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 - \overline{E\Gamma}^2 = (\Delta\Gamma + \Gamma E)^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2 - E\Gamma^2 = 2\overline{\Delta\Gamma}^2 + 2\Delta\Gamma \times \Gamma E = 2(\Gamma E \times \Delta\Gamma)\,\Delta\Gamma = 2E\Delta \times \Delta\Gamma$, et enfin : $\overline{B\Gamma}^2 + \overline{BZ}^2 - \overline{\Gamma Z}^2 = (BZ + Z\Gamma)^2 + \overline{BZ}^2 - \overline{\Gamma Z}^2 = 2\overline{BZ}^2 + 2BZ \times \Gamma Z = 2(\Gamma Z + BZ)\,BZ = 2B\Gamma \times BZ$; donc, la relation (III) devient, comme le texte : $2EA \times AZ = 2E\Delta \times \Delta\Gamma + 2B\Gamma \times BZ$ ou : $EA \times AZ = E\Delta \times \Delta\Gamma + B\Gamma \times BZ$.

II.

Proposition 222. — Soit le parallélogramme rectangle ΑΒΓΔ et menons la droite ΕΑΖ ; je dis que le rectangle compris sous les droites ΕΔ, ΔΓ ,conjointement avec le rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΒΖ, équivaut au rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΑΖ.

En effet, puisque le carré de la droite ΕΖ équivaut aux carrés des droites ΕΓ, ΓΖ, et que les carrés des droites ΕΑ, ΑΖ valent les carrés des droites ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, ΒΖ, il s'ensuit que deux fois le rectangle compris sous les droites ΕΑ, ΑΖ vaut deux fois le rectangle compris sous les droites ΕΔ, ΔΓ conjointement avec deux fois le rectangle compris sous les droites ΓΒ, ΒΖ ; de sorte qu'une fois équivaut à une fois (1).

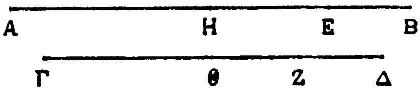


III.

Proposition 223. — Que la droite ΑΒ soit plus grande que la droite ΓΔ ; que le rectangle compris sous les droites ΑΕ, ΕΒ soit équivalent au rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΔ, et soient ΑΕ, ΓΖ les grands segments ; je dis que la droite ΑΕ est plus grande que la droite ΓΖ.

Coupons les droites entières ΑΒ, ΓΔ en deux parties égales aux points Η, Θ ; il s'ensuit que la droite ΗΒ est plus grande que la droite ΘΔ ; de sorte que le carré de la droite ΗΒ est aussi plus grand que le carré de la droite ΔΘ. Or, le rectangle

1. On a : $\overline{\mathrm{EZ}}^2 = \overline{\mathrm{E\Gamma}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{Z}}^2$ et $\mathrm{EA}^2 + \overline{\mathrm{AZ}}^2 = \mathrm{E\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 + \overline{\mathrm{BZ}}^2$, d'où, en raisonnant comme dans la note relative à la proposition précédente, on arrive à la relation : $2\mathrm{EA} \times \mathrm{AZ} = 2\mathrm{E\Delta} \times \Delta\Gamma + 2\Gamma\mathrm{B} \times \mathrm{BZ}$, d'où, comme le texte : $\mathrm{EA} \times \mathrm{AZ} = \mathrm{E\Delta} \times \Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{B} \times \mathrm{BZ}$.



compris sous les droites AE, EB équivaut au rectangle compris sous les droites ΓZ, ZΔ; donc, le carré de la droite HE est aussi plus grand que le carré de la droite ΘZ. En conséquence, la droite HE est plus grande que la droite ΘZ. Or, la droite AH est aussi plus grande que la droite ΓΘ ; donc, la droite entière AE est plus grande que la droite entière ΓZ (1).

IV.

Proposition 224. — Les droites AB, ΓΔ étant égales, que le rectangle compris sous les droites AE, EB soit équivalent au rectangle compris sous les droites ΓZ, ZΔ ; je dis que les grands segments AE, ΓZ sont [égaux] (2).

En effet, que les droites AB, ΓΔ soient coupées en deux parties égales aux points H, Θ, et ainsi de suite (3).

V.

Proposition 225. — Que la droite AB soit plus grande que la droite ΓΔ et la droite BE plus petite que la droite ΔZ, la droite AB étant plus grande que la droite BE et la droite ΓΔ plus grande que la droite ΔZ ; je dis que l'excédent des droites AB, BE est plus grand que l'excédent des droites ΓΔ, ΔZ.

En effet, puisque la droite AB est plus grande que la droite ΓΔ, il s'ensuit que l'excédent des droites AB, BE est plus grand que

---

1. On a par hypothèse: $AB > \Gamma\Delta$; donc : $HB > \Theta\Delta$, d'où : $\overline{HB}^2 > \overline{\Theta\Delta}^2$. Or (Euclide, liv. II, prop. 5, énoncée p. 233, n. 3), en appliquant l'identité : $(\frac{a}{2})^2 = (a - b)\, b + (b - \frac{a}{2})^2$, on a : $\overline{HB}^2 = AE \times EB + \overline{HE}^2$ et $\overline{\Theta\Delta}^2 = \Gamma Z \times Z\Delta + \overline{\Theta Z}^2$; donc : $AE \times EB + \overline{HE}^2 > \Gamma Z \times Z\Delta + \overline{\Theta Z}^2$. Or, par hypothèse : $AE \times EB = \Gamma Z \times Z\Delta$; donc, $\overline{HE}^2 > \overline{\Theta Z}^2$, d'où : $HE > \Theta Z$. Or, $AH > \Gamma\Theta$; donc : $AH + HE > \Gamma\Theta + \Theta Z$, ou, comme le texte : $AE > \Gamma Z$.

2. Restauration de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 430, l. 6).

3. C'est-à-dire comme dans le lemme précédent III ou proposition 223, où, au lieu de : $AB = \Gamma\Delta$, on a eu : $AB > \Gamma\Delta$.

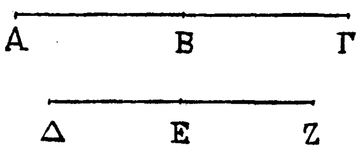
Ce petit lemme s'énonce algébriquement : Si $a + b = c + d$ et si $ab = cd$

l'excédent des droites ΓΔ, EB. Mais, l'excédent des droites ΓΔ, EB est plus grand que l'excédent des droites ΓΔ, ΔZ (car la droite EB est plus petite que la droite ΔZ) ; de sorte que l'excédent des droites AB, BE est, à fortiori, plus grand que l'excédent des droites ΓΔ, ΔZ (1).

VI.

Proposition 226. — Que la droite AB soit égale à la droite BΓ et la droite ΔE égale à la droite EZ ; je dis que le rectangle compris sous les droites AΓ, ΔZ est quadruple du rectangle compris sous les droites AB, ΔE.

En effet, puisque la droite ΓA est double de la droite AB, il s'ensuit que la droite ΔE étant la hauteur commune, le rectangle compris sous les droites ΓA, ΔE est double du rectangle compris sous les droites AB, ΔE. Derechef, puisque la droite ΔZ est double de la droite ΔE, il s'ensuit que, la droite AΓ étant la hauteur commune, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΔZ est double du rectangle compris sous les droites AΓ, ΔE. Mais, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΔE est double du rectangle compris sous les droites AB, ΔE ; [par conséquent, le rectangle compris sous les droites AΓ, ΔZ est quadruple du rectangle compris sous les droites AB, ΔE] (2) (3).



on a : $a = c$ et $b = d$. Serenus d'Antinoë le démontre géométriquement dans son ouvrage *De la Section du Cône*, proposition 56, énoncée : « Si deux droites égales sont divisées de telle sorte que le rectangle délimité sous les segments de l'une d'elles équivaut au rectangle délimité sous les segments de la droite restante, les segments seront égaux aux segments chacun à chacun. » Voir : *Serenus d'Antinoë, Le livre de la Section du Cône et le livre de la Section du Cylindre. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes, par P. Ver Eecke*, Paris-Bruges, 1929, gr. in-8°, p. 149.

1. On a par hypothèse : $AB > \Gamma\Delta$; donc : $AB - BE > \Gamma\Delta - BE$. Or, par hypothèse : $BE < \Delta Z$; donc : $\Gamma\Delta - BE > \Gamma\Delta - \Delta Z$; donc, à fortiori : $AB - BE > \Gamma\Delta - \Delta Z$.

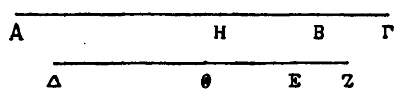
2. Restauration de Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 431, l. 11).

3. On a par hypothèse : $AB = B\Gamma$ et $\Delta E = EZ$, d'où : $A\Gamma = 2AB$ et $\Delta Z = 2\Delta E$, d'où : $A\Gamma \times \Delta E = 2AB \times \Delta E$ et $A\Gamma \times \Delta Z = 2A\Gamma \times \Delta E$, d'où : $A\Gamma \times \Delta Z = 4AB \times \Delta E$.

VII.

PROPOSITION 227. — Que la droite ΔE soit à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ, et que la droite ΔE soit à la droite EΘ comme la droite AB est à la droite BH ; je dis qu'il se fera que le rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ est au rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘZ comme le rectangle compris sous les droites AB, BH est au rectangle compris sous les droites AH, HΓ.

En effet, puisque la droite ΔE est à la droite EΘ comme la droite AB est à la droite BH, par conversion, la droite EΔ est à la droite ΔΘ comme la droite BA est à la droite AH ; de



sorte que le carré de la droite ΔE est au carré de la droite ΔΘ comme le carré de la droite BA est au carré de la droite AH. Mais, le carré de la droite ΔE est au rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ comme le carré de la droite AB est au rectangle compris sous les droites AB, BH ; par conséquent, le carré de la droite ΔΘ est aussi au rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ comme le carré de la droite AH est au rectangle compris sous les droites AB, BH [1]. Or, puisqu'on a supposé que la droite ΔE est à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ, par inversion et composition, la droite ZΔ est à la droite ΔE comme la droite ΓA est à la droite AB. Or, la droite EΔ est aussi à la droite ΔΘ comme la droite BA est à la droite AH ; donc, par raison d'égalité, la droite ZΔ est à la droite ΔΘ comme la droite ΓA est à la droite AH. En conséquence, la droite ZΘ est à la droite ΔΘ comme la droite ΓH est à la droite HA, et le rectangle est au carré comme le rectangle est au carré. Mais, le carré de la droite ΔΘ est aussi au rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ

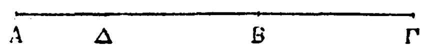
1. On a par hypothèse : $\frac{\Delta E}{E\Theta} = \frac{AB}{BH}$ (I), d'où : $\frac{\Delta E}{\Delta E - E\Theta} = \frac{AB}{AB - BH}$ ou : $\frac{\Delta E}{\Delta\Theta} = \frac{AB}{AH}$ (II), d'où : $\frac{\overline{\Delta E}^2}{\overline{\Delta\Theta}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AH}^2}$. Or, la relation (I) donne aussi : $\frac{\overline{\Delta E}^2}{\Delta E \times E\Theta} = \frac{\overline{AB}^2}{AB \times BH}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta\Theta}^2}{\Delta E \times E\Theta} = \frac{\overline{AH}^2}{AB \times BH}$.

comme le carré de la droite AH est au rectangle compris sous les droites AB, BH ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΔE, EΘ est au rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘZ comme le rectangle compris sous les droites AB, BH est au rectangle compris sous les droites AH, HΓ (1).

VIII.

PROPOSITION 228. — Soit donnée [la somme] (2) des carrés des droites AB, BΓ, et soit donné l'excédent des carrés des droites AB, BΓ ; je dis que chacune des droites AB, BΓ est donnée.

En effet, posons la droite BΔ égale à la droite ΓB ; il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΓA, AΔ est donné (car il est l'excédent des carrés des droites AB, BΓ). Mais, deux fois le rectangle compris sous les droites ΓA, AΔ est donné aussi (puisque le rectangle compris sous les droites ΓA, AΔ est donné ; par conséquent, le carré de la somme des droites ΓA, AΔ est donné aussi ; de sorte que la somme des droites ΓA, AΔ est donnée. Et la droite BA est la moitié de cette somme ; donc, la droite BA est donnée ; de sorte que la droite BΓ est donnée aussi (3).



---

1. On a aussi par hypothèse : $\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{EZ}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{AB}$, d'où : $\frac{EZ+\Delta E}{\Delta E}=\frac{B\Gamma+AB}{AB}$ ou : $\frac{\Delta Z}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{AB}$, d'où, par raison d'égalité avec la relation (II) de la note précédente : $\frac{\Delta Z}{\Delta\Theta}=\frac{A\Gamma}{AH}$, d'où : $\frac{\Delta Z-\Delta\Theta}{\Delta\Theta}=\frac{A\Gamma-AH}{AH}$ ou, comme le texte : $\frac{\Theta Z}{\Delta\Theta}=\frac{H\Gamma}{AH}$, d'où, plus explicitement que le texte : $\frac{\Delta\Theta\times\Theta Z}{\Delta\Theta^2}=\frac{AH\times H\Gamma}{AH^2}$, d'où, par raison d'égalité avec la dernière relation de la note précédente, on a, comme le texte : $\frac{\Delta E\times E\Theta}{\Delta\Theta\times\Theta Z}=\frac{AB\times BH}{AH\times H\Gamma}$.

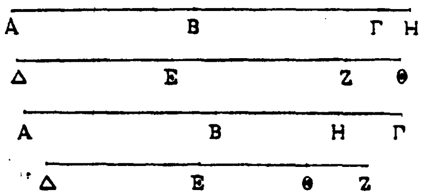
2. Restauration de Halley par le mot συναμφότερα, à la suite de la remarque de Commandin : « Intellige utraque quadrata simul sumpta data esse, videlicet compositum ex ipsis ; nam si ea seorsum data sint, frustra illud, quod datum esset, quaereretur » (Cfr. *loc. cit.*, p. 432, *commentarius*, ll. 37-38).

3. Les droites AB, BΓ étant supposées données de grandeur, posons : BΔ = BΓ. Or (EUCLIDE, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3), c'est-à-dire en considérant l'identité : $(\frac{a}{2}+b)^2-(\frac{a}{2})^2=(a+b)\,b$, on a : $\overline{AB}^2-\overline{B\Gamma}^2=A\Gamma\times A\Delta$. Or, $\overline{AB}^2-\overline{B\Gamma}^2$ est donné par hypothèse ; donc, $A\Gamma\times A\Delta$ est donné ; donc $2A\Gamma\times A\Delta$ est donné. Or, par hypothèse : $\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2$ est donné ;

IX.

Proposition 229. — Que la droite AB soit égale à la droite ΒΓ, la droite ΔΕ égale à la droite ΕΖ, et que, de plus, la droite ΖΕ soit à la droite ΕΘ comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΗ. Je dis que le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ est au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ comme le rectangle compris sous les droites ΑΗ, ΗΒ est au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ.

En effet, puisque la droite ΖΕ est à la droite ΕΔ comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΑ; mais, que la droite ΖΕ est aussi à la droite ΕΘ comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΗ, il s'ensuit que le carré de la droite ΔΘ est au rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ comme le carré de la droite ΑΗ est au rectangle compris sous les droites ΑΗ, ΗΒ (1). Mais, le carré de la droite ΔΘ est au carré de la droite ΕΖ comme le carré de la droite ΑΗ est au carré de la droite ΒΓ; tandis que le carré de la droite ΕΖ est au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ comme le carré de la droite ΒΓ est au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ ; donc, par raison d'égalité, le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ sera au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ comme le rectan-



donc : $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta} + 2(\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2)$ est donné. Or (Euclide, liv. II, prop. 10, énoncée p. 744, n. 3), c'est-à-dire en considérant l'identité : $2[(b + \frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2] = (a + b)^2 + b^2$, on a : $2(\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2) = \overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$; donc : $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta} + \overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$ est donné. Or (Euclide, liv. II, prop. 4, énoncée p. 232, n. 2), $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{A\Delta} + \overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 + \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = (\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Delta})^2$; donc, comme le texte, $\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Delta}$ est donné. Or, $\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Delta} = \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{AB} - \mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{AB} - \mathrm{B\Gamma} = 2\mathrm{AB}$; d'où, comme le texte : $\mathrm{AB} = \frac{1}{2}(\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Delta})$; donc AB est donné, d'où ΒΓ est donné.

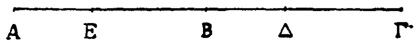
1. On a par hypothèse : $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma}$ et $\mathrm{\Delta E} = \mathrm{EZ}$; donc : $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Delta E}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}}$. Or on a aussi par hypothèse : $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{E\Theta}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{BH}}$ (I) ; donc, par raison d'égalité : $\frac{\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{E\Theta}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BH}}$, d'où : $\frac{\mathrm{\Delta E} + \mathrm{E\Theta}}{\mathrm{E\Theta}} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BH}}{\mathrm{BH}}$ ou : $\frac{\mathrm{\Delta\Theta}}{\mathrm{E\Theta}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}$ (II), d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\mathrm{\Delta\Theta}}^2}{\mathrm{\Delta\Theta} \times \mathrm{E\Theta}} = \frac{\overline{\mathrm{AH}}^2}{\mathrm{AH} \times \mathrm{BH}}$.

gle compris sous les droites AH, HB est au rectangle compris sous les droites BΓ, ΓH [1].

X.

PROPOSITION 230. — Que la droite AB soit égale à la droite BΓ et la droite BΔ plus petite que la droite BE ; je dis que le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB a avec le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓΔ un rapport plus petit que celui du rectangle compris sous les droites ΓE, EB avec le rectangle compris sous les droites BA, AE.

En effet, puisque la droite AB est égale à la droite BΓ, et que la droite BΔ est plus petite que la droite BE, il s'ensuit que la droite ΓΔ est plus grande que la droite AE ; de sorte que la droite ΓE est aussi plus grande que la droite AΔ.



En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΔA, ΔB est plus petit que celui qui est compris sous les droites ΓE, EB, et le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓΔ est plus grand que celui qui est compris sous les droites BA, AE ; donc, le rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB a avec le rectangle compris sous les droites BΓ, ΓΔ un rapport plus petit que celui du rectangle compris sous les droites ΓE, EB avec le rectangle compris sous les droites BA, AE [2].

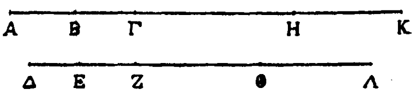
1. Les relations (I) et (II) de la note précédente donnent par raison d'égalité : $\frac{\Delta\Theta}{EZ}=\frac{AH}{B\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta\Theta}^2}{\overline{EZ}^2}=\frac{\overline{AH}^2}{\overline{B\Gamma}^2}$ (III) ; tandis que cette même relation (I) donne aussi, à la manière d'Euclide : $\frac{E\Theta}{EZ}=\frac{BH}{B\Gamma}$; d'où : $\frac{E\Theta-EZ}{EZ}=\frac{BH-B\Gamma}{B\Gamma}$ ou : $\frac{Z\Theta}{EZ}=\frac{\Gamma H}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{EZ}{Z\Theta}=\frac{B\Gamma}{\Gamma H}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{EZ}^2}{EZ\times Z\Theta}=\frac{\overline{B\Gamma}^2}{B\Gamma\times\Gamma H}$, d'où, par raison d'égalité avec la relation (III), il vient : $\frac{\overline{\Delta\Theta}^2}{EZ\times Z\Theta}=\frac{\overline{AH}^2}{A\Gamma\times\Gamma H}$, d'où, par raison d'égalité avec la dernière relation de la note précédente : $\frac{\Delta\Theta\times E\Theta}{EZ\times Z\Theta}=\frac{AH\times BH}{B\Gamma\times\Gamma H}$.

2. On a par hypothèse : $AB = B\Gamma$ et $B\Delta < BE$; donc : $B\Gamma - B\Delta > AB - BE$ ou : $\Gamma\Delta > AE$, d'où : $A\Gamma - AE > A\Gamma - \Gamma\Delta$ ou : $\Gamma E > A\Delta$; donc : $A\Delta \times B\Delta < \Gamma E \times BE$ et $B\Gamma \times \Gamma\Delta > AB \times AE$; donc (EUCLIDE, liv. V, prop. 8, énoncée p. 36, n. 6) : $\frac{A\Delta \times B\Delta}{B\Gamma \times \Gamma\Delta} < \frac{\Gamma E \times BE}{AB \times AE}$.

XI.

Proposition 231. — Qu'il faille maintenant démontrer la réciproque des choses qui précèdent (1). La droite AB étant égale à la droite ΒΓ, et la droite ΔΕ égale à la droite ΕΖ, que le rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ soit au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ comme le rectangle compris sous les droites ΑΗ, ΗΒ est au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ. Il faut démontrer qu'il se fait que la droite ΖΕ est à la droite ΕΘ comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΗ.

Posons le rectangle compris sous les droites ΓΗ, ΑΚ équivalent au rectangle compris sous les droites ΑΗ, ΗΒ et le rectangle compris sous les droites ΖΘ, ΔΛ équivalent au rectangle compris sous les droites ΔΘ, ΘΕ. Il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΔΛ, ΖΘ est au rectangle compris sous les droites ΕΖ, ΖΘ, c'est-à-dire la droite ΔΛ à la droite ΕΖ, comme le rectangle compris sous les droites ΑΚ, ΓΗ est au rectangle compris sous les droites ΒΓ, ΓΗ, c'est-à-dire comme la droite ΑΚ est à la droite ΒΓ. Mais, la droite ΖΕ est aussi à la droite ΕΔ comme la droite ΓΒ est à la droite ΒΑ ; par conséquent, les droites ΑΚ, ΒΓ, ΒΚ sont placées en même ordre (2) dans un même rapport avec les droites ΔΛ, ΕΖ, ΕΛ (3), [c'est-à-dire que la droite ΛΖ est à la droite ΖΕ comme



1. C'est-à-dire la réciproque du lemme IX ou proposition 229. Voir p. 786.
2. ὁμοταγεῖς placés dans le même rang ou dans le même ordre.
3. On pose : $\Gamma H \times AK = AH \times HB$ et $Z\Theta \times \Delta\Lambda = \Delta\Theta \times \Theta E$. Or, on a par hypothèse : $\frac{\Delta\Theta \times \Theta E}{EZ \times Z\Theta} = \frac{AH \times HB}{B\Gamma \times \Gamma H}$; donc : $\frac{Z\Theta \times \Delta\Lambda}{EZ \times Z\Theta} = \frac{\Gamma H \times AK}{B\Gamma \times \Gamma H}$ ou, comme le texte : $\frac{\Delta\Lambda}{EZ} = \frac{AK}{B\Gamma}$ (I). Or, par hypothèse, $AB = B\Gamma$ et $\Delta E = EZ$; donc : $\frac{EZ}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{AB}$, d'où, par raison d'égalité avec la relation (I) : $\frac{\Delta\Lambda}{\Delta E} = \frac{AK}{AB}$, d'où : $\frac{\Delta\Lambda}{\Delta\Lambda - \Delta E} = \frac{AK}{AK - AB}$ ou : $\frac{\Delta\Lambda}{E\Lambda} = \frac{AK}{BK}$ (II), d'où, par raison d'égalité avec la relation (I), on a : $\frac{EZ}{E\Lambda} = \frac{B\Gamma}{BK}$ (III). Dès lors, les relations (I) et (III) donnent, comme dans le texte : $\frac{AK}{\Delta\Lambda} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{BK}{E\Lambda}$.

la droite ΚΓ est à la droite ΓΒ] [1]. Or, puisque le rectangle compris sous les droites ΑΗ, ΗΒ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΚ, ΓΗ, retranchons l'un et l'autre du rectangle compris sous les droites ΑΚ, ΗΒ; il s'ensuit que le rectangle restant compris sous les droites ΒΗ, ΗΚ équivaut au rectangle compris sous les droites ΑΚ, ΒΓ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites ΒΗ, ΗΚ est au carré de la droite ΒΚ comme le rectangle compris sous les droites ΑΚ, ΒΓ est au carré de la droite ΒΚ. Pour les mêmes raisons d'ailleurs, le rectangle compris sous les droites ΕΘ, ΘΛ est aussi au carré de la droite ΕΛ comme le rectangle compris sous les droites ΔΛ, ΕΖ est au carré de la droite ΕΛ [2]. Et, en raison de la proportion des segments placés dans le même ordre, le rectangle compris sous les droites ΔΛ, ΕΖ est au carré de la droite ΕΛ comme le rectangle compris sous les droites ΑΚ, ΒΓ est au carré de la droite ΒΚ ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΕΘ, ΘΛ est aussi au carré de la droite ΕΛ comme le rectangle compris sous les droites ΒΗ, ΗΚ est au carré de la droite ΒΚ. Et les droites ΒΗ, ΕΘ constituent des mêmes segments [3] ; donc, la droite ΛΕ est à la droite ΕΘ comme la droite ΚΒ est à la droite ΒΗ [4], et

1. La phrase mise entre crochets est abandonnée par Hultsch comme étant une mauvaise interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 1000, ll. 12-13).

2. On a par construction : $\mathrm{AH}\times\mathrm{HB}=\mathrm{AK}\times\Gamma\mathrm{H}$, d'où : $\mathrm{AK}\times\mathrm{HB}-\mathrm{AH}\times\mathrm{HB}=\mathrm{AK}\times\mathrm{HB}-\mathrm{AK}\times\Gamma\mathrm{H}$ ou, comme le texte : $\mathrm{HK}\times\mathrm{HB}=\mathrm{AK}\times\mathrm{B}\Gamma$, d'où : $\frac{\mathrm{HK}\times\mathrm{HB}}{\mathrm{BK}^2}=\frac{\mathrm{AK}\times\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{BK}^2}$ (IV). Et, de même, on a par construction : $\Delta\Theta\times\mathrm{E}\Theta=\mathrm{Z}\Theta\times\Delta\Lambda$, d'où : $\Delta\Lambda\times\mathrm{E}\Theta-\Delta\Theta\times\mathrm{E}\Theta=\Delta\Lambda\times\mathrm{E}\Theta-\mathrm{Z}\Theta\times\Delta\Lambda$ ou : $\mathrm{E}\Theta\times\Theta\Lambda=\Delta\Lambda\times\mathrm{EZ}$, d'où, comme le texte : $\frac{\mathrm{E}\Theta\times\Theta\Lambda}{\mathrm{E}\Lambda^2}=\frac{\Delta\Lambda\times\mathrm{EZ}}{\mathrm{E}\Lambda^2}$ (V).

3. καὶ ἔστιν τὰ αὐτὰ τμήματα τὰ ΒΗ, ΕΘ ; expression singulière signifiant probablement que les deux segments se composent de la même manière en vue de leur intervention dans une relation ultérieure ; car on a : $\mathrm{BH}=\mathrm{BK}-\mathrm{HK}$ et $\mathrm{E}\Theta=\mathrm{E}\Lambda-\Theta\Lambda$, d'où : $\mathrm{HK}=\mathrm{BK}-\mathrm{BH}$ et $\Theta\Lambda=\mathrm{E}\Lambda-\mathrm{E}\Theta$.

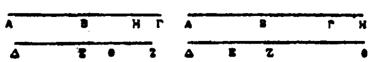
4. Les relations (II) et (III), note 3, page 788, donnent par composition : $\frac{\Delta\Lambda\times\mathrm{EZ}}{\mathrm{E}\Lambda^2}=\frac{\mathrm{AK}\times\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{BK}^2}$, d'où, en présence des relations (IV) et (V) de la note 2 ci-dessus, il vient, comme dans le texte : $\frac{\mathrm{E}\Theta\times\Theta\Lambda}{\mathrm{E}\Lambda^2}=\frac{\mathrm{BH}\times\mathrm{HK}}{\mathrm{BK}^2}$, d'où, par substitution des deux dernières relations de la note précédente : $\frac{\mathrm{E}\Theta\,(\mathrm{E}\Lambda-\mathrm{E}\Theta)}{\mathrm{E}\Lambda^2}=\frac{\mathrm{BH}\,(\mathrm{BK}-\mathrm{BH})}{\mathrm{BK}^2}$ ou : $\frac{\mathrm{E}\Theta}{\mathrm{E}\Lambda}-\left(\frac{\mathrm{E}\Theta}{\mathrm{E}\Lambda}\right)^2=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BK}}-\left(\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BK}}\right)^2$; relation quadratique que le texte passe sous silence, mais qui doit avoir été considérée, puisque, résolue par rapport à $\frac{\mathrm{E}\Theta}{\mathrm{E}\Lambda}$, elle donne comme première valeur : $\frac{\mathrm{E}\Theta}{\mathrm{E}\Lambda}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BK}}$,

la droite ZE est donc à la droite EΘ comme la droite ΓB est à la droite BH (1).

XII.

PROPOSITION 232. — Que la droite AB soit [égale] (2) à la droite BΓ, la droite ΔE égale à la droite EZ, et que la droite BΓ ait avec la droite ΓH un rapport plus grand que celui de la droite EZ avec la droite ZΘ ; je dis que, dans le premier cas, la droite AH a aussi avec la droite BΓ un rapport plus grand que celui de la droite ΔΘ avec la droite EZ, et que, dans le second cas, ce rapport est plus petit (3).

En effet, puisque la droite BΓ a avec la droite ΓH un rapport plus grand que celui [de la droite EZ avec la droite ZΘ, la droite ΓB a, dans le premier cas, avec la droite BH un rapport plus petit que celui] (4) de la droite ZE avec la droite EΘ ; tandis que, dans le second cas, le rapport est plus grand ; de sorte que, dans le premier cas, la droite AB a aussi avec la droite BH un rapport plus petit que celui de la droite ΔE avec la droite EΘ ; tandis que, dans le second cas, le rapport est plus grand.



En conséquence, dans le premier cas, la droite HA a aussi avec la droite AB un rapport plus grand que celui de la droite ΘΔ avec la droite ΔE ; tandis que, dans le second cas, le rapport est plus petit. Et la droite ΔE est à la droite EZ comme la droite AB est à la droite BΓ ; donc, par raison d'égalité, la droite AH a,

comme dans le texte, et comme seconde valeur : $\frac{E\Theta}{E\Lambda} = 1 - \frac{BH}{BK} = \frac{HK}{BK}$, que le texte ne considère pas.

1. La première valeur : $\frac{E\Theta}{E\Lambda} = \frac{BH}{BK}$, que le texte présente sous la forme : $\frac{E\Lambda}{E\Theta} = \frac{BK}{BH}$, donne, par composition avec la relation : $\frac{EZ}{E\Lambda} = \frac{B\Gamma}{BK}$, démontrée dans la note 3, page 788 : $\frac{EZ}{E\Lambda} \times \frac{E\Lambda}{E\Theta} = \frac{B\Gamma}{BK} \times \frac{BK}{BH}$ ou, comme le texte : $\frac{EZ}{E\Theta} = \frac{B\Gamma}{BH}$.

2. Restauration due à Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 436, l. 21).

3. Cette proposition, ainsi que les deux suivantes, sont reproduites en grec avec une version latine dans l'ouvrage de Meiboom sur les proportions. (*M. Meibomii de Proportionibus. Hafniae*, 1655, in-fol., pp. 154-156).

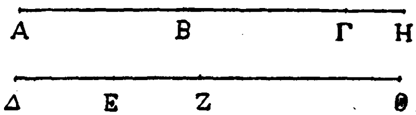
4. Lacune comblée conjecturalement par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 436, l. 29).

dans le premier cas, avec la droite ΒΓ un rapport plus grand que celui de la droite ΔΘ avec la droite ΕΖ ; tandis que, dans le second cas, le rapport est plus petit (1).

XIII.

Proposition 233. — Que la droite ΑΒ soit de nouveau égale à la droite ΒΓ, la droite ΔΕ égale à la droite ΕΖ, et que la droite ΑΗ ait avec la droite ΗΒ un rapport [plus grand] (2) que celui de la droite ΔΘ avec la droite ΘΕ ; je dis que la droite ΒΓ a aussi avec la droite ΓΗ un rapport plus grand que celui de la droite ΕΖ avec la droite ΖΘ.

En effet, puisque, par conversion et division, la droite ΗΒ a avec la droite ΒΑ, c'est-à-dire avec la droite ΒΓ, un rapport plus petit que celui de la droite ΘΕ avec la droite ΕΔ, c'est-à-dire avec la droite ΕΖ, par conversion et division, la droite ΒΓ a avec la droite ΓΗ un rapport plus grand que celui de la droite ΕΖ avec la droite ΖΘ (3).



1. On a, dans le cas de la première figure : $\frac{B\Gamma}{\Gamma H} > \frac{EZ}{Z\Theta}$, d'où (liv. VII, lemme 6, voir p. 516) : $\frac{B\Gamma}{B\Gamma - \Gamma H} < \frac{EZ}{EZ - Z\Theta}$ ou, comme le texte : $\frac{B\Gamma}{BH} < \frac{EZ}{E\Theta}$. Or, on a par hypothèse : $AB = B\Gamma$ et $\Delta E = EZ$; donc : $\frac{AB}{BH} < \frac{\Delta E}{E\Theta}$, d'où (liv. VII, lemme 4, voir p. 514) : $\frac{AB}{AB + BH} < \frac{\Delta E}{\Delta E + E\Theta}$ ou : $\frac{AB}{AH} < \frac{\Delta E}{\Delta\Theta}$, d'où, comme le texte : $\frac{AH}{AB} > \frac{\Delta\Theta}{\Delta E}$. Or, les deux égalités d'hypothèse donnent : $\frac{\Delta E}{EZ} = \frac{AB}{B\Gamma}$ (I), d'où, par raison d'identité avec l'inégalité précédente : $\frac{AH}{B\Gamma} > \frac{\Delta\Theta}{EZ}$. D'autre part, dans le cas de la seconde figure, la relation d'hypothèse : $\frac{B\Gamma}{\Gamma H} > \frac{EZ}{Z\Theta}$ donne : $\frac{B\Gamma}{B\Gamma + \Gamma H} > \frac{EZ}{EZ + Z\Theta}$ ou : $\frac{B\Gamma}{BH} > \frac{EZ}{E\Theta}$ ou : $\frac{AB}{BH} > \frac{\Delta E}{E\Theta}$, d'où : $\frac{AB}{AB + BH} > \frac{\Delta E}{\Delta E + E\Theta}$ ou : $\frac{AB}{AH} > \frac{\Delta E}{\Delta\Theta}$, d'où : $\frac{AH}{AB} < \frac{\Delta\Theta}{\Delta E}$, d'où, par raison d'égalité avec la relation (I), on a, comme le texte : $\frac{AH}{B\Gamma} > \frac{\Delta\Theta}{EZ}$.

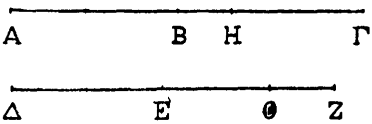
2. Hultsch a corrigé par μείζονα (plus grand) la leçon erronée ἐλάσσονα (plus petit) donnée par Commandin (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 1002, l. 22).

3. On a par hypothèse : $\frac{AH}{HB} > \frac{\Delta\Theta}{\Theta E}$, d'où : $\frac{AH}{AH - HB} < \frac{\Delta\Theta}{\Delta\Theta - \Theta E}$ ou :

XIV.

Proposition 234. — Que la droite AB soit égale à la droite BΓ, la droite ΔE égale à la droite EZ, et que la droite AH ait avec la droite HB un rapport plus grand que celui de la droite ΔΘ avec la droite ΘE ; je dis que la droite BH a avec la droite HΓ un rapport plus petit que celui de la droite EΘ avec la droite ΘZ.

En effet, puisque, par division, la droite AB, c'est-à-dire la droite BΓ, a avec la droite BH un rapport plus grand que celui de la droite ΔE, c'est-à-dire la droite EZ, avec la droite EΘ, par conversion et par division, la droite BH a avec la droite HΓ un rapport plus petit que celui de la droite EΘ avec la droite ΘZ (1).



POUR LES LIEUX A LA SURFACE.

I.

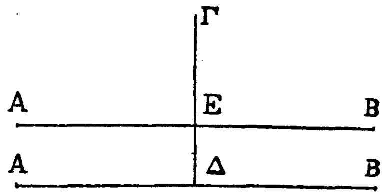
Proposition 235. — Si l'on a une droite AB et une droite de juxtaposition ΓΔ (2), et si l'on a le rapport du rectangle

$\frac{AH}{AB}<\frac{\Delta\Theta}{\Delta E}$, d'où : $\frac{AH-AB}{AB}<\frac{\Delta\Theta-\Delta E}{\Delta E}$ ou : $\frac{BH}{AB}<\frac{E\Theta}{\Delta E}$. Or, par hypothèse : $AB=B\Gamma$ et $\Delta E=EZ$; donc, comme le texte : $\frac{BH}{B\Gamma}<\frac{E\Theta}{EZ}$, d'où : $\frac{BH}{BH-B\Gamma}>\frac{E\Theta}{E\Theta-EZ}$ ou : $\frac{BH}{\Gamma H}>\frac{E\Theta}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{BH-\Gamma H}{\Gamma H}>\frac{E\Theta-Z\Theta}{Z\Theta}$ ou, comme le texte: $\frac{B\Gamma}{\Gamma H}>\frac{EZ}{Z\Theta}$.

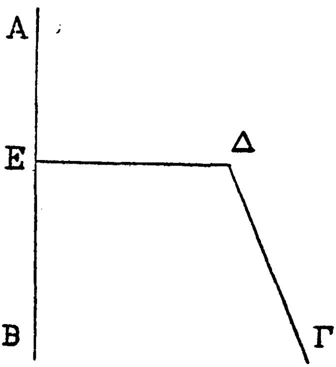
1. On a par hypothèse: $\frac{AH}{HB}>\frac{\Delta\Theta}{\Theta E}$, d'où: $\frac{AH-HB}{HB}>\frac{\Delta\Theta-\Theta E}{\Theta E}$ ou: $\frac{AB}{HB}>\frac{\Delta E}{\Theta E}$. Or, par hypothèse : $AB=B\Gamma$ et $\Delta E=EZ$; donc, comme le texte : $\frac{B\Gamma}{HB}>\frac{EZ}{\Theta E}$, d'où : $\frac{B\Gamma}{B\Gamma-HB}<\frac{EZ}{EZ-\Theta E}$ ou : $\frac{B\Gamma}{H\Gamma}<\frac{EZ}{\Theta Z}$, d'où : $\frac{B\Gamma-H\Gamma}{H\Gamma}<\frac{EZ-\Theta Z}{\Theta Z}$ ou, comme le texte : $\frac{BH}{H\Gamma}<\frac{E\Theta}{\Theta Z}$.

