Prácticas de Cálculo con wxMaxima

Escuela Politécnica de Ingeniería

GIJÓN

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

AGRADECIMIENTOS:

- A nuestos compañeros de Granada:
  J. Alaminos Prats; C. Aparicio del Prado, J. Extremera Lizana, P. Muñoz Rivas, A.R. Villena Muñoz por pasarnos su manual de wxMaxima, incluso con el código fuente y en cual nos hemos basado.

- A los traductores de la Ayuda del wxMaxima, el mejor manual existente.

- A todos los desarrolladores del Maxima que, a lo largo de los años, han ido aportando sus conocimientos de forma desinteresada.

Introducción

- Maxima una estupenda herramienta para la ayuda en los estudios de todo tipo de Ingenierías, accesible a todos los presupuestos, tanto institucionales como individuales.

- El programa nace en los años 70. Recibiría por aquel entonces el nombre de Macsyima (MAC's SYmbolic MAnipulator), del cual el MIT mandaría una copia en 1982 al `DOE (US Department Of Energy)`, uno de los organismos que aportaron los fondos económicos para el desarrollo del proyecto; esta primera versión se la conoce como DOE-Macsyima. Posteriormente, el DOE concede la licencia de explotación del programa a la empresa Symbolics, que sigue desarrollando el proyecto durante unos años. En 1992 el programa es adquirido por una empresa que se llamaría precisamente Macsyima Inc, y el programa iría perdiendo fuelle progresivamente ante la presencia en el mercado de otros programas similares como Maple o Mathematica, ambos los dos inspirados en sus orígenes por el propio Macsyima.

- Pero desde el año 1982, y hasta su fallecimiento en el 2001, William Schelter en la Universidad de Texas mantuvo una versión de este programa adaptada al estándar Common Lisp, la cual ya se conocía con el nombre de Maxima para diferenciarla de la versión comercial. En el año 1998 Schelter consiguió del DOE permiso para distribuir Maxima bajo la licencia GNU-GPL `http://www.gnu.org/licenses/gpl.html`; con este paso, muchas más personas empezaron a dirigir su mirada hacia Maxima.

- Actualmente, el proyecto es un programa escrito en lenguaje lisp que está siendo liderado por un grupo de desarrolladores originarios de varios países, asistidos y ayudados por otras muchas personas interesadas en Maxima y que mantienen un cauce de comunicación a través de una lista de través de una lista de correo `http://maxima.sourceforge.net/maximalist.html`.

- Puesto que Maxima se distribuye bajo la licencia GNU-GPL, tanto el código fuente como los manuales son de libre acceso a través de la página web del proyecto `http://maxima.sourceforge.net`

- El software libre fue definido por R. Sallman como todo aquél que garantice las suigientes libertades:

  a) Libertad para ejecutar el programa en cualquier lugar, en cualquier momento y con cualquier propósito.

  b) Libertad de estudiar cómo funciona el programa, y adaptarlo a nuestras necesidades (requisito: acceso al código fuente).

  c) Libertad para redistribuir copias a cualquier persona.

  d) Libertad para mejorar el programa y publicar las mejoras (requisito: acceso al código fuente)

- GPL: Con el fin de proteger las cuatro libertades anteriores, se impone una restricción adicional, compatible con éstas: los trabajos derivados tienen que mantener la misma licencia libre que el trabajo original. El mecanismo genérico que utilizan las licencias tipo GPL para conseguir estas garantías fue llamado *copyleft*

wxMaxima

- **wxMaxima** no es más que una interfaz gráfica de Maxima, que permite el manejo de éste de una forma visual, dando acceso a gran parte de los comandos de Maxima con el simple uso del ratón. Existen más interfaces gráficos para Maxima, pero creemos que wxMaxima es el más interesante. Puede descargarse desde su página web: `http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page`

Gijón, 28 de Junio de 2010

Tabla de contenidos

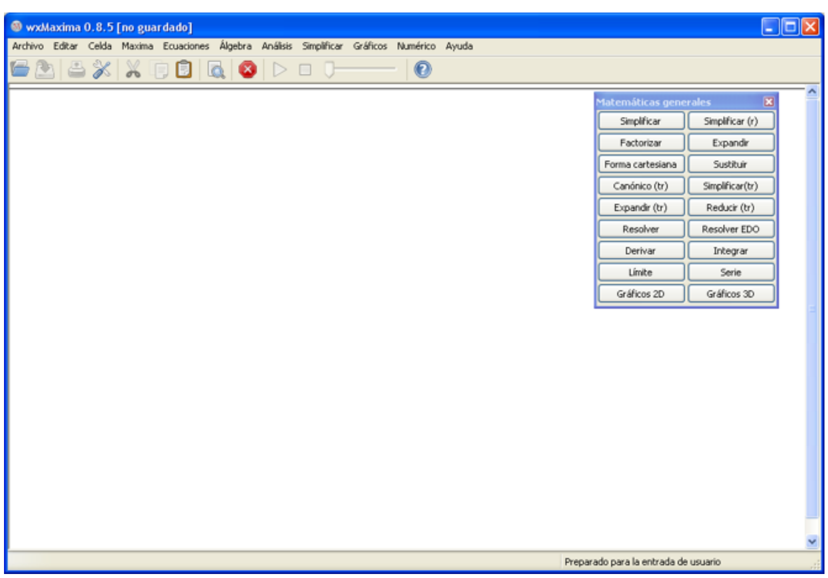
Práctica 1

Aprendiendo Maxima

1.1 Introducción

Maxima es un programa que realiza cálculos matemáticos de forma tanto numérica como simbólica, esto es, sabe tanto manipular números como calcular la derivada de una función. Sus capacidades cubren sobradamente las necesidades de un alumno de un curso de Cálculo en unos estudios de Ingeniería. Se encuentra disponible bajo licencia GNU GPL tanto el programa como los manuales del programa. A nosotros nos interesa, sobre todo, el cálculo simbólico que es el que usaremos habitualmente. Es un programa basado en comandos y, al ser éstos fácilmente olvidables, es por lo que usaremos un intérprete del programa: el WxMaxima en el que tendremos acceso a la gran mayoría de comandos que necesitaremos mediante simples clics con el ratón. Podemos encontrar WxMaxima en:
http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page

1.2 Primeros pasos con WxMaxima



Nada más abrir el programa, nos encontramos con algo parecido a la figura de arriba El panel de comandos que aparece en la parte superior derecha, lo abrimos yendo en el menú a **Maxima—>Paneles—>Matemáticas generales**. El panel es desplazable a lo largo de toda la pantalla mediante el ratón en la forma habitual de Windows. Bien, y llegó la hora de usar el programa. Veamos en primer lugar las operaciones básicas:

1.2.1 Operaciones básicas

+	Suma
*	Producto
/	Cociente
∧	Potencia
sqrt(*expr*)	raíz cuadrada de *expr*

Y pasamos a ver el manejo del programa. Simplemente pinchamos en la pantalla y efectuemos una operación básica. Por ejemplo $5 \cdot 8 + 23$ Tecleamos 5*8+23 y pulsamos a la vez MAYUSC-ENTER. Encontramos:

```
(%i1) 5*8+23;
(%o1) 63
```

De momento, no es mucho. Pero fíjese que hay una entrada (lo que se teclea) numerada con una etiqueta %i1 de entrada (indicado por la letra "i") y una etiqueta de salida, %o1 que es lo que devuelve el programa (indicado por la letra "o"). En cualquier momento, podemos referirnos a esas etiquetas para no tener que repetir lo que pone al lado.

NOTA: Para agrupar expresiones sólo se usan paréntesis, las veces que hagan falta. **Nunca se usan corchetes**, que están reservados para listas y vectores.