2. παρὰ θέσει, de juxtaposition, c'est-à-dire parallèle à une droite donnée de position, en d'autres termes : donnée de direction.

compris sous les droites AΔ, ΔB au carré de la droite ΔΓ, le point Γ appartiendra à une ligne conique (1). Si maintenant la droite AB cesse d'être donnée de position (2), si les points A, B cessent d'être donnés (3) et sont sur des droites (4) données de position AE, EB, le point Γ étant surélevé (5) sera sur une surface donnée de position ; et cela a été démontré (6).



II.



Proposition 238. — Si l'on a une droite AB donnée de position et un point Γ donné dans le même plan ; si l'on mène une droite ΔΓ, puis la droite ΔE à angles droits (7), et si l'on a le rapport de la droite ΓΔ à la droite ΔE, le point Δ appartiendra à une section conique donnée de position. Or, il faut démontrer [qu'une portion] (8) de la ligne [constitue le lieu] (9), et cela sera

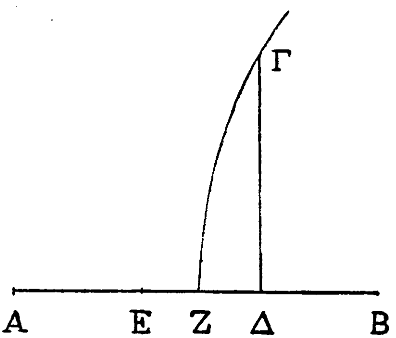
1. Commandin a suppléé ici à l'absence d'une démonstration au moyen d'une longue démonstration visant les trois cas de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole (cfr. *loc. cit.*, pp. 438-440).
2. La droite AB reste donc donnée de longueur.
3. C'est-à-dire si les points A, B cessent d'être fixes.
4. Le texte porte εὐθεῖα, probablement par erreur, au lieu de εὐθείαις.
5. μετεωρισθὲν, surélevé, c'est-à-dire non dans le même plan.
6. L'obscurité de ce lemme provient de la figure altérée qui l'accompagne dans les manuscrits, et que nous reproduisons telle que Hultsch la donne dans son édition. Commandin a considéré ce passage comme un « locus desperatus ». La version latine dont Hultsch accompagne le texte, laisse subsister l'obscurité. Il y a lieu probablement de comprendre qu'une droite AB donnée de longueur a ses extrémités A, B qui glissent sur deux droites AE, EB se coupant au point E. Cette droite fait participer à son mouvement une conique ayant cette droite AB pour diamètre, et dont les cordes conjuguées restent parallèles à une droite donnée de position en dehors du plan des droites AE, EB. Le lieu de cette conique est une surface donnée de position.
7. Sous-entendu sur la droite AB donnée de position.
8. et 9. Lacunes comblées conjecturalement par Gerhardt dans la première édition qu'il a donnée du texte grec des livres VII et VIII de Pappus (*Halle, 1871*).

démontré de la manière suivante, après avoir exposé ce lieu-ci (1) :

III.

PROPOSITION 236. — Etant donnés les deux points A, B et la perpendiculaire ΓΔ, que le rapport du carré de la droite AΔ aux carrés (2) des droites ΓΔ, ΔB soit établi ; je dis que, si ce rapport est celui de grandeur égale à grandeur égale, ou de grandeur plus grande à plus petite, ou de grandeur plus petite à plus grande, le point Γ appartient à une section conique (3).

En effet, que le rapport soit d'abord celui de grandeur égale à grandeur égale. Et puisque le carré de la droite AΔ équivaut aux carrés des droites ΓΔ, ΔB, posons la droite ΔE égale à la droite BΔ ; il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites BA, AE équivaut au carré de la droite ΔΓ (4). Coupons la droite AB en deux parties égales au point Z ; il s'ensuit que le point Z est donné. Et la droite AE est le double de la droite ZΔ ; de sorte que le rectangle compris sous les droites BA, AE est le double du rectangle compris sous les droites AB, ZΔ. Et le double de la droite AB est donné ; donc, le rectangle



1. La proposition 238 est intercalée ici hors rang en raison de son simple énoncé ; elle sera reprise plus loin pour être démontrée à l'aide des propositions 236 et 237.

2. C'est-à-dire la somme des carrés.

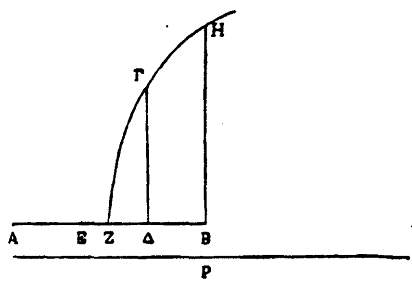
3. En d'autres termes, le point Γ appartiendra à une parabole, à une hyperbole ou à une ellipse, suivant que le rapport $\dfrac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\Delta B}^2}$ est égal à l'unité, plus petit ou plus grand que l'unité.

4. Soit, dans le premier cas: $\dfrac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\Delta B}^2} = 1$, d'où : $\overline{A\Delta}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\Delta B}^2$ (I). Posons : $\Delta E = \Delta B$ et, considérant la droite EB coupée en deux parties égales en Δ, à laquelle on ajoute la droite AE, on a, par application de l'identité $(a + b) b + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2} + b)^2$, (EUCLIDE, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $AB \times AE + \overline{E\Delta}^2 = \overline{A\Delta}^2$ ou : $AB \times AE + \overline{\Delta B}^2 = \overline{A\Delta}^2$, d'où, en présence de la relation d'hypothèse (I), il vient : $AB \times AE + \overline{\Delta B}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\Delta B}^2$ ou : $AB \times AE = \overline{\Gamma\Delta}^2$.

compris sous ce double de droite donné et la droite ZΔ équivaut au carré de la droite ΔΓ. En conséquence, le point Γ est lié de position à la parabole qui passe par le point Z (1).

La synthèse du lieu se fera de la manière suivante : Soient A, B les points donnés, et que le rapport soit celui de grandeur égale à grandeur égale. Coupons la droite AB en deux parties égales au point Z, et que la droite P soit le double de la droite AB. La droite ZB, terminée au point Z, étant donnée de position, et la droite P étant donnée de grandeur, décrivons la parabole HZ autour de l'axe ZB (2), de telle sorte que, si l'on prend un point Γ sur celle-ci, et si l'on mène la perpendiculaire ΓΔ, le rectangle compris sous les droites P, ZΔ soit équivalent au carré de la droite ΔΓ, et menons une perpendiculaire BH. Je dis que la ligne ΓH est une partie de cette parabole.

En effet, menons la perpendiculaire ΓΔ et posons la droite ΔE égale à la droite BΔ. Dès lors, puisque la droite AB est le double de la droite BZ et la droite EB le double de la droite BΔ, il s'ensuit que la droite AE est aussi le double de la droite ZΔ. En conséquence, le rectangle compris sous les droites BA, AE équivaut à deux fois le rectangle compris sous les droites AB, ZΔ, c'est-à-dire au carré de la droite ΔΓ. Ajoutons de part et d'autre le carré de la droite EΔ, qui est égal au carré de la droite ΔB ;



1. On a : AE = AB — EB. Or, on a par construction : AZ = ZB et EΔ = ΔB, d'où : AB = 2BZ et EB = 2BΔ ; donc : AE = 2BZ — 2BΔ ou, comme le texte : AE = 2ZΔ, d'où : AB × AE = 2AB × ZΔ, d'où, en présence de la dernière égalité de la note précédente, on a : $\overline{\Gamma\Delta}^2 = 2AB \times Z\Delta$, c'est-à-dire l'équation $y^2 = 2p.x$ de la parabole passant par le point Z, à laquelle appartient le point Γ ; relation démontrée par Apollonius dans la proposition XI du livre I des *Coniques* (voir l'énoncé p. 505, n. 1).

2. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. 52 : « Une droite terminée en un point étant donnée dans un plan, trouver, dans ce plan, une section de cône appelée parabole, dont le diamètre est la droite donnée, dont le sommet est l'extrémité de la droite, et dans laquelle le carré de toute droite abaissée de la section sur le diamètre, sous un angle donné, soit équivalent au rectangle délimité sous la droite qu'elle découpe à partir du sommet de la section, et sous une autre droite donnée ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 97.

il s'ensuit que le carré entier de la droite ΑΔ équivaut aux carrés des droites ΓΔ, ΔΒ. En conséquence, la ligne ΖΓΗ constitue le lieu (1).

IV.

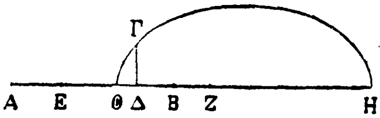
Proposition 237. — Soient de nouveau les deux points donnés Α, Β ; abaissons la perpendiculaire ΔΓ (2), et que le rapport du carré de la droite ΑΔ aux carrés des droites ΒΔ, ΔΓ soit celui de grandeur plus grande à plus petite, dans le premier cas, et celui de grandeur plus petite à plus grande dans le second cas ; je dis que le point Γ appartient à une section de cône, qui sera une ellipse dans le premier cas et une hyperbole dans le second cas.

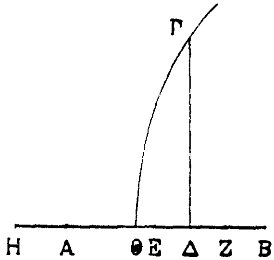
En effet, puisqu'on a le rapport du carré de la droite ΑΔ aux carrés des droites ΒΔ, ΔΓ, que le rapport du carré de la droite ΕΔ au carré de la droite ΔΒ soit le même que ce dernier rapport. Dès lors, la droite ΒΔ est plus petite que la droite ΔΕ dans le premier cas, et la droite ΒΔ est plus grande que la droite ΔΕ dans le second cas. Posons la droite ΔΖ égale à la droite ΕΔ. Puisque le rapport du carré de la droite ΑΔ aux carrés des droites ΓΔ, ΔΒ est donné, et que le rapport du carré de la droite ΕΔ au carré de la droite ΔΒ est le même que ce dernier, il s'ensuit que le rapport du rectangle compris sous les droites ΖΑ, ΑΕ au carré de la droite ΔΓ est donné aussi (3). Mais, puisque le

1. On a par construction : $AB = 2BZ$ et $EB = 2B\Delta$, d'où : $AB - EB = 2BZ - 2B\Delta$ ou : $AE = 2Z\Delta$, d'où : $BA \times AE = 2BA \times Z\Delta = P \times Z\Delta$. Or, on a par construction : $P \times Z\Delta = \overline{\Gamma\Delta}^2$; donc : $BA \times AE = \overline{\Gamma\Delta}^2$, d'où : $BA \times AE + \overline{E\Delta}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{E\Delta}^2$. Or, considérant la droite EB divisée en deux parties égales en Δ, à laquelle on ajoute en direction la droite AE, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $BA \times AE + \overline{E\Delta}^2 = \overline{A\Delta}^2$; donc : $\overline{A\Delta}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{E\Delta}^2$ ou : $\overline{A\Delta}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\Delta B}^2$, d'où, relation d'hypothèse : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^4 + \overline{\Delta B}^2} = 1$; donc, la parabole ΖΓΗ est le lieu du point Γ.

2. Sous-entendu : du point donné Γ.

3. Le rapport donné dans le premier cas est : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{B\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2} > 1$. Posons : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{B\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2} = \frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{B\Delta}^2}$ (I) ; donc, $\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{B\Delta}^2} > 1$ est donné, d'où : $E\Delta > \Delta B$. Or, la relation (I) donne : $\frac{\overline{A\Delta}^2 - \overline{E\Delta}^2}{\overline{B\Delta}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 - \overline{B\Delta}^2} = \frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{B\Delta}^2}$; donc, le rapport $\frac{\overline{A\Delta}^2 - \overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$ est donné. Posons : $\Delta Z = E\Delta$ et, considérant la droite EZ partagée en parties égales





rapport de la droite ΔE à la droite ΔB est donné, ainsi que le rapport de la droite ZB à la droite BΔ, que le rapport de la droite AB à la droite BH devienne égal à ce dernier rapport ; il s'ensuit que le rapport de la droite entière AZ à la droite ΔH est donné aussi. Derechef, puisque le rapport de la droite EΔ à la droite ΔB est donné, que le rapport de la droite AΘ à la droite BΘ devienne égal à celui-ci ; il s'ensuit que le rapport de la droite AB à la droite BΘ est donné aussi ; [donc, le point Θ est donné] (1) ; donc, le rapport restant de la droite AE à la droite ΘΔ est donné aussi. En conséquence, le rapport du rectangle compris sous les droites ZA, AE au rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΔH est donné aussi. Or, le rapport du rectangle compris sous les droites ZA, AE au carré de la droite ΓΔ est donné ; donc, le rapport du rectangle compris sous les droites HΔ, ΔΘ au carré de la droite ΔΓ est donné aussi. Et les deux points Θ, H sont donnés ; par conséquent, le point Γ appartient à une ellipse dans le premier cas, et à une hyperbole dans le second cas (2).

---

en Δ, à laquelle on ajoute en direction la droite AE, on a (Euclide, liv. II, prop. 6, énoncée p. 43, n. 3) : $ZA \times AE = \overline{A\Delta}^2 - \overline{E\Delta}^2$; donc, le rapport $\frac{ZA \times AE}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$ est donné aussi.

1. Les mots placés entre crochets sont abandonnés par Hultsch comme ayant été interpolés (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 1010, l. 8).

2. Le texte de la partie analytique de la démonstration est excessivement concis à partir de l'endroit où nous renvoyons à la note 3, page 796, et il passe sous silence certaines relations intermédiaires mises en évidence comme suit :

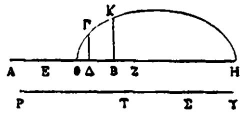
Le rapport $\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2}$ étant donné, $\frac{E\Delta}{\Delta B}$ est donné. Or, on a posé : $\Delta Z = E\Delta$; donc : $\frac{\Delta Z}{\Delta B}$ est donné. Dès lors, dans le premier cas (Euclide, *Données*, prop. 5, énoncée p. 28, n. 5), le rapport $\frac{\Delta Z}{BZ}$ est donné ; donc (Euclide, *Données*, prop. 8, énoncée p. 198, n. 2), le rapport, $\frac{ZB}{\Delta B}$ est donné aussi. Dans le second cas, où $\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2} < 1$, Le lieu recevra la synthèse suivante : Soient A, B les deux points donnés, et que le rapport donné du carré de la droite PT au carré de la droite TΣ soit celui de grandeur plus grande à plus petite dans le premier cas, et celui de grandeur plus petite à plus grande dans le second cas. Posons la droite TΥ égale à la droite PT ; faisons en sorte que la droite AB soit à la droite BH comme la droite ΥΣ est à la droite ΣT, et en sorte que la droite AΘ soit à la droite ΘB comme la droite PT est à la droite TΣ. Décrivons une ellipse autour de l'axe ΘH dans le premier cas, et une hyperbole autour de cet axe dans le second cas, de telle sorte que, si l'on prend un point tel que Γ sur celles-ci, et si l'on mène la perpendiculaire ΓΔ, le rapport du rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΔH au carré de la droite ΔΓ soit le rapport composé de celui que possède la droite TΣ avec la droite ΣΥ, de celui que possède la droite TΣ avec la droite ΣP et du rapport donné, qui est celui que possède le carré de la

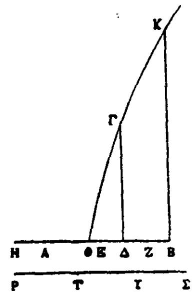
---

puisque $\frac{\Delta Z}{\Delta B}$ est donné, $\frac{\Delta B}{\Delta Z}$ est donné ; d'où (EUCLIDE, *Données*, prop. 5) $\frac{\Delta B}{BZ}$ est donné aussi, d'où : $\frac{BZ}{\Delta B}$ est donné. Posons : $\frac{AB}{BH}=\frac{BZ}{\Delta B}$. Dès lors, dans le premier cas, $\frac{AB+BZ}{BH+\Delta B}$ ou : $\frac{AZ}{\Delta H}$ est donné, et, dans le second cas, $\frac{AB-BZ}{BH-\Delta B}$ ou : $\frac{AZ}{\Delta H}$ est donné. Posons le rapport $\frac{A\Theta}{B\Theta}$ égal au rapport donné $\frac{E\Delta}{\Delta B}$; donc (EUCLIDE, *Données*, prop. 6, énoncée p. 210, n. 2), le rapport $\frac{AB}{\Delta B}$ est donné aussi. Or, ayant par construction : $\frac{A\Theta}{B\Theta}=\frac{E\Delta}{\Delta B}$, on a aussi : $\frac{A\Theta+B\Theta}{B\Theta}=\frac{E\Delta+\Delta B}{\Delta B}$ ou : $\frac{AB}{B\Theta}=\frac{EB}{\Delta B}$. Or, on a vu que $\frac{E\Delta}{\Delta B}$ est donné, d'où $\frac{EB}{\Delta B}$ est donné ; donc, $\frac{AB}{B\Theta}$ est donné aussi, d'où : $\frac{AB-EB}{B\Theta-\Delta B}$ ou $\frac{AE}{\Theta\Delta}$ est donné aussi. Or, on a vu que le rapport $\frac{AZ}{\Delta H}$ est donné ; donc, $\frac{AE\times AZ}{\Theta\Delta\times\Delta H}$ est donné. Or, on a vu (note 3, page 796) que le rapport $\frac{AE\times AZ}{\Delta\Gamma^2}$ est donné ; donc (EUCLIDE, *Données*, prop. 8), le rapport $\frac{\Theta\Delta\times\Delta H}{\Delta\Gamma^2}$ est donné aussi ; expression constante caractérisant une conique centrée. Or, par hypothèse (et EUCLIDE, *Données*, prop. 30, énoncée p. 229 n. 2, et prop. 25, énoncée p. 214, n. 6), le point Δ est donné ; donc, les points E, Z sont donnés aussi par construction. De plus, on a par construction : $\frac{AB}{BH}=\frac{BZ}{\Delta B}$, ainsi que : $\frac{A\Theta}{B\Theta}=\frac{E\Delta}{\Delta B}$; donc, les points H, Θ sont donnés. En conséquence, dans le premier cas, le point Γ appartient à l'ellipse de grand axe HΘ, et, dans le second cas, il appartient à l'hyperbole de diamètre transverse HΘ.

droite ΡΤ avec le carré de la droite ΤΣ, et abaissons la perpendiculaire ΒΚ. Je dis que la ligne ΘΚ satisfait à l'injonction [1].

En effet, menons la perpendiculaire ΓΔ ; faisons en sorte que la droite ΖΒ soit à la droite ΒΔ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΗ, et faisons en sorte que la droite ΕΔ soit à la droite ΔΒ comme la droite ΑΘ est à la droite ΘΒ, de manière que le rapport de la droite ΔΗ à la droite ΑΖ soit le même que celui de la droite ΗΒ à la droite ΒΑ, c'est-à-dire de la droite ΤΣ à la droite ΣΥ, et de manière que le rapport de la droite ΘΔ à la droite ΑΕ soit le même que celui de la droite ΤΣ à la droite ΣΡ (car cela a été démontré dans l'analyse) ; de telle sorte que le rapport du rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΔΗ au rectangle compris sous les droites ΖΑ, ΑΕ se compose de celui que possède la droite ΤΣ avec la droite ΣΥ et de celui que possède la droite ΤΣ avec la droite ΣΡ. Mais, puisque le rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΔΗ a avec le carré de la droite ΔΓ le rapport composé de celui que possède la droite ΤΣ avec la droite ΣΥ, de celui que possède la droite ΤΣ avec la droite ΣΡ et du rapport donné ; que le rapport donné est celui du carré de la droite ΡΤ au carré de la droite ΤΣ ; que le rapport du rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΔΗ au carré de la droite ΔΓ se compose de celui que possède le rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΔΗ avec le rectangle compris sous les droites ΖΑ, ΑΕ et de celui que possède le rectangle compris sous les droites ΖΑ, ΑΕ avec le carré de la droite ΔΓ, et que le rapport du rectangle compris sous les droites ΘΔ, ΔΗ au rectangle compris sous les droites ΖΑ, ΑΕ est le même que le rapport composé de celui que possède la droite ΤΣ avec la droite ΣΥ et de celui que possède la droite ΤΣ avec la droite ΣΡ, il s'ensuit que le rapport restant du rectangle compris sous les droites ΖΑ, ΑΕ au carré de la droite ΔΓ est le même que celui du carré de la droite ΡΤ au carré de la droite ΤΣ,





1. ποιεῖ τὸ ἐπίταγμα, réalise la (condition) imposée (de constituer le lieu du point Γ).

c'est-à-dire du carré de la droite EΔ au carré de la droite ΔB, et que tous sont à tous (1). En conséquence, le carré de la droite PT est au carré de la droite TΣ, ce qui est le rapport donné, comme le carré de la droite AΔ est aux carrés des droites ΓΔ, ΔB ; de sorte que la ligne ΘK, qui est une partie de la section, constitue le lieu (2).

---

1. καὶ πάντα πρὸς πάντα, c'est-à-dire que tous les antécédents sont à tous les conséquents dans le même rapport.

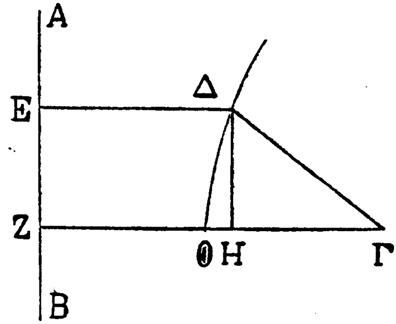
2. Le passage étant d'une lecture un peu pénible, reprenons cette synthèse du lieu du point Γ explicitement en notations actuelles :

On a par construction: $\frac{ZB}{B\Delta}=\frac{AB}{BH}=\frac{\Sigma\Upsilon}{T\Sigma}$. Dès lors, dans le cas de la première figure, où l'on a : $\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}>1$, on a : $\frac{ZB+AB}{B\Delta+BH}=\frac{AB}{BH}$ ou : $\frac{AZ}{\Delta H}=\frac{AB}{BH}=\frac{\Sigma\Upsilon}{T\Sigma}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Delta H}{AZ}=\frac{BH}{AB}=\frac{T\Sigma}{\Sigma\Upsilon}$, et, dans la seconde figure, où le rapport donné est plus petit que l'unité, on a : $\frac{AB-ZB}{BH-B\Delta}=\frac{AB}{BH}$ ou : $\frac{AZ}{\Delta H}=\frac{AB}{BH}=\frac{\Sigma\Upsilon}{T\Sigma}$ ou, comme le texte : $\frac{\Delta H}{AZ}=\frac{BH}{AB}=\frac{T\Sigma}{\Sigma\Upsilon}$ (I) D'autre part, on a par construction : $\frac{E\Delta}{\Delta B}=\frac{A\Theta}{\Theta B}=\frac{PT}{T\Sigma}$, d'où : $\frac{A\Theta+\Theta B}{\Theta B}=\frac{PT+T\Sigma}{T\Sigma}$ ou : $\frac{AB}{\Theta B}=\frac{P\Sigma}{T\Sigma}$. Or, on a démontré dans la partie analytique de la démonstration (voir note) que l'on a : $\frac{AB}{\Theta B}=\frac{EB}{\Delta B}$; donc : $\frac{AB-EB}{\Theta B-\Delta B}=\frac{AB}{\Theta B}$ ou : $\frac{AE}{\Theta\Delta}=\frac{AB}{\Theta B}$, d'où : $\frac{AE}{\Theta\Delta}=\frac{P\Sigma}{T\Sigma}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta\Delta}{AE}=\frac{T\Sigma}{P\Sigma}$ (II). Dès lors, les relations (I) et (II) donnent, comme le texte : $\frac{\Theta\Delta\times\Delta H}{AZ\times AE}=\frac{T\Sigma}{\Sigma\Upsilon}\times\frac{T\Sigma}{P\Sigma}$ (III). Or, on a par construction : $\frac{\Theta\Delta\times\Delta H}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{T\Sigma}{\Sigma\Upsilon}\times\frac{T\Sigma}{\Sigma P}\times\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$, et l'on peut écrire : $\frac{\Theta\Delta\times\Delta H}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{\Theta\Delta\times\Delta H}{AZ\times AE}\times\frac{AZ\times AE}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$; donc, on a : $\frac{\Theta\Delta\times\Delta H}{AZ\times AE}\times\frac{AZ\times AE}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{T\Sigma}{\Sigma\Upsilon}\times\frac{T\Sigma}{\Sigma P}\times\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$ ou, en présence de la relation (III) : $\frac{T\Sigma}{\Sigma\Upsilon}\times\frac{T\Sigma}{P\Sigma}\times\frac{AZ\times AE}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{T\Sigma}{\Sigma\Upsilon}\times\frac{T\Sigma}{P\Sigma}\times\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$ ou, comme le texte : $\frac{AZ\times AE}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$. Or, $\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$ est le rapport donné, et (voir début de la démonstration) on a posé : $\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2}=$ rapport donné $\frac{\overline{PT}^2}{\overline{PE}^2}$; donc : $\frac{AZ\times AE}{\overline{\Delta\Gamma}^2}=\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2}=\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$, d'où : $\frac{AZ\times AE+\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{\Delta B}^2}=\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$. Or, considérant la droite ZE divisée en deux parties égales en Δ, à laquelle on ajoute en direction la droite AE, on a (Euclide, liv. II, prop. 6) : $AZ\times AE+\overline{E\Delta}^2=\overline{A\Delta}^2$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{\Delta B}^2}=\frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}=\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2}$ rapport donné ; relation caractérisant une ellipse dans le premier cas, et une hyperbole dans le second cas, comme lieu du point Γ.

Proposition 238. — Les choses s'établissant de cette manière, venons-en à la proposition du début ([1]). Soit la droite AB donnée de position ; soit un point Γ donné dans le même plan ; menons la droite ΔΓ et la perpendiculaire ΔE ([2]), et que le rapport ([3]) soit celui de la droite ΓΔ à la droite ΔE. Je dis que le point Δ est lié à une section de cône, et que celle-ci est une parabole lorsque le rapport est celui de grandeur égale à grandeur égale, une ellipse lorsqu'il est de grandeur plus petite à plus grande, et une hyperbole lorsqu'il est de grandeur plus grande à plus petite ([4]).

En effet, que le rapport soit d'abord celui de grandeur égale à grandeur égale, c'est-à-dire que la droite ΓΔ soit d'abord égale à la droite ΔE. Il faut démontrer que le point Δ est lié à une parabole.

Menons la perpendiculaire ΓZ (elle est donc donnée de position) ([5]), et menons la droite ΔH parallèle à la droite AB. Et puisque le carré de la droite EΔ est égal au carré de la droite ΔΓ ; que la droite EΔ est égale à la droite ZH, et que le carré de la droite ΔΓ équivaut aux carrés des droites ΔH, HΓ, il s'ensuit que le carré de la droite ZH équivaut aux carrés des droites ΔH, HΓ. De plus, la droite ZΓ est donnée de position, et les deux points Z, Γ sont donnés ; par conséquent, le point Δ est lié à une parabole ; car cela a été démontré précédemment ([6]).



1. C'est-à-dire à la proposition qui a été simplement énoncée sous le n° 238 avant la proposition 236, voir p. 793.

2. Perpendiculaire menée du point Δ donné sur la droite donnée de position AB.

3. C'est-à-dire le rapport donné ou constant.

4. Cette proposition est une des plus remarquables de l'ouvrage de Pappus ; elle contient la propriété de la directrice dans les coniques en énonçant, en d'autres termes, que le lieu d'un point dont les distances à un point donné et à une droite donnée de position sont entre elles dans un rapport donné est une section conique, laquelle est une parabole si le rapport est l'unité, une ellipse s'il est plus petit que l'unité et une hyperbole s'il est plus grand que l'unité.

5. Euclide, *Données*, prop. 30, énoncée p. 229, n. 2.

6. Le rapport donné $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E} = 1$ ou $\Delta\Gamma = \Delta E$, d'où : $\overline{\Delta\Gamma}^2 = \overline{\Delta E}^2 = \overline{ZH}^2$. Or, $\overline{\Delta\Gamma}^2 = \overline{\Delta H}^2 + \overline{H\Gamma}^2$; donc : $\overline{ZH}^2 = \overline{\Delta H}^2 + \overline{H\Gamma}^2$. Or, la droite ZΓ est donnée de

La synthèse se fera donc de la manière suivante : Soit AB la droite donnée de position, et soit Γ le point donné. Menons la perpendiculaire ΓZ et, la droite ΓZ étant donnée de position, et les deux points Z, Γ étant donnés, trouvons la parabole ΔΘ de telle sorte que, si l'on prend un point tel que Δ, et si l'on mène la perpendiculaire ΔH, le carré de la droite ZH soit équivalent aux carrés des droites ΔH, HΓ. Je dis que la ligne ΔΘ constitue le lieu, c'est-à-dire que, si l'on mène une droite telle que ΔΓ et la perpendiculaire ΔE, la droite ΓΔ est égale à la droite ΔE.

Menons la perpendiculaire ΔH ; donc, du fait de la parabole, le carré de la droite ZH équivaut aux carrés des droites ΔH, HΓ. Et la droite EΔ est égale à la droite ZH, tandis que le carré de la droite ΔΓ équivaut aux carrés des droites ΔH, HΓ ; par conséquent, le carré de la droite ΔΓ est égal au carré de la droite ΔE ; donc, la droite ΓΔ est égale à la droite ΔE ; donc, la ligne ΔΘ constitue le lieu.

. . . . (1)

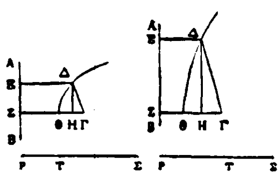
---

position, et les points Z, Γ sont donnés ; donc (lemme III ou proposition 236), le point Δ appartient à une parabole.

1. Une lacune qui affecte tous les manuscrits mis au jour jusqu'ici a fait perdre la dernière partie de la démonstration qui devait s'étendre aux deux autres cas, de l'ellipse et de l'hyperbole. Commandin a donné une reconstitution conjecturale de cette dernière partie de la proposition. Nous donnons ici une traduction libre et résumée du texte latin de cette reconstitution (cfr. *loc. cit.*, pp. 44-46) :

Que les choses soient les mêmes que précédemment, et que le rapport de ΓΔ à ΔE soit de plus petit à plus grand, ou de plus grand à plus petit. Il faut démontrer que, dans le premier cas, le point Δ appartient à une ellipse et, dans le second cas, à une hyperbole.

En effet, que les choses soient établies comme plus haut. On aura donc : $\overline{ZH}^2 \lessgtr \overline{\Delta H}^2 + \overline{H\Gamma}^2$. Or, la droite ZΓ est donnée de position, et les deux points Z, Γ sont donnés ; donc, le point Δ appartient à une ellipse ou à une hyperbole ; car cela a été démontré au lemme IV. La synthèse sera la suivante : Soit de nouveau la droite AB donnée de position, et soit Γ le point donné. Que le rapport donné soit celui de PT à TΣ, et qu'il soit celui de plus petite à plus grande grandeur dans le premier cas, et celui de plus grande à plus petite grandeur dans le second cas. Menons la perpendiculaire ΓZ et, la droite ΓZ étant donnée de position et les points Z, Γ étant donnés, trouvons, dans le premier cas, la portion d'ellipse ΔΘ et, dans le second cas, la portion d'hyperbole ΔΘ, de manière que, si l'on prend dans chaque cas un point Δ, et si l'on mène la perpendiculaire ΔH, on ait : $\frac{\overline{ZH}^2}{\overline{\Delta H}^2 + \overline{H\Gamma}^2} = \frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$. Je dis que la ligne ΔΘ constitue le lieu, c'est-à-dire que, si

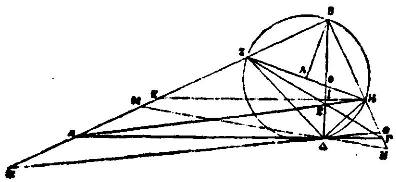


LEMMES DU LIEU RÉSOLU.

I.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ ayant l'angle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ droit ; que la droite ΑΖ soit à la droite ΖΒ et la droite ΒΗ à la droite ΗΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ, et menons les droites de jonction ΑΕΗ, ΓΕΖ, ΒΕΔ ; je dis que la droite ΒΔ est perpendiculaire sur la droite ΑΓ (1).

Puisque la droite ΑΖ est à la droite ΖΒ et la droite ΒΗ à la droite ΗΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ, il s'ensuit que la droite ΒΗ est à la droite ΗΓ comme la droite ΑΖ est à la droite ΒΖ. Par composition et permutation, la droite ΖΒ est à la droite ΗΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ, Mais, la droite ΒΗ est à la droite ΗΓ comme la droite ΑΒ est à la droite ΒΓ ; donc, la droite ΒΗ est à la droite ΗΓ comme la droite ΖΒ est à la droite ΗΓ. En conséquence, la droite ΖΒ est égale à la droite ΒΗ (2) ; de sorte que si l'on mène la droite de jonction ΖΗ, l'angle compris sous les droites ΒΖ, ΖΘ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΒΗ, ΗΘ (3).



---

l'on mène une droite quelconque ΓΔ et la perpendiculaire ΔΕ, on a : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E} = \frac{PT}{T\Sigma}$.

Menons la perpendiculaire ΔΗ. Dès lors, par suite de la construction de l'ellipse ou de l'hyperbole, on a : $\frac{\overline{ZH}^2}{\overline{\Delta H}^2 + \overline{H\Gamma}^2} = \frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$. Or, on a par construction : $ZH = E\Delta$ et $\overline{\Delta\Gamma}^2 = \overline{\Delta H}^2 + \overline{H\Gamma}^2$; donc, $\frac{\overline{E\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2} = \frac{\overline{PT}^2}{\overline{T\Sigma}^2}$, d'où : $\frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{PT}{T\Sigma}$; donc, la ligne ΔΘ constitue le lieu.

1. Ce lemme et le suivant, relatifs au champ de l'analyse, ont fait l'objet de remaniements de la part de scoliastes qui en ont fortement altéré les démonstrations. La figure qui accompagne le texte présente la lettre *iota* que les géomètres grecs n'utilisent qu'exceptionnellement dans leurs démonstrations.

2. On a par hypothèse : $\frac{BH}{H\Gamma} = \frac{AZ}{BZ}$, d'où : $\frac{BH + H\Gamma}{H\Gamma} = \frac{AZ + BZ}{BZ}$ ou : $\frac{B\Gamma}{H\Gamma} = \frac{AB}{BZ}$, d'où : $\frac{BZ}{H\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma}$. Or, on a aussi par hypothèse : $\frac{BH}{H\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma}$; donc : $\frac{BH}{H\Gamma} = \frac{BZ}{H\Gamma}$, d'où : $BZ = BH$.

3. L'égalité de la note précédente entraîne évidemment : $\widehat{BZ\Theta} = \widehat{BH\Theta}$ et, à partir de cet endroit, la démonstration a subi des altérations qui la corrompent visiblement.

Et la droite ZΘ est plus grande que la droite ΘH ; car, si l'on mène par le point H la droite HIK parallèle à la droite AΓ, l'angle compris sous les droites BΘ, ΘH, équivalent aux angles opposés compris sous les droites ΘH, HI et sous les droites ΘI, IH, est plus grand que l'angle compris sous les droites HΘ, ΘI, c'est-à-dire l'angle aigu compris sous les droites ZB, BΘ ; de sorte que l'angle compris sous les droites HB, BΘ est plus petit que l'angle compris sous les droites ZB, BΘ (1). Coupons la droite ZH en deux parties égales au point Λ ; il s'ensuit que le cercle décrit du centre Λ, à la distance de l'une des droites ΛZ, ΛB, ΛH, passe par le point Δ, et que le quadrilatère ΔZBH sera inscrit dans ce cercle (car cela sera démontré dans la suite). L'angle compris sous les droites BΔ, ΔZ est égal à l'angle compris sous les droites BΔ, ΔH, et ils sont l'un et l'autre un demi-angle droit (car chacun des angles compris sous les droites BH, HZ et sous les droites BZ, ZH est un demi-angle droit) (2). De plus, l'angle compris sous les droites ZΔ, ΔH est droit. Dès lors, je dis que l'angle compris sous les droites AΔ, ΔB est droit.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, il est plus grand ou plus petit qu'un angle droit.

Qu'il soit d'abord plus grand qu'un angle droit ; que l'angle compris sous les droites BΔ, ΔM soit droit ; prolongeons les droites HΓ, MΔ, et qu'elles se rencontrent au point N. Dès lors, puisque le triangle rectangle MBΔ est semblable au triangle rectangle MBN, et que chacun des angles compris sous les droites BΔ, ΔZ et sous les droites ZΔ, ΔM est la moitié d'un angle droit, la droite MΔ est donc à la droite ΔB comme la droite MZ est à la droite ZB (3).

---

1. Il faut évidemment lire : $\widehat{H\Theta I} = \widehat{B\Theta Z}$ (au lieu de $\widehat{ZB\Theta}$), c'est-à-dire : $\widehat{B\Theta H} > \widehat{B\Theta Z}$, ce qui entraîne, dans le triangle isocèle ZBH : $\widehat{HB\Theta} < \widehat{ZB\Theta}$.
Au reste, l'inégalité $Z\Theta > \Theta H$, qui, comme sa démonstration, se rapporte au cas de la figure, où $AB > B\Gamma$, n'imporoe pas à la démonstration du théorème, et toute la phrase est à considérer comme un hors-d'œuvre.

2. On a : $BZ = BH$; donc : $\widehat{B\Delta Z} = \widehat{B\Delta H}$ et $\widehat{B\Delta Z} = \widehat{BHZ} = \frac{1}{2}$ angle droit, et $\widehat{B\Delta H} = \widehat{BZH} = \frac{1}{2}$ angle droit.

3. En première hypothèse : $\widehat{B\Delta M} = 1$ angle droit. Or, on a démontré que l'on a : $\widehat{B\Delta Z} = \frac{1}{2}$ angle droit ; donc : $\widehat{B\Delta M} - \widehat{B\Delta Z} = \widehat{Z\Delta M} = \frac{1}{2}$ angle droit ; d'où, considérant l'angle $B\Delta M$ partagé en deux parties égales par la droite ΔZ, on a (Euclide, liv. VI, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4) : $\frac{M\Delta}{\Delta B} = \frac{MZ}{ZB}$.