1.2.2 Constantes

Las constantes más usuales usadas en Cálculo, se escriben así:

%pi	El número π
%e	El número e
%i	La unidad imaginaria

1.2.3 Atajos

Si queremos referirnos a algo que ya tenemos escrito en pantalla, podemos hacerlo (aparte del consabido copiar-pegar) así, por ejemplo:

%i23	La entrada numerada con la etiqueta 23
%o12	La salida numerada con la etiqueta 12
%	La última salida

1.2.4 Resultados numéricos

Como habíamos comentado, nos interesa sobre todo el cálculo simbólico. Pero imaginemos que queremos saber una aproximación decimal de alguna operación, por ejemplo $3\sqrt{2}+25$. Tenemos tres formas fundamentales para hacerlo:

float(*número*)	Expresión decimal de *número*
número,numer	Expresión decimal de *número*
bfloat(*número*)	Expresión decimal larga de *número*

También podemos poner el programa en modo numérico. Para ello en el menú **Numérico—> Conmutar salida numérica**. Hay que acordarse de volver a cambiarlo si queremos seguir con el cálculo simbólico.

```
(%i1) float(3*sqrt(2)+25);
```

(%o1) 29.24264068711928

```
(%i2) 3*sqrt(2)+25,numer;
```

(%o2) 29.24264068711928

```
(%i3) bfloat(3*sqrt(2)+25);
```

(%o3) $2.924264068711929b1$

La última expresión indica que lo que hay antes de la "b", hay que multiplicarlo por 10 elevado al número que hay después (en este caso,1). Se puede cambiar el nº de cifras decimales en **Numérico—>Establecer precisión** (por defecto son 16 cifras decimales). Fijémosnos ahora en la salida que se pruce usando cálculo simbólico:

```
(%i4) 3*sqrt(2)+25;
```

(%o4) $3\sqrt{2}+25$

También es posible que se haya obtenido la salida así:

```
(%i6) 3*sqrt(2)+25;
```

(%o6) 3 sqrt(2) + 25

Para obtener la forma "guapa", hay que ir a **Maxima—>Cambiar pantalla 2D** y elegir "xml".

1.2.5 Funciones preconstruidas en Maxima

Maxima entiende quiénes son las siguientes funciones usuales:

`sqrt(x)`	raíz cuadrada de x
`exp(x)`	exponencial de x
`log(x)`	logaritmo neperiano de x
`sin(x), cos(x), tan(x)`	seno, coseno y tangente *en radianes*
`csc(x), sec(x), cot(x)`	cosecante, secante y cotangente *en radianes*
`asin(x), acos(x), atan(x)`	arcoseno, arcocoseno y arcotangente
`sinh(x), cosh(x), tanh(x)`	seno, coseno y tangente hiperbólicos
`asinh(x), acosh(x), atanh(x)`	arcoseno, arcocoseno y arcotangente hiperbólicos

```
(%i10) atan(1);
```

(%o10) $\frac{\pi}{4}$

```
(%i12) cos(3*%pi/4);
```

(%o12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

1.2.6 Otras funciones

!	Factorial de n
binomial(m, n)	El valor $\binom{m}{n}$
entier(x)	Parte entera de x
abs(x)	Valor absoluto de x
random(x)	Número aleatorio entre 0 y x
signum	Signo de x
$\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$	El valor máximo de $x_1, x_2, \cdots, x_n$
$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$	El valor mínimo de $x_1, x_2, \cdots, x_n$

```
(%i15) binomial(10,3);
```

(%o15) 120

```
(%i19) max(1/2, 224/87, 4,-15/4, 11/2);
```

(%o19) $\frac{11}{2}$

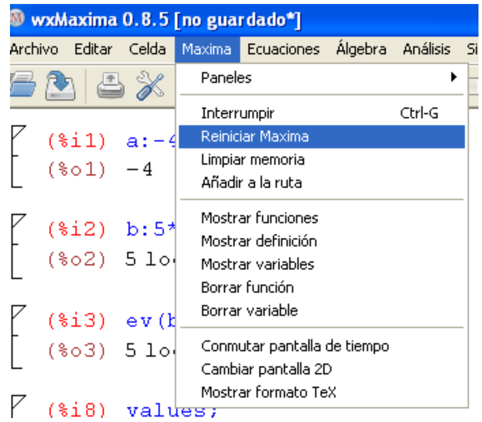
La lista de funciones es mucho más extensa y tiene muchos más parámetros que los aquí enunciados. Si fuera necesario, hay que consultar la ayuda del Maxima.

1.3 Inserccíon de texto

Podemos comentar resultados, explicaciones etc en Maxima. Para ello vamos a **Celda—>** **Nueva celda de texto** Nos inserta una celda con fondo verde-azulado donde podemos escribir. También podríamos elaborar un documento con secciones y subsecciones donde Maxima nos los numera automáticamente. Para una celda de sección, hay que ir a **Celda—>** **Nueva celda de sección**

1.4 Reinicio de Maxima

A medida que en una sesión de Maxima vamos definiendo variables, funciones, etc. no basta con borrar las celdas donde están definidas, pues continuan vigentes en memoria, pudiendo llegar a obtener resultados extraños debido a que, por ejemplo, a la variable x le habíamos dado un valor previo y no nos acordamos de vaciarla. Por eso, quizás sea conveniente hacer un reinicio de Maxima y se olvide de todo lo anterior. Para ello, vamos a **Maxima—> Reiniciar Maxima.** Luego conviene ir a **Celdas—> Evaluar todas las celdas.** También podemos limpiar memoria **Maxima—> Limpiar memoria** con parecidos resultados



1.5 Variables

En Maxima, cualquier letra es, en principio, una variable. Pero podemos definir variables más complejas mediante asignaciones que contengan números y letras. Esa asignación la hacemos mediante el símbolo ":". Las más sencillas son asignaciones numéricas, o sea, constantes en realidad.

(%i2) `a:-7;`

(%o2) -7

(%i3) `a^2+3;`

(%o3) 52

(%i4) `b:(x+3)^2;`

(%o4) $(x+3)^2$

(%i5) `b^2;`

(%o5) $(x+3)^4$

1.5.1 Evaluar letras en una variable y borrado de variables

expr, [a_1=*valor1*, a_2=*valor2*$\cdots$]	En *expr* sustituye a_1 por *valor1*, a_2 por *valor2*, $\cdots$
remvalue(a_1, a_2, $\cdots$)	Borra los valores de las variables a_1, a_2, $\cdots$
values	Muestra las variables con valor asignado.

(%i1) `a:-4;`

(%o1) -4

(%i2) `b:5*log(x)-a^2;`

(%o2) $5\log(x)-16$

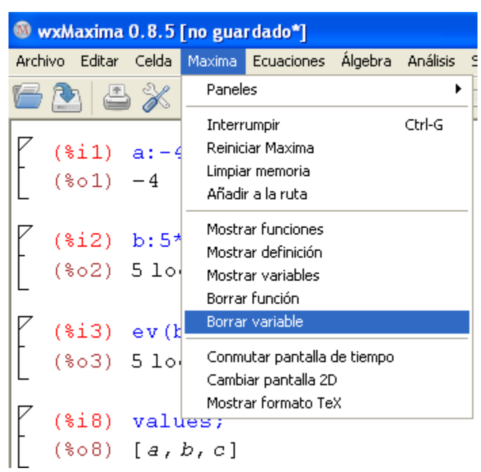
(%i3) `ev(b,x=3);`

(%o3) $5\log(3)-16$

(%i4) `b;`

(%o4) $5\log(x)-16$

Desde el menú de Maxima podemos borrar los valores de cualquier variable o incluso todas. Para ello, vamos a **Maxima —> Borrar variables** y en la ventana que nos sale escribimos los nombres de las variables a borrar, separadas por comas. Por defecto, las borra todas. También podes ver todas las variables que hay definidas, en el mismo menú en "Mostrar variables".

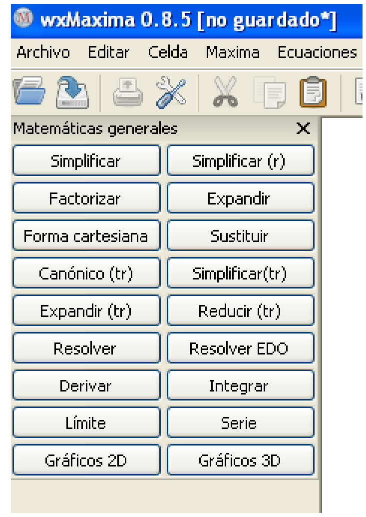


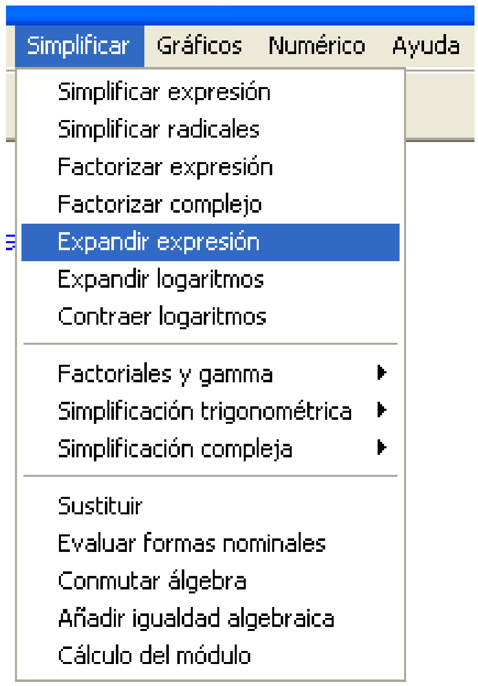
1.6 Expandir y simplificar

1.6.1 Funciones para expandir una expresión:

expand(*expr*)	Expande *expr* productos y potencias
expand(*expr*,*n*, *m*)	Expande potencias de *expr* con grado entre $-m$ y n
ratexpand(*expr*)	Expande *expr* con más eficiencia para polinomios
partfrac(*frac*,*var*))	Descompone *frac* en fracciones simples respecto de la variable *var* en una expresión racional
num(*frac*)	Numerador de *frac*
denom(*frac*)	Denominador de *frac*

Todos estos comandos, son accesibles desde el menú de Maxima en **Maxima—> Paneles—> Matemátias generales.** También desde **Maxima—>Simplificar.**
Existen muchos otros comandos de expansión y muchos parámetros para los mismos. Consulte en la ayuda de Maxima si es necesario.





(%i1) `expand((x-2)^3+(x+3)^2);`

(%o1) $x^3 - 5x^2 + 18x + 1$

(%i2) `expand((x+5)^3/(x+3)^2);`

(%o2) $$\frac{x^3}{x^2+6x+9} + \frac{15x^2}{x^2+6x+9} + \frac{75x}{x^2+6x+9} + \frac{125}{x^2+6x+9}$$

(%i3) `ratexpand((x+3)^5);`

(%o3) $x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

(%i4) `expand((x+3)^100+(x-4)^30+(x+1)^2+1/(x+7)^5+9/(x-3)^3,3,4);`

(%o4) $$\frac{9}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} + \frac{1}{(x+7)^5} + (x+3)^{100} + x^2 + 2x + (x-4)^{30} + 1$$

1.6.2 Funciones para simplificar una expresión:

`ratsimp`(*expr*)	Simplifica expresiones racionales
`fullratsimp`(*expr*)	Simplifica expresiones racionales con más eficacia a coste de más tiempo
`radsimp`(*expr*)	Simplifica expresiones con radicales, exponenciales y logaritmos
`factorial_expand`	Variable global. Si vale *true* se simplifican expresiones con factoriales. Por defecto, vale *false*

```
(%i1) p:(2*x-3)/(x^2+2);
```

(%o1) $\frac{2\,x-3}{x^2+2}$

```
(%i2) q:1/((x+3)*(2-x));
```

(%o2) $\frac{1}{(2-x)\ (x+3)}$

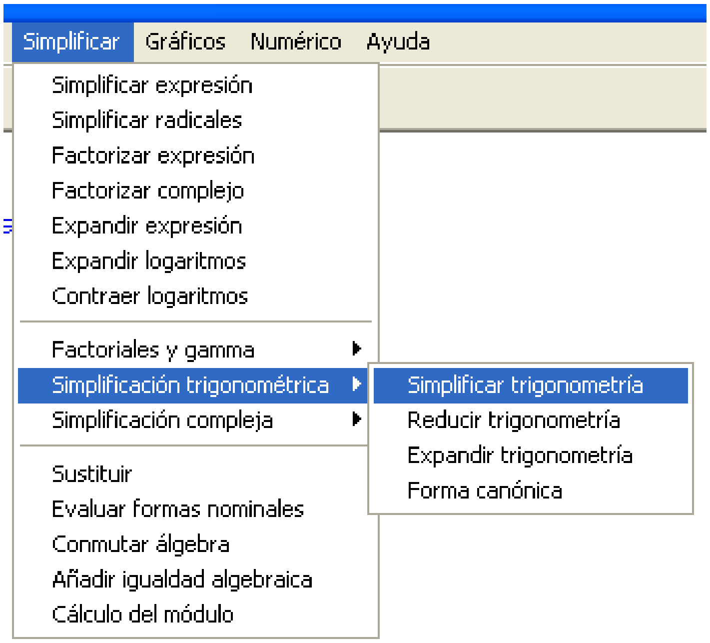
```
(%i3) ratsimp(p+q);
```

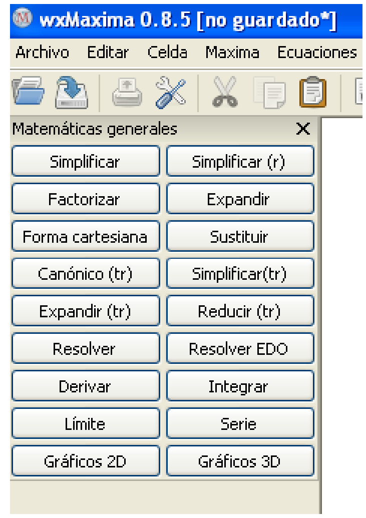
(%o3) $\frac{2\,x^3-2\,x^2-15\,x+16}{x^4+x^3-4\,x^2+2\,x-12}$

1.6.3 Expandir y simplificar expresiones trigonométricas

Para reducir o expandir expresiones trigonométricas, tenemos funciones exclusivas. Se pueden encontrar en el panel **Maxima—> Paneles—> Matemátias generales**, cuando tienen el paréntesis (tr). También desde **Maxima—>Simplificar.**

trigexpand(*expr*)	Desarrolla funciones trigonométricas e hiperbólicas
trigreduce(*expr*)	Simplifica funciones trigonométricas e hiperbólicas
trigsimp(*expr*)	Simplifica funciones trigonométricas e hiperbólicas, prefiriendo usar potencias





(%i1) `trigexpand(sin(a+b)+cos(2*a));`

(%o1) $\cos(a)\,\sin(b)+\sin(a)\,\cos(b)-\sin(a)^2+\cos(a)^2$

(%i2) `trigexpand(x*cos(2*x)*sin(a+x));`

(%o2) $x\,(\cos(a)\,\sin(x)+\sin(a)\,\cos(x))\,\left(\cos(x)^2-\sin(x)^2\right)$

(%i3) `p:cos(x)+sin(x+a)-2*sin(x)*cos(x);`

(%o3) $\sin(x+a)-2\cos(x)\,\sin(x)+\cos(x)$

(%i4) `trigreduce(p);`

(%o4) $\sin(x+a)-\sin(2\,x)+\cos(x)$

1.7 Factorización de polinomios

Si todas las raíces de un polinomio son racionales o complejas de cualquier multiplicidad, Maxima consigue factorizar ese polinomio de forma completa en $\mathbb{R}$. De otra forma, sólo factorizará la parte correspondiente que cumpla lo anterior.

factor(*expr*)	Escribe el polinomio *expr* como producto de factores más sencillos

(%i1) `factor(x^3-x^2-8*x+12);`

(%o1) $(x-2)^2\,(x+3)$

(%i2) `factor(x^6-(29*x^5)/10+(63*x^4)/20-(279*x^3)/40+(54*x^2)/5-243/40);`

(%o2) $$\frac{(2\,x-3)^3\,(5\,x+3)\,(x^2+x+3)}{40}$$

(%i3) `factor(x^5+3*x^4+3*x^3+9*x^2-10*x-30);`

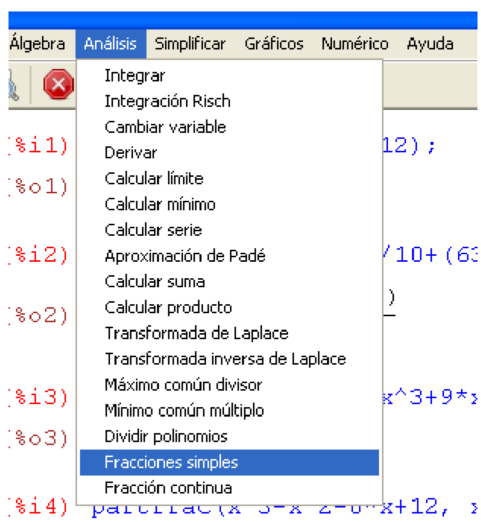
(%o3) $(x+3)\,(x^2-2)\,(x^2+5)$

Observe que el factor (x^2-2) todavía se podría factorizar en $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, que al no ser raíces racionales, Maxima no factoriza.