Mais, la droite BΔ est à la droite ΔN, c'est-à-dire la droite BH à la droite HN, comme la droite MΔ est à la droite ΔB (car l'angle compris sous les droites BΔ, ΔN est aussi coupé en deux parties égales par la droite ΔH) ; par conséquent, la droite BH est à la droite HN comme la droite MZ est à la droite ZB [1]. Derechef, puisqu'on a supposé que la droite BH est à la droite HΓ comme la droite AZ est à la droite ZB, il s'ensuit que la droite MZ a avec la droite ZB un rapport plus petit que celui de la droite BH avec la droite HN ; ce qui est impossible, car on a démontré que la droite BH est à la droite HN comme la droite MZ est à la droite ZB. En conséquence, l'angle compris sous les droites BΔ, ΔA n'est pas plus grand qu'un angle droit [2].

On démontre pareillement que l'angle compris sous les droites AΔ, ΔB n'est pas plus petit qu'un angle droit en menant par le point Δ la droite ΞΔO perpendiculaire à la droite ΔB. En effet la droite BH sera de nouveau à la droite HO comme la droite ΞZ est à la droite ZB, et on montrera que la droite AZ a avec la droite ZB un rapport plus petit, à fortiori, que celui de la droite BH avec la droite HΓ ; ce qui est impossible ; car on a supposé que la droite BH est à la droite HΓ comme la droite AZ est à la droite ZB [3].

---

1. Les deux triangles semblables, parce que supposés rectangles, BΔM, BΔN donnent : $\frac{B\Delta}{\Delta N}=\frac{M\Delta}{B\Delta}$. Or, l'angle BΔN est supposé droit, et l'angle BΔH ayant été démontré être égal à un demi-angle droit, on a : $\widehat{H\Delta N} = \frac{1}{2}$ angle droit, d'où, considérant l'angle BΔN coupé en deux parties égales par la droite ΔN, on a (EUCLIDE, liv. VI, prop. 3) : $\frac{B\Delta}{\Delta N}=\frac{BH}{HN}$; donc : $\frac{BH}{HN}=\frac{M\Delta}{B\Delta}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente : $\frac{BH}{HN}=\frac{MZ}{ZB}$.

2. On a par hypothèse : $\frac{BH}{H\Gamma}=\frac{AZ}{ZB}$. Or, $AZ > MZ$ et $H\Gamma < HN$; donc $\frac{BH}{HN}>\frac{MZ}{ZB}$; ce qui est en contradiction avec la dernière égalité de la note précédente.

3. La seconde partie de la démonstration aboutit, comme plus haut, à la relation : $\frac{BH}{HO}=\frac{\Xi Z}{ZB}$. Or, $AZ < \Xi Z$, et $HO > H\Gamma$; donc, $\frac{BH}{H\Gamma}>\frac{AZ}{ZB}$; ce qui est contraire à l'hypothèse : $\frac{BH}{H\Gamma}=\frac{AZ}{ZB}$.

II.

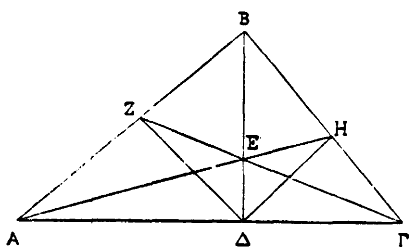
Que la droite AZ soit à la droite ZB et la droite BH à la droite HΓ comme la droite AB est à la droite BΓ ; je dis que la droite ZB est égale à la droite BH (1).

Puisque la droite BH est à la droite HΓ comme la droite AZ est à la droite ZB, par composition et permutation, la droite ZB est à la droite HΓ comme la droite AB est à la droite BΓ, c'est-à-dire comme la droite BH est à la droite HΓ ; donc, la droite ZB est égale à la droite BH (2).

III.

Soit le triangle rectangle ABΓ dont l'angle B est droit ; que la droite AZ soit à la droite ZB et la droite BH à la droite HΓ comme la droite AB est à la droite BΓ, et menons les droites de jonction ΓEZ, AEH, BEΔ ; je dis que la droite BΔ est perpendiculaire sur la droite AΓ.

Qu'il en soit ainsi. Dès lors, les triangles ABΔ, BΔΓ sont semblables au triangle entier ABΓ et semblables entre eux ; donc, la droite AΔ est à la droite ΔB comme la droite AB est à la droite BΓ, c'est-à-dire la droite AZ à la droite ZB. En conséquence, l'angle compris sous les droites AΔ, ΔB est coupé en deux parties égales par la droite ZΔ (3) ; donc, l'angle compris sous les droites ZΔ, ΔB est la moitié de l'angle droit. Pour les mêmes raisons, l'angle compris sous les droites BΔ, ΔΓ est coupé en deux parties égales par la droite ΔH ; donc, l'angle compris sous les droites BΔ, ΔH est



1. Voir la figure de la proposition précédente. La présente proposition reproduit le point démontré au début de la démonstration de cette proposition précédente.
2. La démonstration répète, en moins de mots, la partie iuitiale de la démonstration de la proposition précédenre.
3. EUCLIDE, liv. IV, prop. 3, énoncée p. 220, n. 4.

la moitié d'un angle droit. En conséquence, l'angle compris sous les droites ZΔ, ΔH est droit. Or, l'angle compris sous les droites ZB, BH est droit aussi ; donc, le quadrilatère BZΔH est inscrit dans un cercle. Et l'angle compris sous les droites ZΔ, ΔB est égal à l'angle compris sous les droites BΔ, ΔH ; donc, la droite ZB est aussi égale à la droite BH [1] [cela a lieu en vertu de ce qui a été démontré précédemment] [2] ; . . . .
. . . . [3].

1. Euclide, liv. III, prop. 26, énoncée p. 148, n. 3, et prop. 29, énoncée p. 434, n. 4.
2. La phrase que nous plaçons entre crochets a probablement été interpolée.
3. Le livre VII se termine dans une lacune qui s'étend sans doute à la partie synthétique de cette proposition.
Le manuscrit de Paris (Codex Parisinus 2440) présente ici l'annotation : Τέλος τοῦ ἑβδόμου τῆς Πάππου τοῦ ἀλεξ συναγωγῆς ὅ περιέχει τὴν τάξιν καὶ τὴν περιοχὴν καὶ τὰ λήμματα τοῦ ἀναλυομένου τόπου ; c'est-à-dire : Fin du septième (livre) de la Collection de Pappus d'Alexandrie, contenant l'état, le sommaire et les lemmes du lieu résolu.

LIVRE VIII DE LA COLLECTION DE PAPPUS D'ALEXANDRIE

contenant des problèmes mécaniques variés et délectables.

La théorie mécanique, mon fils Hermodore, étant utile aux choses multiples et importantes qui se présentent dans la vie, elle mérite à juste titre la plus grande faveur chez les philosophes, et fait l'ambition de tous les mathématiciens, parce qu'elle est pour ainsi dire la première qui s'applique aux recherches physiques sur la matière constituant les éléments du Monde. Considérant le repos (1), la sollicitation (2) des corps et leur mouvement de translation (3) dans l'Univers, cette théorie, organisée au moyen de théorèmes dominés par la matière elle-même (4), fournit la raison des corps qui se meuvent de par nature (5), et elle en force

---

1. στάσις, repos ou état statique des corps.

2. φορά, expression que la version latine de Commandin rend par le mot « latio », action de porter (cfr. *loc. cit.*, p. 447), et la version latine de Hultsch, par le mot « gravitas », pesanteur (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 1082, l. 2), mais à laquelle il y a lieu de donner plutôt le sens de « tendance au mouvement » ou de sollicitation (des corps), c'est-à-dire l'état dynamique en opposition avec l'état statique (στάσις) qui précède dans la phrase. Ce sens est moins général que celui qu'Aristote (*Physique*, liv. V, chap. 2) donne au mot φορά, qu'il considère à peu près comme synonyme de l'expression de la note suivante qui désigne le transfert d'un lieu dans un autre. La physique ancienne exprimait la tendance au mouvement suivant la verticale seule par le mot ῥοπή, d'où ἰσορροπία, équilibre, et, dans le cas de la suspension d'un grave, cette tendance est considérée comme étant proportionnelle au poids ainsi qu'au bras de levier dans les *Mécaniques* d'Aristote et dans les commentaires d'Eutocius d'Ascalon sur le traité de *l'Équilibre des Plans* d'Archimède.

3. ἡ κατὰ τόπον κίνησις (τῶν σωμάτων), le mouvement (des corps) par rapport au lieu, c'est-à-dire le mouvement de translation (des corps) ; expression employée par Aristote (*Physique*, liv. V, chap. 2) pour désigner le mouvement local d'après son concept général de la mutation exprimée par le mot κίνησις.

4. C'est-à-dire dominés par des postulats conformes aux données de la physique.

5. κατὰ φύσιν, conformément à la nature (même des corps), c'est-à-dire à l'intervention de l'action naturelle de la pesanteur ou, en général, de l'attraction mutuelle des corps.

d'autres, en des mouvements de sens opposés (1), à se déplacer contre nature (2) hors des lieux qui leur sont propres.

Les mécaniciens partisans d'Héron disent qu'une partie de la mécanique est rationnelle, l'autre partie appliquée (3), et que la partie rationnelle se compose de la géométrie, de l'arithmétique, de l'astronomie et des études physiques (4) ; tandis que la partie appliquée comprend l'art de travailler l'airain (5), l'art de bâtir (6), l'art de construire en bois (7), l'art de la peinture (8) et l'exercice manuel de ces arts. On dit que celui qui, après s'être adonné dès son enfance aux sciences que nous venons de mentionner, a acquis de l'expérience dans les arts précités et est, en outre, doué d'un esprit ouvert, sera un excellent inventeur et constructeur d'ouvrages mécaniques. Mais, comme il est impossible qu'un même homme devienne supérieur dans autant d'objets d'études, et apprenne en même temps les arts que nous avons dits, il est prescrit à celui qui désire exercer les travaux mécaniques de tirer parti des arts mis à sa portée suivant les avantages particuliers qu'ils lui présentent.

Les arts les plus nécessaires aux usages de la vie (9) sont les suivants : l'art des artificiers (10) qui, eux aussi, ont été appelés

1. εἰς ἐναντίας κινήσεις, dans des mouvements opposés à la sollicitation naturelle des corps.

2. παρὰ φύσιν, contre nature, d'une manière opposée à l'action de la pesanteur ou de l'attraction mutuelle des corps.

3. χειρουργικὸς, qui a besoin de l'application de la main (χεὶρ), c'est-à-dire (la mécanique) pratique ou appliquée.

4. καὶ τῶν φυσικῶν λόγων, et des études des choses naturelles, c'est-à-dire de la physique.

5. ἡ χαλκευτικὴ (sous-entendu τέχνη), l'art de travailler l'airain, la métallurgie.

6. οἰκοδομικὴ (sous-entendu τέχνη), l'art de construire une maison, ou art de bâtir.

7. τεκτονικὴ (sous-entendu τέχνη), l'art de construire en bois, c'est-à-dire la charpenterie.

8. ζωγραφικὴ (sous-entendu τέχνη), l'art de la peinture.

9. Le texte présente ici une phrase interpolée qui constitue une simple remarque de scoliaste, passée de marge en texte des manuscrits : μηχανικὴ προηγουμένη τῆς αρχιτεκτονικῆς, la mécanique (étant la chose) principale de l'architecture (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1024, l. 13).

10. μαγγανάριοι, ceux qui fabriquent des artifices, c'est-à-dire des instruments propres à faciliter le travail manuel. L'expression dérive du mot μάγγανον, artifice, employé par Héron pour désigner en particulier l'armature qui relie les axes des poulies d'une moufle, c'est-à-dire la chape de moufle.

mécaniciens par les Anciens (car ils enlèvent en hauteur de grands fardeaux, contrairement à la nature de ceux-ci, en les faisant mouvoir par une faible puissance au moyen de machines) ; puis, l'art des fabricants d'engins requis pour la guerre (1), lesquels sont aussi appelés mécaniciens (car des traits de pierre, de fer et d'autres objets de ce genre sont envoyés sur une grande longueur de trajet par les catapultes (2) dont ils sont les auteurs) ; enfin, à la suite de ces derniers, l'art de ceux qui sont encore une fois appelés particulièrement fabricants de machines (3) (car l'eau est aisément élevée de grande profondeur au moyen des machines d'épuisement qu'ils construisent). Les Anciens appellent aussi mécaniciens les illusionnistes (4), dont les uns travaillent avec art au moyen des vents, comme Héron dans *Les Pneumatiques* (5), dont d'autres se proposent d'imiter les mouvements des êtres animés au moyen de cordes à boyaux et de cordes de sparte,

1. οἱ ὀργανοποιοί πρὸς τὸν πόλεμον ἀναγκαιοί, les fabricants d'instruments nécessaires pour la guerre. Voir à ce sujet les ouvrages suivants : KOECHLY et RÜSTOW, *Griechische Kriegssteller*, 1883 ; M. DE ROCHAS D'AIGLUN, *La Poliorcétique des Grecs*, Paris, 1872 ; *La Chirobaliste de Héron d'Alexandrie traduite du grec en collaboration avec Vincent, de l'Institut, et nouvellement réintégrée dans sa batterie et dans ses pivots, par Victor Prou*. Paris, 1862.

2. ὄργανα καταπαλτικά, les instruments propres à lancer contre (quelque chose) ; expression dont la grécité a été conservée dans le mot catapulte.

3. μηχανοποιοί, faiseurs de machines ; expression employée par Héron concurremment avec μηχανικοί (sous-entendu ἄνθρωποι), mécaniciens.

4. Θαυμασιουργοί, ceux qui font voir des choses étonnantes, ou qui fabriquent des θαύματα, c'est-à-dire des jouets mécaniques plus ou moins extraordinaires, ou des objets plus relevés, tels que des orgues hydrauliques et des horloges mues par l'eau avec figurines mobiles indiquant les heures.

5. Πνευματικά, les *Pneumatiques*, titre d'un ouvrage d'Héron d'Alexandrie sur les machines à vent, ou plutôt à air comprimé par de l'eau dans des vases appropriés. Cet ouvrage a été publié pour la première fois dans une version latine de Commandin sous le titre : *Heronis Alexandrini Spiritalium liber, a Fed. Commandino ex graeco nuper in latinum conversus*. Urbini, 1575, in-4° ; il fut réimprimé à Paris, en 1583, puis à Amsterdam, en 1680. Une traduction italienne a été donnée sous le titre : *Spiritali di Herone Alessandrino ridotti in lingua volgare da Aless. Giorgi da Urbino*. Urbino, 1592, in-4°. Une seconde traduction italienne a pour titre : *Artificiosi et curiosi moti spiritali di Herone, trad. da J. B. Aleotti*. Bologna, 1647, in-4°. On possède une traduction anglaise intitulée : *Hero Alexandrinus. The Pneumatics. From the original greek, translated by J. G. Greenwood, edited by B. Woodcraft*. London, 1851, in-4°. Une traduction française est due à Ernest Lacoste sous le titre : *Les Pneumatiques de Héron d'Alexandrie*. Paris, 1883. Une édition critique avec traduction allemande des œuvres complètes d'Héron a été publiée sous le titre : *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia (Bearbeitet von W. Schmidt, L. Nix, H. Schöne, L. J. Heiberg. Griech. und Deutsch)*. Lipsiae, 1899-1912, 5 vol. in-8°. Voir vol. I, *Pneumatica et Automata recognovit G. Schmidt*. Lipsiae, 1899.

comme Héron dans *Les Automates* (1) et dans *Les Équilibres* (2), et dont d'autres le font au moyen de corps flottant dans l'eau, comme Archimède dans *Les Corps flottants* (3), ou à l'aide de machines indiquant les heures au moyen de l'eau (4), comme Héron dans *Les Vaisseaux renfermant de l'eau* (5) ; ce qui paraît avoir quelque chose de commun avec la science gnomonique (6). Enfin, on appelle encore mécaniciens ceux qui sont versés dans la fabrication de la sphère (7) et construisent une représentation du ciel à l'aide d'un mouvement uniforme et circulaire de l'eau.

D'aucuns disent que la cause et la raison de toutes ces choses

---

1. αὐτόματα, ouvrages mécaniques où il y a du mouvement propre. Le texte grec de l'ouvrage d'Héron sur la fabrication des automates (περὶ Αὐτοματοποιητικῶν) a fait l'objet de l'édition critique de G. Schmidt indiquée à la note précédente. Cette édition avait été précédée d'une traduction italienne intitulée: *Di Herone Alessandrino di gli automati overo machine se moventi, libri due, trad. dal graeco da Bernardo Baldi, abbate de Guastalla.* in Venetia, 1589, pet. in-4°. Voir aussi : *Le théâtre des automates en Grèce, par Victor Prou.* Paris, 1884.

2. Ζύγια, les équilibres, titre d'un ouvrage perdu d'Héron relatif à des objets reliés deux à deux dans une position d'équilibre. D'après H. Martin, cet ouvrage « concernait sans doute certaines petites machines amusantes, construites d'après les conditions d'équilibre et de mouvement des corps solides autour d'un point d'appui ou de suspension » (*Th. H. Martin. Recherches sur la vie et les écrits d'Héron d'Alexandrie, et sur les ouvrages mathématiques grecs qui ont été attribués à un auteur nommé Héron*, dans *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, 1e série, t. IV. Paris, 1854, p. 42).

3. Ὀχουμένων, *Des Corps flottants*, titre du célèbre traité dans lequel Archimède se révèle le fondateur de l'hydrostatique (*Œuvres complètes d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 407-446 ; ou bien édition du texte grec par Heiberg, vol. II, pp. 318-413).

Bien que ce traité d'Archimède appartienne entièrement à la mécanique rationnelle, le rapprochement que Pappus en fait avec des ouvrages de mécanique appliquée s'explique en raison de ce que le second livre du traité *Des Corps flottants*, qui présente la théorie du métacentre, étudie les conditions d'équilibre de segments de paraboloïdes flottant sur l'eau, dont la position initiale change d'une manière paradoxale suivant leur forme et leur densité, et qui constituent ainsi en quelque sorte un jouet hydrostatique, analogue au ludion de la physique amusante.

4. ὡρολόγιον, (machine), qui indique les heures, (δι' ὕδατος) au moyen de l'eau, c'est-à-dire l'horloge hydraulique.

5. ὑδρεῖον, expression désignant un vaisseau destiné à recueillir ou à contenir de l'eau. L'ouvrage d'Héron mentionné par Pappus dans l'expression : ὡς Ἥρων ὑδρείοις ne nous est pas parvenu. Il avait probablement trait aux machines dans lesquelles interviennent principalement des vases dans lesquels ou d'où s'écoule de l'eau, telles que la fontaine connue sous le nom d'Héron et les horloges hydrauliques, ou clepsydres, attribuées à Ctésibius.

6. γνωμονικός, qui a rapport à la confection des cadrans solaires c'est-à-dire à la gnomonique.

7. σφαιροποιία, la fabrication de la sphère (céleste) ou la Sphéropée.

ont été reconnues par Archimède de Syracuse, et il est réellement le seul qui, jusqu'à nous, dans la vie (1), ait usé d'une nature et d'une dextérité de l'esprit aussi diversifiées pour toutes choses, comme le déclare aussi Géminus le Mathématicien dans son livre : *L'Ordonnance des Mathématiques* (2). Au reste, Carpos d'Antioche (3) dit quelque part (4) qu'Archimède le Syracusin n'a composé qu'un seul livre de mécanique (5), celui de *La Sphéropée* (6), et qu'il n'a

---

1. ἐν τῷ καθ' ἡμᾶς βίῳ, expression singulière pouvant se traduire librement : jusqu'à notre époque.

2. Géminus de Rhodes, astronome et mathématicien, vécut soixante-dix ans avant J.-C. On possède son ouvrage intitulé : *Introduction à l'Astronomie*, publié pour la première fois en grec et en latin par Hildéric (Altord, 1590). Quant à son ouvrage sur les mathématiques, qui ne nous est pas parvenu, et dont on ne connaît que les extraits utilisés par Proclus dans son commentaire sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide, on n'est pas même bien fixé sur son titre exact : Pappus l'intitule ici : *L'Ordonnance des Mathématiques* (τῶν μαθημάτων τάξις), tandis qu'Eutocius d'Ascalon l'intitule : *La Science mathématique* (των μαθημάτων θεωρία) dans son commentaire sur les *Coniques* d'Apollonius (cfr. édit. Heiberg, vol. II, p. 170, l. 25). Les extraits de Proclus montrent que l'ouvrage de Géminus se rapportait principalement à la conception générale des surfaces de révolution et des sections auxquelles elles donnent lieu, et qu'il constituait, conformément au titre que lui donne Pappus, un exposé ordonné et encyclopédique des connaissances mathématiques à son époque. Les emprunts de Proclus à Géminus ont fait l'objet de deux études : celle de P. Tannery dans : *La Géométrie grecque* (Paris, 1887, pp. 18 et suiv.), et celle de K. Tittel intitulée : *De Gemini Stoici studiis mathematicis questiones philologae* (Leipzig, 1895).

3. Carpos d'Antioche a probablement vécu au premier ou au second siècle de notre ère. Il n'est connu que par la citation que Pappus fait ici ; puis par un passage d'un commentaire de Jamblique sur les *Catégories* d'Aristote, qui nous a été conservé par Simplicius, dans lequel il lui est attribué une courbe appelée simplement « de double mouvement » (ἐκ διπλῆς κινήσεως), probablement la cycloïde, destinée à la quadrature du cercle (*Simplici in Aristotelis Physicorum libros quattuor priores commentaria, edidit H. Diels*, Berlin, 1882, p. 60) ; et, enfin, par Proclus qui l'appelle μηχανικός, mécanicien, et mentionne son traité d'*Astrologie* (Ἀστρολογικὴ πραγματεία), (*Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii edidit G. Friedlein*. Leipzig, 1873, p. 241). Voir aussi sur Carpos l'étude de Karl Tittel : *De Carpo mechanico*, dans *Phil. Histor. Beiträge für C. Wachsmuth*. Leipzig, 1897, et celle de M. C. P. Schmidt, dans *Berl. Philol. Wochenschr.*, 1882, p. 456.

4. C'est-à-dire dans l'ouvrage d'astrologie de Carpos que Pappus, en s'abstenant de le mentionner, semble ne pas avoir consulté lui-même.

5. C'est-à-dire de mécanique appliquée.

6. On ne possède plus l'ouvrage d'Archimède intitulé : *La Sphéropée*, dans lequel il décrivait l'appareil qu'il avait construit pour représenter les mouvements du soleil, de la lune et des planètes au moyen d'une série de sphères concentriques et d'axes diversement inclinés, le tout étant actionné par l'eau imprimant des mouvements de rotation uniformes de sens contraires et de vitesses différentes, d'après le principe déjà utilisé par Ctésibius dans le tourniquet hydraulique. La sphère armillaire d'Archimède est considérée comme un appareil merveilleux par différents auteurs, tels que Cicéron, Ovide, Sextus Empiricus, Martianus Capella, Claudien et Lactance. Voir : H. Aug. SCHICK, *Die Himmels-*

pas daigné en composer d'autres du même genre. Cet homme admirable, célébré par la plupart pour son art mécanique, doué d'une intelligence supérieure, au point de continuer d'être louangé par la généralité des hommes, a cependant écrit avec soin des théories qui paraissent très abstraites sur des sujets capitaux en géométrie et se rattachant à l'arithmétique, et il est avéré qu'il a aimé les sciences que nous avons mentionnées, jusqu'à se déterminer à n'y introduire rien de profane. Mais Carpos et d'autres encore ont tiré parti de la géométrie d'une manière rationnelle au profit de certains arts ; car la géométrie ne déchoit nullement lorsque, s'appliquant à nombre d'arts, elle tend à les corroborer (1); mais elle semble, au contraire, promouvoir ces arts et en être ainsi honorée et embellie comme il sied.

La science mécanique étant ainsi associée à l'art et divisée en autant de branches, j'ai trouvé convenable d'exposer d'une manière plus concise et plus claire, et d'établir par un raisonnement meilleur que celui de ceux qui ont écrit antérieurement sur ce sujet, tout à la fois les propositions considérées dans le raisonnement géométrique (2) par les Anciens [notamment les plus nécessaires qui se sont posées sur le mouvement des graves] (3) et celles que nous avons utilement inventées par surcroît, qui sont :

Un poids donné étant mené dans un plan parallèle à l'horizon par une puissance donnée, et un autre plan étant incliné sous un angle donné sur le plan sous-jacent, trouver la puissance par laquelle le poids sera mené dans le plan incliné (4). [Cela est utile aux artisans mécaniciens ; car, en adjoignant à la puissance trouvée une certaine autre puissance en hommes, ceux-ci enlèvent le poids avec assurance] (5).

Ensuite, étant données deux droites inégales, trouver deux

globen des Archimedes (Programm des Gymnas. zu Hanau, 1846), et *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. XVII et suiv.

1. Le texte présente ici une interpolation de scoliaste que nous traduisons : « la géométrie étant pour ainsi dire la mère des arts, ne déchoit pas en s'appliquant aux machines et à l'architecture ; car elle ne subit aucun dommage dans ses rapports avec la géodésie, la gnomonique, la mécanique et la scénographie » (Cfr. Hultsch, vol. III, p. 1026, l. 23).

2. λόγῳ γεωμετρικῷ.

3. Phrase considérée par Hultsch comme interpolée (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1028, l. 6).

4. Voir plus loin, prop. 9.

5. Phrase probablement interpolée par un commentateur.

droites moyennes proportionnelles en proportion continue (1). [On peut agrandir ou diminuer toute figure solide au moyen de ce théorème] (2).

Enfin, si l'on donne un tambour et le nombre de ses chevilles ou de ses dents, de quelle manière pourra-t-on lui juxtaposer un tambour ayant un nombre de dents donné, et trouver le diamètre de ce tambour juxtaposé ? (3) [Cette question présente de l'utilité pour une foule de choses qui concernent l'art de construire des machines, en raison même de la juxtaposition de tambours dentés] (4).

Ces propositions, conjointement avec d'autres qui offrent de l'utilité pour l'architecte et le mécanicien, deviendront manifestes chacune en son lieu, à condition que nous exposions immédiatement pour commencer ce que comporte la doctrine barycentrique.

Nous n'avons pas à exposer pour le moment en quoi consiste le lourd et le léger, ni la cause de la sollicitation des corps vers le haut et vers le bas, ni la notion qui s'attache à ces haut et bas, ni les limites qui les séparent, parce que tout cela a déjà été montré clairement par Ptolémée dans ses *Mathématiques*. Mais nous avons à dire en quoi consiste et ce qu'entraîne le centre de gravité de tout corps, principe et élément même de la doctrine barycentrique dont dépendent également les autres branches de la mécanique ; car nous croyons que les autres choses que nous allons considérer dans cette doctrine deviendront ainsi manifestes. Or, nous disons que le centre de gravité de chaque corps est un certain point situé à l'intérieur de celui-ci, tel que, si on imagine le grave suspendu à ce point, il reste en repos tout en étant sollicité et conserve sa position initiale. (5).

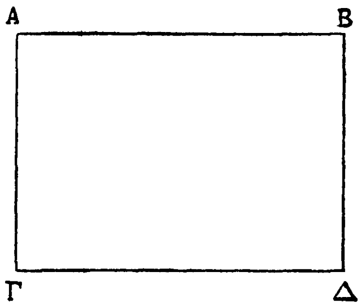
PROPOSITION I. — On trouve ce point non seulement dans les corps réguliers, mais aussi dans ceux qui sont formés d'une

1. Voir la proposition 11, qui donne la solution mécanique de Pappus du problème déliaque.
2. Interpolation probable.
3. Voir ci-après la proposition 23.
4. Interpolation probable.
5. Le texte présente ici la petite interpolation : οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ, (n'est) nullement retourné dans sa sollicitation (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1030, l. 13).

manière irrégulière, en le considérant par une méthode telle que la suivante :

I.

Supposons un plan perpendiculaire ΑΒΓΔ dirigé vers le centre de l'Univers (1), pour lequel toutes choses ayant du poids paraissent avoir une propension (2), et que la droite AB soit parallèle au plan sur lequel nous nous trouvons (3). Dès lors, si un corps ayant du poids est disposé suivant la droite AB, de manière à être entièrement coupé par le plan étendu, il aura éventuellement une position telle qu'il se maintiendra sans tourner et sans tomber. Cette position étant obtenue, si on imagine le plan ΑΒΓΔ étendu, le corps apposé (4) sera coupé en deux parties équilibrées (5) qui seront suspendues autour du plan en se faisant équilibre (6). Derechef, si le grave est



1. νεῦον εἰς τὸ τοῦ παντὸς κέντρον, incliné ou dirigé vers le centre de tout, c'est-à-dire de l'Univers. Pappus commence donc par considérer les verticales en convergence au centre de la terre, comme le fait Archimède dans les propositions du premier livre *Des Corps flottants*, puis le raisonnement présente la contradiction, peu importante en fait, de considérer ces verticales comme des parallèles, de la même manière qu'Archimède dans les propositions du second livre *Des Corps flottants*.

2. ῥοπή, la propension, la tendance au mouvement dans *La Mécanique* d'Aristote, c'est-à-dire actuellement l'attraction (de la pesanteur).

3. C'est-à-dire le plan horizontal.

4. C'est-à-dire apposé sur la droite AB.

5. ἰσόρροπος équilibré, dans le sens d'avoir même poids, mais avec la restriction indiquée dans la note suivante.

6. ἰσορροπεῖν, faire équilibre, égaler en poids. Cependant, bien que Pappus ne dise pas ce qu'il entend par parties équilibrées de part et d'autre du plan passant par le centre de gravité du grave de forme irrégulière, il semble ne pas considérer ces parties comme ayant le même poids si on les examine séparément à la balance, mais que l'une ne doit pas l'emporter sur l'autre dans la situation particulière occupée par rapport au plan. Cette remarque avait d'ailleurs déjà été faite par Guido Ubaldo dès l'apparition de la version latine de Commandin. (*Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis in duos Archimedis aequiponderantium libros paraphrasis, scholiis illustrata*. Pisauri, 1588, p. 9). Pappus invoque donc ici tacitement la loi du levier qu'il fera du reste intervenir explicitement plus loin dans les propositions 5 et 9, et considère que les deux parties équilibrées possèdent ce que nous appelons « même moment » par rapport au plan passant par le centre de gravité.

déplacé de telle sorte qu'une autre de ses parties touche la droite AB, il aura éventuellement, après avoir tourné, une position telle que, si on l'abandonne, il se maintiendra et ne tombera pas. Dès lors, si on imagine de nouveau le plan ΑΒΓΔ étendu, il coupera le grave en parties qui se font équilibre, et tombera sur le premier plan qui coupe le même grave en parties équilibrées ; car si ces plans ne se coupaient pas, les mêmes parties seraient équilibrées et non équilibrées entre elles ; [ce qui est absurde] (1).

II.

Cela étant exposé au préalable, imaginons de nouveau une droite AB perpendiculaire au plan sur lequel nous nous trouvons, [c'est-à-dire dirigée vers le centre de l'Univers] (2), et établissons pareillement sur le point A un grave utilisant ainsi la droite AB comme support, [c'est-à-dire qu'il sera établi au point A de manière à s'y maintenir, puisque le grave a pu rester aussi en repos sur le plan passant par cette droite] (3). Dès lors, si, le grave restant en place, la droite AB est prolongée, une certaine portion de cette droite sera enfermée dans la figure en question. Imaginons donc que cette portion reste en place, et établissons de nouveau le grave suivant une autre de ses parties sur la droite, de telle sorte qu'il soit en repos ; je dis que la droite AB prolongée rencontrera la droite qui a été interceptée en premier lieu.

En effet, si elle ne la rencontre pas, il pourra se faire que des plans étendus par chacune de ces droites ne se rencontrent pas entre eux à l'intérieur de la figure, et que chacun de ces plans (4). divise le grave en mêmes parties équilibrées et non équilibrées ; ce qui est absurde. En conséquence, les droites que nous venons de dire se rencontrent à l'intérieur de la figure. De même, si le

1. Les mots ὅπερ ἄτοπον sont une restauration de Hultsch (*loc. cit.*, vol. III, p. 1032, l. 4).

2. Phrase que Hultsch attribue à un interpolateur (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1032, l. 6).

3. Phrase que nous croyons interpolée.

4. Le texte présente ici l'interpolation : ajusté au plan passant par la droite AB (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1032, l. 19).

grave est établi en d'autres positions sur le point A, de manière à y rester en repos, la droite AB prolongée rencontrera les droites qui ont été interceptées d'abord ([1]). Il résulte manifestement de là que les droites imaginées telles que nous les avons dites se couperont entre elles en un seul point, et ce point est appelé le centre de gravité. Il est clair aussi que, si le grave est suspendu par la pensée à ce centre, il ne se retournera pas et restera en repos en conservant la position initiale qu'il a prise dans sa sollicitation ([2]) ; car, tous les plans étendus par ce centre partagent le grave en parties équilibrées ; de sorte qu'il ne sera affecté par aucune cause de révolution, [ses parties constituées de part et d'autre du point étant équilibrées dans toutes les positions] ([3]).

Voilà donc ce que la doctrine barycentrique contient d'essentiel. Les éléments qui sont démontrés au moyen de cette doctrine s'enseignent dans les livres *Des Équilibres* ([4]) d'Archimède et dans les *Mécaniques* ([5]) de Héron ; et, quant aux choses que le plus grand nombre ignore, nous allons les exposer dans la suite, notamment celles-ci :

III.

PROPOSITION 2. — Soit le triangle ΑΒΓ ; que ses côtés soient découpés dans un même rapport aux points Η, Θ, Κ, de manière

1. Le texte présente l'interpolation ὁμοίως, de la même manière (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1032, l. 24).

2. ἐν τῇ ῥοπῇ, dans (sa) sollicitation (vers le centre de la terre), expression que Hultsch rend par le mot néo-latin créé par Newton « gravitatio », gravitation (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1033, l. 26).

3. La phrase que nous plaçons entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1032, ll. 32-33).

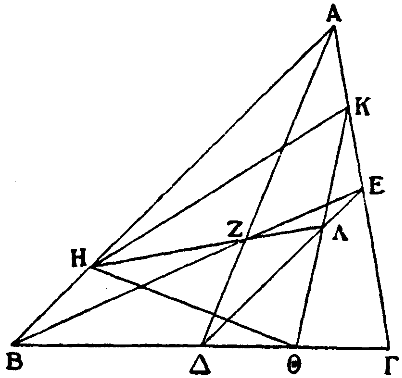
4. ARCHIMÈDE, *Les deux livres de l'Équilibre des Plans ou des Centres de gravité des Plans*. Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 303-350.

5. *Hero Alexandrinus. Opera quae supersunt omnia. Pneumatica et Automata, recognovit G. Schmidt; Mecanica et Catoptrica recognovit L. Nix et W. Schmidt.* Lipsiae, 1899-1900, in-8°.

L'ouvrage de Héron intitulé *Les Mécaniques* se compose de trois livres. Le premier contient des questions plutôt géométriques que mécaniques : une théorie du roulement des cercles, des procédés pour agrandir ou diminuer une figure dans un rapport donné et une solution empirique du problème des deux moyennes proportionnelles. Le second livre traite des cinq puissances reconnues par les Anciens : le levier, le coin, le treuil, la moufle et la vis avec ou sans engrenage ; puis décrit diverses combinaisons de ces puissances aboutissant à un assemblage de roues dentées et de pignons constituant un appareil de levage nommé le *Baroulcon*, enfin se termine par une théorie des centres de gravité empruntée à Archimède. Le troisième livre est consacré à la mécanique pratique : procédés employés dans la manœuvre des fardeaux et construction des pressoirs à vis.

que la droite BΘ soit à la droite ΘΓ et la droite ΓK à la droite KA comme la droite AH est à la droite HB, et menons les droites de jonction HΘ, ΘK, KH; je dis que le centre de gravité du triangle ABΓ est le même que celui du triangle HΘK [1].

En effet, coupons les droites BΓ, ΓA en deux parties égales aux points Δ, E, et menons les droites de jonction AΔ, BE. Le point Z est donc le centre de gravité du triangle ABΓ. En effet, si le triangle est déposé suivant la droite AΔ sur un plan perpendiculaire, ce triangle ne penche ni de l'une ni de l'autre partie, parce que le triangle ABΔ équivaut au triangle AΓΔ; et si le triangle ABΓ est déposé pareillement suivant la droite BE sur un plan perpendiculaire, il ne penche ni de l'une ni de l'autre partie, parce que les triangles ABE, BΓE sont équivalents [2]. Or, si le triangle s'équilibre sur chacune des droites AΔ, BE, le point commun Z de ces droites sera le centre de gravité [3]. [Il faut d'ailleurs imaginer que le point Z est situé, comme on l'a dit précédemment, au milieu du triangle ABΓ, qui est évidemment supposé d'épaisseur égale et de poids égal] [4]. Et il est manifeste que la droite AZ est double



1. Cette proposition a été interprétée cinématiquement de la manière suivante par Michel Chasles (*Aperçu historique*, p. 44) : Si trois mobiles, placés aux sommets d'un triangle, partent en même temps et parcourent respectivement les trois côtés, en allant dans le même sens et avec des vitesses proportionnelles aux longueurs de ces côtés, leur centre de gravité restera immobile.

2. C'est-à-dire parce que les deux triangles partiels équivalents ont même moment par rapport au plan vertical passant par le centre de gravité du triangle entier.

3. Archimède démontre d'une autre manière que le centre de gravité du triangle se trouve au point de rencontre des médianes. Tout d'abord, il énonce et démontre de deux façons différentes (*De l'Équilibre des Plans*, liv. I, prop. 13) que « le centre de gravité de tout triangle est situé sur la droite menée d'un angle au milieu d'une base » ; puis, il énonce et démontre (*ibid.*, prop. 14) que « le centre de gravité de tout triangle est le point où se rencontrent les droites menées des angles du triangle aux milieux des côtés ». Voir : *Œuvres complètes d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, pp. 316-320.

4. La phrase mise entre crochets est une remarque d'interpolateur (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1034, l. 22).

de la droite ZΔ, la droite BZ double de la droite ZE, et que la droite AB est à la droite ΔE, ainsi que la droite BZ à la droite ZE, ainsi que la droite AZ à la droite ZΔ, comme la droite ΓA est à la droite AE, parce que les triangles ΔZE, ABZ et les triangles ΓΔE, ABΓ sont équiangles (1). Que la droite de jonction ΔE coupe donc la droite ΘK au point Λ. Dès lors, puisque le rapport de la droite BΘ à la droite ΘΓ se compose de celui de la droite ΘB à la droite ΔΘ et de celui de la droite ΔΘ à la droite ΘΓ et que, par composition, la droite ΓA est à la droite AK comme la droite BΓ est à la droite ΓΘ ; que, considérant la moitié des antécédents, la droite EA est à la droite AK comme la droite ΓΔ est à la droite ΓΘ ; que, par conversion, la droite AE est à la droite EK comme la droite ΓΔ est à la droite ΔΘ, et que la droite ΓΔ est égale à la droite BΔ, tandis que la droite AE est égale à la droite ΓE, il s'ensuit que la droite ΓE est aussi à la droite EK comme la droite BΔ est à la droite ΔΘ ; donc, par composition, la droite ΓK est à la droite KE comme la droite BΘ est à la droite ΘΔ. En conséquence, le rapport de la droite AH à la droite HB se compose aussi de celui de la droite ΓK à la droite KE et de celui de la droite ΔΘ à la droite ΘΓ (2). Or, le rapport de

---

1. On a par construction : $AE = E\Gamma$ et $B\Delta = \Delta\Gamma$; donc : $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, d'où parallélisme des droites ΔE, BA, similitude des triangles ΓΔE, ΓBA et similitude des triangles ΔZE, AZB, d'où : $\frac{BZ}{ZE} = \frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{BA}{\Delta E} = \frac{\Gamma A}{AE} = \frac{2AE}{AE} = 2$, d'où, comme le texte : $AZ = 2Z\Delta$ et $BZ = 2ZE$.

Commandin a démontré d'une autre manière que les médianes se coupent aux deux tiers de leur longueur dans son commentaire sur la sixième proposition du traité *De la Quadrature de la Parabole* d'Archimède (*Archimedis opera nonnulla a Fed. Commandino nuper in latinum conversa et commentariis illustrata*. Venetiis, 1558, in-fol. p. 22).

2. On peut écrire : $\frac{B\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{B\Theta}{\Delta\Theta} \times \frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma}$ (I). Or, on a par hypothèse : $\frac{\Gamma K}{KA} = \frac{B\Theta}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{\Gamma K + KA}{KA} = \frac{B\Theta + \Theta\Gamma}{\Theta\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{KA} = \frac{B\Gamma}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{\frac{1}{2}A\Gamma}{KA} = \frac{\frac{1}{2}B\Gamma}{\Theta\Gamma}$ ou : $\frac{EA}{KA} = \frac{\Gamma\Delta}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{EA}{EA - KA} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta - \Theta\Gamma}$ ou, comme le texte : $\frac{EA}{EK} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta}$, d'où, considérant que $\Gamma\Delta = B\Delta$ et $EA = \Gamma E$, on a : $\frac{\Gamma E}{EK} = \frac{B\Delta}{\Delta\Theta}$, d'où $\frac{\Gamma E + EK}{EK} = \frac{B\Delta + \Delta\Theta}{\Delta\Theta}$ ou, comme le texte : $\frac{\Gamma K}{EK} = \frac{B\Theta}{\Delta\Theta}$, d'où la relation (I) devient : $\frac{B\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{\Gamma K}{EK} \times \frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma}$. or, on a aussi par hypothèse : $\frac{B\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{AH}{HB}$; donc, comme le texte : $\frac{AH}{HB} = \frac{\Gamma K}{EK} \times \frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma}$.

la droite ΔΛ à la droite ΛE se compose aussi de ces mêmes rapports [et la droite ΘΛ est égale à la droite ΛK] (1), comme cela sera démontré (2) ; donc, la droite ΔΛ est à la droite ΛE comme la droite AH est à la droite HB (3). De plus, les droites AB, ΔE sont parallèles, et les droites de jonction AΔ, BE se coupent au point Z ; par conséquent, la ligne qui passe par les points H, Z, Λ est droite (car cela sera aussi démontré dans la suite) (4). Et puisque la droite HZ est à la droite ZΛ comme la droite BZ est à la droite ZE et que la droite BZ est le double de la droite ZE, il s'ensuit que la droite HZ est aussi le double de la droite ZΛ (5). Or, la droite HΛ découpe le triangle HΘK en deux parties équivalentes (6), et la droite HZ est double de la droite ZΛ ; par conséquent, le point Z est le centre de gravité du triangle HΘK (7). Or, il est aussi celui du triangle ABΓ.

1. Les mots mis entre crochets constituent une interpolation intempestive ; car l'égalité des droites ΘΛ, ΛK ne doit intervenir que plus loin (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1036, l. 16).

2. Pappus invoque, en se réservant d'en donner une démonstration au lemme IV suivant (prop. 3), le théorème de Ptolémée concernant les segments faits sur les côtés d'un triangle par une transversale, c'est-à-dire la relation : $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda E}=\frac{\Gamma K}{EK}\times\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma}$. On trouve le théorème de Ptolémée traduit pour la première fois en latin dans le rarissime petit ouvrage : *Ptolemaei mathematicae constructionis liber primus. Additae explicationes aliquot locorum ab Erasmo Rheinhold Salvendensi.* Lutetiae, apud Gulielmum Cavellat, 1558, pet. in-8°, feuillets 57-61.

3. La comparaison de la dernière relation de la note 2, de la page 820, avec la relation de Ptolémée de la note précédente donne, comme le texte : $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda E}=\frac{AH}{HB}$.

4. Voir ci-après le lemme V (prop. 4). Le texte présente ici les mots εἰ μικρόν ἐστιν que l'édition de Hultsch abandonne à titre d'interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1036, l. 6), et que Commandin n'avait admis que sous réserve en les traduisant : « quamquam parvi sit momenti » (bien que cela soit de peu d'importance), et en les accompagnant de la remarque : « graecus autem codex, ut arbitror, mendosus est », j'estime que le texte grec fait erreur (cfr. *loc. cit.*, p. 451, l. 29, *commentarius*, l. 52).

5. Les droites BH, ΛE sont parallèles, d'où similitude des triangles BHZ, EΛZ, d'où, comme le texte : $\frac{HZ}{Z\Lambda}=\frac{BZ}{ZE}$. Or, on a démontré plus haut (voir note) qu'on a : $BZ = 2ZE$; donc : $HZ = 2Z\Lambda$.

6. C'est-à-dire que la droite HΛ est la médiane du triangle HΘK ; conclusion basée sur la démonstration du point Λ divisant la droite ΘK en deux parties égales, qui sera donnée ci-après, à la fin du lemme IV (proposition 3).

7. Ce qui résulte de la première partie de la démonstration où, dans le triangle ABΓ, le centre de gravité Z a été déterminé aux deux tiers de la médiane.

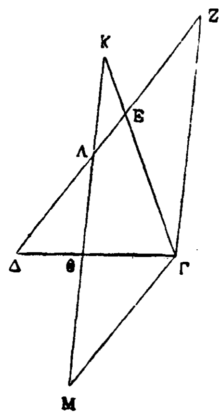
IV.

PROPOSITION 3. — Démontrons maintenant ce qui a été différé. Que la droite ΓΕ soit, en effet, à la droite ΕΚ comme la droite ΓΔ est à la droite ΔΘ, et menons les droites de jonction ΔΕ, ΘΚ qui se coupent entre elles au point Λ; je dis que la droite ΘΛ est égale à la droite ΚΛ, et que le rapport de la droite ΔΛ à la droite ΛΕ se compose du rapport de la droite ΔΘ à la droite ΘΓ et de celui de la droite ΓΚ à la droite ΚΕ (1).

Menons par le point Γ la droite ΓΖ parallèle à la droite ΘΚ, et qu'elle rencontre au point Ζ la droite ΔΕ prolongée. Dès lors, puisqu'on a deux droites ΔΛ, ΛΕ et une droite ΖΛ en dehors de celles-ci, le rapport de la droite ΔΛ à la droite ΛΕ se compose du rapport de la droite ΔΛ à la droite ΛΖ et de celui de la droite ΛΖ à la droite ΕΛ. Mais, le rapport de la droite ΔΘ à la droite ΘΓ est le même que celui de la droite ΔΛ à la droite ΛΖ, parce que la droite ΓΖ est parallèle à la droite ΚΘ, et le rapport de la droite ΓΚ à la droite ΚΕ est le même que celui de la droite ΖΛ à la droite ΛΕ, parce que les triangles ΓΕΖ, ΕΚΛ sont équiangles; par conséquent, le rapport de la droite ΔΛ à la droite ΛΕ se compose aussi de celui de la droite ΔΘ à la droite ΘΓ et de celui de la droite ΓΚ à la droite ΚΕ (2). Pour les mêmes raisons, on démontrera aussi que, si l'on mène par le point Γ la droite ΓΜ parallèle à la droite ΕΔ, rencontrant au point Μ la droite ΚΘ prolongée, le rapport de la droite ΚΛ à la droite ΛΘ se compose de celui de la droite ΚΕ à la droite ΕΓ et de celui de la droite ΓΔ

1. Cette proposition démontrera donc les deux relations qui ont été invoquées provisoirement sans démonstrations au cours de la proposition précédente, à savoir : l'égalité des droites ΘΛ, ΚΛ et la relation de Ptolémée résultant de la segmentation des côtés du triangle par une transversale : $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda E}=\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma}\times\frac{\Gamma K}{KE}$; relation qui sera démontrée d'une manière différente du reste de celle de Ptolémée.

2. La considération des droites ΔΛ, ΛΕ et ΛΖ donne : $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda E}=\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda Z}\times\frac{\Lambda Z}{\Lambda E}$. Or, le parallélisme des droites ΓΖ, ΚΘ donne : $\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma}=\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda Z}$, et la similitude des triangles ΓΕΖ, ΕΚΛ donne: $\frac{\Gamma E}{KE}=\frac{ZE}{\Lambda E}$, d'où: $\frac{\Gamma E+KE}{KE}=\frac{ZE+\Lambda E}{\Lambda E}$ ou, comme le texte : $\frac{\Gamma K}{KE}=\frac{\Lambda Z}{\Lambda E}$; donc : $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda E}=\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma}\times\frac{\Gamma K}{KE}$.



à la droite ΔΘ ; car, on a de nouveau deux droites ΚΛ, ΛΘ et la droite ΛΜ prise en dehors d'elles ; donc, le rapport de la droite ΚΛ à [la droite ΛΘ se compose de celui de la droite ΚΛ à la droite ΛΜ et de celui] (1) de la droite ΛΜ à la droite ΛΘ. Mais, le rapport de la droite ΚΛ à la droite ΛΜ est le même que celui de la droite ΚΕ à la droite ΕΓ, parce que, de nouveau, la droite ΕΔ est parallèle à la droite ΓΜ ; et le rapport de la droite ΛΜ à la droite ΛΘ est le même que celui de la droite ΓΔ à la droite ΔΘ, parce que les triangles ΔΘΛ, ΓΘΜ sont équiangles ; par conséquent, le rapport de la droite ΚΛ à la droite ΛΘ est le même que celui qui se compose du rapport de la droite ΚΕ à la droite ΕΓ, c'est-à-dire de la droite ΔΘ à la droite ΔΓ, et du rapport de la droite ΓΔ à la droite ΔΘ ; ce qui constitue rapport de droite égale à droite égale ; par conséquent, le rapport de la droite ΚΛ à la droite ΛΘ est aussi celui de droite égale à droite égale ; donc, la droite ΚΛ est égale à la droite ΛΘ (2).

V.

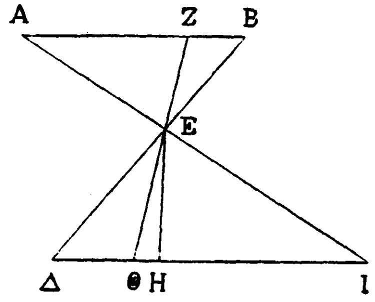
Proposition 4. — Voici le restant des choses qui ont été différées : Que la droite ΑΒ soit parallèle à la droite ΓΔ ; que la droite ΓΘ soit à la droite ΘΔ comme la droite ΑΖ est à la droite ΖΒ, et menons les droites de jonction ΑΓ, ΒΔ qui se coupent mutuellement au point Ε ; je dis que la ligne qui passe par les points Ζ, Ε, Θ est droite.

---

1. Restauration proposée par Scaliger en marge du manuscrit de Leyde (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1038, l. 26).

2. La considération des droites ΚΛ, ΛΘ et ΛΜ donne: $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Theta}=\frac{K\Lambda}{\Lambda M}\times\frac{\Lambda M}{\Lambda\Theta}$. Or, le parallélisme des droites ΓΜ, ΕΛ donne : $\frac{KE}{E\Gamma}=\frac{K\Lambda}{\Lambda M}$, et la similitude des triangles ΔΘΛ, ΓΘΜ donne : $\frac{\Theta\Gamma}{\Delta\Theta}=\frac{\Theta M}{\Lambda\Theta}$, d'où : $\frac{\Theta\Gamma+\Delta\Theta}{\Delta\Theta}=\frac{\Theta M+\Lambda\Theta}{\Lambda\Theta}$ ou : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta}=\frac{\Lambda M}{\Lambda\Theta}$; donc, comme le texte : $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Theta}=\frac{KE}{E\Gamma}\times\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta}$. Or, on a par hypothèse : $\frac{\Delta\Theta}{\Gamma\Delta}=\frac{KE}{E\Gamma}$; donc, comme le texte : $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Theta}=\frac{\Delta\Theta}{\Gamma\Delta}\times\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta}=1$, d'où : $K\Lambda=\Lambda\Theta$.

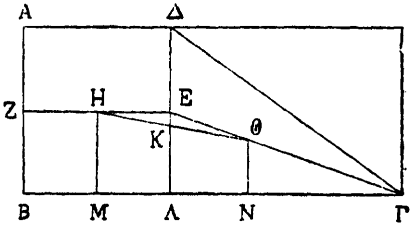
En effet, si elle n'est pas droite, que la ligne qui passe par les points Z, E, H le soit. Dès lors, puisque la droite ZE est à la droite EH comme la droite AZ est à la droite ΓH, et que la droite ZB est à la droite HΔ comme la droite ZE est à la droite EH, il s'ensuit que la droite ZB est à la droite HΔ comme la droite AZ est à la droite ΓH et, par permutation, la droite ΓH est à la droite HΔ comme la droite AZ est à la droite ZB, c'est-à-dire comme la droite ΓΘ est à la droite ΘΔ ;ce qui est impossible ; par conséquent, la ligne qui passe par les points Z, E, Θ est droite (1).



VI.

Proposition 5. — Étant donné le parallélogramme rectangle AΓ, mener transversalement la droite ΓΔ de manière que, le trapèze ABΓΔ étant suspendu par le point Δ, les droites AΔ, BΓ soient parallèles à l'horizon.

Que la chose soit faite ; il s'ensuit que la droite menée par le point Δ et par le centre de gravité du trapèze est perpendiculaire à l'horizon et à la droite BΓ (2). Soit ΔΛ cette droite ; coupons la droite ΔΛ en deux parties égales au point E et coupons de même la droite AB au point Z. Menons la ligne de jonction ΓEZ ; coupons la droite ΓE au point Θ de telle sorte que la droite ΓΘ soit le double



1. Si on suppose que la ligne ZEH est droite, les parallèles AB, ΔΓ donnent : $\frac{ZE}{EH} = \frac{AZ}{\Gamma H}$ et $\frac{ZB}{H\Delta} = \frac{ZE}{EH}$; donc : $\frac{ZB}{H\Delta} = \frac{AZ}{\Gamma H}$, d'où : $\frac{\Gamma H}{H\Delta} = \frac{AZ}{ZB}$. Or, on a par hypothèse : $\frac{\Gamma\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{AZ}{ZB}$; donc : $\frac{\Gamma H}{H\Delta} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta\Delta}$; ce qui est impossible ; donc, ZEΘ est une droite.

2. Commandin a démontré que le point de suspension Δ et le centre de gravité du trapèze suspendu sont sur une même droite perpendiculaire à l'horizon dans son commentaire sur la proposition 6 du traité *De la quadrature de la Parabole* d'Archimède. Voir p. 22 de l'ouvrage de Commandin mentionné p. 820, n. 1.

de la droite ΘE ; coupons la droite EZ en deux parties égales au point H, et menons la droite de jonction HΘ coupant la droite ΔΛ au point K. Dès lors, le point H est le centre de gravité du parallélogramme BΔ [1], et le point Θ le centre de gravité du triangle ΓΔΛ [2]; par conséquent, le centre de gravité du trapèze entier est situé sur la droite HΘ [3]. Mais, il est situé aussi sur la droite ΔΛ ; donc, le point K est le centre de gravité du trapèze ABΓΔ. Mais, le point H étant aussi le centre de gravité du parallélogramme BΔ, et le point Θ celui du triangle ΔΛΓ, il s'ensuit que la droite ΘK est à la droite KH comme le parallélogramme BΔ est au triangle ΔΓΛ. En effet, expérimentalement, si nous imaginons que le poids du parallélogramme BΔ est entièrement concentré au point H, et que le poids du triangle ΓΔΛ est entièrement concentré au point Θ, la droite HΘ devient comme un fléau de balance, et les poids que nous venons de dire partent de ses extrémités. Et si la droite HΘ est découpée au point K de telle sorte que la droite ΘK soit à la droite KH dans le rapport inverse des poids situés sur les fléaux de balance, comme le poids situé au point H est au poids situé au point Θ, c'est-à-dire comme le parallélogramme BΔ est au triangle ΓΔΛ, le point K sera celui où les poids s'équilibrent [4] ; [de sorte que le trapèze ABΓΔ s'équilibrera aussi au point K] [5]. Menons donc, des points H, Θ, les perpendiculaires

1. ARCHIMÈDE, *De l'Équilibre des Plans*, liv. I, prop. : « Le centre de gravité de tout parallélogramme est le point où ses diamètres se rencontrent ». Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 312-314.

2. Voir lemme III (ou prop. 2), p. 820, n. 1.

3. Archimède démontre que le centre de gravité du trapèze se trouve aussi en un point déterminé de la droite qui relie les milieux des deux côtés parallèles du trapèze. La proposition 15 du livre I du traité *De l'Équilibre des Plans* énonce : « Le centre de gravité de tout trapèze ayant deux côtés parallèles entre eux est situé sur la droite qui, reliant les points de division des parallèles en deux parties égales, est divisée de manière que le rapport de son segment, ayant le point de division de la plus petite parallèle comme extrémité, au segment restant soit le même que le rapport d'une droite égale au double de la plus grande parallèle augmenté de la plus petite, à une droite égale au double de la plus petite parallèle, augmenté de la plus grande ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 321.

4. ARCHIMÈDE, *De l'Équilibre des Plans*, liv. I, prop. 6 : « Des grandeurs commensurables s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids », et liv. I, prop. 7 : « Au reste si les grandeurs sont incommensurables, elles s'équilibrent pareillement à des distances inversement proportionnelles à leurs grandeurs ». Voir trad. de P. Ver Eecke, pp. 307-310.

5. La phrase que nous mettons entre crochets est considérée par Hultsch comme ayant été interpolée (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1042, l. 24).

HM, ΘN sur la droite ΒΓ. Dès lors, puisque la droite ΘK est à la droite KH comme le parallélogramme ΒΔ est au triangle ΓΔΛ; mais que la droite ΒΛ est à la moitié de la droite ΛΓ comme le parallélogramme est au triangle (1), et que la droite NΛ est à la droite ΛM comme la droite KΘ est à la droite KH, parce que les droites HKΘ, MΛN sont menées au travers des parallèles HM, EΛ, ΘN, il s'ensuit que la droite NΛ est aussi à la droite ΛM, moitié de la droite ΒΛ, comme la droite ΒΛ est à la moitié de la droite ΛΓ; donc, la droite ΛN est aussi au double de la droite MΛ, c'est-à-dire à la droite ΒΛ, comme la droite ΒΛ est à un double, c'est-à-dire à la droite ΛΓ. En conséquence, le carré de la droite ΒΛ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓΛ, ΛN (2); [donc, la droite ΒΛ est à la droite ΛN comme la droite ΓΛ est à la droite ΛΒ] (3). Or, le carré de la droite ΓΛ est au carré de la droite ΒΛ comme la droite ΓΛ est à la droite ΛN, et la droite ΓΛ est le triple de la droite ΛN (puisque la droite ΓE est aussi le triple de la droite EΘ, la droite ΓΘ étant le double de la droite EΘ); par conséquent, le carré de la droite ΓΛ est le triple du carré de la droite ΛΒ. Et les points B, Γ sont donnés; donc, le point Λ est donné aussi (4); de sorte que le point Δ est donné aussi (5). Nous aurons donc le point de suspension Δ en coupant la droite ΒΓ au point Λ de manière à avoir le carré de

1. Euclide, liv. VI, prop. 1, énoncée p. 383, n. 1.

2. Le parallélogramme ΒΔ et le triangle ΔΛΓ, considérés comme des poids concentrés en leurs centres de gravité respectifs H, Θ, s'équilibrent autour du centre de gravité K du trapèze ΑΒΓΔ, c'est-à-dire qu'on a: $\frac{\Theta K}{KH} = \frac{\text{parallélog. B}}{\text{triangle } \Gamma\Delta\Lambda}$ (I). Or, considérant les parallélogrammes ΒΔ, ΔΓ de même hauteur, on a (Euclide, liv. VI, prop. 1): $\frac{\text{parallélog. } B\Delta}{\text{parallélog. } \Delta\Gamma} = \frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma}$, d'où: $\frac{\text{parallélog. } B\Delta}{\frac{1}{2}\text{ parallélog. } \Delta\Gamma} = \frac{\text{parallélog. } B\Delta}{\text{triangle } \Gamma\Delta\Lambda} = \frac{B\Lambda}{\frac{1}{2}\Lambda\Gamma}$, d'où, en présence de la relation (I): $\frac{\Theta K}{KH} = \frac{B\Lambda}{\frac{1}{2}\Lambda\Gamma}$. D'autre part, le parallélisme des droites HM, KΛ, ΘN donne: $\frac{N\Lambda}{\Lambda M} = \frac{K\Theta}{KH}$; donc, comme le texte: $\frac{N\Lambda}{\Lambda M} = \frac{B\Lambda}{\frac{1}{2}\Lambda\Gamma}$, d'où: $\frac{N\Lambda}{2\Lambda M} = \frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma}$. Or, $\Lambda M = \frac{1}{2} B\Lambda$; donc: $\frac{N\Lambda}{B\Lambda} = \frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma}$, d'où, comme le texte: $N\Lambda \times \Lambda\Gamma = \overline{B\Lambda}^2$.

3. La phrase entre crochets est abandonnée, comme interpolation, par Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1044, l. 24).

4. Euclide, *Donnees*, prop. 55, énoncée p. 144, n. 5, et prop. 27, énoncée p. 24, n. 2.

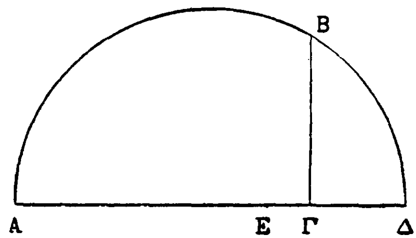
5. Euclide, *Données*, prop. 32, énoncée p. 751, n. 5.

la droite ΓΛ triple du carré de la droite ΛΒ (1). Or, coupons la droite ΒΓ de cette manière (2).

VII.

Proposition 6. — *Couper une droite de telle sorte que, considérées en puissances, la plus grande droite soit le triple de la plus petite* (3).

Soit la droite ΑΔ, et coupons-la au point Γ de manière que la droite ΑΓ soit le triple de la droite ΓΔ. Décrivons le demi-cercle ΑΒΔ sur la droite ΑΔ ; menons du point Γ la droite ΓΒ à angles droits sur la droite ΑΔ, et faisons en sorte que la droite ΑΕ soit à la droite ΔΕ comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΒ ; je dis, qu'en puissances, la droite ΑΕ est le triple de la droite ΔΕ.



En effet, puisque la droite ΒΓ est la moyenne proportionnelle des droites ΑΓ, ΓΔ, il s'ensuit que le carré de la droite ΑΓ est au carré de la droite ΒΓ, c'est-à-dire le carré de la droite ΑΕ au carré de la droite ΔΕ, comme la droite ΑΓ est à la droite ΓΔ ; par conséquent, le carré de la droite ΑΕ est le triple du carré de la droite ΔΕ (4).

---

1. On peut écrire : $\frac{\overline{\Gamma\Lambda}^2}{\Gamma\Lambda \times \Lambda N} = \frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda N}$, d'où, en présence de l'égalité $N\Lambda \times \Lambda\Gamma = \overline{B\Lambda}^2$ trouvée plus haut, on a : $\frac{\overline{\Gamma\Lambda}^2}{\overline{B\Lambda}^2} = \frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda N}$. Or, on a par construction : $\Gamma\Theta = 2E\Theta$, d'où : $\Gamma\Theta + E\Theta = \Gamma E = 3E\Theta$, d'où, considérant les parallèles ΕΛ, ΘΝ, on a, comme le texte : $\Gamma\Lambda = 3\Lambda N$; donc : $\frac{\overline{\Gamma\Lambda}^2}{\overline{B\Lambda}^2} = \frac{3\Lambda N}{\Lambda N} = 3$, d'où, comme le texte : $\overline{\Gamma\Lambda}^2 = 3\overline{B\Lambda}^2$; relation qui, étant donnés les points Β, Γ, permet de déterminer le point Λ et, par suite, le point de suspension Δ cherché.

2. C'est-à-dire que, si l'on considère tout ce qui précède comme étant l'analyse du problème relatif à la détermination du point Δ, la synthèse du problème sera maintenant donnée à la proposition suivante.

3. C'est-à-dire couper une droite donnée en deux segments tels que le carré du plus grand segment soit le triple du carré du plus petit.

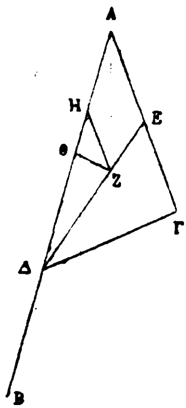
4. On a par construction : $A\Gamma \times \Gamma\Delta = \overline{B\Gamma}^2$, d'où : $\overline{A\Gamma}^2 \times \Gamma\Delta = \overline{B\Gamma}^2 \times A\Gamma$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{B\Gamma}^2} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$. Or, on a par construction : $\frac{AE}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$, d'où :

On découpera pareillement la droite ΑΔ, ainsi que toute droite donnée, dans un rapport donné en puissance.

VIII.

PROPOSITION 7. — Soient données de position les droites ΑΒ, ΑΓ ; soit donné le point Β, et menons transversalement la droite ΓΔ qui découpe dans le rapport donné de la droite ΑΓ à la droite ΒΔ ; il faut démontrer que le centre de gravité du triangle ΑΓΔ est sur une droite donnée de position.

Coupons la droite ΑΓ en deux parties égales au point Ε, et coupons la droite de jonction ΔΕ au point Ζ de telle sorte que la droite ΕΖ soit la troisième partie de la droite ΕΔ. Le point Ζ est donc le centre de gravité du triangle ΑΓΔ (car cela a été démontré précédemment) (1). Menons la droite ΖΗ parallèle à la droite ΑΕ et que la droite ΑΘ soit la troisième partie de la droite ΑΒ. Or, la droite ΑΗ est aussi la troisième partie de la droite ΑΔ, puisque la droite ΕΖ est la troisième partie de la droite ΕΔ ; donc, la droite restante ΘΗ est aussi la troisième partie de la droite ΒΔ, [et le rapport de la droite ΒΔ] (2) à la droite ΑΓ est donné (3) ; par conséquent, le rapport de la droite ΗΘ à la droite ΗΖ est donné aussi (4) Et l'angle au point Η est donné



$\frac{\overline{AE}^2}{\overline{\Delta E}^2}=\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\Gamma B}^2}$, d'où : $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{\Delta E}^2}=\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$. Enfin, on a par construction : $A\Gamma = 3\Gamma\Delta$; donc : $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{\Delta E}^2}=\frac{3\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}=3$, d'où : $\overline{AE}^2 = 3\overline{\Delta E}^2$.

1. Voir lemme III ou proposition 2.

2. Lacune comblée par Commandin au moyen des mots καὶ ὁ λόγος τῆς ΒΔ (cfr. *loc. cit.*, p. 455, *commentarius*, l. 32).

3. Le texte présente ici une interpolation de commentateur que nous traduisons : « et le rapport de la droite ΑΓ à la droite ΖΗ (est donné) aussi ; car elle est le triple de cette droite, parce que la droite ΔΑ est de moitié plus grande que la droite ΔΗ, c'est-à-dire la droite ΑΕ de moitié plus grande que la droite ΖΗ, et que la droite ΓΑ est le double de la droite ΑΕ ». (Cfr. HULTSCH, vol. III, p. 1046, ll. 16-20).

4. On a par construction : $EZ = \frac{1}{3}\Delta E$, d'où le parallélisme des droites ΑΕ, ΗΖ donne : $AH = \frac{1}{3}A\Delta$. Or, on a par construction : $A\Theta = \frac{1}{3}AB$; donc : $A\Theta - AH = \frac{1}{3}(AB - A\Delta)$ ou : $\Theta H = \frac{1}{3}B\Delta$. Or, par hypothèse, le rapport $\frac{B\Delta}{A\Gamma}$ est donné,

(car l'angle au point A est donné aussi) ; donc, l'angle compris sous les droites HΘ, ΘZ est donné aussi (1). Et le point Θ est donné ; donc, la droite ΘZ est donnée de position, et le centre Z est sur cette droite (2).

Les choses qui précèdent, ainsi que celles de même genre, appartiennent d'ailleurs à la théorie ; tandis que d'autres, telles que celles qui vont suivre, peuvent, en outre, tomber en usage mécanique.

IX.

PROPOSITION 8. — Incliner un plan de telle sorte que sa pente soit dirigée sur un point donné d'un plan non incliné, c'est-à-dire parallèle à l'horizon, renfermé dans un parallélogramme, et que l'inclinaison ait lieu sous un angle donné.

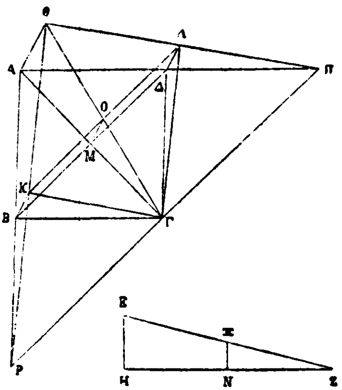
Que le parallélogramme donné ΑΒΓΔ soit d'abord équilatéral, et que l'angle donné sous lequel nous voulons incliner le plan soit celui qui est compris sous les droites EZ, ZH. Élevons aux points A, B, Δ les droites AΘ, BK, ΔΛ à angles droits sur le plan sous-jacent ; soit Γ le point sur lequel nous voulons diriger l'inclinaison ; posons la droite ZH égale à la droite de jonction AΓ ; menons la droite EH à angles droits sur la droite ZH, et posons la droite AΘ égale à la droite HE. Dès lors, si nous imaginons la droite ΘΓ menée de jonction, l'angle compris sous les droites ΘΓ, ΓA sera celui de l'inclinaison des plans. Menons donc encore la

---

d'où (EUCLIDE, *Données*, prop. 8, énoncée p. 198, n. 2) le rapport $\frac{\frac{1}{3}\,\mathrm{B\Delta}}{\frac{1}{2}\,\mathrm{A\Gamma}}$ est donné, c'est-à-dire que le rapport $\frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{AE}}$ est donné. Or, $\Delta\mathrm{Z} = \frac{2}{3}\,\Delta\mathrm{E}$, d'où, considérant les triangles semblables HΔZ, AΔE, on a : $\mathrm{HZ} = \frac{2}{3}\,\mathrm{AE}$; donc, comme le texte, le rapport $\frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{HZ}}$ est donné aussi.

1. Les droites AB, AΓ étant données de position par hypothèse, l'angle en A est donc donné, d'où l'angle H, qui lui est égal, est donné. Or, on a démontré (voir note précédente) que le rapport $\frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{HZ}}$ est donné ; donc (EUCLIDE, *Données*, prop. 41, énoncée p. 28, n. 10), l'angle HΘZ est donné aussi.

2. Le point B étant donné par hypothèse, la droite AB, donnée de position, est donc donnée aussi de grandeur. Or, on a par construction : $\mathrm{A\Theta} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AB}$; donc, le point Θ est donné ; d'où (EUCLIDE, *Données*, prop. 29, énoncée p. 198, n. 4), la droite ΘZ est donnée de position. Donc, conformément à l'énoncé, le centre de gravité Z du triangle AΓΔ est situé sur une droite *donnée de position*.



perpendiculaire BM du point B sur la droite ΑΓ et posons la droite ZN égale à la droite ΓΜ. Menons la droite ΝΞ à angles droits sur la droite ZH et posons chacune des droites BK, ΔΛ égale à la droite ΝΞ. Prolongeons les droites de jonction ΘΛ, ΘΚ, et qu'elles rencontrent aux points Π, Ρ les droites ΑΔ, AB prolongées ([1]). Le plan ΘΚΛ sera donc incliné sur le plan ΑΒΓΔ sous l'angle compris sous les droites ΘΓ, ΓΑ, c'est-à-dire sous l'angle compris sous les droites EZ, ZH. Car, si nous imaginons la droite MO menée parallèlement à la droite ΑΘ, et si nous menons la droite de jonction OK, la droite MO sera égale à la droite ΝΞ parce que le triangle ΖΝΞ est équiangle au triangle ΜΟΓ ([2]) ; la droite KO sera égale et parallèle à la droite BM, et le parallélogramme KBMO sera perpendiculaire au plan sous-jacent ([3]). Et puisque les points Π, Γ, Ρ sont simultanément dans deux plans, à savoir : le plan sous-jacent ΑΒΓΔ ([4]) et le plan ΚΘΛΓ, il s'ensuit que les points Π, Γ, Ρ sont sur une seule droite ΠΓΡ, qui est la section commune des dits plans ([5]). Pour la même raison d'ailleurs, les points K, O, Λ sont sur la section commune du plan ΚΘΛΓ et de celui qui passe par les points K, O, Λ parallèlement au plan ΑΒΓΔ ; en sorte que la droite qui passe par les points K, O, Λ est parallèle à la droite ΠΡ. Dès lors, puisque la droite ΘΑ est à la droite ΛΔ comme la droite ΑΠ est à la droite ΠΔ ; que la droite ΑΘ est à la droite BK comme la droite AP est à la droite PB, et que la droite ΔΛ est égale à la droite BK, il s'ensuit que la

1. Le texte présente ici l'interpolation de commentateur : « Il est clair qu'elles les rencontrent ; car ces droites partent d'angles plus petits que deux droits » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1050, ll. 3-5), pour signifier que le plan ΘΚΓΛ étant incliné sur le plan sous-jacent ΑΒΓΔ, les angles ΑΘΛ, ΑΘΚ sont aigus.

2. On a : $ZH = A\Gamma$ et $A\Theta = EH$, donc : $\widehat{\Theta\Gamma A} = \widehat{EZH}$. Or, on a posé : $ZN = \Gamma M$, et les triangles ΟΓΜ, ΞΖΝ sont semblables ; donc, comme le texte : $MO = N\Xi$.

3. C'est-à-dire perpendiculaire au plan du parallélogramme équilatéral ΑΒΓΔ.

4. Hultsch abandonne ici une petite interpolation : « dans lequel sont aussi les points Π, Ρ » (Cfr. *loc. cit.* vol. III, p. 1050, l. 12).

5. Euclide, liv. XI, prop. 3, énoncée p. 386, n. 4.

droite ΑΠ est aussi égale à la droite ΑΡ [1], et que l'angle compris sous les droites ΑΠ, ΠΡ est égal à l'angle compris sous les droites ΑΡ, ΡΠ. Or, l'angle compris sous les droites ΠΑ, ΑΓ est aussi égal à l'angle compris sous les droites ΡΑ, ΑΓ; donc, l'angle restant compris sous les droites ΑΓ, ΓΠ est égal à l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΡ. En conséquence, chacun de ces angles est droit, et la droite ΠΡ est coupée en deux parties égales et à angles droits par la droite ΑΓ [2]. De plus, la droite ΜΟ est à angles droits sur cette droite et sur le plan ΑΒΓΔ; donc, la droite ΟΓ est aussi à angles droits sur la droite ΡΠ en vertu d'un lemme sur les *Sphériques* [3]. En conséquence, chacun des angles compris sous les droites ΑΓ, ΓΠ et sous les droites ΟΓ, ΓΠ est droit et, par suite, le plan ΚΘΛΓ est incliné sur le plan ΑΒΓΔ sous l'angle donné compris sous les droites ΕΖ, ΖΗ.

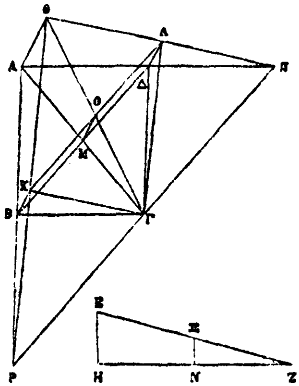
Mais, que la droite ΑΒ soit maintenant plus grande que la droite ΑΔ, et supposons que les autres choses soient les mêmes; je dis que l'angle compris sous les droites ΑΓ, ΓΠ est aigu.

En effet, puisque la droite ΘΑ est à la droite ΔΛ comme la droite ΑΠ est à la droite ΠΔ; que la droite ΘΑ est à la droite ΒΚ comme la droite ΑΡ est à la droite ΡΒ, et que la droite ΔΛ est égale à la droite ΒΚ, il s'ensuit que la droite ΑΡ est aussi à la droite ΡΒ comme la droite ΑΠ est à la droite ΠΔ; que, par division, la droite ΑΒ est à la droite ΒΡ comme la droite ΑΔ est

1. Les triangles semblables ΘΠΑ, ΛΠΔ donnent : $\frac{\Theta A}{\Lambda\Delta}=\frac{A\Pi}{\Pi\Delta}$, et les triangles semblables ΑΡΘ, ΒΡΚ donnent : $\frac{\Theta A}{BK}=\frac{AP}{PB}$ ou, vu que $\Lambda\Delta = BK$: $\frac{\Theta A}{\Lambda\Delta}=\frac{AP}{PB}$; donc : $\frac{A\Pi}{\Pi\Delta}=\frac{AP}{PB}$, d'où : $\frac{A\Pi-\Pi\Delta}{\Pi\Delta}=\frac{AP-PB}{PB}$ ou : $\frac{A\Delta}{\Pi\Delta}=\frac{AB}{PB}$. Or, par hypothèse du parallélogramme sous-jacent équilatéral, on a : $A\Delta = AB$; donc : $\Pi\Delta = PB$, d'où : $A\Delta + \Pi\Delta = AB + PB$ ou, comme le texte : $A\Pi = AP$.