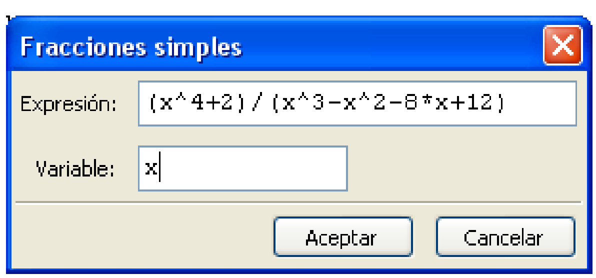
1.8 Descomposición en fracciones simples

partfrac(*expr*, *var*)	Descompone *expr* respecto de la variable *var*

Ya sabemos que si tenemos un cociente de polinomios $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, es posible descomponerlo en una parte entera (polinomio) más sumas de fracciones más simples. Maxima es capaz de hacer esto siempre que sea capaz de descomponer $Q(x)$ de forma factorial (véanse los comentarios hechos en la sección anterior). Podemos hacerlo desde el menú del Maxima en **Análisis—> Fracciones simples.**



Nos sale una ventana donde introducimos la expresión y la variable respecto a la que queremos la descomposición:



```
(%i1) partfrac((x^4+2)/(x^3-x^2-8*x+12), x);
```

(%o1) $\frac{83}{25\ (x+3)} + x + \frac{142}{25\ (x-2)} + \frac{18}{5\,(x-2)^2} + 1$

```
(%i1) x^5+3*x^4+3*x^3+9*x^2-10*x-30;
```

(%o1) $x^5 + 3\,x^4 + 3\,x^3 + 9\,x^2 - 10\,x - 30$

```
(%i2) partfrac(2*x/%i1, x);
```

(%o2) $-\frac{3\,x+5}{49\ (x^2+5)} + \frac{6\,x-4}{49\ (x^2-2)} - \frac{3}{49\ (x+3)}$

Observe que el sumando del centro aún se podría descomponer en suma de otras dos fracciones.

1.9 Listas, vectores y matrices

1.9.1 Listas

La forma que tiene Maxima de escribir listas es usando corchetes. Los elementos de una lista pueden ser números, expresiones algebraicas e incluso otras listas.

```
(%i1) listilla:[1,-3, x^2, "Paco"];
```

(%o1) $[1, -3, x^2, Paco]$

```
(%i2) milista:[-3,42,33,1,60];
```

(%o2) $[-3, 42, 33, 1, 60]$

```
(%i3) otralista:[a,b,[1,2,3],c,-5];
```

(%o3) $[a, b, [1, 2, 3], c, -5]$

first, second, $\cdots$, last	Primer, segundo,...., último elemento de una lista
lista[k]	k-ésimo elemento de la lista
sort	Ordena los elementos de una lista
length	longitud de la lista

(%i5) `sort(listilla);`

(%o5) $[-3, 1, Paco, x^2]$

(%i6) `listilla(4);`

(%o6) $Paco$

(%i7) `length(otralista);`

(%o7) 5

(%i8) `third(otralista);`

(%o8) $[1, 2, 3]$

También podemos construir una lista a partir de una fórmula:

makelist(*expr, var, n, m*)	Construye una lista variando la variable *var* desde n hasta m con la expresión *expr*

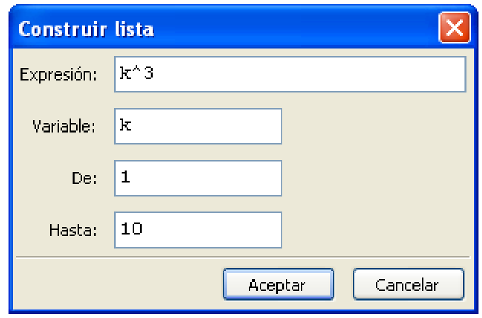
(%i1) `makelist(k^3,k,1,10);`

(%o1) $[1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000]$

(%i2) `makelist(sin(p^2*x),p,3,8);`

(%o2) $[\sin(9\,x), \sin(16\,x), \sin(25\,x), \sin(36\,x), \sin(49\,x), \sin(64\,x)]$

La primera lista representa los cubos de los 10 primeros números. Como casi todo, se puede construir una lista desde el menú del Maxima, yendo a **Algebra—>Construir lista**. Nos aparece una ventana donde introducimos los datos



1.9.2 Vectores

Una lista, también podemos considerar que es un vector. En tal caso, podemos efectuar las operaciones habituales: suma, producto por un escalar y producto escalar.

NOTA: Para el producto escalar, debemos utilizar "." Si utilizamos " * " nos multiplica término a término (y no lo suma)

(%i1) `p:[-2,3,5];`

(%o1) $[-2,3,5]$

(%i2) `q:[a,3,-4];`

(%o2) $[a,3,-4]$

(%i3) `s:[-1,7,2/3];`

(%o3) $[-1,7,\frac{2}{3}]$

(%i4) `p.s;`

(%o4) $\frac{79}{3}$

(%i5) `p+q;`

(%o5) $[a-2,6,1]$

(%i6) `5*p;`

(%o6) $[-10,15,25]$

(%i7) `p*s;`

(%o7) $[2,21,\frac{10}{3}]$

```
(%i8) sqrt(p.p);
```

(%o8) $\sqrt{38}$

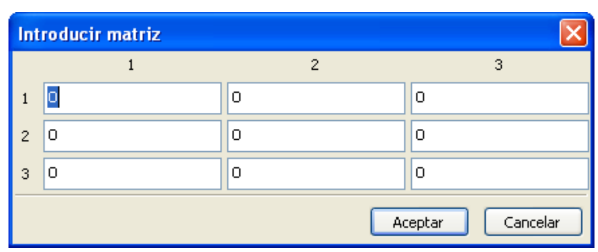
La última expresión, sería la forma de calcular el módulo de p.

1.9.3 Matrices

Para definir una matriz, lo hacemos con el comando *matrix()* cuyo argumento es una serie de listas, cada una de ellas representa una fila de la matriz.

matrix(*fila1, fila2,* $\cdots$)	Definir la matriz
rank(*matriz*)	Calcula el rango de la matriz
determinant(*matriz*)	Calcula el determinante de la matriz
invert(*matriz*)	Calcula la matriz inversa.

Podemos efectuar todas las operaciones habituales sobre matrices: sumas, producto por escalares y producto (usando "**.**")
Existen gran cantidad de comandos para matrices, además de los expuesto anteriormente. Consulte la ayuda de Maxima si fuera necesario. Por supuesto, se puede definir una matriz desde el menú de Maxima, en **Algebra—>Introducir matriz**




```
(%i1) A:matrix([1/2,-3/5,2],[0,-1,2/5],[-2,3,-6]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & -1 & \frac{2}{5} \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

```
(%i2) B:matrix([-2,3/5,-2],[-1,-1/5,2],[-3/2,2,-4]);
```

(%o2) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{5} & -2 \\ -1 & -\frac{1}{5} & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -4 \end{pmatrix}$

```
(%i3) C:matrix([-1,0,a],[2,-a,2],[2,-2,a]);
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & -a & 2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

```
(%i4) [A.B, A+C,3*A];
```

(%o4) $$\left[\begin{pmatrix} -\frac{17}{5} & \frac{221}{50} & -\frac{51}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 & -\frac{18}{5} \\ 10 & -\frac{69}{5} & 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & a+2 \\ 2 & -a-1 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & a-6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{5} & 6 \\ 0 & -3 & \frac{6}{5} \\ -6 & 9 & -18 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i6) [determinant(B),determinant(C),determinant(A)];
```

(%o6) $$\left[\frac{34}{5}, a^2 + a\,(2\,a-4) - 4, -\frac{28}{25}\right]$$