2. La dernière égalité de la note précédente donne : $\widehat{A\Pi P} = \widehat{AP\Pi}$. Or, considérant la diagonale ΑΓ du parallélogramme équilatéral ΑΒΓΔ, on a : $\widehat{\Pi A\Gamma} = \widehat{PA\Gamma}$; donc, les triangles ΡΑΓ, ΠΑΓ sont équiangles et égaux, d'où, comme le texte : $\widehat{A\Gamma\Pi} = \widehat{A\Gamma P} = 1$ angle droit, et $P\Gamma = \Gamma\Pi$.

3. La perpendicularité des droites ΟΓ, ΡΠ dans le plan ΘΚΓΛ a déjà été démontrée plus haut au livre VI, prop. 43 (voir p. 437). Or, comme cette dernière proposition fait partie de celles que Pappus consacre à l'*Optique* d'Euclide, c'est donc par inadvertance ou par altération du texte qu'il est dit ici : λῆμμα σφαιρικῶν (lemme sur les *Sphériques*), au lieu de λῆμμα ὀπτικῶν (lemme sur les *Optiques*).



à la droite ΔΠ et que, par permutation, la droite ΔΠ est à la droite BP comme la droite AΔ est à la droite AB. Or, la droite AΔ est plus petite que la droite AB; donc, la droite ΔΠ est aussi plus petite que la droite BP; par conséquent, la droite entière AΠ est plus petite que la droite entière AP; de sorte que l'angle compris sous les droites AP, PΠ est aussi plus petit que celui qui est compris sous les droites AΠ, ΠP ; donc, l'angle compris sous les droites AΠ, ΠP est plus grand que celui qui est compris sous les droites AP, PΠ (1). Or, l'angle compris sous les droites ΓA, AΠ est aussi plus grand que celui qui est compris sous les droites ΓA, AP; donc, l'angle restant compris sous les droites AΓ, ΓΠ du triangle AΓΠ est plus petit que l'angle restant compris sous les droites AΓ, ΓP du triangle AΓP, et, par suite, l'angle compris sous les droites AΓ, ΓΠ est aigu (2). En conséquence, il est démontré que l'inclinaison des plans en question a lieu en un point situé entre les points Γ, Π en amenant la perpendiculaire du point A sur la droite ΓΠ ; de sorte que, s'il est possible d'incliner un plan sur un plan sous un angle donné, on peut définir aussi

1. Soit, en seconde hypothèse, le parallélogramme de base ABΓΔ non équilatéral, dans lequel $AB > A\Delta$. Les constructions étant les mêmes que dans l'hypothèse précédente, les triangles semblables AΠΘ, ΔΠΛ donnent : $\frac{\Theta A}{\Delta\Lambda} = \frac{A\Pi}{\Pi\Delta}$, et les triangles semblables APΘ, BPK donnent : $\frac{\Theta A}{BK} = \frac{AP}{PB}$, d'où, considérant que $\Delta\Lambda = BK$, on a : $\frac{\Theta A}{\Delta\Lambda} = \frac{AP}{PB}$; donc, comme le texte : $\frac{AP}{PB} = \frac{A\Pi}{\Pi\Delta}$, d'où : $\frac{AP - PB}{PB} = \frac{A\Pi - \Pi\Delta}{\Pi\Delta}$ ou : $\frac{AB}{PB} = \frac{A\Delta}{\Pi\Delta}$, d'où : $\frac{\Pi\Delta}{PB} = \frac{A\Delta}{AB}$. Or, on a par construction : $A\Delta < AB$; donc : $\Pi\Delta < PB$, d'où : $A\Delta + \Pi\Delta < AB + PB$ ou, comme le texte : $A\Pi < AP$, d'où : $\widehat{AP\Pi} < \widehat{A\Pi P}$.

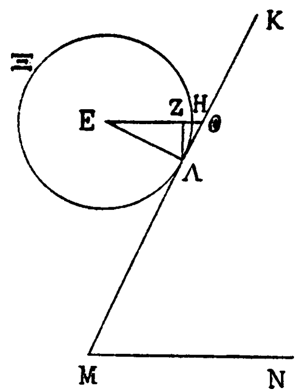
2. Dans le parallélogramme ABΓΔ on a : $AB > A\Delta$; donc : $\widehat{\Gamma A\Delta} > \widehat{\Gamma AB}$ ou, comme le texte : $\widehat{\Gamma A\Pi} > \widehat{\Gamma AP}$, d'où, considérant les triangles AΓΠ, AΓP, on a, en présence de la dernière égalité de la note précédente : 2 angles droits — $(\widehat{A\Pi P} + \widehat{\Gamma A\Delta}) <$ 2 angles droits — $(\widehat{AP\Pi} + \widehat{\Gamma AB})$ ou, comme le texte : $\widehat{A\Gamma\Pi} < \widehat{A\Gamma P}$; donc, l'angle AΓΠ est aigu.

l'inclinaison d'un plan au moyen de l'angle sous lequel un plan est incliné sur celui qui est parallèle à l'horizon.

X.

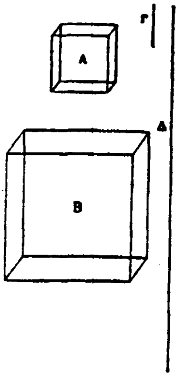
Proposition 9. — Étant donné un poids mené par une puissance donnée dans un plan parallèle à l'horizon et étant donné un autre plan incliné formant un angle donné avec le plan sous-jacent (1), trouver la puissance au moyen de laquelle le poids sera mené dans le plan incliné.

Que le plan sous-jacent soit celui qui passe par la droite MN et le plan incliné celui qui passe par la droite MK faisant avec le plan sous-jacent l'angle donné compris sous les droites KM, MN. Qu'un poids A soit mû par la puissance Γ sur le plan sous-jacent (2), et imaginons une sphère décrite autour du centre E, ayant même poids que A (3), et posons-la sur le plan qui passe par les points M, K en étant tangente à ce plan au point Λ, comme cela se présente au troisième théorème des *Sphériques* (4). Il s'ensuit que la droite de jonction EΛ sera perpendiculaire sur le plan (car cela est aussi démontré au quatrième théorème des *Sphériques* (5) ; de sorte



1. C'est-à-dire le plan horizontal.
2. La théorie du plan incliné de Pappus, absolument étrangère encore au principe de la composition des forces, est faussée dès le début par sa méconnaissance de la résistance de frottement qu'un corps éprouve à se mouvoir sur le plan horizontal, et en se basant sur la notion, de vulgaire apparence, d'une puissance déterminée nécessaire pour mouvoir un poids donné sur ce plan horizontal, accordant ainsi au corps immobile une gravité de position sur le plan. Cette théorie antique, bien que discutée à la Renaissance, a persisté jusqu'à l'époque de Galilée, où il fut reconnu qu'une force minime suffit pour déplacer un corps quelconque sur un plan horizontal parfaitement poli. Voir l'ouvrage de Galilée : *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno nuove scienze, attenenti alla Mecanica ed i movimenti locali*. Leyde, 1638.
3. τῷ A ἰσοβαρὴς, littéralement : équipondérant au (poids) A.
4. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 3 : « Une sphère ne touche pas en plus d'un point un plan qui ne la coupe pas ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 5.
5. Théodose, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 4 : « Lorsqu'une sphère touche un plan non sécant, la droite de jonction menée du centre de la sphère au point de contact est perpendiculaire sur ce plan ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 5.

que la droite EΛ est aussi perpendiculaire sur la droite KM. Etendons le plan qui passe par les droites KM, EΛ ; qu'il détermine le cercle ΛHΞ comme section dans la sphère ; menons par le centre E, parallèlement à la droite MN, la droite EΘ sur laquelle nous menons, du point Λ, la perpendiculaire ΛZ. Dès lors, puisque l'angle compris sous les droites EΘ, ΘΛ est donné (car il est égal à l'angle aigu donné compris sous les droites KM, MN), il s'ensuit que l'angle compris sous les droites EΛ, ΛZ, égal à l'angle compris sous les droites EΘ, ΘΛ, est donné aussi (car le triangle EΘΛ est équiangle avec le triangle EΛZ). En conséquence, le triangle EΛZ est donné d'espèce ; donc, le rapport de la droite EΛ, c'est-à-dire de la droite EH, à la droite EZ est donné et, par suite, le rapport de la droite restante ZH à la droite EZ est donné (1). Dès lors, faisons en sorte que le poids A soit à un poids B et la puissance Γ à une puissance Δ comme la droite HZ est à la droite ZE. Or, la puissance Γ est celle du poids A ; donc, la puissance Δ sera aussi celle du poids B dans le même plan. Et puisque le poids A est au poids B comme la droite HZ est à la droite ZE, si on établit les poids A, B autour des centres E, H, ils s'équilibreront en étant suspendus par le point Z (2). Or, le poids A est établi autour du centre E (car la sphère l'y remplace) ; donc, le poids B, établi autour du centre H, fera équilibre à la sphère ; de sorte que la sphère ne descendra pas du chef de l'inclinaison du plan ; mais elle se maintiendra fixe comme si elle se trouvait sur le plan sous-jacent. Or, il (3) est mû dans le plan sous-jacent



1. Le triangle rectangle EΛZ ayant ses trois angles donnés est donné d'espèce; donc, le rapport $\frac{E\Lambda}{EZ}$ est donné, ou le rapport $\frac{EH}{EZ}$ est donné, d'où le rapport $\frac{EH - EZ}{EZ}$ est donné, ou, comme le texte : le rapport $\frac{ZH}{EZ}$ est donné.

2. On pose : $\frac{\text{poids A}}{\text{poids B}} = \frac{\text{puissance } \Gamma}{\text{puissance } \Delta} = \frac{ZH}{EZ}$; donc, si les points E, H sont les centres de gravité des poids A, B, ceux-ci s'équilibreront à des distances du point Z qui leur sont inversement proportionnelles.

Le texte présente ici une interpolation : « ou bien posés sur la base constituée par la droite ΛZ perpendiculaire sur l'horizon » (Cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1056, l. 17).

3. C'est-à-dire le poids A.

par la puissance Γ ; donc, il sera mû dans le plan incliné par l'ensemble de la puissance Γ et de la puissance du poids B, c'est-à-dire de la puissance Δ. Or, la puissance Δ est donnée (1).

La résolution géométrique du problème a donc été démontrée ci-dessus. Mais, afin de réaliser la construction et la démonstration sur un exemple, que le poids A, disons de 200 talents (2), soit mené dans un plan parallèle à l'horizon par la puissance mouvante Γ, c'est-à-dire que l'on ait quarante hommes qui le fassent mouvoir, et que l'angle compris sous les droites KM, MN, c'est-à-dire l'angle compris sous les droites EΘ, ΘΛ, soit les deux tiers de l'angle droit. Il s'ensuit que l'angle restant compris sous les droites ZΛ, ΛΘ est le tiers de l'angle droit. Or, l'angle compris sous les droites EΛ, ΛΘ est droit ; donc, l'angle compris sous les droites EΛ, ΛZ est aussi les deux tiers de l'angle droit (3) ; donc, si l'on considère les quatre angles droits comme ayant 360 parties (4), l'angle compris sous les droites EΛ, ΛZ en aura 60 pareilles ; l'arc du cercle décrit autour du triangle rectangle EZΛ, situé sur la droite EZ, aura 120 parties pareilles aux 360 que comporte ce cercle (5), et la droite EZ même aura au plus près 104 parties pareilles aux 120 que comporte la droite EΛ, diamètre du cercle ; car ces choses résultent manifestement du *Canon* des droites renfermées dans les cercles qui se trouve dans

1. On a par hypothèse : $\frac{\text{puissance } \Gamma}{\text{puissance } \Delta} = \frac{ZH}{EZ}$. Or, la puissance Γ est donnée, et le rapport $\frac{ZH}{EZ}$ est donné ; donc, comme le texte : la puissance Δ est donnée. Pappus admet donc que la puissance capable de hisser le poids A sur le plan incliné sera la somme des puissances Γ et Δ. Le défaut de cette solution antique du problème du plan incliné a été mis en évidence par Pierre Duhem dans son ouvrage : *Les Origines de la Statique*. Paris, 2 vol. in-8°, 1905-1906. Voir vol. I, pp. 184-187.

2. ταλαντόν, talent, poids ayant varié d'après les pays grecs et les temps, autour d'une valeur d'environ 30 kilogrammes.

3. On a par construction : $\widehat{KMN} = \widehat{E\Theta\Lambda} = \frac{2}{3}$ angle droit, d'où, considérant le triangle rectangle ΛZΘ, on a : $\widehat{Z\Lambda\Theta} = (1 - \frac{2}{3})$ angle droit $= \frac{1}{3}$ angle droit, d'où, considérant le triangle rectangle EΛΘ, on a : $\widehat{E\Lambda Z} = \widehat{E\Lambda\Theta} - \widehat{Z\Lambda\Theta} = (1 - \frac{1}{3})$ angle droit $= \frac{2}{3}$ angle droit.

4. C'est-à-dire 360 degrés.

5. L'angle $E\Lambda Z = \frac{2}{3}$ d'angle droit, mesure 60 degrés d'angle, et l'arc EZ dans un cercle circonscrit au triangle rectangle EZΛ mesure 120 degrés d'arc.

le premier livre des *Mathématiques* de Ptolémée (1). En conséquence, le rapport de la droite EΛ, c'est-à-dire de la droite EH, à la droite EZ est celui de 120 à 104 ; donc, le rapport de la droite restante HZ à la droite ZE est celui de 16 à 104. Or, ce rapport est celui du poids A au poids B et de la puissance Γ à la puissance Δ. Et le poids A est de 200 talents, tandis que la puissance mouvante est celle de 40 hommes ; par conséquent, le poids B sera de 1,300 talents et la puissance Δ celle de 260 hommes (car 200 est à 1,300, et 40 à 260, comme 16 est à 104) ; donc, si le poids A de 200 talents est mû dans un plan parallèle à l'horizon par quarante hommes, le même poids sera mû par l'ensemble des hommes que nous venons de dire, soit par tous les trois cents hommes, dans un plan incliné sur l'horizon sous l'angle compris sous les droites KM, MN, supposé comme étant les deux tiers de l'angle droit (2).

XI.

PROPOSITION 10. — Au reste, le fait de mouvoir un poids donné au moyen d'une puissance donnée appartient à la même théorie. C'est là, en effet, l'invention (3) mécanique d'Archimède à propos de laquelle on rapporte qu'il a dit : « Donne-moi où je

1. D'après le *Canon*, ou table manuelle de Claude Ptolémée (voir trad. précitée de Halma, vol. I, p. 43), le diamètre du cercle vaut le tiers de la circonférence, et est donc mesuré par 120 degrés, tandis que la corde d'un arc de 120 degrés est mesurée par 103 degrés, 55 minutes et 23 secondes. Le nombre 104 adopté ici par Pappus est donc, comme il le dit, approché.

2. Les droites EZ, EΛ étant mesurées respectivement par 104 et 120 degrés d'après la table de Ptolémée, on a : $\frac{E\Lambda}{EZ}=\frac{EH}{EZ}=\frac{120}{104}$, d'où : $\frac{EH-EZ}{EZ}=\frac{120-104}{104}$ ou, comme le texte : $\frac{HZ}{EZ}=\frac{16}{104}$. Or, on a par hypothèse : $\frac{\text{poids A}}{\text{poids B}}=\frac{\text{puissance }\Gamma}{\text{puissance }\Delta}=\frac{HZ}{EZ}$; donc : $\frac{\text{poids A ou 200 talents}}{\text{poids B}}=\frac{\text{puissance }\Gamma\text{ ou 40 hommes}}{\text{puissance }\Delta}=\frac{16}{104}$ d'où : poids B $=\frac{200\times 104}{16}=$ 1,300 talents, et puissance Δ $=\frac{40\times 104}{16}=$ 260 hommes. Donc, le poids A de 200 talents, mû par 40 hommes sur le plan horizontal, sera mû par $40+260=300$ hommes sur le plan incliné de 60 degrés.

3. Le texte de Hultsch (*loc. cit.*, vol. III, p. 1060, l. 2) rétablit ici la particule adversative μὲν, que les manuscrits utilisés par Commandin donnent sous la forme abrégée μ'. Or, comme cette forme désigne aussi le nombre 40, Commandin s'est mépris en traduisant : « quadragesimum inventum », la quarantième invention (cfr. *loc. cit.*, p. 460, l. 22) ; ce qui a longtemps fait attribuer à Archimède au moins quarante inventions.

puisse me tenir ferme, et j'ébranlerai la terre. » (1) Or, Héron d'Alexandrie en a clairement exposé la construction dans son livre intitulé : *Le Baroulcon* (2), en y employant un lemme qu'il avait démontré dans ses *Mécaniques* (3), où il traite aussi des cinq puissances au moyen desquelles un poids donné est mû par une puissance donnée (4) : le coin (5), le levier (6), la vis (7), le polyspaste (8) et l'essieu dans la roue (9). Mais, dans le *Baroulcon*, le poids donné est mû par une puissance donnée au moyen de la juxtaposition de tambours dentés (10) ; le diamètre du tambour ayant le rapport de 5 à 1 avec le diamètre de son axe, le poids

1. δός μοί πoῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν, phrase dont on donne souvent une traduction trop libre.

2. Βαρουλκός, le *Baroulcon*, expression formée de βαρός (poids) et de ἕλκειν (tirer). C'est le titre d'un ouvrage d'Héron, ayant fait partie de ses *Introductions mécaniques*, ou bien publié à part, et traitant spécialement des appareils propres à traîner ou à élever des fardeaux. Le texte grec de cet ouvrage est perdu, mais on en possède une traduction arabe remontant au IXe siècle et dont l'orientaliste Golius a apporté en Occident un manuscrit datant du XVe siècle. Golius en fit une traduction latine, qui est restée inédite, exception faite pour un fragment que Brugmans a publié en 1785 dans les *Mémoires de la Société royale de Goettingue*. La traduction de Golius n'a plus été retrouvée. Une traduction française du texte arabe a été donnée sous le titre : *Les Mécaniques ou l'Élévateur de Héron d'Alexandrie, publiées pour la première fois sur la version arabe de Costâ-ibn-Lûquâ, et traduites en français par M. le baron Carra de Vaux.* Paris, 1894, pet. in-8°. Le texte arabe a été réédité dans la collection Teubner par le Dr Nix, avec la collaboration de M. Carra de Vaux, accompagné d'une traduction allemande.

Voir au sujet du baroulcon : l'ouvrage de H. Martin (p. 31) que nous avons mentionné plus haut, p. 812, n. 2, et l'ouvrage de M. Cantor : *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst.* Leipzig, 1875, p. 12.

3. Voir p. 818, n. 5.

4. Le texte porte ici la petite interpolation : καθ' ἑκάστην δύναμιν, par chacune des puissances (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1060, l. 10).

5. σφήν, le coin.

6. μοχλός, le levier.

7. κοχλίας, le limaçon ou hélice rampante d'Archimède, c'est-à-dire la vis que Héron appelle vis sans fin (ὁ καλούμενος ἄπειρος κοχλίας).

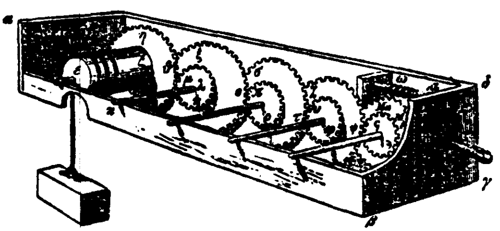
8. πολύσπαστον, le polyspaste, littéralement : tirant par plusieurs (poulies), c'est-à-dire la moufle, ou engin composé de cordages et d'une série de poulies à gorges montées dans une même chape, soit sur des axes particuliers, soit sur le même axe.

9. ἄξων ἐν τῷ περιτροχίῳ, littéralement : l'axe (ou l'essieu) dans ce qui court autour, périphrase qui désigne l'appareil composé d'une roue et de son axe que nous appelons tour ou treuil. La version latine de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1061, l. 9) se borne à latiniser l'expression grecque en disant : « axis in peritrochio ».

10. τύμπανον ὠδοντωμένον, tambour (ou roue) denté.

mû étant supposé de 1,000 talents et la puissance mouvante étant supposée de 5 talents (1).

Qu'il nous faille donc démontrer la même chose dans le rapport de 2 à 1 ; que le poids mû soit de 160 talents au lieu de 1,000, et que la puissance mouvante soit supposée être de 4 talents au lieu de 5, c'est-à-dire qu'un homme, en tant que moteur, ait par lui-même, sans machine, la puissance d'entraîner 4 talents. Soit ΑΒΓΔ ce qu'il appelle le glossocome (2) ; soit, dans celui-ci, l'axe EZ, placé en travers des parois longues et parallèles, tournant librement, et soit HΘ le tambour denté (3) qui lui est solidaire, ayant son diamètre double de celui que possède l'axe au



front (4) [car cet axe est carré en son milieu (5) sur une longueur correspondant à l'épaisseur du tambour dans lequel il est ajusté d'une manière inébranlable, et il est arrondi, élagué (6) en quelque sorte, de part et d'autre du tambour] (7). Dès lors, si le cordage (8) relié au poids à tirer est enroulé autour de l'axe EZ,

1. Cette proposition du *Baroulcon* d'Héron se trouve dans la Collection intitulée: Ἥρωνος Ἀλεξανδρέως περὶ διόπτρας, sur la Dioptre d'Héron d'Alexandrie (publiée par Vincent dans: *Notices et Extraits des Manuscrits*, t. XIX, 2e partie, 1858, p. 300).

2. γλωσσόκομον, le glossocome, expression dérivée de γλῶσσα (langue), qui désigne le coffret dans lequel les Anciens renfermaient les languettes de flûtes, et par laquelle Héron indique le vaisseau qui loge l'équipage de roues dentées constituant l'espèce de treuil nommé le *Baroulcon*.

3. Une petite interpolation ajoute ici que les dents sont radiales (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1062, l. 6).

4. κόrραφος, tempe, ou côté frontal, désignant ici le flanc circulaire du cylindre axial, au droit de son insertion dans la roue dentée.

5. C'est-à-dire dans sa partie médiane où il passe dans la roue.

6. C'est-à-dire que cet axe étant constitué par un bois de section primitivement carrée, ses arêtes longitudinales sont abattues de manière à le rendre cylindrique de part et d'autre du tambour ou roue.

7. La longue phrase que nous plaçons entre crochets est considérée comme une interpolation d'un commentateur qui emprunte à la *Mécanique* d'Héron le passage où il est question de la confection de l'axe cylindrique et de son insertion par bout carré dans la roue dentée (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1062, ll. 8-11).

8. Une petite interpolation ajoute ici : καλούμενα δὲ ὅπλα, c'est-à-dire : et appelés câbles (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1062, l. 13).

[de part et d'autre du tambour ΗΘ] (1), en passant par quelque ouverture [et plutôt par une large découpure] (2) existant dans la paroi AB, et si le tambour ΗΘ tourne, il fait tourner aussi l'axe qui lui est solidaire, lequel se meut autour de ses extrémités dans des doigts d'airain (3) et des boîtes (4) également d'airain placées dans les parois AB, ΓΔ que nous avons dites. Et si le cordage qui porte le poids [appelé le fardeau] (5) est enroulé, le poids sera mû. Or, pour que le tambour ΗΘ soit mû, on devra lui appliquer une puissance de plus de 80 talents, parce que le diamètre du tambour est le double du diamètre de l'axe (6); car ce problème est démontré par Héron dans *Les Mécaniques* (7).

Dès lors, puisque nous n'avons pas une puissance donnée de 80 talents, mais bien celle de 4 talents, soit un autre axe ΚΛ disposé parallèlement à l'axe EZ, ayant un tambour denté solidaire MN tel que ses dents correspondent aux dents du tambour ΗΘ; ce qui s'obtient quand le nombre de dents du tambour ΗΘ est au nombre de dents du tambour MN comme le diamètre du tambour ΗΘ est au diamètre du tambour MN (et la manière dont cela s'obtient sera manifeste en vertu de choses qui vont suivre) (8). En conséquence, le tambour MN est donné aussi. Mais, qu'un tambour ΞΟ, ayant un diamètre double du diamètre du tambour MN, soit solidaire de ce même axe ΚΛ. De ce fait, celui qui voudra mouvoir le poids au moyen du tambour ΞΟ devra posséder une puissance de 40 talents, vu que les 80 talents sont le double de 40 talents.

1. Les mots ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ΗΘ τυμπάνου sont attribués par Hultsch à un commentateur (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1062, l. 15).
2. Mots mis entre crochets par Hultsch pour marquer l'interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1062, l. 13).
3. ἐν δακτύλοις χαλκοῖς, dans des doigts d'airain, c'est-à-dire des tourillons de bronze.
4. πυξίς, boîte en bois de buis, désignant ici ce que nous appelons le coussinet du tourillon.
5. D'après Hultsch, les mots ὃ καλεῖται φορτίον, dont nous mettons la traduction entre crochets, constituent une petite interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1061, l. 4).
6. C'est-à-dire dans l'hypothèse faite plus haut d'un poids de 160 talents à mouvoir.
7. Le texte présente ici l'interpolation évidente : « et il a écrit beaucoup d'autres problèmes des plus utiles et avantageux pour la vie » (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1064, ll. 8-10).
8. Voir proposition 20.

Appliquons de nouveau, contre le tambour denté ΞO, un autre tambour denté ΠP solidaire d'un autre axe ; rendons solidaire de ce même axe un autre tambour ΣT, ayant de même son diamètre double du diamètre du tambour ΠP, et dont les dents ne soient pas engagées avec les dents du tambour MN. Dès lors, la puissance qui mouvra le poids au moyen du tambour ΣT sera de 20 talents. Or, la puissance donnée est de 4 talents ; donc, il faudra de nouveau appliquer un autre tambour denté ΥΦ contre le tambour denté ΣT, et rendre solidaire avec l'axe du tambour ΥΦ un tambour denté XΨ dont le diamètre aura avec celui du tambour ΥΦ le rapport de 2 à 1. En conséquence, la puissance qui mouvra le poids au moyen du tambour XΨ sera de 10 talents. Appliquons de nouveau, contre le tambour XΨ, un autre tambour denté ϙϡ, avec l'axe duquel soit rendu solidaire un tambour denté aux dents obliques $M^{\alpha}M^{\beta}$, dont le diamètre a avec le diamètre du tambour ϙϡ le rapport que 10 talents ont avec les 4 talents de la puissance donnée.

Ces choses étant construites, si nous imaginons que le glossocome ΑΒΓΔ est posé d'une manière inébranlable en site élevé ; si nous suspendons le poids (1) à l'axe EZ et la puissance entraînante de 4 talents au tambour $M^{\alpha}M^{\beta}$, ni le poids ni la puissance ne seront emportés vers le bas si les axes tournent facilement et si l'apposition des tambours est exactement réglée (2) ; mais, la puissance de 4 talents fera équilibre [au poids des 160 talents] (3) comme sur une balance. En conséquence, si nous ajoutons un poids minime à l'une des parties, celle à laquelle il a été fait apport penchera et sera emportée. En effet, si on ajoute, par exemple, le poids d'une mine (4) à la puissance des 4 talents, il vaincra et entraînera le poids des 160 talents. Mais, au lieu de faire cette addition, adjoignons au tambour $M^{\alpha}M^{\beta}$ la vis ΩA', ayant son hélice ajustée aux dents obliques du tambour $M^{\alpha}M^{\beta}$; et la manière dont cela doit se faire est exposée dans ces mêmes

1. C'est-à-dire le poids de 160 talents.
2. Par ces termes, Pappus suppose entièrement nul le frottement, au repos, des pièces, au sujet duquel une notion nette n'existait pas encore.
3. Lacune dont la reconstitution proposée d'abord par Commandin (cfr. *loc. cit.*, p. 461, l. 22) a été adoptée par Hultsch dans les mots τῷ βάρει τῶν ρξʹ ταλάντων (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1066, l. 26).
4. μναιαῖον (βάρος), poids d'une mine, soixantième partie d'un talent.

Mécaniques d'Héron ; tandis que nous la décrirons nous-même plus clairement dans la suite (1). Que cette vis tourne facilement autour de pivots (2) disposés dans des trous ronds ; que l'un de ces pivots se prolonge par la paroi ΓΔ à l'extérieur du glossocome, et que son prolongement, rendu carré, reçoive la poignée (3) ϚB' au moyen de laquelle, après l'avoir saisie et fait tourner, on fait tourner la vis et le tambour $M^{\alpha}M^{\beta}$ et, par suite, le tambour ϞϠ aussi qui lui est solidaire. En conséquence, le tambour XΨ, placé contre ce dernier, tournera aussi, ainsi que le tambour ΥΦ qui lui est solidaire, ainsi que le tambour ΣΤ placé contre ce dernier, ainsi que le tambour ΠΡ qui lui est solidaire, ainsi que le tambour ΞΟ placé contre ce dernier, ainsi que le tambour MN qui lui est solidaire, ainsi que le tambour HΘ placé contre ce dernier ; en sorte que l'axe EZ, solidaire du tambour HΘ et autour duquel s'enroule le cordage portant le fardeau, en tournant aussi, en fera mouvoir le poids. Et il est évident qu'il sera mû du fait qu'on a ajouté une autre puissance : celle de la poignée qui décrit une circonférence plus grande que le périmètre de la vis ; car il a été démontré dans le livre *Des Balances* d'Archimède (4) et dans *Les Mécaniques* de Philon (5) et de

1. Voir proposition 24.
2. τόρμος (moyeu de roue), mot que la version latine de Commandin se borne à latiniser dans l'expression «circa tormos » (cfr. *loc. cit.*, p. 461, l. 29), mais auquel Hultsch a donné le sens réel de « cardo sive clavicula », qu'il possède ici, c'est-à-dire : pivot ou cheville (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1069, l. 5).
3. Le mot χειρολαβίς, qui désigne proprement la partie courbe de la charrue tenue en mains, est pris ici dans le sens de manivelle adaptée sur le bout carré de la vis pour la faire tourner.
4. Rien ne nous est parvenu de l'ouvrage attribué à Archimède sous le titre : *Des Balances* ou *Des Fléaux de balance* (περὶ ζυγῶν), dans lequel, d'après Pappus, il avait démontré la relation des efforts appliqués tangentiellement à des cercles concentriques. C'est probablement dans cet ouvrage qu'il a donné la première théorie du levier, appliquée dans son immortel traité *De l'Équilibre des Plans* (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν), où il se montre le véritable fondateur de la Statique, théorie sur laquelle il fonde son ouvrage, non moins célèbre : *De la Méthode relative aux théorèmes mécaniques* (περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων ἔφοδος), dans lequel, notamment, une première solution mécanique de la quadrature du segment de la parabole lui donne l'intuition de sa solution géométrique.
5. Le traité de *Mécanique* en cinq livres de Philon de Byzance ne nous est parvenu que dans ses deux derniers livres qui traitent des armes missiles (βελοποιικὰ ou ὀργανοποιικὰ) et des ouvrages de siège. Une édition critique des livres IV et V a été donnée sous le titre : *Philo Byzantinus. Mechanicae syntaxis libri IV et V. Recognovit R. Schoene.* Berolini, 1893, in-8°. Une édition du livre V avec traduction allemande a été donnée sous le titre : *Philo Byzantinus. Exzerpte*

Héron (1), que les grands cercles forcent les petits cercles quand leur rotation s'effectue autour du même centre.

XII.

PROPOSITION 11. — Telles sont donc les choses qui comportent au plus haut point la théorie mécanique ; mais, les genres et les branches de l'art instrumental (2) sont multiples ; car les questions de mécanique, de gnomonique (3) et celles qui sont relatives aux vaisseaux contenant de l'eau (4), examinées par le raisonnement, deviennent manifestes par suite des ouvrages mêmes que construit cet art instrumental. Au reste, en dehors des choses mécaniques, il y en a encore beaucoup d'autres qui sont réalisées par cet art, et certaines d'entre elles, difficiles à surmonter par les voies

---

aus der Mechanik. B. VII und VIII (vulgo 5 Buch). Griech. und deutsch hrsg. von H. Diels und E. Schramm. Berlin, 1920, in-4°. Le livre IV a été publié avec une traduction allemande sous le titre : *Philo Byzantinus. Belopoiika (4 Buch der Mechanik). Griech. und Deutsch von H. Diels und E. Schramm.* Berlin, 1919, in-4°. Une traduction française a été publiée sous le titre : *Philon de Byzance. Le livre des appareils pneumatiques et des machines hydrauliques. Édité d'après les versions arabes d'Oxford et de Constantinople, et traduit en français par Carra de Vaux.* Paris 1902, in-4° *(Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale et autres bibliothèques, tome* 38*)*. Le second ouvrage qui nous est parvenu de Philon est relatif aux sept merveilles du monde (περὶ τῶν ἑπτὰ θεαμάτων) ; il a été publié en grec par Orelli avec les versions latines antérieures de Léon Allatius (1640) et de Denys Salvaing de Boissieu (1661) sous le titre : *Libellus de VII orbis spectaculis. Graece cum versione latina duplici D. S. Boesii et L. Allatii. Textum recognovit C. Orellius.* Lipsiae, 1816, in-8°.

1. Voir p. 818, n. 5.

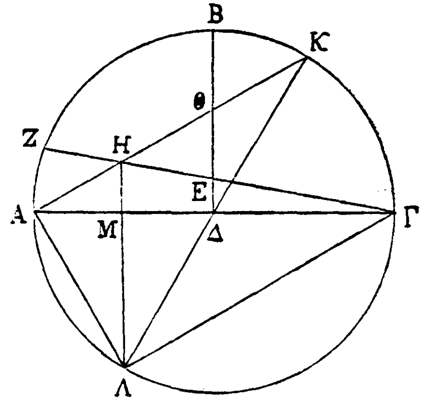
2. ἡ οργανικὴ (sous-entendu τέχνη) l'art organique ou instrumental, c'est-à-dire la mécanique appliquée.

3. ἡ γνωμονικὴ (sous-entendu τέχνη), l'art de faire les cadrans solaires, ou la gnomonique.

4. Le sens de l'expression ἡ περὶ ὑδρείων πραγματείας est discutable. Commandin le rend par « tractatio quae circa aquas versatur (cfr. *loc. cit.*, p. 463, l. 13) ; ce qui présente le sens trop général de « science hydraulique », laquelle n'a pas été érigée en corps de doctrine chez les Anciens. D'autre part, Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1071, l. 2) traduit simplement par le mot « hydrostatica » ; ce qui paraît forcer le sens, attendu que l'hydrostatique n'a pas été dénommée comme science particulière chez les Grecs, pour lesquels elle est restée impliquée dans le célèbre traité d'Archimède sur *Les Corps flottants* (περὶ τῶν ὀχουμένων). Par contre, il n'est pas possible de s'arrêter au sens à première vue acceptable : « science relative aux irrigations » (ὑδρείων), en présence du contexte dans lequel il s'agit d'appareils mécaniques, d'horloges solaires, et surtout en présence d'une phrase du préambule du livre VIII, où il est question d'horloges hydrauliques. Dans ces conditions nous préférons traduire simplement par les mots « vaisseaux contenant de l'eau ». Voir, au surplus, page 812, note 5.

géométriques, sont ramenées à une construction plus aisée quand on les entreprend à l'aide d'instruments. Tel est notamment le problème déliaque, solide de sa nature, et qui n'a pu être construit par ceux qui suivent le raisonnement géométrique, parce qu'il n'est pas facile de décrire des sections de cône dans le plan, mais qui, lorsqu'on le traite par des instruments, amène (1) à une opération manuelle et à une construction convenable (2), c'est-à-dire à trouver un cube double d'un cube (3). Or, ce n'est pas seulement le cube double que l'on trouve au moyen d'un instrument déterminé, mais encore, d'une manière générale, le cube qui possède un rapport imposé (4).

En effet, construisons le demi-cercle ΑΒΓ; élevons de son centre Δ la droite ΔΒ à angles droits, et faisons mouvoir une règle autour du point A, de telle sorte qu'une extrémité de celle-ci soit retenue par une cheville placée au point A, tandis que l'autre extrémité circule autour de la cheville prise comme centre, entre les points B. Γ. Ces constructions étant faites, qu'il soit imposé de trouver deux cubes ayant entre eux un rapport donné; faisons en sorte que le rapport de la droite ΒΔ à la droite ΔΕ soit le même que ce rapport, et prolongeons la droite de jonction ΓΕ jusqu'au point Z.



Faisons maintenant passer la règle entre les points B, Γ, jusqu'à ce que sa partie découpée entre les droites ZE, EB devienne égale

1. Le texte présente ici l'interpolation τὸ προκείμενον, le (problème) proposé (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1070, l. 13).

2. Une interpolation ajoute ici : « plus (convenable) que celle qui a été exposée par d'autres » (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1070, l. 12).

3. Ces considérations sur la solution mécanique ou empirique de certains problèmes de géométrie ont déjà été faites en d'autres termes au livre III, dans les préliminaires de la proposition 5 (voir p. 38) et au chapitre IX (voir p. 45).

4. C'est-à-dire le cube qui est dans un rapport donné avec un autre cube donné, et la construction empirique qui va suivre reproduit presque textuellement celle qui a déjà été donnée au livre III, chap. X (voir pp. 47-50).

à celle qui est découpée entre la droite BE et l'arc BKΓ ; car cela se fait aisément en tâtonnant continuellement et en faisant avancer la règle. Que ce soit donc chose faite, et que la règle ait la position AHΘK, de manière que les droites HΘ, ΘK soient égales ; je dis que le cube construit sur la droite BΔ est au cube construit sur la droite ΔΘ dans le rapport imposé, c'est-à-dire dans celui de la droite BΔ à la droite ΔE.