```
(%i7) rank(B);
```

(%o7) 3

1.10 Ejercicios

1º) Calcule $1+\frac{1}{9}+3^{2+4}$ (Sol: $\frac{6571}{9}$)

2º) Calcule $\sqrt{4+\sqrt{144}}+\sqrt[3]{27}$ (Sol: 7)

3º) Calcule $(\sqrt{1+\sqrt{4}}+\sqrt{2})$ (Sol: $\sqrt{3}+\sqrt{4}$)

4º) Calcule $e^{\pi i}$ (Sol: -1)

5º) Dé una expresión decimal aproximada de $\sqrt[5]{\pi}$ (Sol: 1.257274115669185)

6º) Calcule $sen(\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{2})+\ln(e^4)$ (Sol: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+4$)

7º) Calcule $\operatorname{arctg}(1)+\arccos(-1)$ (Sol: $\dfrac{5\pi}{4}$)

8º) Asigne al símbolo *pepe* el valor de 10! y calcular $\dfrac{pepe}{95!}$ (Sol: 9034502400).

9º) Sustituya en la expresión $pepe+cos^2(x)+sen^2(x^2)$ la variable x por 0 (Sol: 9034502401). Anular la asignación al símbolo pepe.

10º) Sustituir en la expresión $(x+y)^2-x^3$ la variable "x" por 1 y la variable "y" por -1

11º) Simplifique la expresión $(x+y)(x-y)-x^2$ (Sol: $-y^2$)

12º) Factorice el polinomio $-1-x+x^2+x^3$.

13º) Factorice $6x^4-11x^3-64x^2+99x+90$

14º) Escriba $\operatorname{sen}(5x)\cos(3x)$ en función de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$

15º) Descomponga en fracciones simples: $\dfrac{x^2-4}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$

16º) Construya, con `makelist`, una lista con los 30 primeros números impares y de manera que vayan alternado de signo. columna.

Práctica 2

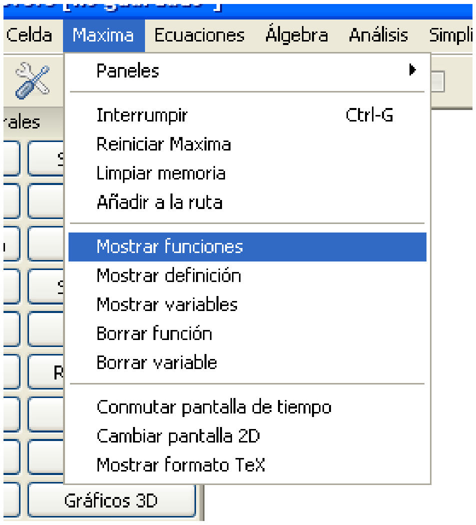
Funciones. Representaciones gráficas. Ecuaciones. Límites y continuidad

2.1 Funciones

Para definir funciones, usaremos principalmente el símbolo " := ". Podemos definir funciones de cualquier nº de variables y cualquier nº de componentes (funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$). Pero, a nosotros, nos interesan las funciones reales de una variable.

funcion(var1,var2,..)`:=(`*expr1,expr2*`,...)`	definición de función
`define (`*func,expr*`)`	la función vale *expr* (forma alternativa de definir una función)
`fundef(`*func*`)`	devuelve la definición de la función
`functions`	lista de funciones definidas por el usuario
`remfunction(`*func1,func2*`,...)`	borra las funciones

Desde el menú de Maxima, podemos hacer cómodamente: ver qué funciones hay definidas, ver sus definiciones, borrar funciones que hayamos definido previamente, etc. Para ello, vamos a **Maxima—>** y allí elegimos en el menú desplegable lo que más nos interese



(%i1) `f(x):=x^2*sin(2*x);`

(%o1) $\mathrm{f}(x) := x^2 \sin(2\,x)$

(%i2) `g(x):=%e^(x+4);`

(%o2) $\mathrm{g}(x) := e^{x+4}$

(%i3) `g(2);`

(%o3) e^6

(%i4) `f(g(x));`

(%o4) $e^{2\,(x+4)} \sin\left(2\,e^{x+4}\right)$

(%i10) `f(p-2);`

(%o10) $\sin(2\,(p-2))\,(p-2)^2$

(%i6) `g(f(x));`

(%o6) $e^{x^2 \sin(2\,x)+4}$

Preguntamos a Maxima la definicióm de f(x):

(%i9) `fundef(f);`

(%o9) $\mathrm{f}(x) := x^2 \sin(2\,x)$

Ahora borramos las funciones f y g:

```
(%i11) remfunction(f, g);
```

(%o11) $[f, g]$

```
(%i13) f(x);
```

(%o13) $\mathrm{f}(x)$

Ya no sabe quién es f. Ahora definimos una función de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Observemos que se hace mediante una lista

```
(%i18) f(x,y):=[2*x+2,x^2-y, 3*x^-2*y];
```

(%o18) $\mathrm{f}(x, y) := [2x + 2, x^2 - y, 3x^{-2}y]$

```
(%i20) f(-2,3);
```

(%o20) $[-2, 1, \frac{9}{4}]$

NOTA: Las funciones trabajan sobre listas, devolviendo una lista con la imagen de cada elemento de la lista inicial.