En effet, imaginons que le cercle soit complété ; prolongeons la droite de jonction KΔ jusqu'au point Λ et menons la droite de jonction ΛH ; celle-ci est donc parallèle à la droite BΔ, parce que la droite KΘ est égale à la droite ΘH et la droite KΔ égale à la droite ΔΛ (1) Menons encore la droite de jonction AΛ et la droite de jonction ΛΓ. Dès lors, puisque l'angle compris sous les droites HA, AΛ est droit, parce qu'il est situé dans un demi-cercle, et que la droite ΛM est une perpendiculaire, il s'ensuit que le carré de la droite ΛM est au carré de la droite MH comme le carré de la droite ΛM est au carré de la droite MA, c'est-à-dire comme la droite ΓM est à la droite MA (2). Appliquons de part et d'autre le rapport de la droite AM à la droite MH (3) ; il s'ensuit que le rapport composé de celui de la droite ΓM à la droite MA et de celui de la droite AM à la droite MH, c'est-à-dire de la droite ΓM à la droite MH, est le même que le rapport composé de celui du carré de la droite ΛM au carré de la droite MH et de celui de la droite AM à la droite MH. Or, le rapport composé de celui du carré de la droite ΛM au carré de la droite MH et de celui de la droite AM à la droite MH est le même que le rapport du cube construit sur la droite ΛM au cube construit sur la droite MH ; donc, le rapport de la droite ΓM à la droite MH est aussi le même que le rapport du cube construit sur la droite ΛM au cube construit sur la droite MH. Mais, la droite ΓΔ est à la droite ΔE, c'est-à-dire la droite BΔ à la droite ΔE, comme la droite ΓM est à la droite MH ; tandis que la droite ΛΔ est à la droite ΔΘ, c'est-à-dire la droite ΔB à la droite ΔΘ, comme la droite ΛM est à la droite MH ; donc, le cube construit sur la droite BΔ est aussi

1. EUCLIDE, liv. VI, prop. 2, énoncée p. 48, n. 1.
2. Voir la rédaction antérieure de cette proposition au livre III, p. 49, où ce même passage de la démonstration est un peu plus explicite.
3. Voir p. 49, n. 3.

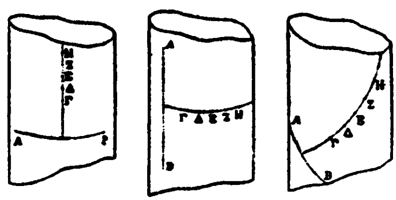
au cube construit sur la droite $\Delta\Theta$ comme la droite $B\Delta$ est à la droite ΔE, c'est-à-dire dans le rapport donné (1).

XIII

PROBLÈME INSTRUMENTAL SUR LE CYLINDRE

Proposition 12. — Parmi les problèmes mécaniques, ceux qui sont appelés instrumentaux sont (2) dénués d'autorité géométrique ; tels sont ceux qui sont décrits au moyen d'un seul et même intervalle (3), et celui du cylindre déformé sur chacune de ses bases, lequel est proposé par les architectes. En effet, étant donnée une portion de la surface d'un cylindre droit dont aucune partie des circonférences qui se présentent dans les bases n'a été laissée intacte, ils demandent de trouver la grosseur du cylindre, c'est-à-dire le diamètre du cercle dont le cylindre a tenu sa génération. Or, on trouvera ce diamètre en procédant méthodiquement de la manière suivante :

Prenons deux points A, B sur la surface donnée, et marquons, sur cette surface, un premier point Γ à une seule et même distance de ces points pris comme centres (4) ; marquons de nouveau un point Δ à une distance de ces mêmes centres A, B plus grande que la première ; puis, un point E à une autre distance ; puis, un point Z à une autre ; enfin, un point H à une autre. Les cinq points Γ, Δ, E, Z, H seront donc dans un seul et même plan ; d'où il résulte que, si ces points sont considérés comme les som-



1. Voir l'exposé plus explicite p. 49, n. 4.

2. Le texte porte les mots ἐστιν ὅτι (sont que), attribués par Hultsch à un interpolateur, à moins de constituer une altération du mot δηλονότι (évidemment) qu'aurait écrit Pappus (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1074, l. 1).

3. ἑνὶ διαστήματι, expression obscure, probablement altérée, et visant, sans doute, soit une seule et même ouverture de compas, soit une seule et même distance prise sur la règle mobile dont il est fait usage dans la proposition 11, ainsi qu'au livre III, proposition 5.

4. C'est-à-dire : marquons un premier point Γ d'intersection de deux cercles de même rayon arbitraire décrits des centres *A*, *B*.

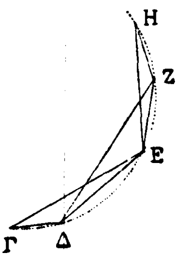
mets de triangles isocèles, la droite qui relie chacun d'eux au point divisant en deux parties égales la droite de jonction des points A, B, considérée comme base commune des triangles, est perpendiculaire à la droite AB (1) [et les cinq droites seront dans un seul et même plan, et il est évident que les points Γ, Δ, E, Z, H y sont aussi] (2). Or, nous transportons cela dans le plan de la manière suivante : Constituons le triangle ΘΚΛ dans le plan au moyen des trois droites reliant les points Γ, Δ, E ; puis le triangle ΚΛΜ au moyen des trois droites reliant les points Δ, E, Z, enfin, constituons le triangle ΛΜΝ au moyen des trois droites reliant les points E, Z, H (3). Les triangles ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΝ seront donc posés en remplacement des triangles ΓΔΕ, ΔΕΖ, ΕΖΗ. Dès lors, si nous décrivons une ellipse autour des points Θ, K, Λ, M, N, son petit axe sera le diamètre du cercle d'après lequel le cylindre a été décrit (4).

XIV.

PROPOSITION 13. — Comme nous cherchons maintenant à décrire une ellipse autour des cinq points donnés Θ, K, Λ, M, N et disposés dans un seul plan, qu'elle soit décrite ; que les droites de jonction ΘΝ, ΜΚ soient d'abord parallèles ; coupons chacune

1. Aucune figure n'accompagne le texte de cette proposition dans les manuscrits. La version latine de Commandin a suppléé à ce défaut au moyen d'une figure peu intuitive, à laquelle l'édition critique de Hultsch a substitué les trois figures que nous reproduisons dans notre traduction. Ces trois figures répondent du reste à une remarque faite par Commandin, à savoir : que les cinq points étant dans un même plan en raison des constructions, si la même ligne sur laquelle ils se trouvent est droite, celle-ci est une génératrice du cylindre ; tandis que, si la ligne est courbe, elle sera un arc de cercle lorsque le plan qui contient les points est parallèle à la base du cylindre, et sera un arc d'ellipse lorsque le plan n'est pas parallèle à la base (cfr. COMMANDIN, *loc. cit.*, p. 465, ll. 24-31).

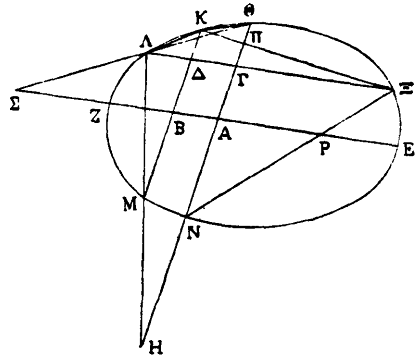
2. La phrase entre crochets est attribuée à un interpolateur (cfr. HULTSCH, vol. III, p. 1076, ll. 1-2).



3. Il résulte de cette construction que le cas des cinq points situés sur une génératrice du cylindre est exclu, et que le problème ne considère que le cas de la troisième figure de la proposition où les cinq points sont sur une ellipse. Les trois triangles ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΝ, qui seront transportés dans le plan de la figure de la proposition suivante (13), reproduisent donc les triangles ΓΔΕ, ΔΕΖ, ΕΖΗ, dont les côtés sous-tendent tous des arcs de l'ellipse ΓΔΕΖΗ déterminée dans la surface du cylindre par le plan qui passe par les cinq points.

4. C'est-à-dire le cercle directeur du cylindre droit.

d'elles en deux parties égales aux points A, B et prolongeons la droite de jonction AB jusqu'aux points E, Z de l'ellipse. En conséquence, la droite EZ est un diamètre de l'ellipse en vertu de la dixième définition des *Coniques* (1), et cette droite est donnée de position ; car chacun des points A, B est donné aussi (2) de position (3). Dès lors, menons par le point Λ la droite ΛΞ parallèle à la droite EZ, et que



les droites de jonction ΞK, ΛM rencontrent aux points Π, H la droite ΘN prolongée ; il s'ensuit que les points Γ, H sont donnés (car chacun des points Λ, M, Θ, N est donné) (4). Et puisque le rectangle compris sous les droites ΞΓ, ΓΛ est à chacun des rectangles compris sous les droites HΓ, ΓΠ et sous les droites NΓ, ΓΘ comme le rectangle compris sous les droites ΞΔ, ΔΛ est au rectangle compris sous les droites MΔ, ΔK, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites HΓ, ΓΠ équivaut au rectangle compris sous les droites NΓ, ΓΘ (5). Or, le rectangle compris sous

1. Apollonius, *Les Coniques*, liv. I, définition IV (ou définition X des copies à l'époque de Pappus) : « J'appelle diamètre de toute ligne courbe située dans un seul plan la droite qui, menée de la ligne courbe, coupe en deux parties égales toutes les lignes droites menées dans la ligne parallèlement à une droite quelconque ; sommet de la ligne l'extrémité de cette droite qui est située sur la ligne ; enfin, j'appelle droites menées d'une manière ordonnée au diamètre, chacune de ces parallèles ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 4.

2. Euclide, *Données*, prop. 26, énoncée p. 214, n. 5 ; prop. 7, énoncée p. 28, n. 4, et prop. 27, énoncée p. 30, n. 1.

3. Les mots τῇ θέσει, de position, sont probablement interpolés, parce qu'ils sont inutiles.

4. Euclide, *Données*, prop. 28, énoncée p. 231, n. 4 ; prop. 26, énoncée p. 214, n. 5, et prop. 25, énoncée p. 214, n. 6.

5. Le parallélisme des droites ΘH, KM donne : $\frac{\Xi\Gamma}{\Gamma\Pi} = \frac{\Xi\Delta}{\Delta K}$ et $\frac{\Gamma\Lambda}{H\Gamma} = \frac{\Delta\Lambda}{M\Delta}$, d'où : $\frac{\Xi\Gamma}{\Gamma\Pi} \times \frac{\Gamma\Lambda}{H\Gamma} = \frac{\Xi\Delta}{\Delta K} \times \frac{\Delta\Lambda}{M\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{\Xi\Gamma \times \Gamma\Lambda}{H\Gamma \times \Gamma\Pi} = \frac{\Xi\Delta \times \Delta\Lambda}{M\Delta \times \Delta K}$ (I). D'autre part (Apollonius, *Les Coniques*, liv. III, prop. 17 : « Si deux droites tangentes à une section de cône ou à une circonférence de cercle se rencontrent ; si l'on prend deux points quelconques sur la section et si, de ces points, l'on mène, dans la section, des parallèles aux tangentes, lesquelles se coupent mutuellement et coupent la ligne, les rectangles délimités sous les droites qui sont prises de la même manière seront entre eux comme les carrés des tangentes ». Voir trad. de P. Ver

les droites ΝΓ, ΓΘ est donné (car chacune des droites est donnée) ; donc, le point Π est donné [1]. Mais, le point K est donné aussi ; donc, la droite ΚΠΞ est donnée de position. Mais, la droite ΛΓΞ est donnée aussi ; donc, le point Ξ est donné et est sur l'ellipse. Que les droites de jonction ΝΞ, ΛΘ rencontrent aux points P, Σ le diamètre EZ prolongé ; il s'ensuit de nouveau que le rectangle compris sous les droites NA, ΑΘ est à chacun des rectangles compris sous les droites PA, ΑΣ et sous les droites EA, AZ comme le rectangle compris sous les droites ΝΓ, ΓΘ est au rectangle compris sous les droites ΞΓ, ΓΛ, et qu'en conséquence, le rectangle compris sous les droites PA, ΑΣ équivaut au rectangle compris sous les droites EA, AZ [2]. Or, le rectangle compris sous les droites PA, ΑΣ est donné (car les droites PA, ΑΣ sont données [3] ; donc, le rectangle compris sous les droites

Eecke, p. 210), si nous considérons d'abord les points Ξ, Θ, d'où les droites ΞΛ, ΘΝ sont menées respectivement parallèles au diamètre ZE et à son diamètre conjugué, non indiqué sur la figure, on a : $\frac{\Xi\Gamma \times \Gamma\Lambda}{\mathrm{N}\Gamma \times \Gamma\Theta} = \frac{(\text{tangente égale et parallèle à la moitié du diamètre ZE})^2}{(\text{tangente égale au demi-diamètre conjugué})^2}$. Si nous considérons ensuite les points Ξ, K, d'où les droites ΞΛ, KM sont aussi menées parallèlement aux diamètres conjugués, on a de même : $\frac{\Xi\Delta \times \Delta\Lambda}{\mathrm{M}\Delta \times \Delta\mathrm{K}} = \frac{(\text{tangente} = \frac{1}{2}\,\mathrm{ZE})^2}{(\text{tang.} = \text{demi-diam. conjugué})^2}$; donc : $\frac{\Xi\Gamma \times \Gamma\Lambda}{\mathrm{N}\Gamma \times \Gamma\Theta} = \frac{\Xi\Delta \times \Delta\Lambda}{\mathrm{M}\Delta \times \Delta\mathrm{K}}$ (II). Dès lors, les relations (I) et (II) donnent : $\frac{\Xi\Gamma \times \Gamma\Lambda}{\mathrm{H}\Gamma \times \Gamma\Pi} = \frac{\Xi\Gamma \times \Gamma\Lambda}{\mathrm{N}\Gamma \times \Gamma\Theta}$, d'où, comme le texte : $\mathrm{H}\Gamma \times \Gamma\Pi = \mathrm{N}\Gamma \times \Gamma\Theta$.

1. Les droites ΝΓ, ΓΘ sont données, et la droite ΗΓ est donnée ; donc (EUCLIDE, *Données*, prop. 57, énoncée p. 144, n. 5) la droite ΓΠ est donnée, d'où (EUCLIDE, *Données*, prop. 27, énoncée p. 30, n. 1), le point Π est donné.

2. Le parallélisme des droites ΣΕ, ΛΞ donne : $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{PA}} = \frac{\mathrm{N}\Gamma}{\Xi\Gamma}$ et $\frac{\mathrm{A}\Theta}{\mathrm{A}\Sigma} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Lambda}$, d'où : $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{PA}} \times \frac{\mathrm{A}\Theta}{\mathrm{A}\Sigma} = \frac{\mathrm{N}\Gamma}{\Xi\Gamma} \times \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Lambda}$ ou, comme le texte : $\frac{\mathrm{NA} \times \mathrm{A}\Theta}{\mathrm{PA} \times \mathrm{A}\Sigma} = \frac{\mathrm{N}\Gamma \times \Gamma\Theta}{\Xi\Gamma \times \Gamma\Lambda}$ (I). D'autre part (APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. III, prop. 17, énoncée à la note 5, page 847), si l'on considère d'abord les points E, Θ, d'où partent le diamètre EZ et la parallèle ΘΝ au diamètre conjugué, on a : $\frac{\mathrm{NA} \times \mathrm{A}\Theta}{\mathrm{EA} \times \mathrm{AZ}} = \frac{(\text{tangente égale et parallèle au demi-diamètre conjugué})^2}{(\text{tangente égale à la moitié du diamètre ZE})^2}$. Si l'on considère ensuite les points Θ, Ξ, d'où les droites ΘΝ, ΞΛ sont menées parallèlement aux diamètres conjugués, on a : $\frac{\mathrm{N}\Gamma \times \Gamma\Theta}{\Xi\Gamma \times \Gamma\Lambda} = \frac{(\text{tangente} = \text{moitié du diamètre conjugué})^2}{(\text{tangente} = \text{moitié du diamètre ZE})^2}$; donc : $\frac{\mathrm{NA} \times \mathrm{A}\Theta}{\mathrm{EA} \times \mathrm{AZ}} = \frac{\mathrm{N}\Gamma \times \Gamma\Theta}{\Xi\Gamma \times \Gamma\Lambda}$ (II). Dès lors, les relations (I) et (II) donnent : $\frac{\mathrm{NA} \times \mathrm{A}\Theta}{\mathrm{PA} \times \mathrm{A}\Sigma} = \frac{\mathrm{NA} \times \mathrm{A}\Theta}{\mathrm{EA} \times \mathrm{AZ}}$, d'où : $\mathrm{PA} \times \mathrm{A}\Sigma = \mathrm{EA} \times \mathrm{AZ}$.

3. Les points P, A, Σ sont donnés ; donc, les droites PA, ΑΣ sont données ; donc, PA × ΑΣ est donné, d'où, en raison de l'égalité de la note précédente, EA × AZ est donné.

EA, AZ est donné aussi. On démontrera de la même manière que le rectangle compris sous les droites EB, BZ est donné aussi [1]. Et les points A, B sont donnés ; donc, les points E, Z sont donnés aussi, comme cela sera démontré dans la suite [2] ; de sorte que le diamètre EZ de l'ellipse est donné de grandeur. Et il est manifeste que le diamètre qui lui est conjugué est donné aussi ; car le rapport du diamètre transverse EZ à son côté droit [3], lequel est le même que le rapport du rectangle compris sous les droites EA, AZ au carré de la droite AN, est donné [4].

XV.

Proposition 14. — Voici ce qui a été différé [5] : Soient donnés l'un et l'autre rectangles compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ et sous les droites ΑΔ, ΔΒ, et soient donnés les points Γ, Δ ; je dis que les points A, B sont donnés.

En effet, que le rectangle compris sous les droites ΔΓ, ΓΕ soit équivalent au rectangle compris sous les droites ΑΓ, ΓΒ,

---

1. On démontrera que le rectangle EB × BZ est donné en raisonnant comme dans les notes précédentes.

2. Voir ci-après, lemme XV ou proposition 14.

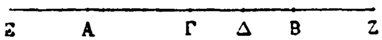
3. C'est-à-dire le paramètre correspondant au diamètre transverse ; droite définie par Apollonius, *Les Coniques*, liv. I, prop. 13, *in fine*. Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 31.

4. Apollonius, *Les Coniques*, liv. I, prop. 21 : « Si, dans l'hyperbole, dans l'ellipse, ou dans la circonférence de cercle, l'on mène des droites d'une manière ordonnée sur le diamètre, leurs carrés seront aux aires, délimitées sous les droites qu'elles découpent à partir des extrémités du côté transverse de la figure, comme le côté droit de la figure est au côté transverse, et ils seront entre eux comme les aires qui sont délimitées sous les droites découpées comme nous venons de le dire ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 43.

On a donc, comme le texte : $\frac{EA \times AZ}{AN^2} = \frac{\text{diamètre transverse EZ}}{\text{côté droit} = \text{paramètre}}$. Or, on a aussi : $\frac{(\frac{1}{2}\,EZ)^2}{(\frac{1}{2}\,\text{diam. conjugué})^2} = \frac{\text{diamètre transverse EZ}}{\text{côté droit} = \text{paramètre}}$; donc : $\frac{(\frac{1}{2}\,EZ)^2}{(\frac{1}{2}\,\text{diam. conjugué})^2} = \frac{EA \times AZ}{AN^2}$, d'où le diamètre conjugué est donné aussi de grandeur.

5. Il s'agit de démontrer ce qui a été admis provisoirement à la fin de la démonstration de la proposition 13, où, après avoir établi que les rectangles EA × AZ et EB × BZ sont donnés, ainsi que les points A, B, il restait à démontrer que les points E, Z sont donnés. La démonstration utilise ici une autre figure dans laquelle les points A, Γ, Δ, B étant sur une même droite, les points Γ, Δ sont donnés, ainsi que les deux rectangles ΑΓ × ΓΒ et ΑΔ × ΔΒ.

et le rectangle compris sous les droites ΓΔ, ΔZ équivalent au rectangle compris sous les droites AΔ, ΔB ; il s'ensuit que la droite AZ sera à la droite ZΔ comme la droite ΓE est à la droite EA (car, en raison de la construction, chacun des rapports est le même que celui de la droite ΓB à la droite BΔ). En conséquence, le rectangle compris sous les droites EΓ, ZΔ équivaut au rectangle compris sous les droites EA, AZ [1] ; de sorte que le point A est [donné] [2] aussi, et le point B est donné de la même manière [3].



XVI.

Mais, que les droites reliant les points N, Θ et M, K donnés sur l'ellipse ne soient pas parallèles ; que les droites de jonction NK, MΘ se coupent entre elles au point T, et menons par le

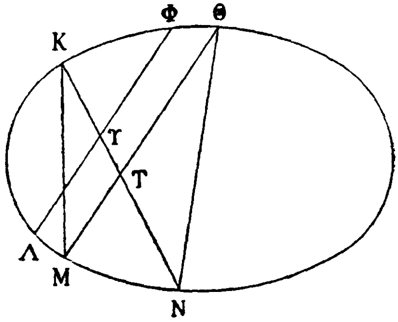
---

1. On pose : $\Delta\Gamma \times \Gamma E = A\Gamma \times \Gamma B$, d'où : $\frac{\Gamma E}{A\Gamma} = \frac{\Gamma B}{\Delta\Gamma}$, d'où : $\frac{\Gamma E}{\Gamma E - A\Gamma} = \frac{\Gamma B}{\Gamma B - \Delta\Gamma}$ ou : $\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{\Gamma B}{B\Delta}$ (I). On pose aussi : $\Gamma\Delta \times \Delta Z = A\Delta \times B\Delta$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta Z}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta + B\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Delta + \Delta Z}{\Delta Z}$ ou : $\frac{\Gamma B}{B\Delta} = \frac{AZ}{\Delta Z}$ (II). Les relations (I) et (II) donnent donc : $\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{AZ}{\Delta Z}$, d'où, comme le texte : $\Gamma E \times \Delta Z = EA \times AZ$.

2. Restauration de Hultsch par le mot δοθέν (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1080, l. 10).

3. La conclusion présuppose le raisonnement suivant : Le rectangle $\Gamma\Delta \times \Delta Z$ est donné comme ayant été posé équivalent au rectangle donné $A\Delta \times \Delta B$. Or, les points Γ, Δ sont donnés ; donc, le point Z est donné aussi. De même, le rectangle $\Delta\Gamma \times \Gamma E$ est donné comme ayant été posé équivalent au rectangle donné $A\Gamma \times \Gamma B$, d'où en présence des points donnés Γ, Δ, le point E est donné aussi. En conséquence, les droites ΓE, ΔZ sont données ; donc, le rectangle $\Gamma E \times \Delta Z$ est donné ; d'où, en présence de la dernière égalité de la note avant-précédente, le rectangle $EA \times AZ$ est donné. Or, la droite EZ, composée des droites données EΓ, ΓΔ, ΔZ, étant donnée, si, d'après la méthode d'Euclide, on applique suivant la droite EZ un rectangle $EA \times AZ$ défaillant du carré de la droite EA, la droite EA sera donnée en vertu de la proposition 58 des *Données* : « Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, et si cet espace est défaillant d'une figure donnée d'espèce, les largeurs du défaut sont données ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 397. Or, cela s'exprime actuellement en considérant que la dernière égalité de la note 1 ci-dessus peut s'écrire : $\Gamma E \times \Delta Z = EA\,(EZ - EA)$ ou : $\Gamma E \times \Delta Z = EA \times EZ - \overline{EA}^2$; équation quadratique donnant la grandeur de la droite EA. Dès lors, le point A est donné, d'où la droite AΓ est donnée. Or, par hypothèse $A\Gamma \times \Gamma B$ est donné ; donc, le point B est donné aussi.

point Λ la droite ΛΥΦ parallèle à la droite ΜΘ. Dès lors, le rapport du rectangle compris sous les droites ΝΥ, ΥΚ au rectangle compris sous les droites ΛΥ, ΥΦ est donné (car il est le même que celui du rectangle compris sous les droites ΝΤ, ΤΚ au rectangle compris sous les droites ΜΤ, ΤΘ). Et le rectangle compris sous les droites ΝΥ, ΥΚ est donné ; donc, le rectangle compris sous les droites ΛΥ, ΥΦ est donné aussi ([1]). Et les points Λ, Υ sont donnés ; donc, le point Φ est donné ([2]). Dès lors, on est ramené à la proposition précédente ([3]) :. décrire l'ellipse ΝΜΛΦΘ autour des cinq points Ν, Μ, Λ, Φ, Θ dans l'hypothèse des droites ΜΘ, ΦΛ parallèles.



XVII.

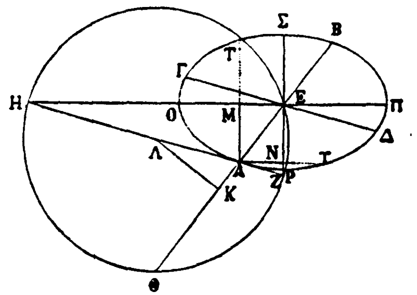
Au reste, quand on s'est procuré ([4]) des diamètres conjugués quelconques de l'ellipse, il est facile de trouver instrumentalement ([5]) ses axes, et l'on procédera méthodiquement de la manière suivante :

Exposons les diamètres conjugués déjà trouvés ΑΒ, ΓΔ de l'ellipse, se coupant entre eux en deux parties égales au point Ε ;

---

1. On a (APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. III, prop. 17, énoncée p. 847, n. 5) $\frac{\text{NΥ} \times \text{ΥK}}{\text{ΛΥ} \times \text{ΥΦ}} = \frac{\text{NT} \times \text{TK}}{\text{MT} \times \text{TΘ}}$. Or, les points K, Θ, M, N sont donnés ; donc, le rapport de rectangles donnés compris sous des droites données : $\frac{\text{NT} \times \text{TK}}{\text{MT} \times \text{TΘ}}$ est donné, d'où, comme le texte : le rapport $\frac{\text{NΥ} \times \text{ΥK}}{\text{ΛΥ} \times \text{ΥΦ}}$ est donné. Or, les droites ΛΦ, KN sont données de position ; donc, le point Υ est donné, d'où, en présence des points donnés K, N, le rectangle ΝΥ × ΥΚ est donné, d'où, comme le texte : le rectangle ΛΥ × ΥΦ est donné.
2. Les points Λ, Υ sont donnés ; donc, la droite ΛΥ est donnée, d'où la droite ΥΦ est donnée, d'où le point Φ est donné.
3. Voir proposition 13.
4. πορισθεισων, (diamètres conjugués) procurés par voie purement géométrique, comme dans la proposition 13.
5. ὀργανικῶς (par construction) au moyen d'instruments (règle et compas).

menons par le point A la droite ZH parallèle à la droite ΓΔ; posons le rectangle compris sous les droites EA, AΘ équivalent au carré de la droite ΔE, et coupons la droite EΘ en deux parties égales au point K. [Le point K sera donc entre les points A, Θ] (1); car la droite ΔE est plus grande que la droite EA (2). Menons du point K, à angles droits sur la droite EΘ, la droite KΛ coupant la droite ZH au point Λ, et que la circonférence du cercle décrit autour du centre Λ et passant par le point E coupe la droite HZ aux points Z, H. Menons les droites de jonction EH, EZ; menons, sur celles-ci, les perpendiculaires AM, AN, et posons chacun des carrés des droites EO, EΠ équivalent au rectangle compris sous les droites HE, EM et chacun des carrés des droites EP, EΣ équivalent au rectangle compris sous les droites ZE, EN. Dès lors, les axes trouvés de l'ellipse seront les droites OΠ, PΣ (3),



1. Lacune comblée par Hultsch au moyen des mots ἔσται δὴ τὸ K μεταξὺ τῶν A, Θ (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1082, l. 8).

2. On a par hypothèse : diam. ΓΔ > diam. conjugué AB, d'où : ΔE > EA. Or, on a posé : $EA \times A\Theta = \overline{\Delta E}^2$; donc : $EA \times A\Theta > \overline{EA}^2$, d'où : AΘ > EA ; donc, le point K est situé entre les points A, Θ.

3. Pappus se borne à indiquer la construction des axes au moyen de la règle et du compas sans la démontrer. Commandin a suppléé à cette absence, ou peut-être à cette perte de la démonstration, de la manière que nous résumons comme suit (cfr. *loc. cit.*, p. 470, *commentarius*, ll. 26-36) : Prolongeons AM jusqu'au point T, de manière à avoir : TM = MA, et prolongeons AN jusqu'au point Υ, de manière à avoir : ΥN = NA ; droites que nous indiquons en pointillé dans la figure du texte. Dès lors (APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. 47 : « Étant donnée une hyperbole ou une ellipse, trouver l'axe ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 160), les points T, Υ sont sur l'ellipse. Mais, PΣ est parallèle à AT, car l'angle HEZ, situé dans le demi-cercle, est droit ; donc, OΠ sera parallèle à AΥ. En conséquence, puisque la droite ΓΔ est menée de manière ordonnée sur la droite AB, la droite menée par le point A, parallèlement à la droite ΔΓ, c'est-à-dire ZH, sera tangente à l'ellipse au point A. Et puisque la tangente ZH rencontre le diamètre en H, et que la droite AM est menée de manière ordonnée sur ce diamètre, on a (APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. 37 : « Lorsqu'une droite tangente à une hyperbole, à une ellipse ou à une circonférence de cercle rencontre un diamètre et que, du point de contact, l'on amène une droite de manière ordonnée sur ce diamètre, la droite découpée par la droite menée de manière ordonnée, à partir du centre de la section, délimitera, avec la droite découpée par la tangente, à partir du centre de la section, une aire équivalente au carré de la droite issue du centre ; tandis qu'elle délimitera, avec la droite

dont la plus petite sera égale à la grosseur du cylindre, comme on l'a dit au début (1).

XVIII.

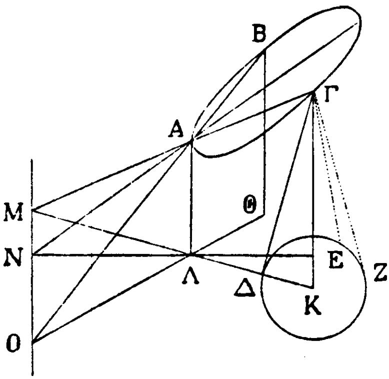
Une sphère ayant une position donnée surélevée par rapport au plan sous-jacent (2), trouver le point sur lequel elle tombe lorsqu'elle est abaissée perpendiculairement (3) et la droite minima découpée sur la perpendiculaire entre les deux points : celui qui est situé dans la surface de la sphère et celui qui est situé dans le plan (4).

Proposition 15. — Exposons ceci au préalable : Étant donné un cercle surélevé, non situé dans le plan perpendiculaire au plan sous-jacent (5), trouver la section commune de l'un et l'autre de ces plans et leur inclinaison.

Soit un cercle surélevé ; prenons sur celui-ci trois points A, B, Γ et menons de ces points les perpendiculaires sur un plan sous-jacent. Menons-les d'ailleurs de la manière suivante : Faisons circuler une droite telle que ΓΔ, tombant du point Γ sur le plan sous-jacent ; qu'elle touche ce plan en deux autres points E, Z, et prenons le centre K du cercle décrit autour des points Δ, E, Z; il s'ensuit que la perpendiculaire menée du point Γ tombera sur le point K, et que le point K sera donné. Menons aussi de la même

située entre celle qui est menée de manière ordonnée et la tangente, une aire dont le rapport au carré de la droite menée de manière ordonnée est le même que celui du côté transverse au côté droit ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 66) : $HE \times EM = \overline{EO}^2 = \overline{E\Pi}^2$. Pareillement, la droite AN étant menée de manière ordonnée, on a : $ZE \times EN = \overline{EP}^2 = \overline{E\Sigma}^2$. En conséquence, OΠ, PΣ seront les axes conjugués de l'ellipse.

1. Voir proposition 12.
2. τὸ ὑποκείμενον (sous-entendu ἐπίπεδον), le (plan) sous-jacent, c'est-à-dire le plan horizontal.
3. Le texte porte ici la petite interpolation : καὶ καθ' ὅ πίπτει σημεῖον, et suivant quel point (de la sphère) elle (la sphère) tombe (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1084, l. 5).
4. L'authenticité de ce problème, et d'ailleurs de tout ce qui va suivre jusques et y compris la proposition 16, a été mise en doute par Hultsch dans la note suivante (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1085) : « Totum hoc problema usque ad finem propositionis sextae decimae est a scriptore mediocriter admodum mathematica docto aetate, ut videtur, posteriore quam qua Pappus vixit. Accedit quod in codicis scriptura plura corrupta aut lacunosa sunt quam aliis fere locis ».
5. C'est-à-dire non situé dans le plan vertical.



manière des points A, B les perpendiculaires BΘ, AΛ (1). Prolongeons maintenant les droites de jonction KΛ, ΘΛ, et faisons en sorte que la droite KM soit à la droite MΛ comme la droite ΓK est à la droite AΛ, et que la droite ΘO soit à la droite OΛ comme la droite BΘ est à la droite AΛ. [Les points M, O sont donc donnés ; car il nous est loisible de prendre des perpendiculaires telles qu'une seule d'entre elles, la droite AΛ, soit la plus petite] (2). En conséquence, les lignes MAΓ, BAO sont droites (3). Et elles seront dans le plan du cercle ABΓ ; donc, la droite MO est la section commune de ce plan et du plan sous-jacent. [Menons du point Λ la droite ΛN perpendiculaire sur la droite MO et menons la droite de jonction AN ; il s'ensuit que la droite AN sera aussi] (4) perpendiculaire sur la droite MO (5). En conséquence, on s'est procuré (6) aussi l'angle compris sous les droites AN, NΛ, lequel est l'inclinaison des plans.

1. Les points Λ, Θ sont donc donnés aussi.

2. La phrase que nous mettons entre crochets doit avoir été interpolée à titre de commentaire justificatif des deux relations de construction : $\frac{KM}{\Lambda M}=\frac{\Gamma K}{A\Lambda}$ (I) et $\frac{\Theta O}{O\Lambda}=\frac{B\Theta}{A\Lambda}$ (II). En effet, la droite AΛ doit être plus petite que les droites ΓK, BΘ ; car, on a par construction : $KM > M\Lambda$ et $\Theta O > O\Lambda$. D'autre part, les relations de construction (I) et (II) déterminent aussi les points M, O ; car la relation (I) donne : $\frac{KM - M\Lambda}{M\Lambda}=\frac{\Gamma K - A\Lambda}{A\Lambda}$ ou : $\frac{K\Lambda}{M\Lambda}=\frac{\Gamma K - A\Lambda}{A\Lambda}$. Or, les droites KΛ, ΓK, AΛ sont données de grandeur ; donc (Euclide, *Données*, prop. 4, énoncée p. 28, n. 3 ; prop. 1, énoncée, p. 28, n. 6, et prop. 2, énoncée p. 24, n. 1), la droite MΛ est donnée aussi de grandeur ; donc (Euclide, *Données*, prop. 27, énoncée p. 30, n. 1), le point M est donné. On démontre de même que le point O est donné aussi.

3. Les relations (I) et (II) de la note précédente, et le parallélisme des droites AΛ, BΘ, ΓK, permettent de conclure que les points M, A, Γ, ainsi que les points B, A, O, sont en ligne droite, en vertu de la double démonstration de la proposition 13 du livre IV (voir p. 159 et notes).

4. Reconstitution due à Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1086, l. 12) d'après la reconstitution latine de Commandin accompagnée de la note : « addita haec a nobis, quae in graeco codice desiderari videbantur » (Cfr. *loc. cit.*, p. 471, l. 52).

5. Voir liv. VI, prop. 43, p. 437.

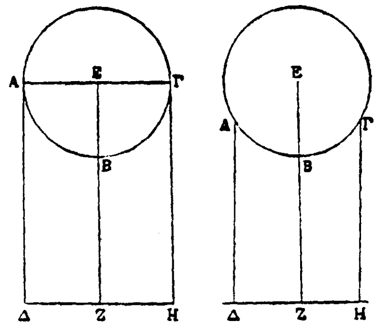
6. πεπόρισται, c'est-à-dire que l'angle ANΛ du plan du cercle avec le plan horizontal est donc procuré par construction.

XIX.

Proposition 16. — Cela étant démontré au préalable, soit une sphère en site élevé et qu'il soit proposé de trouver le point sur lequel elle tombera lorsqu'elle est abaissée perpendiculairement sur le plan sous-jacent et la plus petite droite découpée sur la perpendiculaire entre la surface [1] et le plan.

Soit une sphère en site élevé disposée autour du centre E, et décrivons le cercle le plus grand ΑΒΓ dans cette sphère. Ce cercle sera ou ne sera donc pas dans le plan perpendiculaire au plan sous-jacent ; ce que nous reconnaîtrons de la manière suivante : Trois points quelconques étant pris sur la circonférence du cercle, menons-en les perpendiculaires sur le plan sous-jacent, comme nous l'avons enseigné [2] ; et, si les points sur lesquels tombent les perpendiculaires sont sur une même ligne droite, les plans seront perpendiculaires entre eux ; tandis que, s'il en est autrement, ils seront inclinés.

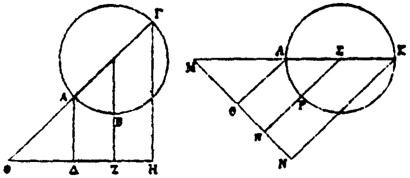
Qu'ils soient d'abord perpendiculaires, et menons des points Α, Γ les perpendiculaires [ΑΔ, ΓΗ qui seront égales ou non] [3]. Qu'elles soient égales et coupons la droite de jonction ΔΗ en deux parties égales au point Ζ. Le point Ζ sera donc celui qui est cherché dans le plan [4] ; le point Β, divisant l'arc ΑΒΓ en deux parties égales, est le correspondant du point Ζ dans la surface, et la droite ΒΖ est la perpendiculaire minima dont il a été question plus haut.



1. Sous-entendu : τῆς σφαίρας, de la sphère.
2. Voir proposition 15.
3. Reconstitution de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, p. 1088, l. 13).
4. Sous-entendu ὑποκειμένῳ, sous-jacent, c'est-à-dire le plan horizontal.

XX.

Mais, que les perpendiculaires ne soient pas égales, et que la droite ΑΔ soit la plus petite. Faisons en sorte que, si nous prolongeons la droite ΗΔ, la droite ΗΘ soit à la droite ΘΔ comme



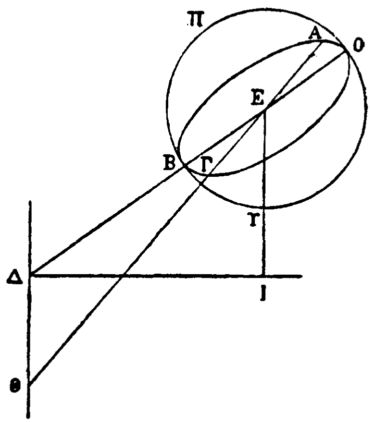
la droite ΓΗ est à la droite ΑΔ. En conséquence, le point Θ sera celui où la droite menée du point A au point Γ [1] rencontre le plan sous-jacent, et la droite ΑΘ et l'angle compris sous les droites ΑΘ, ΘΔ seront donnés. Ces choses étant obtenues, exposons un cercle égal au cercle le plus grand [2] autour du diamètre ΚΛ; ajoutons la droite ΛΜ égale à la droite ΑΘ [3] ; établissons l'angle compris sous les droites ΚΜ, ΜΝ égal à l'angle compris sous les droites ΑΘ, ΘΔ; menons des points Κ, Λ les perpendiculaires ΛΟ, ΚΝ [4] et, du centre, la perpendiculaire ΣΠ; enfin, découpons un arc ΑΒ égal à l'arc ΛΡ et une droite ΔΖ égale à la droite ΟΠ; [ce qui revient à dire de couper la droite ΔΗ en deux parties égales au point Ζ] [5]. Dès lors, le point Ζ sera celui sur lequel tombera la sphère emportée vers le bas [6] ; le point Β sera celui qui est sur la surface, et la droite ΒΖ sera la perpendiculaire minima [7].

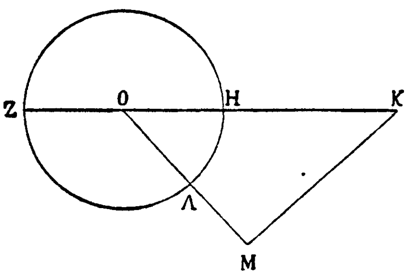
---

1. Les points Α, Γ semblent être pris sur un même diamètre ; il ne reste donc plus qu'à diviser la droite ΔΗ en deux parties égales pour obtenir le point Ζ, et la construction auxiliaire qui va suivre devient inutile. C'est en raison de cette inadvertance et des nombreuses négligences de rédaction que l'on trouve dans les propositions 15 et 16 que Hultsch attribue ces dernières à un auteur postérieur à Pappus.
2. C'est-à-dire égal au grand cercle ΑΒΓ de la sphère considérée.
3. C'est-à-dire: ajoutons en prolongement de la droite ΚΛ la droite ΛΜ = ΑΘ.
4. C'est-à-dire perpendiculaires sur la droite ΜΝ.
5. La phrase que nous mettons entre crochets est une interpolation de commentateur faisant précisément observer ce que nous avons déjà signalé dans la note 1 ci-dessus : l'inutilité de la construction auxiliaire, du moment que les points Α, Γ sont les extrémités d'un même diamètre.
6. Sous-entendu : καθετικῶς, perpendiculairement.
7. C'est-à-dire que le point Β est celui où le plan horizontal sera tangent à la surface de la sphère.

XXI.

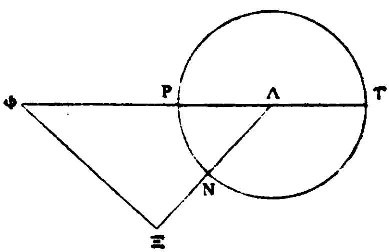
Mais, que le cercle ΑΒΓ ne soit pas dans un plan perpendiculaire au plan sous-jacent. Prenons la section commune ΔΘ des plans ; prenons, sur le cercle ΑΒΓ, des points Α, Γ opposés l'un à l'autre suivant un diamètre, de manière que la droite ΑΓ qui les relie rencontre la section commune ΔΘ [car nous pouvons faire cela en raison de ce que la droite ΔΘ est située dans le plan du cercle ΑΒΓ] (1). Qu'elle la rencontre au point Θ ; il s'ensuit que la droite ΔΘ et l'angle Θ sont donnés. Menons, du centre Ε, la perpendiculaire ΕΒΔ sur la droite ΔΘ. Elle sera menée de la manière suivante : Exposons le cercle ΗΖΛ décrit autour du diamètre ΖΗ, égal au cercle le plus grand ΑΒΓ ; ajoutons (2) la droite ΗΚ égale à la droite ΓΘ ; établissons l'angle compris sous les droites ΖΚ, ΚΜ égal à l'angle compris sous les droites ΑΘ, ΘΔ ; menons du centre Ο la perpendiculaire ΟΛΜ ; découpons l'arc ΓΒ égal à l'arc ΗΛ et la droite ΘΔ égale à la droite ΚΜ. En conséquence, la droite ΔΒ est égale à la droite ΜΛ ; elle est perpendiculaire sur la droite ΔΘ et, prolongée, elle tombe sur le centre Ε ; car ces choses résultent manifestement de la similitude (3). Menons donc la droite ΔΙ à angles droits sur la droite ΔΘ dans le plan sous-jacent ; il s'ensuit que la droite ΔΘ est perpendiculaire au plan qui passe par les points Ε, Δ, Ι (4) ;





1. La phrase mise entre crochets est une remarque interpolée par un commentateur (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1090, l. 21).
2. C'est-à-dire ajoutons la droite ΗΚ = ΓΘ en prolongement de la droite ΖΗ.
3. C'est-à-dire résultent de la similitude des triangles ΟΚΜ, ΕΘΔ.
4. Euclide, liv. XI, prop. 4, énoncée p. 103, n. 7.

en sorte que le cercle ΑΒΓ est aussi perpendiculaire au plan qui passe par les points Ε, Δ, Ι (1). En conséquence, si le plan passant par les points Ε, Δ, Ι est étendu, il déterminera, dans la sphère, un cercle le plus grand (2) perpendiculaire au cercle ΑΒΓ, passant par les pôles de ce cercle et par les points Β, Ο (3) ; en sorte que si, prenant le pôle Π du cercle ΑΒΓ (4), on décrit le cercle passant par le point Π et par chacun des points Β, Ο (5), il sera un cercle le plus grand dans la sphère [situé dans le plan qui passe par les points Ο, Δ, Ι] (6). Décrivons le cercle ΒΠΟ ; exposons de nouveau le cercle ΡΝΤ (7) autour du diamètre ΡΤ, auquel nous ajoutons la droite ΡΦ égale à la droite ΒΔ ; établissons l'angle compris sous les droites ΡΦ, ΦΞ égal à l'angle compris sous les droites ΒΔ, ΔΙ ; menons, du centre Λ, la perpendiculaire ΛΝΞ ; découpons, sur le cercle ΠΒΟ, l'arc ΒΥ égal à l'arc ΡΝ ; découpons la droite ΔΙ égale à la droite ΦΞ, et menons la droite de jonction ΙΥ. Dès lors, la droite ΙΥ sera égale à la droite ΞΝ et, prolongée, elle tombera sur le centre Ε. De plus, elle sera perpendiculaire sur le plan sous-jacent, parce qu'elle est perpendiculaire sur la droite ΙΔ (8). En conséquence, le point Ι sera celui sur lequel tombe la sphère, le point Υ celui suivant lequel elle tombe, et la droite ΙΥ sera la perpendiculaire minima.



1. EUCLIDE, liv. XI, prop. 18, énoncée p. 105, n. 1.

2. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 6 : « Parmi les cercles situés dans la sphère, ceux qui passent par le centre de la sphère sont les plus grands, et, quant aux autres, ceux qui sont également éloignés du centre sont égaux, tandis que ceux qui en sont plus éloignés sont plus petits ». Voir trad. de P. Ver Eecke p. 7.

3. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 13, énoncée p. 375, n. 2.

4. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 21 : « Trouver le pôle d'un cercle donné dans une sphère ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 28.

5. THÉODOSE, *Les Sphériques*, liv. I, prop. 20 : « Par deux points qui sont donnés sur une surface sphérique, décrire un cercle le plus grand ». Voir trad. de P. Ver Eecke, p. 27.

6. La phrase mise entre crochets est considérée par Hultsch comme une interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1094, l. 2).

7. Sous-entendu ἴσος τῷ μεγίστῳ ΒΠΟ, c'est-à-dire : égal au (cercle) le plus grand ΒΠΟ.

8. Raisonnement incorrect, qui ne répond pas à la proposition 4 du livre XI d'Euclide, énoncée p. 103, n. 7.

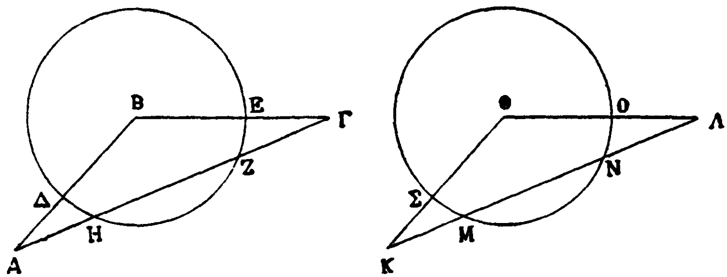
XXII.

Proposition 17. — Une sphère étant supposée, et un point étant donné en dehors de celle-ci, trouver le point où la droite de jonction menée du point donné au centre coupe la surface.

La chose est manifeste ; car, si une droite quelconque, tombant du point donné sur la surface, circonvolue, elle décrira un cercle dont le pôle sera le point cherché.

Proposition 18. — Supposons de nouveau une sphère ; soient donnés deux points situés l'un et l'autre à l'extérieur de la surface, et qu'il soit proposé de prendre les points où la droite de jonction des points donnés coupe la surface.

Que la sphère soit disposée autour du centre B ; soient A, Γ les points donnés à l'extérieur ; prenons les points Δ, E où les



droites qui relient les points A, Γ au point B rencontrent la surface, et décrivons par ces points le cercle le plus grand ΔEZH. Dès lors, les droites AΔ, ΓE sont données (vu le lemme) [1] ; et, puisque le rayon de la sphère est donné, les droites entières AB, ΓB sont données aussi. Mais, la droite AΓ qui relie les points donnés est donnée aussi ; construisons donc le triangle ΘKΛ au moyen des trois droites AB, AΓ, ΓB, et décrivons autour du centre Θ le cercle ΣMNO égal au cercle EΔZH. Si ce cercle coupe la droite KΛ, il est évident que la droite reliant les points A, Γ coupe aussi la sphère, et, s'il n'en est pas ainsi, elle ne la coupe

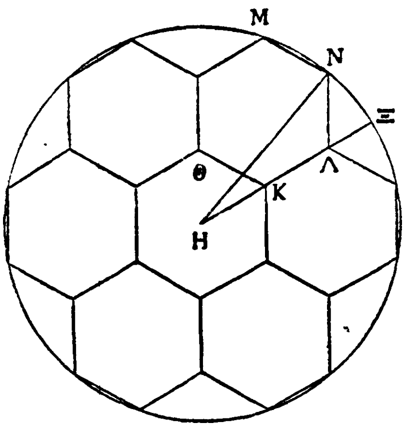
1. Les points A, Γ sont donnés, et le lemme précédent, ou proposition 17, a démontré que les points Δ, E sont donnés ; donc, les droites AΔ, ΓE sont données.

pas (1). Que le cercle coupe la droite KΛ aux points M, N, et découpons un arc ΔH égal à l'arc ΣM et un arc EZ égal à l'arc ON. En conséquence, il est clair que les points H, Z seront ceux où la droite qui relie les points A, Γ coupe la surface de la sphère.

XXIII.

PROPOSITION 19. — Les problèmes qu'on appelle proprement instrumentaux sont utiles aussi, principalement lorsque, ramenés par l'analyse à une construction facile, ils permettent de se dispenser de la preuve qui y répond, comme dans le cas où il s'agit d'inscrire sept hexagones (2) dans un cercle donné, dont l'un soit situé autour du centre même du cercle donné, et dont les six autres soient décrits sur les côtés de celui du milieu, en ayant respectivement leurs côtés opposés adaptés à la circonférence du cercle.

Soit donné le cercle décrit autour du centre H ; posons, autour de ce centre, le côté ΘK d'un hexagone, de manière qu'un hexagone, ayant son côté MN adapté à la circonférence du cercle, soit décrit sur la droite ΘK, et menons la droite de jonction HK. Cette droite est donc dans la direction du côté KΛ de l'hexagone, parce que l'angle compris sous les droites HK, KΘ est les deux tiers (3) de l'angle droit, et que l'angle compris sous les droites ΘK, KΛ est un angle droit plus un tiers. Menons la droite de jonction HN. Dès lors, puisque les droites HK, KΛ sont égales, la droite HΛ est double de la droite ΛN (4). Et l'angle Λ est donné (car c'est un angle droit

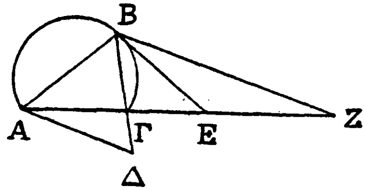


1. εἰ δὲ μή, οὐ τέμνει, c'est-à-dire que si le cercle ΣMNO ne coupe pas la droite KΛ, la droite AΓ ne coupera pas la sphère.
2. C'est-à-dire des hexagones réguliers.
3. δίμοιρον, deux troisièmes parties (de l'angle droit).
4. Dans l'hexagone régulier on a : HK = KΘ = KΛ = ΛN, d'où : HK + KΛ = HΛ = 2ΛN.

plus un tiers) ; donc, le triangle ΝΛΗ est donné d'espèce (1) ; par conséquent, le rapport de la droite ΗΝ à la droite ΝΛ [est donné] (2) (3). Or, la droite ΗΝ est donnée (4) ; donc, le côté ΝΛ de l'hexagone est donné aussi (5).

La construction instrumentale se fera de la manière suivante : Exposons la droite ΑΓ constituant la troisième partie du rayon du cercle, et érigeons sur cette droite un segment de cercle capable de deux tiers de l'angle droit (6). Puis, considérant la droite ΑΓ constituée de cinq parties, découpons (7) la droite ΓΕ constituée de quatre de ces mêmes parties (8), et menons la tangente ΒΕ ; je dis que la droite de jonction ΑΒ est égale au côté ΘΚ de l'hexagone.

Prolongeons la droite ΒΓ et découpons-y une droite ΒΔ égale à la droite ΑΒ ; il s'ensuit que le triangle ΑΒΔ est équilatéral (9). Posons, en outre, la droite ΑΖ égale au rayon du cercle. Puisque la droite ΑΕ a avec la droite ΕΓ le rapport de 9 à 4, le carré de la droite ΑΒ aura le même rapport avec le carré de la droite ΒΓ (10) ;



1. Euclide, *Données*, prop. 41, énoncée p. 198, n. 4.
2. Restauration de Hultsch (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1098, l. 8).
3. Euclide, *Données*, définition 3 : « Des figures rectilignes, dont chacun des angles est donné, et dont les raisons de leurs côtés entre eux sont données, sont dites données d'espèce ». Voir trad. de Peyrard, vol. III, p. 301.
4. Par hypothèse du cercle donné.
5. Euclide, *Données*, prop. 2, énoncée p. 24, n. 1.
6. C'est-à-dire que, si on circonscrit un cercle au triangle équilatéral ayant la droite ΑΓ comme base, tous les angles formés dans le segment ΑΒΓ vaudront les $\frac{2}{3}$ de l'angle droit (Euclide, liv. III, prop. 21, énoncée p. 141, n. 2).
7. C'est-à-dire découpons sur la droite ΑΓ prolongée.
8. C'est-à-dire posons : $\Gamma E = \frac{4}{5} A\Gamma$, en usant de la règle dlvisée.
9. On pose : $B\Delta = AB$; donc : $\widehat{BA\Delta} = \widehat{B\Delta A}$. Or, on a par construction : $\widehat{AB\Delta} = \frac{2}{3}$ d'angle droit ; donc : $\widehat{BA\Delta} + \widehat{B\Delta A} = 2$ angles droits — $\widehat{AB\Delta} = \frac{4}{3}$ d'angle droit, d'où : $\widehat{BA\Delta} = \widehat{B\Delta A} = \frac{2}{3}$ d'angle droit ; donc, le triangle ΑΒΔ est équilatéral.
10. On a par construction : $A\Gamma = 5$, et on pose : $\Gamma E = 4$, d'où : $A\Gamma + \Gamma E = AE = 9$; donc, comme le texte : $\frac{AE}{\Gamma E} = \frac{9}{4}$ (I). Or, la tangente ΒΕ donne : $\overline{EB}^2 = EA \times E\Gamma$, d'où : $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{EA}{EB}$ (II), d'où similitude des triangles ΑΕΒ, ΒΕΓ, et, par suite, on a : $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EA}{EB}$, d'où : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2} = \frac{\overline{EA}^2}{\overline{EB}^2}$. Or, la relation *(II)* donne :

donc, la droite AB, c'est-à-dire la droite BΔ, vaut une fois et demie la droite BΓ. En conséquence, la droite BΓ est le double de la droite ΓΔ (1). Mais, la droite ZΓ est aussi le double de la droite ΓA ; donc, la droite de jonction BZ est aussi le double de la droite AΔ, c'est-à-dire de la droite AB (2). Or, la droite HΛ est aussi le double de la droite ΛN, et ces dernières droites comprennent des angles égaux ; donc, le triangle ABZ est semblable au triangle NΛH. Et la droite AZ est égale à la droite NH ; donc, la droite AB est aussi égale à la droite ΛN ou à la droite ΘK (3).

LE MÊME PROBLÈME D'UNE MANIÈRE PLUS CLAIRE (4).

Que la droite AZ soit égale au rayon du cercle donné ; découpons-en la troisième partie ; que ce soit la droite AΓ, sur laquelle nous décrivons le segment de cercle ABΓ capable d'un angle constituant les deux tiers d'un angle droit ; découpons la droite ΓE ayant quatre des cinq parties dont se compose la droite AΓ (5) ; menons la tangente BE au segment ; menons la droite de jonction AB et la droite de jonction ZB ; prolongeons, en outre, la droite de jonction BΓ sur le point Δ ; posons la

---

$\frac{EB}{E\Gamma}\times\frac{EA}{EB}=\frac{\overline{EA}^2}{\overline{EB}^2}$ ou : $\frac{EA}{E\Gamma}=\frac{\overline{EA}^2}{\overline{EB}^2}$; donc : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2}=\frac{EA}{E\Gamma}$, d'où, en présence de la relation (I) on a : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2}=\frac{9}{4}$.

1. La dernière relation de la note précédente donne : $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{3}{2}$, d'où : $AB = \frac{3}{2}B\Gamma$. Or, $B\Delta = AB$; donc : $B\Delta = \frac{3}{2}B\Gamma$, d'où : $2(B\Delta - B\Gamma) = B\Gamma$, ou, comme le texte : $2\Gamma\Delta = B\Gamma$.

2. On a par construction : $A\Gamma = \frac{1}{3}$ rayon du cercle et $AZ =$ rayon du cercle ; donc : $A\Gamma = \frac{1}{3}AZ$, d'où : $\Gamma Z = 2A\Gamma$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente : $\frac{B\Gamma}{\Gamma Z}=\frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma}$, d'où similitude des triangles AΓΔ, BΓZ, d'où, comme le texte : $BZ = 2A\Delta = 2AB$.

3. On a vu (p. 860, n. 4) que l'on a : $H\Lambda = 2\Lambda N$. Or, on a : $\widehat{N\Lambda H} = \frac{4}{3}$ d'angle droit, et l'on a par construction : $\widehat{AB\Delta} = \frac{2}{3}$ d'angle droit. Or, la similitude des triangles AΓΔ, BΓZ donne : $\widehat{\Gamma BZ} = \widehat{A\Delta B} = AB\Delta = \frac{2}{3}$ d'angle droit ; donc, $\widehat{AB\Delta} + \widehat{\Gamma BZ} = \widehat{ABZ} = \frac{4}{3}$ d'angle droit ; donc, comme le texte : $\widehat{ABZ} = \widehat{N\Lambda H}$, d'où similitude des triangles ABZ, NΛH. Or, on a posé : $AZ = HN$; donc, comme le texte : $AB = \Lambda N = \Theta K$.

4. Voir la figure de la page 861.

5. C'est-à-dire posons : $\Gamma E = \frac{4}{5} A\Gamma$.

droite BΔ égale à la droite AB, et menons la droite de jonction AΔ. Dès lors, puisque les droites ΕΓΑ et EB sont menées au cercle ; que l'une coupe le cercle et que l'autre lui est tangente, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites AE, ΕΓ équivaut au carré de la droite EB (1). En conséquence, la droite BE est à la droite ΓΕ comme la droite AE est à la droite EB ; donc, le triangle ΓΒΕ est équiangle avec le triangle ABE (2) ; donc, la droite EB est à la droite ΒΓ comme la droite EA est à la droite AB, et le carré de la droite AB est donc au carré de la droite ΒΓ comme le carré de la droite AE est au carré de la droite EB (3). Mais, en vertu de la vingtième proposition du sixième livre, la droite AE est à la droite ΕΓ comme le carré de la droite AE est au carré de la droite EB ; par conséquent, le carré de la droite AB, c'est-à-dire le carré de la droite BΔ, est au carré de la droite ΒΓ comme la droite AE est à la droite ΕΓ ; donc, le carré de la droite BΔ a avec le carré de la droite ΒΓ le rapport de 9 à 4 ; donc, la droite BΔ vaut une fois et demie la droite ΒΓ et, par suite, la droite ΒΓ est le double de la droite ΓΔ (4). Mais, la droite ΖΓ est aussi le double de la droite ΓΑ ; donc, la droite ΒΓ est à la droite ΓΔ comme la droite ΖΓ est à la droite ΓΑ. Et les angles au point Γ sont égaux ; donc, l'angle Δ est aussi égal à

---

1. EUCLIDE, liv. III, prop. 36 énoncée p. 142, n. 4.
2. EUCLIDE, liv. VI, prop. 6 énoncée p. 158, n. 2.
3. Considérant la sécante EA et la tangente EB, on a : $\overline{EB}^2 = EA \times E\Gamma$, d'où : $\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{EA}{EB}$, d'où similitude des triangles AEB, ΒΕΓ ; donc : $\frac{EB}{B\Gamma}=\frac{EA}{AB}$, d'où : $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{EA}{EB}$, d'où : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2}=\frac{\overline{EA}^2}{\overline{EB}^2}$.

4. La relation $\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{EA}{EB}$ de la note précédente donne (EUCLIDE, liv. VI, prop. 20, corollaire 2, énoncé p. 355, n. 1) : $\frac{EB}{E\Gamma}\times\frac{EA}{EB}=\frac{\overline{EA}^2}{\overline{EB}^2}$, ou, comme le texte : $\frac{EA}{E\Gamma}=\frac{\overline{EA}^2}{\overline{EB}^2}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente, et en observant qu'on a posé : $B\Delta = AB$, on a, comme le texte : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2}=\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{B\Gamma}^2}=\frac{EA}{E\Gamma}$. Or, on a posé : $A\Gamma = 5$ et $E\Gamma = 4$, d'où : $A\Gamma + \Gamma E = AE = 9$, d'où : $\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{9}{4}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{B\Gamma}^2}=\frac{9}{4}$, d'où : $\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{3}{2}$, d'où : $B\Delta = \frac{3}{2}B\Gamma$, d'où : $B\Gamma = 2\Gamma\Delta$.

l'angle compris sous les droites ZB, BΓ et l'angle Z égal à l'angle compris sous les droites ΓA, AΔ. En conséquence, la droite AΔ est à la droite ΔΓ comme la droite ZB est à la droite BΓ et, par permutation, la droite BΓ est à la droite ΓΔ comme la droite ZB est à la droite AΔ. Or, la droite BΓ est le double de la droite ΓΔ; donc, la droite ZB est aussi le double de la droite AΔ, c'est-à-dire de la droite AB (1). Et l'angle Δ vaut deux tiers de l'angle droit; donc, l'angle compris sous les droites ZB, BΓ vaut aussi deux tiers de l'angle droit, et l'angle entier compris sous les droites AB, BZ vaut un angle droit et un tiers (2). Dès lors, si nous avons un cercle dont le centre est le point H (3) et dont le rayon est égal à la droite AZ; si nous menons de son centre la droite HΞ; si nous en découpons la droite HΛ égale à la droite ZB; si nous établissons, sur la droite HΛ et au point Λ, l'angle compris sous les droites HΛ, ΛN égal à celui qui est compris sous les droites ZB, BA, et si nous menons la droite de jonction HN, le triangle HΛN devient équiangle avec le triangle AZB. Et la droite AZ est égale à la droite HN; donc, la droite NΛ est aussi égale à la droite AB (4). Et il est clair que l'inscription des sept hexagones dans le cercle sera basée sur cette droite égale à la droite AB.

1. On a par construction : $\frac{1}{2}\,ZA = \Gamma A$ ou : $\frac{1}{2}\,(Z\Gamma + \Gamma A) = \Gamma A$, d'où : $Z\Gamma = 2\Gamma A$, d'où, comparant avec la dernière égalité de la note précédente, on a : $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{Z\Gamma}{\Gamma A}$, d'où : $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta} = \frac{Z\Gamma}{B\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 6, énoncée p. 158, n. 2) similitude des triangles AΓΔ, ZΓB opposés par le sommet, d'où, comme le texte : $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{ZB\Gamma}$ (I) et $\widehat{BZ\Gamma} = \widehat{\Delta A\Gamma}$, d'où (Euclide, liv. VI, prop.4, énoncée p. 27, n. 1) : $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{ZB}{B\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{ZB}{A\Delta}$, d'où, en présence de la dernière relation de la note précédente : $ZB = 2A\Delta$ (II). Or, on a posé : $B\Delta = AB$; donc : $\widehat{BA\Delta} = \widehat{B\Delta A}$. Or, on a par construction : $\widehat{AB\Delta} = \frac{2}{3}$ d'angle droit; donc, $\widehat{BA\Delta} + \widehat{B\Delta A} = \frac{4}{3}$ d'angle droit, d'où : $\widehat{BA\Delta} = \widehat{B\Delta A} = \frac{2}{3}$ d'angle droit (III); donc, le triangle ABΔ est équilatéral, d'où : $AB = A\Delta$, d'où la relation (II) devient, comme dans le texte : $ZB = 2AB$.

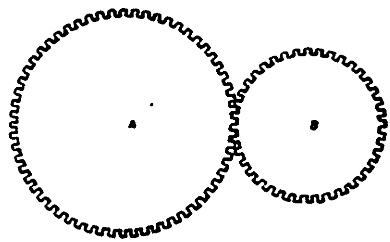
2. La comparaison des relations (I) et (III) de la note précédente donne : $\widehat{ZB\Gamma} = \frac{2}{3}$ d'angle droit. Or, on a par construction : $\widehat{AB\Delta} = \frac{2}{3}$ d'angle droit; donc : $\widehat{AB\Delta} + \widehat{ZB\Gamma} = \widehat{ABZ} = \frac{4}{3}$ d'angle droit $= (1 + \frac{1}{3})$ d'angle droit.

3. Voir la première figure de la proposition.

XXV.

Proposition 20. — Nous dirons maintenant comment on réalise la juxtaposition (1) des tambours dont il a été question plus haut (2).

Soient A, B deux tambours faits au tour et placés l'un contre l'autre, et que le nombre de dents du tambour A soit au nombre de dents du tambour B comme le diamètre du tambour A est au diamètre du tambour B ; car la juxtaposition des tambours est ainsi assurée en raison de ce que le diamètre est au diamètre comme le périmètre du cercle est au périmètre (ce qui sera démontré par la suite) (3).



Supposons donc que le tambour A ait soixante dents et le tambour B quarante dents ; je dis que le nombre de dents du tambour B est au nombre de dents du tambour A comme la vitesse du tambour A est à la vitesse du tambour B.

En effet, puisque les tambours A, B sont placés l'un contre l'autre, le tambour A sera mû d'autant de dents que le tambour B s'est mû de dents ; par conséquent, lorsque le tambour B, mis en révolution, aura fait un seul rétablissement (4), le tambour A aura été mû précisément de quarante dents ; de sorte que, quand le tambour B aura fait soixante rétablissements, c'est-à-dire autant qu'en indique le nombre de dents du tambour A, le tambour A aura été mû précisément de 2,400 dents, c'est-à-dire d'autant qu'en indique le nombre de dents du tambour A multipliée par le nombre de dents du tambour B. On démontrera encore de même que lorsque le tambour A aura fait quarante rétablis-

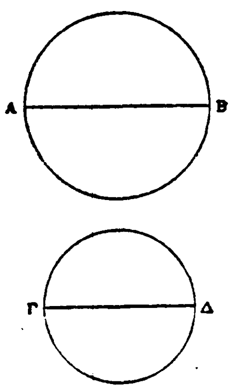
1. παράθεσις, juxtaposition, c'est-à-dire l'accouplement des roues dentées.
2. Voir proposition 10, p. 836.
3. Voir ci-après, proposition 22.
4. ἀποκατάστασις, rétablissement dans le premier état, pris ici dans le sens d'une révolution complète de la roue dentée.

sements, c'est-à-dire autant qu'en indique le nombre [de dents][1] du tambour B, le tambour B aura été mû précisément de 2,400 dents, c'est-à-dire d'autant qu'en indique le nombre de dents du tambour B multiplié par le nombre de dents du tambour A. En conséquence, lorsque le tambour A aura fait quarante rétablissements, c'est-à-dire autant qu'en indique le nombre de dents du tambour B, le tambour B aura fait aussi précisément soixante rétablissements, c'est-à-dire autant qu'en indique le nombre de dents du tambour A ; donc, le nombre de dents du tambour B est au nombre de dents du tambour A comme la vitesse du tambour A est à la vitesse du tambour B.

XXVI.

Proposition 22. — Mais, démontrons maintenant que les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres [2].

Soient les deux cercles AB, ΓΔ et leurs diamètres AB, ΓΔ ; je dis que le diamètre AB est au diamètre ΓΔ comme la circonférence du cercle AB est à la circonférence du cercle ΓΔ.



En effet, puisque le carré de la droite AB est au carré de la droite ΓΔ comme le cercle AB est au cercle ΓΔ [3] ; mais que le rectangle compris sous le diamètre AB et la circonférence du cercle AB est le quadruple du cercle AB, et que le rectangle compris sous le diamètre ΓΔ et la circonférence du cercle ΓΔ est le quadruple du cercle ΓΔ (car le rectangle compris sous le rayon du cercle et le périmètre du cercle est le double de l'aire du

1. Restauration proposée par Hultsch au moyen des mots τῶν ὀδόντων (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1104, l. 19).
2. Pappus a déjà démontré la même proposition en termes un peu différents au livre V, prop. 11. Voir p. 260.
3. Euclide, *Éléments*, liv. XII, prop. 2, énoncée p. 181, n. 1.

cercle, comme cela a été démontré par Archimède ([1]), ainsi que par nous-même au moyen d'un théorème particulier dans le commentaire sur le premier livre des *Mathématiques*) ([2]), il s'ensuit que le carré de la droite AB est au carré de la droite ΓΔ comme le rectangle compris sous la droite AB et la circonférence du cercle AB est au rectangle compris sous la droite ΓΔ et la circonférence du cercle ΓΔ et que, par permutation, le rectangle compris sous la circonférence du cercle ΓΔ et la droite ΓΔ est au carré de la droite ΓΔ comme le rectangle compris sous la circonférence du cercle AB et la droite AB est au carré de la droite AB. En conséquence, [la circonférence du cercle ΓΔ est à la droite ΓΔ] ([3]) comme la circonférence du cercle AB est à la droite AB (car c'est le premier théorème acquis dans le sixième livre) ([4]) et, par permutation, la droite AB est à la droite ΓΔ comme la circonférence du cercle AB est à la circonférence du cercle ΓΔ ([5]).

XXVII.

Proposition 23. — Étant donnés un tambour et le nombre de ses dents, qu'il soit imposé de lui juxtaposer un tambour ayant

1. Archimède, *De la Mesure du Cercle*, prop. 1, énoncée p. 243, n. 2 ; proposition que Pappus reproduit en termes plus explicites au livre V, prop. 3 (voir p. 243).

2. ἐν τῷ εἰς τὸ πρῶτον τῶν μαθηματικῶν σχολίῳ, dans le commentaire sur le premier (livre) des *Mathématiques*. Pappus désigne ici d'une manière abrégée l'ouvrage de Ptolémée : *La Composition mathématique*, intitulée aussi : *La grande Composition* (μεγάλη σύνταξις) ou *Almageste*, divisé en treize livres, sur lesquels Pappus a écrit des commentaires qui sont perdus, sauf ceux qui se rapportent aux livres V et VI, ayant fait l'objet de l'édition critique récente : *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste, texte établi et annoté par A. Rome. Tome I. Pappus d'Alexandrie. Commentaire sur les livres V et VI de l'Almageste*. Roma, Bibliotheca Apostolica Vaticana, 1931.

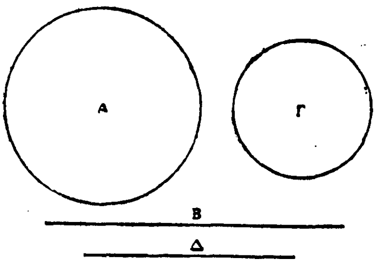
3. Restauration de Hultsch d'après le même passage de la proposition 11 du livre V (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1106, l. 22).

4. Euclide, liv. VI, prop. 1, énoncée p. 383, n. 1.

5. On a (Euclide, liv. XII, prop. 2) : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{\text{cercle AB}}{\text{cercle }\Gamma\Delta}$. Or, il a été démontré liv. V, prop. 3 (voir p. 243) qu'on a : circonférence du cercle AB × diamètre AB = 4 cercles AB, et circonférence du cercle ΓΔ × diamètre ΓΔ = 4 cercles ΓΔ ; donc : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{\text{circonf. cercle AB}\times \text{AB}}{\text{circonf. cercle }\Gamma\Delta\times\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{\text{circonf. cercle }\Gamma\Delta\times\Gamma\Delta}{\overline{\Gamma\Delta}^2}=\frac{\text{circonf. cercle AB}\times\text{AB}}{\overline{AB}^2}$, d'où (Euclide, liv. VI, prop. 1) : $\frac{\text{circonf. cercle }\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{\text{circonf. cercle AB}}{\text{AB}}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{AB}}{\Gamma\Delta}=\frac{\text{circonf. cercle AB}}{\text{circonf. cercle }\Gamma\Delta}$.

un nombre de dents donné, et de trouver le diamètre du tambour juxtaposé.

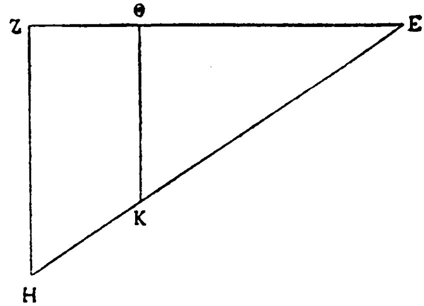
Soit le tambour A dont le nombre de dents est le nombre B [60 unités] (1), et juxtaposons au tambour A le tambour Γ, dont le nombre de dents est le nombre Δ [40 unités]. Il faut donc trouver le diamètre du tambour Γ.



Puisque le nombre B est le nombre de dents du tambour A, et que le nombre Δ est le nombre de dents du tambour Γ, [et que le nombre de dents du tambour A constitue son périmètre, tandis que le nombre de dents du tambour Γ constitue son périmètre] (2), il s'ensuit que le périmètre du tambour A est au périmètre du tambour Γ comme le nombre B est au nombre Δ. Or, le diamètre est au diamètre comme le périmètre est au périmètre (3) et le rapport du nombre B au nombre Δ est donné (4), [car c'est celui de 60 unités à 40 unités] ; donc, le rapport du diamètre du tambour A au diamètre du tambour Γ est donné, [c'est-à-dire celui de 60 à 40]. Et le diamètre du tambour A est donné (5) ; donc, le diamètre du tambour Γ est donné aussi (6), [car il faut faire en sorte que le diamètre du tambour A soit à un autre diamètre comme le nombre 60 est au nombre 40, et le cercle décrit autour de ce diamètre sera égal au tambour cherché] (7).

---

1. Le discours indique clairement que la démonstration est envisagée d'une manière générale et abstraite, et les phrases incidentes, qui introduisent des nombres concrets, doivent donc avoir été interpolées par un commentateur ayant voulu vérifier les conclusions sur les mêmes nombres 40 et 60 considérés dans la proposition 20.
2. La phrase mise entre crochets doit être considérée comme une interpolation (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1108, ll. 8-10). Il est d'ailleurs sous-entendu que les dents sont égales, et que leur intervalle est le même dans les deux roues dentées.
3. Voir proposition 22.
4. Euclide, *Données*, prop. 1, énoncée p. 28, n. 6.
5. Euclide, *Ibidem*, définition 5, énoncée p. 227, n. 3.
6. Euclide, *Ibidem*, prop. 2, énoncée p. 24, n. 1.
7. Interpolation faisant suite aux interpolations précédentes relatives aux nombres concrets introduits par un commentateur dans la démonstration.



Il en sera d'ailleurs instrumentalement comme suit [1] :

Exposons une droite EZ divisée en parties égales dont le nombre est égal à celui des dents du tambour A, [c'est-à-dire 60] ; prenons, sur la perpendiculaire qui lui est menée, la droite ZH égale au diamètre du tambour A, et menons la droite de jonction EH. Découpons la droite EΘ qui soit le nombre de dents du tambour Γ, et menons par le point Θ la droite ΘK parallèle à la droite ZH. En conséquence, la droite ΘK sera égale au diamètre du tambour Γ, car la démonstration est manifeste [2].

XXVIII.

PROPOSITION 24. — On verra clairement de la manière suivante comment on construit une vis ayant son hélice ajustée aux dents obliques d'un tambour donné [3].

Imaginons un cylindre AΔEZ, tourné à épaisseur égale, dont le côté est la droite AE, et prenons sur celle-ci l'intervalle AB d'une hélice monostrophe [4]. Constituons une lame d'ai-

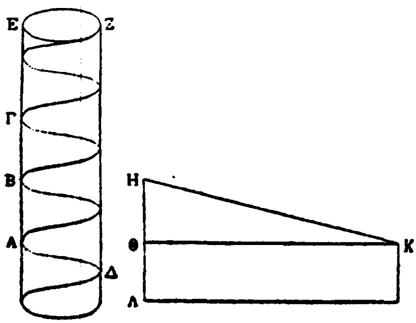
1. ὀργανικῶς δὲ οὕτως, c'est-à-dire que la construction pratique sera la suivante au moyen du compas et de la règle à divisions.

2. Les droites ZH, ΘK sont dans le rapport des droites ZE, EΘ par similitude de triangles, et ce rapport est celui des périmètres ; donc, il est celui des diamètres des tambours, lequel est donné par hypothèse ; donc, le diamètre ΘK du tambour Γ est donné de grandeur.

3. Voir la proposition 10, dans laquelle il est déjà fait emploi de la vis engrenant une roue dentée, et où il est dit que la théorie relative à la construction de cet assemblage d'organes sera donnée dans la suite.