```
(%i1) lista:[1,-3,0,4];
```

(%o1) $[1, -3, 0, 4]$

```
(%i2) f(x):=x^2+2;
```

(%o2) $\mathrm{f}(x) := x^2 + 2$

```
(%i3) f(lista);
```

(%o3) $[3, 11, 2, 18]$

2.1.1 Gráfica de una función

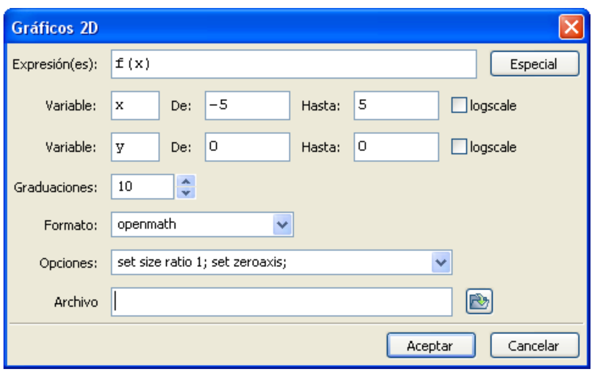
Podemos representar gráficamente una función función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Para ello, usamos los comandos:

plot2d(f(x), [x,a,b])	Dibuja la gráfica de $f(x)$ en $[a, b]$
plot2d([f(x), g(x), $\cdots$], [x,a,b])	Dibuja, en la misma ventana, las gráficas de f(x), g(x), $\cdots$ en $[a, b]$

Veremos más adelante otros comandos para representaciones gráficas. Lo mejor, es hacerlo desde el menú de Maxima **Gráficos—>Gráficos2D** Cuando pulsamos el botón Gráficos 2D, aparece una ventana de diálogo con varios campos que podemos completar o modificar:

a) Expresión(es). La función o funciones que queramos dibujar. Por defecto, *wxMaxima* rellena este espacio con % para referirse a la salida anterior.

b) Variable x. Aquí establecemos el intervalo de la variable x donde queramos representar la función.



c) Variable y. Ídem para acotar el recorrido de los valores de la imagen.

d) Graduaciones. Nos permite regular el número de puntos en los que el programa evalúa una función para su representación en polares. Veremos ejemplos en la sección siguiente.

e) Formato. *Maxima* realiza por defecto la gráfica con un programa auxiliar. Si seleccionamos `en línea`, dicho programa auxiliar es *wxMaxima* y obtendremos la gráfica en una ventana alineada con la salida correspondiente. Hay dos opciones más y ambas abren una ventana externa para dibujar la gráfica requerida: `gnuplot` es la opción por defecto que utiliza el programa *Gnuplot* para realizar la representación; también está disponible la opción `openmath` que utiliza el programa *XMaxima*. Prueba las diferentes opciones y decide cuál te gusta más.

f) Opciones. Aquí podemos seleccionar algunas opciones para que, por ejemplo, dibuje los ejes de coordenadas ("`set zeroaxis;`"); dibuje los ejes de coordenadas, de forma que cada unidad en el eje Y sea igual que el eje X ("`set size ratio 1; set zeroaxis;`"); dibuje una cuadrícula ("`set grid;`")

g) Gráfico al archivo. Guarda el gráfico en un archivo con formato Postscript.

NOTA: El prefijo *wx* añadido a `plot2d` o a cualquiera del resto de las órdenes que veremos más adelante (`plot3d, draw2d, draw3d`) hace que *wxMaxima* pase automáticamente a mostrar los gráficos en la misma ventana y no en una ventana separada. Es lo mismo que seleccionar `en línea`

(%i1) `f(x):=x^3+3*x+1;`

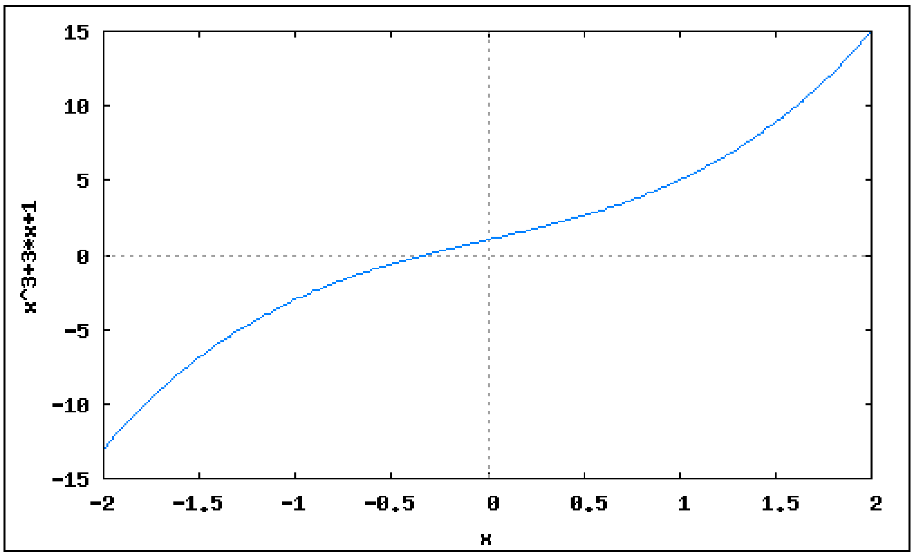
(%o1) $f(x) := x^3 + 3x + 1$

(%i2) `g(x):=%e^x-x;`

(%o2) $g(x) := e^x - x$

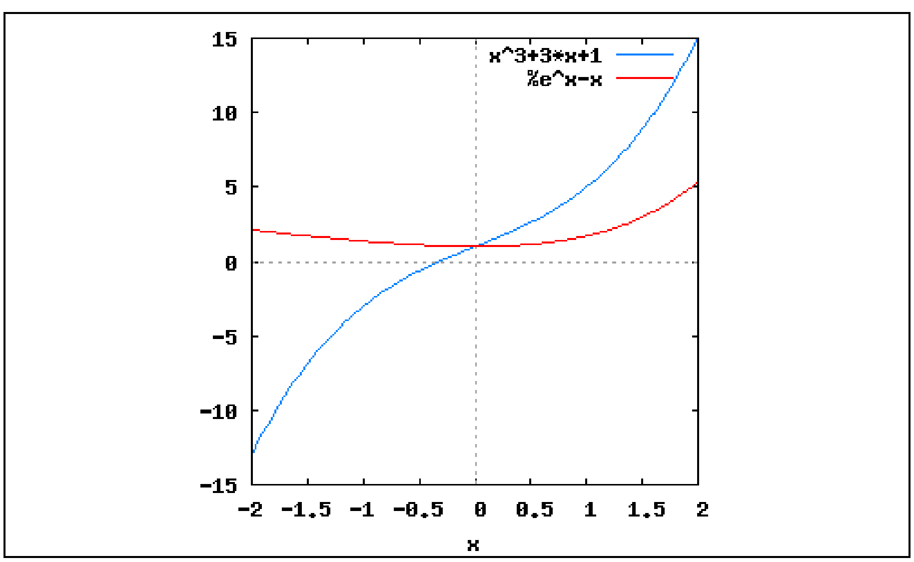
(%i3) `wxplot2d([f(x)], [x,-2,2]);`

(%t3)



(%i4)
```
wxplot2d([f(x),g(x)], [x,-2,2],
 [plot_format, gnuplot],
 [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])$
```

(%t4)



2.1.2 Funciones definidas a trozos

Mediante el comando:

if condiciones *then* expr1 *else* expr2

Podemos definir funciones del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } \leq 1 \\ 5x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

```
(%i1)  f(x):=if x<=1 then 3*x^2-1 else 5*x-4;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \mathrm{if} x <= 1 \mathrm{then} 3 x^2 - 1 \mathrm{else} 5 x - 4$

Vemos que no nos escribe la expresión. Maxima no trabaja bien con este tipo de funciones, con lo que casi es preferible trabajar con los trozos por separado. No obstante, puede valorar puntos y se pueden representar gráficamente.

```
(%i2)  p:0;
```

(%o2) 0

```
(%i3)  [f(-2),f(4),f(p)];
```

(%o3) $[11, 16, -1]$

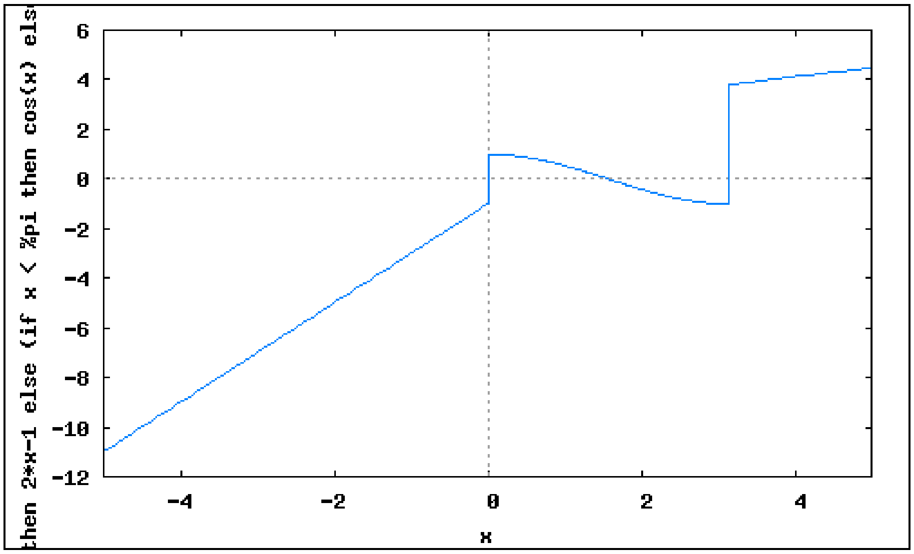
Si la función tiene más de dos trozos, tendríamos que anidar expresiones *if*.
Por ejemplo, para escribir:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ \sqrt{3x+5} & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

```
(%i1)  g(x):=if x<=0 then 2*x-1
       else
       if x<%pi then cos(x) else sqrt(3*x+5);
```

(%o1) $\mathrm{g}(x) := \mathrm{if} x <= 0 \mathrm{then} 2 x - 1 \mathrm{elseif} x < \pi \mathrm{then} \cos(x) \mathrm{else} \sqrt{3 x + 5}$

```
(%i2) wxplot2d([g(x)], [x,-5,5])
```

(%t2) 

2.2 Gráficos con draw

Además del comando Plot2d, tenemos el módulo `draw`. Es reciente en Maxima y hay que cargarlo previamente. Para ello, ponemos la orden:

```
(%i1) load(draw);
```

(%o1) $d : /ARCHIV\ 1/MAXIMA\ 1.1/share/maxima/5.21.1/share/draw/draw.lisp$

draw2d(*opciones, Objeto gráfico*)	Dibuja *gráfico* en 2 dimensiones
draw3d(*opciones, Objeto gráfico*)	Dibuja *gráfico* en 3 dimensiones

2.2.1 Opciones locales

Son las opciones de los comandos anteriores propias de cada gráfica, pueden ser:

color: El color de la gráfica.

line_width: Grosor con el que se dibujan las líneas. Por defecto, vale 1.