4. μονόστροφος (ἕλιξ), l'hélice engendrée par une seule révolution du cylindre directeur, c'est-à-dire l'hélice n'ayant qu'une seule spire. En employant le néologisme « monostrophe », déjà utilisé par Paul Tannery (*Mémoires scientifiques*, vol. II, p. 15), on évite ainsi la confusion pouvant résulter de l'emploi du mot « spire » (σπεῖρα), qui s'appliquait chez les anciens géomètres à un genre de surfaces que nous désignons maintenant sous le nom de tores, et dont Héron nous donne une définition que nous traduisons : « La spire est engendrée par la révolution complète d'un cercle ayant son centre sur un autre cercle et son plan perpendiculaire à celui de ce second cercle. On l'appelle aussi anneau (κρίκος). La spire est ouverte (διεχής) quand elle présente un vide ; fermée (συνεχής) quand il y a contact intérieurement en un seul point, et rentrante (ἐπαλλάττουσα)

rain (1), dont la partie HΘK soit un triangle rectangle ayant l'angle Θ droit, et dont le restant est le parallélogramme rectangle ΘΚΛ. Posons la droite ΘH égale à la droite AB et la droite ΘK égale au périmètre du cylindre ΑΔΕΖ. Courbons la lame autour du cylindre, de telle sorte que le parallélogramme ΘΚΛ devienne aussi un cylindre s'appliquant au cylindre ΔE quand celui-ci y est introduit ; plaçons le point Θ sur le point A et le point H sur le point B, et nous aurons décrit ainsi, au moyen de l'hypoténuse HK, l'hélice dite monostrophe telle que BA. Si nous déplaçons de nouveau la lame de manière à avoir le point Θ au point B et le point H au point Γ, nous aurons décrit une autre hélice monostrophe ; de sorte que l'hélice entière est distrophe (2). En effet, la droite AB, mue suivant la surface du cylindre, se remet en place dans le même temps où le point A, mû d'une manière uniforme, est parvenu au point B, car Apollonius de Perge a démontré cela (3). [Dès lors, si nous coupons en deux parties égales chacune des droites AB, BΓ et les suivantes jusqu'au point E ; si nous décrivons, par les points (4), des hélices monostrophes avec la lame, et si nous prenons, au droit de celles-ci, la profondeur d'hélice que nous voulons, nous obtiendrons aisément l'hélice qui convient en limant en forme de lentille, à partir de cette profondeur, le restant de l'hélice tracée] (5).



quand le cercle générateur se coupe lui-même. Ces corps ont comme sections certaines lignes qui les caractérisent » (*Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae. Edidit Frid. Hultsch*. Berolini, 1864, p. 27).

1. λεπίδιον χαλκοῦν, plaque ou lame d'airain ou de bronze.

2. δίστροφος (ἕλιξ), hélice ayant deux spires, engendrées par deux révolutions du cylindre directeur.

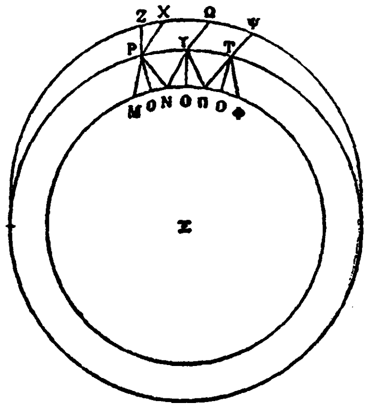
3. Renvoi au traité perdu d'Apollonius intitulé *De la Vis* (περὶ τοῦ κοχλίου) dans lequel, d'après ce que nous rapporte Proclus, la théorie de la vis aurait été donnée pour la première fois (*Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii. Edidit G. Friedlein*. Leipzig, 1873, p. 105).

4. C'est-à-dire par les points de division en deux parties égales des intervalles des spires.

5. La phrase que nous mettons entre crochets est attribuée par Hultsch à

XXIX.

Imaginons de nouveau (1), dans l'une des surfaces d'un tambour donné, le cercle de périmètre ΡΥΤ et de centre Ξ autour de la partie temporale (2), et ce cercle étant divisé, par exemple en vingt-quatre parties, que les points Ρ, Υ, Τ soient à égale distance l'un de l'autre. Menons, des points Ρ, Υ, Τ et jusqu'à un cercle ΜΝΠΦ décrit autour du centre Ξ, les droites ΡΟ, ΥΟ, ΤΟ dirigées vers ce centre Ξ ; menons, à partir des points qui divisent les arcs ΟΟ en deux parties égales, les droites ΜΡ, ΝΡ, ΝΥ, ΠΥ, ΠΤ, ΤΦ jusqu'aux points Ρ, Υ, Τ, et amenons, dans la surface courbe du tambour et en direction de la droite ΟΡ (3), la droite ΡΣ jusqu'à la circonférence du cercle ΧΩ, semblablement décrit (4) autour de la partie temporale dans l'autre surface du tambour. Posons, à partir du point Σ, l'arc ΣΧ égal à la moitié de l'arc ΡΥ (5), l'arc ΧΩ égal à l'arc ΡΥ ; puis, en posant ainsi successivement l'arc ΩΨ et les arcs restants égaux à l'arc ΥΤ, et en menant les droites de jonction ΡΧ, ΥΩ, ΤΨ, nous aurons l'obliquité des dents. Et puisque le cercle ΡΥ est égal au cercle ΧΩ, décrivons aussi, dans l'autre surface du tambour (6), autour du centre opposé au



---

un commentateur (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 1110, ll. 21-26) ; son texte altéré la rend obscure, et elle semble vouloir viser la vis à filets arrondis.

1. C'est-à-dire comme dans la proposition 10, relative au tambour denté.

2. περὶ τὸν κότραφον κύκλος, le cercle (qui est) autour de la partie temporale (du tambour), c'est-à-dire la circonférence de cercle qui délimite l'une des deux surfaces planes temporales ou latérales du cylindre ou tambour considéré.

3. Le texte a probablement subi des altérations à cet endroit ; car il exprime d'une manière défectueuse que la droite ΡΣ doit être menée dans la surface cylindrique du tambour, à partir du point Ρ de la droite ΟΡ, perpendiculairement au plan de la surface circulaire latérale du tambour.

4. C'est-à-dire décrit comme le cercle ΡΥΤ, dont la circonférence délimite la première face plane du tambour.

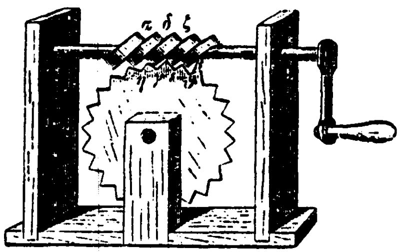
5. Le texte présente ici l'interpolation ὡς λοξώσεως, en vue de l'obliquité (des dents) (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1112, l. 13).

6. C'est-à-dire dans l'autre surface circulaire plane latérale du tambour cylindrique.

point Ξ, un cercle égal au cercle MN ; puis, en menant, des points X, Ω sur ce cercle, des droites dirigées vers son centre, et en faisant les mêmes choses que sur la circonférence ΡΥΤ (1), nous aurons aussi délinéé l'autre côté du tambour (2). Enfin, si nous taillons les figures constituées entre les lignes ΡΝΥ, ΥΠΤ et celles qui leur sont opposées (3), nous aurons un tambour denté à dents obliques. Or, chaque dent pénètre dans l'hélice de la vis, parce que l'intervalle ΡΥ est égal à l'intervalle AB de l'hélice de la vis (4). Et il est manifeste que chaque tour de vis entraînera une dent ; car Héron démontre cela dans les *Mécaniques*, et ce sera exposé aussi par nous-même, afin que rien ne doive être cherché hors d'ici (5).

XXX.

Imaginons, en effet, la vis AB et, dans celle-ci, l'hélice ΑΓΔΕΖΒ (6), et soit le tambour juxtaposé et denté ΗΓΕΘ ayant ses dents ΗΓ, ΓΕ, ΕΘ ajustées à l'hélice (7). Dès lors, si nous faisons tourner la vis de manière que le point E soit poussé dans la partie Γ, le point E se trouvera sur le point Γ quand la vis aura fait un seul rétablissement ; la dent ΓΕ aura la position de la dent ΓΗ et la dent ΕΘ la position de la dent ΓΕ. Derechef, quand



1. L'édition de Hultsch abandonne ici la petite interpolation : τοῦ κύκλου, du cercle (cfr. *loc. cit.*, vol. III, p. 112, l. 21).

2. C'est-à-dire que l'autre côté du tambour présentera le dessin des dents à découper.

3. C'est-à-dire les figures solides comprises entre les lignes tracées sur les deux surfaces latérales planes et sur la surface cylindrique du tambour.

4. Voir la première figure relative à cette proposition, dont le texte a négligé d'énoncer au début l'hypothèse de l'égalité des intervalles ΡΥ, AB, c'est-à-dire l'ajustement des dents du tambour avec le pas de la vis motrice.

5. ἔξωθεν, c'est-à-dire en dehors du présent ouvrage.

6. Le texte présente l'interpolation : « et imaginons les hélices appelées monostrophes » (Cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1114, l. 9).

7. Le texte présente ici la remarque inutile interpolée : οἱ ἄρα λοιποὶ οὐκ ἐναρμόσουσιν εἰς τὰς λοιπὰς ἕλικας, les (dents) restantes ne s'ajustent donc pas aux hélices restantes (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1114, l. 12).

la dent EΘ aura la position de la dent ΓE, elle aura été avancée entièrement en un seul tour de la vis. Et il faut concevoir les mêmes choses pour les dents suivantes ; en sorte que la vis donnera lieu à un seul rétablissement du tambour en tournant autant de fois que le tambour compte de dents.

XXXI.

Il en est donc ainsi en ce qui concerne le *Baroulcon* (1) ; mais nous allons faire un exposé plus sommaire des cinq puissances (2) dont il a été question, et que nous tirons des livres d'Héron, afin de les remettre en mémoire à l'intention de ceux qui aiment à s'instruire. Nous y ajouterons, en outre, ce qu'il est nécessaire d'exposer au sujet de la machine à un membre (3), à deux membres, à trois membres et à quatre membres, afin que celui qui s'adonne aux recherches sur ce sujet ne soit pas à court de livres dans lesquels il est exposé ; car il nous est arrivé de lire des livres corrompus en beaucoup d'endroits et où manquaient le commencement et la fin. Au reste, considérant que les puissances au moyen desquelles un poids donné est mû par une force donnée sont au nombre de cinq, il y a lieu d'exposer ce que sont leurs figures, leurs usages et leurs dénominations. Héron et Philon rapportent d'ailleurs encore que les puissances dont il s'agit, bien que fort différentes de figure, se ramènent toutes à une structure (4) unique. Leurs dénominations sont donc : l'axe dans la roue (5), le levier, le polyspaste (6), le coin et la vis sans fin.

L'axe dans la roue se construit de la manière suivante : Il

1. Voir proposition 10 empruntée au *Baroulcon* d'Héron. Toute la partie qui va suivre jusqu'à la fin de l'ouvrage semble avoir été ajoutée par un auteur postérieur à Pappus qui aurait puisé dans les écrits d'Héron.

2. Le mot δύναμις, puissance, désigne ici exceptionnellement la machine même, simple ou composée, au moyen de laquelle la force (βία) exerce son action.

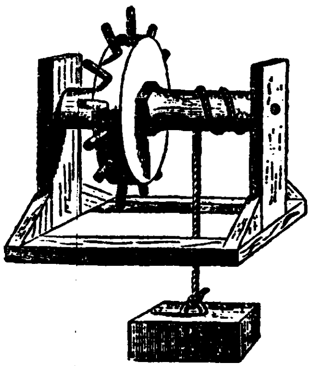
3. περὶ τῆς μονοκώλου μηχανῆς, concernant la machine à un seul membre, c'est-à-dire l'appareil de levage le plus simple, constitué par un seul organe, ou mât de charge.

4. Le mot φύσις, nature, présente ici le sens de forme extérieure ou de structure d'appareil mécanique, et cette structure unique à laquelle il est fait allusion est celle du levier.

5. Voir proposition 10 au sujet de l'expression ἄξων ἐν περιτροχίῳ, qui désigne ce qu'on appelle vulgairement le tour ou treuil lorsque l'axe est horizontal, et cabestan lorsque l'axe est vertical.

6. Voir proposition 10, en note.

faut prendre un bois robuste, équarri (comme un soliveau), arrondir ses extrémités en les émoussant ([1]), entourer celles-ci de manchons ([2]) d'airain, assujettis à l'axe de manière qu'en introduisant ces extrémités dans les trous ronds présentés dans un



assemblage ([3]) inébranlable, celles-ci tournent avec facilité lorsque ces trous sont munis de frottoirs ([4]) d'airain disposés sous les manchons. Un tambour muni d'un trou carré ajusté à l'axe est ensuite placé autour de la partie médiane ([5]) de cet axe, de manière que l'axe et ce qui tourne autour de lui ([6]) révolutionnent ensemble.

La construction est donc exposée ainsi clairement, et nous devons entretenir maintenant de l'emploi qui en est fait. En effet, si nous voulons mouvoir un grand poids au moyen d'une petite force, nous enroulons autour des parties émoussées ([7]) de l'axe le cordage rattaché au poids et, après avoir introduit des chevilles ([8]) dans les trous qui se présentent dans la roue, nous faisons tourner la roue en abaissant ces chevilles, et, le cordage s'enroulant autour de l'axe [ou bien étant lové ([9]) par

1. C'est-à-dire en taillant aux deux extrémités les arêtes vives de la poutre carrée. Le texte paraît cependant avoir été altéré ici ; car la description de l'appareil, qui est empruntée à l'ouvrage d'Héron, ne distingue plus la partie de section carrée de l'axe régnant sur l'épaisseur de la roue, puis la partie cylindrique de l'axe sur laquelle doit s'enrouler le cordage, et, enfin, les parties cylindriques des deux extrémités de l'axe qui constitueront les pivots engagés dans les trous pratiqués dans les montants de l'appareil.

2. χοινικίς, expression qui désigne proprement un moyeu de roue, et ayant ici la signification de manchon (d'airain).

3. πῆγμα, union de plusieurs choses en un tout, désignant ici un assemblage de pièces de bois formant le bâti fixe ou inébranlable (ἀκίνητος), du treuil.

4. τριβεύς, frottoir, c'est-à-dire un coussinet (d'airain, χαλκοῦς).

5. Sous-entendu τετράγωνον, c'est-à-dire (la partie médiane) carrée (de l'axe).

6. καὶ τὸ περιτρόχιον, ce qui tourne autour, c'est-à-dire la roue qui règne autour de l'axe.

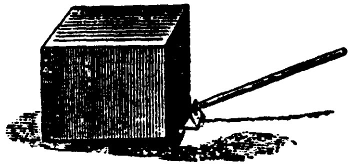
7. τὰ σεσιμωμένα τοῦ ἄξονος, les (parties) taillées ou émoussées de l'axe, c'est-à-dire les parties primitivement de section carrée, dont les arêtes ont été taillées de manière à rendre ces parties cylindriques.

8. σκυτάλη, bâton, c'est-à-dire ici une cheville fixée dans la jante de la roue pour faire tourner celle-ci à la main.

9. διαρμηρύειν, mettre en pelotons, c'est-à-dire lover (le cordage).

quelqu'un, afin que le cordage ne reste pas complètement autour de l'axe] ([1]), le poids sera aisément mû de cette manière par une puissance plus petite. Mais, il faut approprier la grandeur de l'instrument au poids que l'on se propose de faire mouvoir, et proportionner les parties ([2]) de l'instrument dans le rapport qui existe entre le poids à mouvoir et la puissance mouvante ([3]), comme on le montrera dans la suite.

La seconde puissance est celle qui s'exerce au moyen du levier ([4]). En effet, ceux qui se sont proposés de mouvoir de grands poids, après avoir considéré qu'il fallait d'abord les soulever de terre, nonobstant leur manque de prises résultant de ce que toutes les parties à la base du fardeau étaient adjacentes au sol, ont creusé légèrement en dessous ; puis, ayant placé sous le fardeau l'extrémité d'une longue pièce de bois, ils ont abaissé l'autre extrémité après avoir mis sous le bois, à proximité du fardeau, une pierre qu'on appelle le sous-levier ([5]). Cette



manière de mettre en mouvement leur paraissant très facile, ils ont pensé qu'il était possible de mouvoir ainsi de grands poids. Le bois, carré ou non, s'appelle le levier, et le poids sera d'autant plus facilement mis en mouvement que le sous-levier aura été placé plus près du fardeau ([6]), comme on le démontrera dans la suite.

1. La phrase que nous mettons entre crochets a probablement été interpolée de seconde main dans l'extrapolation que constitue cet extrait d'un ouvrage d'Héron, ajouté à la fin du livre VIII de Pappus (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1118, l. 8).

2. συμμετρία, accord ou proportion des parties du tout, ou symétrie, c'est-à-dire ici le rapport du diamètre de la roue au diamètre de l'axe.

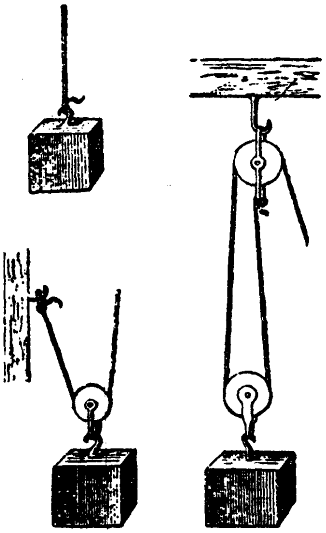
3. La phrase exprime donc en d'autres termes que pour réaliser l'équilibre du treuil, tel que le décrit le texte, il faut que la puissance exercée sur les chevilles également espacées, qui garnissent la jante de la roue ou du tambour, soit à la résistance représentée par le poids à soulever comme le diamètre de l'axe cylindrique est au diamètre de la roue.

4. Une interpolation ajoute ici : « et qui est sans doute l'idée qui se présente d'abord pour le mouvement des poids excessifs » (cfr. Hultsch, *loc. cit.*, vol. III, p. 1118, ll. 14-15).

5. ὑπομόχλιον, ce qui se met sous le levier (μοχλός), c'est-à-dire le point d'appui dénommé « l'orgueil » en technologie.

6. Principe déjà émis par Aristote dans ses *Problèmes mécaniques* μηχανικὰ προβλήματα) où (chap. IV), considérant la mer comme un poids mû par la rame, et la rame comme un levier, il ajoute : ἀεὶ πλέον βάρος κινεῖ, ὅσῳ ἂν πλέον ἀφεστήκοι

La troisième puissance consiste dans le polyspaste (1). En effet, lorsqu'on veut entraîner un poids, on tire le cordage qui y est attaché avec une force aussi grande que celle qui fait équilibre au fardeau. Or, si, pour tirer le cordage partant du fardeau, on attache l'une de ses extrémités à un lieu fixe, et si l'on fait passer l'autre extrémité dans une petite poulie rattachée au fardeau, on fait mouvoir le poids plus aisément en tirant cette extrémité. Et derechef, si l'on attache une autre petite poulie à un lieu fixe, et si, faisant passer dans cette poulie l'extrémité menée du cordage, on tire, on fera mouvoir le poids encore plus aisément. Et si l'on attache de nouveau une autre petite poulie au fardeau, et si l'on tire l'extrémité menée du cordage après l'avoir fait passer dans cette poulie, on fera mouvoir le poids encore beaucoup plus aisément. Et si l'on attache ainsi continuellement des petites poulies au lieu fixe et au fardeau, et si l'on fait passer alternativement par ces poulies l'extrémité menée, on fera mouvoir le poids toujours plus aisément. [Le poids sera donc mû d'autant plus aisément que le cordage s'infléchira sur un plus grand nombre d'organes (2) ; mais il faut que l'extrémité reliée du cordage soit attachée à un lieu fixe] (3). Toutefois, dans le but de ne pas attacher les poulies isolément au fardeau et au lieu fixe, on dispose celles que nous avons dit appartenir au lieu fixe dans une pièce de bois qu'on appelle la chape (4), dans



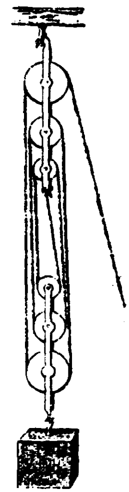
τοῦ ὑπομοχλίου ὁ κινῶν τὸ βάρος, c'est-à-dire: (levier qui) meut un poids en mouvra continuellement un plus grand à mesure qu'il s'éloigne davantage du sous-levier (point d'appui).

1. Voir proposition 10 pour la signification de cette expression.

2. κῶλα, les membres, ou les divers organes qui composent la moufle ou polyspaste.

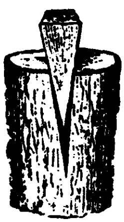
3. La phrase mise entre crochets a probablement été interpolée (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1120, ll. 15-18).

4. μάγγανον, artifice, désignant ici l'armature reliant les axes des diverses poulies qui constituent la moufle, c'est-à-dire la chape.



laquelle elles se meuvent autour d'axes, et on attache cette chape au lieu fixe au moyen d'un autre cordage ; tandis qu'on dispose les poulies situées près du fardeau dans une autre chape identique à la précédente et reliée pour sa part au fardeau. Il faut d'ailleurs que les poulies soient disposées dans les chapes de telle manière que les organes entrelacés n'obéissent pas difficilement. Nous démontrerons du reste la cause pour laquelle on acquiert de la facilité quand les organes sont pris en grand nombre, et la cause pour laquelle on attache l'autre extrémité du cordage à un lieu fixe.

La puissance suivante est celle qui s'exerce au moyen du coin. Celle-ci offre de grandes facilités pour l'expression des essences (1) et pour la confection d'excellents collages dans l'art de construire en bois. Et, chose plus importante, lorsqu'il s'agit, dans les carrières, de dégager des pierres de ce qui adhère à leur partie inférieure, on ne peut opérer au moyen d'aucune des autres puissances, pas même en réunissant toutes celles-ci ensemble ; tandis que le coin agit tout seul dans

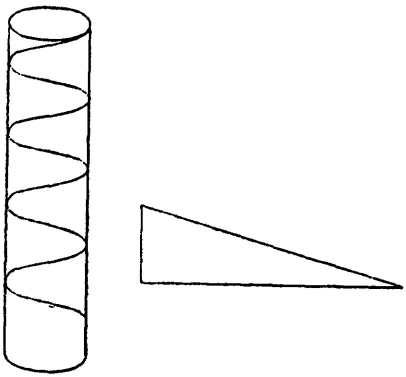


la mesure voulue. Aucun relâchement ne se produit d'ailleurs dans le coin par suite de l'action intermittente des ouvriers, et sa tension reste violente ; ce qui est attribué manifestement au fait que, même lorsque le coin n'est plus frappé, il se produit de temps en temps un craquement et des ruptures provoqués par l'énergie (2) du coin. Au reste, le coin exerce plus facilement son effet, c'est-à-dire au moyen d'un coup plus faible, à mesure que son angle devient plus petit, comme nous le démontrerons.

Les instruments dont nous venons de parler présentent des constructions claires et simples, et leurs usages se manifestent dans de multiples lieux ; mais la vis présente quelques parti-

1. πρός τὰς μυρεψικὰς πιέσεις, pour les pressions essentielles ou de parfums, c'est-à-dire pour la pression des matières contenant des huiles essentielles ou parfumées.
2. ἐνεργείας, énergie, expression désignant ici la force élastique (du coin).

cularités dans sa construction et son emploi. Elle agit, en effet, tantôt de manière isolée, tantôt en s'adjoignant quelque autre puissance, parce qu'elle ne constitue pas autre chose qu'un coin enroulé qui ne reçoit pas de coups, mais qui réalise son mouvement par levier et révolution ; effet qui résultera clairement de ce que nous dirons bientôt. La conception (1) formée pour ce qui concerne la vis est donc de la nature suivante : Si le côté d'un cylindre est transporté suivant la surface de ce cylindre ; si un point est transporté en même temps suivant ce même côté, et si ce point parcourt toute la longueur du côté dans le même temps où ce côté effectue un seul rétablissement, la ligne engendrée dans la surface du cylindre est une hélice qu'on appelle aussi une vis (2). Or, celle-ci se construit de la manière suivante dans le cylindre (3) :



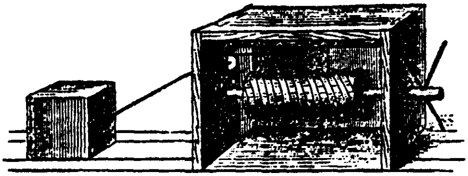
Si nous exposons dans un plan deux droites perpendiculaires entre elles, dont l'une est égale au côté du cylindre que nous venons de dire, et l'autre égale à la circonférence du cercle de base du cylindre ; si nous menons, sur les extrémités des droites en question, la droite de jonction qui sous-tend l'angle droit ; si nous plaçons la droite qui est égale au côté du cylindre sur le côté du cylindre, et si nous enroulons l'autre droite située autour de l'angle droit suivant la circonférence du cercle, la droite qui sous-tend l'angle droit s'enroulera aussi suivant la surface du cylindre et constituera l'hélice que nous avons dite. Or, il est loisible de diviser le côté du cylindre en autant de parties égales qu'on voudra, et de décrire en chacune de ces parties une

1. πραγματεία, expression prise ici dans le sens d'application de l'esprit ou de conception.

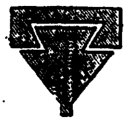
2. C'est-à-dire que la courbe géométrique hélice (ἕλιξ) prend le nom de vis (κοχλίας) dans la *Mécanique* d'Héron.

3. Voir plus haut la proposition 20 dans laquelle Pappus a déjà exposé la construction de la vis d'une manière plus exacte que dans le passage qui va suivre, emprunté à Héron par un auteur postérieur à Pappus.

hélice de la manière qu'on vient d'indiquer, de telle sorte qu'il y aura plusieurs hélices décrites sur le cylindre, et on appelle monostrophe celle qui est enroulée une seule fois, c'est-à-dire la ligne menée autour du cylindre en chacune de ses parties. Dès lors, si on incise un canal suivant cette ligne dans la profondeur du cylindre, et si on le creuse



de manière qu'une cheville (1) solide s'y ajuste, la vis sera utilisée de la manière suivante : Après avoir rendu ses extrémités rondes, on les adapte à des assemblages (2) dans des trous arrondis, de telle sorte que la vis tourne facilement ; puis, disposant au-dessus de la vis une règle qui lui est parallèle et présente un canal au milieu de sa surface régnant au-dessus de la vis, on adapte à ce canal la cheville dont il a été question, de manière qu'une des extrémités de la cheville reste dans le canal de la vis et l'autre extrémité dans l'autre canal que nous avons dit se trouver dans la règle (3). Dès lors, si l'on veut mouvoir un fardeau au moyen de cet instrument, on prend un cordage, on en relie une des extrémités au fardeau et l'autre à la cheville que nous avons mentionnée et, comme il y a des trous dans la tête de la vis, on ramène vers le bas les bâtons qui y ont été engagés, et la cheville, ainsi conduite dans son canal par l'hélice, attire le cordage, par l'intermédiaire duquel elle attire aussi le fardeau. Mais, au lieu de bâtons, on peut mettre un manche (4) à l'extrémité de la vis qui dépasse extérieurement l'assemblage et, si l'on fait tourner la vis de cette manière, on attirera le fardeau. Au reste, dans la vis, l'hélice est tantôt carrée, tantôt lenticulaire ; elle est

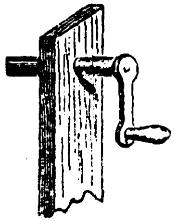


1. τύλος, clou ou cheville, c'est-à-dire un ergot constituant donc la forme la plus rudimentaire de l'écrou que les mécaniciens de l'Antiquité ne paraissent pas avoir connu.

2. C'est-à-dire à un assemblage de pièces formant le bâti de l'appareil.

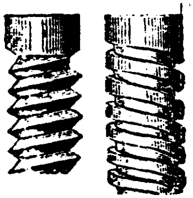
3. En d'autres termes, la vis est utilisée de manière à faire mouvoir parallèlement à son axe un ergot faisant partie d'un curseur guidé dans une rainure pratiquée dans une pièce fixe de l'assemblage qui porte la vis sans fin.

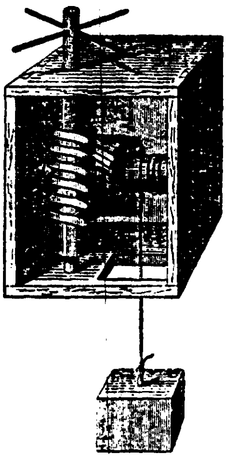
4. χειρολάβη, manche ou poignée, c'est-à-dire une manivelle.



carrée quand les incisions de son canal sont perpendiculaires, et elle est lenticulaire quand les incisions sont obliques et se rejoignent sur une seule ligne ; l'une est d'ailleurs appelée carrée et l'autre lenticulaire.

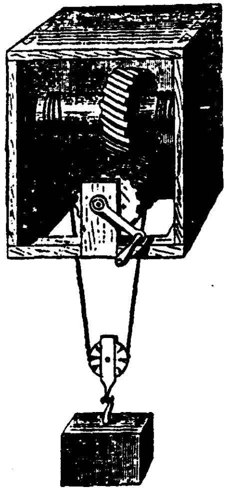
La vis affecte donc cette construction lorsqu'elle agit isolément ; mais elle s'applique encore d'une autre façon. En effet, si l'on adopte quelque autre puissance, telle que celle qui s'exerce au moyen de la construction qu'on appelle l'axe dans la roue (1), imaginons qu'on ait un tambour denté disposé autour d'un axe, et qu'une vis placée perpendiculairement au sol, ou parallèlement au sol, soit accolée à ce tambour, tout en ayant son hélice engagée dans les dents du tambour et ses extrémités tournant dans les trous ronds de quelque assemblage, comme nous l'avons dit précédemment, et, vu que l'extrémité de la vis dépasse à la partie extérieure de l'assemblage, entourons-la d'un manche au moyen duquel on fera tourner cette vis, ou bien faisons-y des trous, de manière qu'en y introduisant des bâtons, on fasse de même tourner la vis. Dès lors, si les cordages partant du fardeau sont de nouveau enroulés autour de l'axe, de part et d'autre du tambour (2), et si l'on fait tourner la vis, puis le tambour, par l'intermédiaire de celle-ci, on attirera le fardeau.



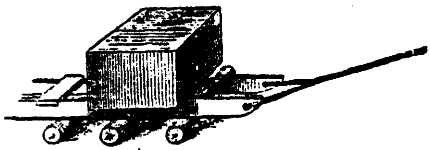


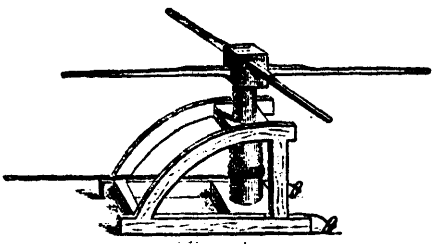
Nous avons donc exposé les constructions et les usages des cinq puissances que nous avons mentionnées, et Héron a démontré dans ses *Mécaniques* la cause pour laquelle de grands poids sont généralement mus par une petite force au moyen de chacune de ces puissances. Or, dans ce qui va suivre, nous allons décrire des machines qui, d'après le troisième livre d'Héron, ont été constituées dans un but de facilité et d'utilité, et au moyen desquelles on fera de nouveau mouvoir de grands poids.

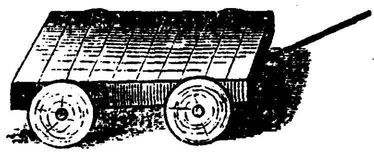
1. C'est-à-dire le tour ou treuil.
2. Cas représenté dans la figure de la pa4e 881 où la vis est horizontale.



Les choses que l'on transporte sur le sol, dit-il, sont traînées sur des sellettes (1). Or, la sellette est un assemblage de quatre bois dont les extrémités sont émoussées. Les poids y sont disposés, et l'on attache aux extrémités de ces bois soit des polyspastes, soit les bouts de cordages. Ceux-ci sont tirés à la main, ou bien ils sont déférés à des cabestans (2) qui, mis en rotation, traîneront sur le sol la sellette sous laquelle on aura placé des rouleaux de bois (3) ou des planches (4). Car, si le fardeau est petit, il faut faire usage de rouleaux de bois, et s'il est plus grand, il faut employer des planches, parce que les sellettes seront ainsi traînées moins facilement ; car, lorsque le fardeau prend un mouvement impétueux, les rouleaux de bois offrent du danger en roulant. Au reste, certains n'utilisent ni rouleaux de bois ni planches, mais ils font avancer les sellettes après y avoir appliqué des roues pleines.







1. χελώνη, tortue, expression qui désigne ici un petit siège fort bas, servant à traîner les fardeaux. Vitruve (*De l'Architecture,* liv. X, chap. X) emploie le même mot latinisé « chelo » pour désigner un organe de la catapulte de guerre.

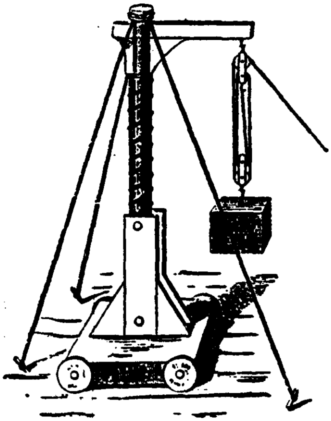
2. ἐργάτης, espèce de moulinet ou treuil qui tourne verticalement, c'est-à-dire le vindas ou cabestan.

3. σκυτάλη, bâton, désignant ici le cylindre de bois pour faire rouler les fardeaux.

4. σανίς, ais ou planche.

XXXII.

Mais, dit-il (1), pour enlever des fardeaux en hauteur, on fait des machines à un membre (2), ou à deux membres (3), ou à trois membres (4), ou à quatre membres (5). Les machines à un membre sont constituées de la manière suivante : On prend un bois robuste, d'une hauteur plus grande que celle à laquelle on veut élever le fardeau et, bien qu'il soit robuste par lui-même, on le resserre en plaçant une corde à l'entour et en l'étreignant dans des circonvolutions (6). Les distances entre ces circonvolutions ne dépassent d'ailleurs pas quatre palmes (7) ; le bois devient ainsi plus robuste, et les circonvolutions de la corde seront utiles pour ceux qui effectuent le travail et veulent monter à la partie supérieure. Et, si le bois n'est pas assez robuste, on le constitue par un assemblage de plusieurs autres. [Il faut soupeser le fardeau que l'on veut élever, afin que le membre ne soit



---

1. C'est-à-dire Héron dans ses *Mécaniques*.
2. μονόκωλος, (machine de levage) n'ayant qu'un seul membre, se composant donc d'une pièce de bois unique, retenue verticalement, ou sous une certaine inclinaison, par des haubans. C'est le mât de charge.
3. δίκωλος, (machine de levage) à deux membres, ou assemblage de deux pièces de bois inclinées l'une sur l'autre, reliées à leurs sommets et maintenues dans un plan vertical ou plus ou moins incliné par des haubans. C'est l'appareil que nous appelons la grue ou la bigue.
4. τρίκωλος, (machine de levage) à trois membres, composée de trois pièces de bois inclinées l'une sur l'autre, reliées à leurs sommets et formant trépied. C'est l'appareil que nous appelons la chèvre.
5. τετράκωλος, (machine de levage) à quatre membres, composée de quatre pièces de bois inclinées l'une sur l'autre, reliées au sommet et constituant une chèvre plus stable que celle formant trépied.
6. C'est-à-dire dans des circonvolutions qui forment une hélice autour du mât de charge et qui serviront au besoin d'échelons.
7. παλαιστής, palme, petite mesure de longueur valant 4 doigts, de sorte que la distance des spires, ou le pas de l'hélice constituée par l'enroulement de la corde autour du mât de levage, était d'environ 35 centimètres au plus.

pas trop faible] [1]. On érige donc le membre sur un banc de bois [2] ; on relie trois ou parfois quatre cordages à son extrémité, et leurs élongations sont ramenées sur des lieux stables, afin que le bois, retenu par les cordes tendues, ne cède pas quel que soit l'endroit où il lui est fait violence. On attache ensuite à la partie supérieure des polyspastes qu'on relie au fardeau, et l'on tire soit avec les mains, soit en appliquant des cabestans, jusqu'à ce que le fardeau soit élevé. Et si l'on doit déposer une pierre sur un mur ou en quelque endroit que l'on veuille, on relâche un des cordages reliés au sommet, notamment celui qui se trouve du côté opposé au fardeau, et on incline le membre [3] ; ou bien, mettant des bâtons sous le fardeau, c'est-à-dire du côté où l'on n'a pas introduit la fronde [4], on relâche les cordes des polyspastes jusqu'à ce que le fardeau soit assis sur les bâtons ; puis, déliant la fronde, on remue le fardeau avec des leviers jusqu'à ce qu'il soit amené à l'endroit voulu. Après cela, attirant de nouveau manuellement au moyen de cordes le banc de bois placé sous le membre, on l'amène sur une autre partie de l'édifice ; on relâche les segments [5] tous ensemble, et on l'utilise [6] de nouveau en reliant [7] de la manière que nous avons dite.

1. La phrase placée entre crochets paraît avoir été interpolée (cfr. HULTSCH, *loc. cit.*, vol. III, p. 1132, l. 15).
2. ξύλον, bois, désignant ici un plancher ou banc de bois.
3. C'est-à-dire le bois ou mât.
4. σφενδόνη, la fronde ; expression qui désigne ici le fer ou l'anneau au moyen duquel le cordage est relié à la pierre. C'est l'organe qu'on appelle actuellement la louve.
5. ἀπότομος, coupure, segment ; expression qui désigne ici les parties des cordages qui sont engagées dans les moufles, et qui paraissent ainsi être découpées d'une poulie à l'autre de ces moufles.
6. Sous-entendu : l'appareil de levage.
7. Sous-entendu : un autre fardeau.

FIN DU SECOND ET DERNIER VOLUME

Clichés de Steurs, Lambert & Cie
à Anvers

Imprimé par Desclée De Brouwer & Cie,
Bruges (Belgique). — 7063

ERRATA :

Page XII, ligne 24, lire « présente » au lieu de « présent ».
» 141, figure, tracer la droite AΘ.
» 283, note 3, fermer la parenthèse après KΘ.
» 344, figure, tracer la droite ΓΘ.
» 377, figure, marquer A le pôle des cercles parallèles.
» 455, note 2, ligne 2, lire τὰ au lieu de νὰ.
» 512, figure, il faut Δ au lieu de Γ et Γ au lieu de Δ.
» 672, dernière note, lire 4 au lieu de 1.
» 871, figure, il faut Σ au lieu de Z.