2.2.2 Opciones globales

Las comunes a todas las gráficas que van a dibujarse en una misma ventana

nticks: El nº de puntos para dibujar la gráfica. Por defecto son 30.

xaxis, yaxis: Si sus valores son *true*, se dibujan los ejes

xlabel, ylabel: Las etiquetas para cada eje.

xrange, yrange: Rango de las variables.

key: Leyenda con la que se identifica la gráfica.

xrange, yrange: Rango de las variables. Es una opción global que se pone al final y se impone al rango que se pone en *gráfico.*

title: El título de la ventana.

user_preamble= El valor dado a esta opción debe ser una cadena alfanumérica o una lista de cadenas (una por línea). La más importante es "set size ratio 1" (escrito así, con comillas) para igualar la longitud de las unidades en ambos ejes.

2.2.3 Objeto gráfico

El *Objeto gráfico* que aparece en los comandos, puede ser:

explicit(expr, var, a, b): Para una función explícita, de variable *var*, definida en $[a, b]$.

parametric(expr1, expr2, param, a, b) : Para la curva en paramétricas $x = expr1$; $y = expr2$, respecto del parámetro *param*, variando éste en $[a, b]$

implicit(expr, var1, a, b, var2, c, d): Para una ecuación implícita, de variables *var1* y *var2*, variando éstas en $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente.

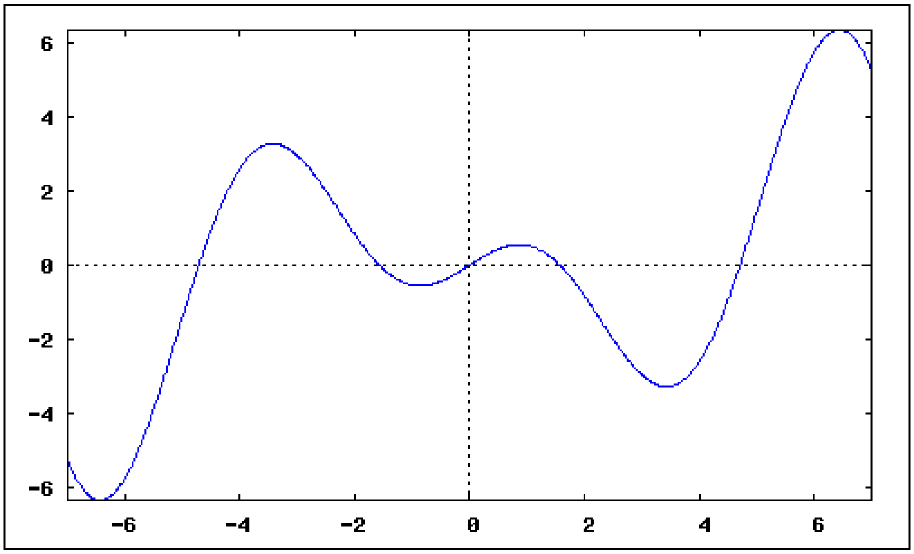
NOTA: Como siempre, si ponemos wxdraw2d, la gráfica nos la pone en el documento y no en una ventana aparte.

```
(%i1)   load(draw);
```

(%o1) $d : /ARCHIV\ 1/MAXIMA\ 1.1/share/maxima/5.21.1/share/draw/draw.lisp$

(%i2)
```
draw2d(color=blue,
nticks=100,
line_width=1.5,
xaxis=true, yaxis=true,
explicit(x*cos(x),x,-7,7));
```

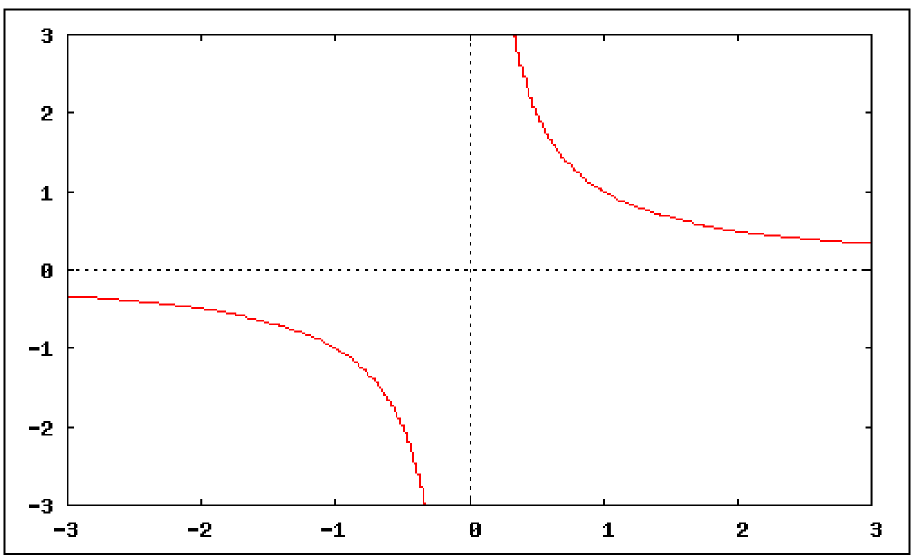
(%t2)



(%o2) [gr2d $(explicit)$]

(%i3)
```
draw2d(
color=red,
nticks=100,
xaxis=true, yaxis=true,
line_width=1.5,
implicit(x*y=1,x,-3,3,y,-3,3)
);
```

(%t3)

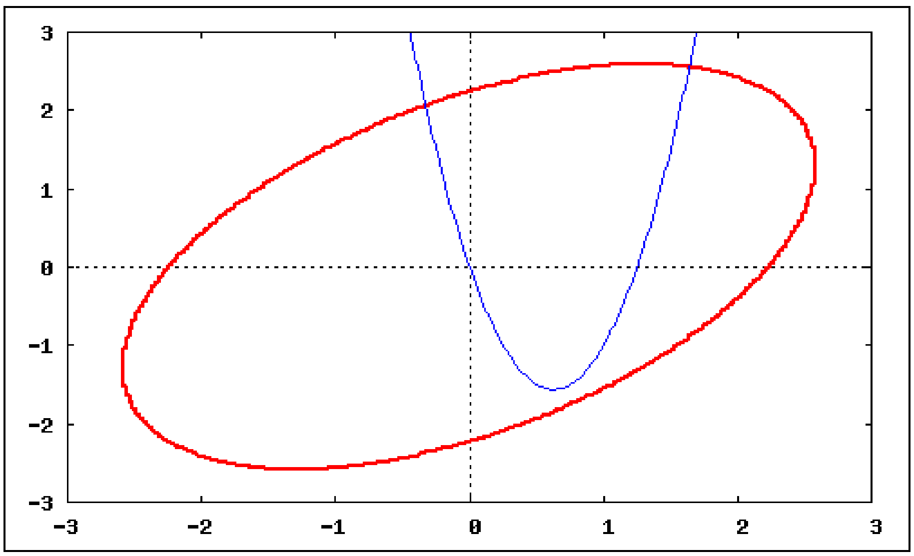


(%o3) [gr2d $(implicit)$]

Se pueden poner varias gráficas en la misma ventana:

(%i4)
```
draw2d(
xaxis=true, yaxis=true,
color=red,
nticks=100,
line_width=2.5,
implicit(x^2+y^2-x*y=5,x,-3,3,y,-3,3),
color=blue,
nticks=100,
line_width=1.5,
explicit(4*x^2-5*x,x,-3,3),
xrange=[-3,3],yrange=[-3,3]
);
```

(%t4)



(%o4) [gr2d $(implicit, explicit)$]

Para más opciones, consulte la ayuda del Maxima.

2.2.4 Representaciçon gráfica de puntos

Muy brevemente, primero creamos dos listas: *lista1* y *lista1* la primera con las x de los puntos y la segunda con las y.
Luego aplicamos el comando `draw2d` como en el siguiente ejemplo:

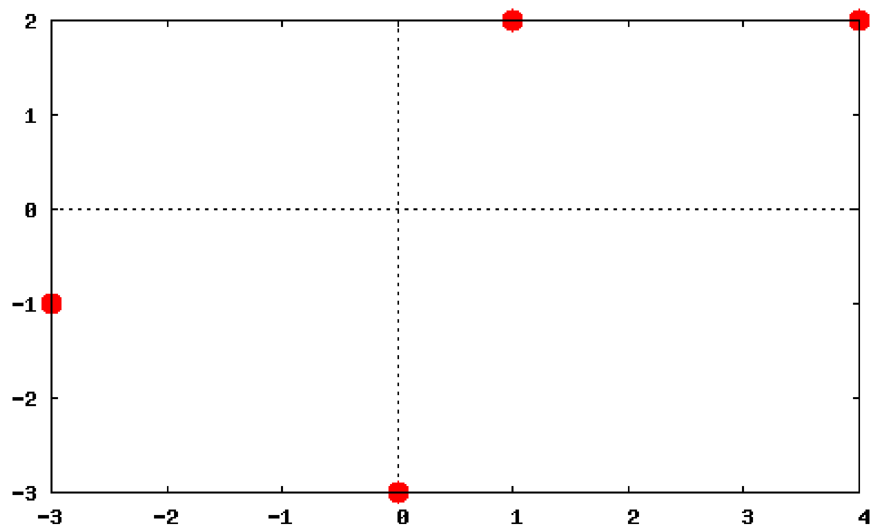
(%i2) `lista1:[1,0,-3,4];`

(%o2) $[1, 0, -3, 4]$

(%i3) `lista2:[2,-3,-1,2];`

(%o3) $[2, -3, -1, 2]$

```
(%i4)   wxdraw2d(
        xaxis=true, yaxis=true,
        color=red,
        point_type=filled_circle,
        point_size=2,
        points(lista1,lista2));
```

(%t4) 

(%o4) [gr2d (*points*)]

Las opciones más usuales para `point_type` son: asterisk (3), square (4), filled_square (5), circle (6), filled_circle (7)

Que se pueden referir por el nombre (como en el ejemplo anterior) o por el índice (indicado en la línea anterior).

2.3 Resolución de ecuaciones y sistemas

Para resolver ecuaciones, disponemos de los siguientes comandos

solve(*ecuación, variable*)	Resuelve *ecuación* respecto a la variable *variable*
solve([*ecuaciones*], [*variables*])	Resuelve el sistema *[ecuaciones]* respecto a las variables *[variables]*
multiplicities	Indica la multiplicidad de las variables
algsys([*ecuaciones*], [*variables*])	Como solve, pero intenta encontrar soluciones numéricas si no las encuentra exactas
realonly	Variable binaria *true o false* que suprime las soluciones complejas y sólo muestra las reales cuando se usa algsys

Los corchetes, como siempre, indican que deben introducirse listas. Si introducimos una expresión sin el signo "=", Maxima resuelve esa expresión igualada a 0.

```
(%i2) solve(x^3-3*x^2+2+x+3,x);
```

(%o2) $[x = 2 - i, x = i + 2, x = -1]$

```
(%i3) p:x^6+5*x+2=0;
```

(%o3) $x^6 + 5x + 2 = 0$

```
(%i4) solve(p,x);
```

(%o4) $[0 = x^6 + 5x + 2]$

Sólo hay algorítmos para resolver ecuaciones hasta de cuarto grado. Solve no puede resolver esta ecuación de 6º grado. Probemos con algsys:

```
(%i6) algsys([p],[x]);
```

(%o6) $[[x = 1.186276552801695 - 0.81650645430775\, i], [x = 0.81650645430775\, i + 1.186276552801695], [x = -1.326589095774212\, i - 0.34579930206313], [x = 1.326589095774212\, i - 0.34579930206313], [x = -1.280125055828495], [x = -0.40082947060259]]$

Vemos que obtiene numéricamente las 6 soluciones. Tomemos sólo las soluciones reales:

```
(%i9) realonly:true;
```

(%o9) $true$

```
(%i10) algsys([p],[x]);
```

(%o10) $[[x = -0.40082947060259], [x = -1.280125047366427]]$

Resolvamos ahora un sistema:

```
(%i11) solve([x^2-y^2=3,2*x+y^3=1],[x,y]);
```

(%o11) $[[x = 2.315724815724816, y = -1.537068965517241], [x = -2.512135922330097, y = 1.819567354965585]]$

2.3.1 Sistemas lineales

La resolución de sistemas lineales, se puede hacer con `solve`. Pero, en este caso, se dispone de un comando más eficiente que funciona como `solve`:

linsolve([*ecuaciones*], [*variables*])	Resuelve el sistema lineal*[ecuaciones]* respecto a las variables *[variables]*

```
(%i1) p:[3*x+5*y-4*z=1,x+2*y+3*z=-2,-4*x+y-3*x=4];
```

(%o1) $[-4\,z+5\,y+3\,x=1,3\,z+2\,y+x=-2,y-7\,x=4]$

```
(%i2) linsolve(p,[x,y,z]);
```

(%o2) $[x=-\frac{97}{174},y=\frac{17}{174},z=-\frac{95}{174}]$

No hay problema cuando hay infinitas soluciones:

```
(%i3) p:[x+y+3*z=1, 3*x+5*y-z=2, -x-3*y+7*z=0];
```

(%o3) $[3\,z+y+x=1,-z+5\,y+3\,x=2,7\,z-3\,y-x=0]$

```
(%i4) linsolve(p,[x,y,z]);
```

solve: dependent equations eliminated: (1)

(%o4) $[x=-\frac{16\,\%r1-3}{2},y=\frac{10\,\%r1-1}{2},z=\%r1]$

En este caso sólo 2 ecuaciones son linealmente independientes y habrá infinitas soluciones. Maxima llama %r1 al parámetro, que nosotros llamaríamos t o λ normalmente.

2.3.2 Soluciones aproximadas

En caso de intervenir ecuaciones con exponenciales, trigonométricas, logarítmicas, etc., el problema se complica notablemente. Por ejemplo, intentemos resolver:

$$e^x+1=\mathrm{tg}(x)$$

```
(%i1) q:e^x+1=tan(x);
```

(%o1) $e^x+1=\tan(x)$

```
(%i2) solve (q,x);
```

(%o2) $[\tan(x)=e^x+1]$

```
(%i3) algsys([q],[x]);
```

(%o3) $[\,]$

Ni `solve` ni `algsys` pueden resolverla. Aquí, todo lo más que podemos hacer es ayudar un poco a Maxima. Para ello, nos basamos en el Teorema de Bolzano. Comencemos por definir y dibujar la función:

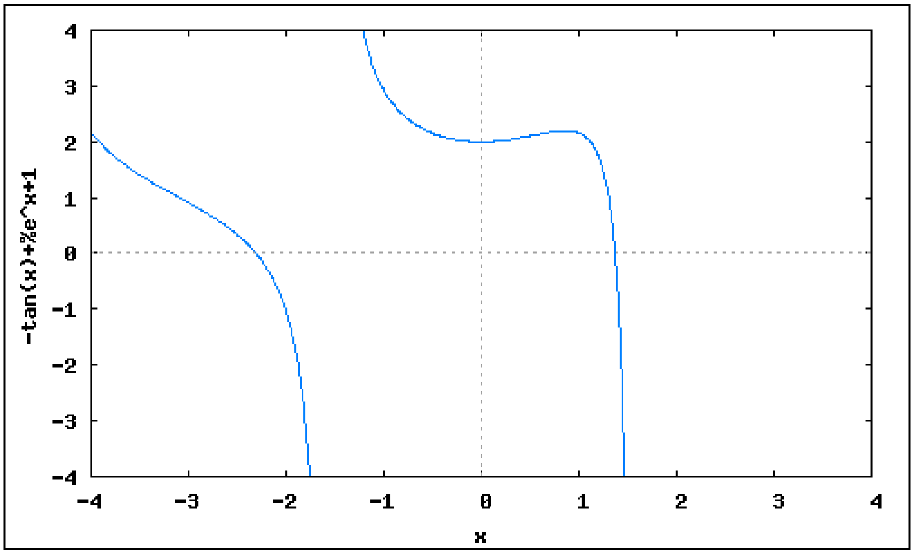
```
(%i4)  f(x):=%e^x+1-tan(x);
```

(%o4) $\mathrm{f}(x) := e^x + 1 - \tan(x)$

```
(%i5)  wxplot2d(f(x),[x,-4,4],[y,-4,4]);
```

plot2d: some values were clipped.

(%t5)



Vemos que hay una raíz comprendida entre 1 y 1.5 (hay que buscar dos puntos en que f tenga distinto signo). Entonces usamos el comando:

find_root(*f(x)*, *x*, *a*, *b*)	Resuelve $f(x) = 0$ en $[a, b]$

```
(%i6)  find_root(f(x),x,1,1.5);
```

(%o6) 1.371045106423148

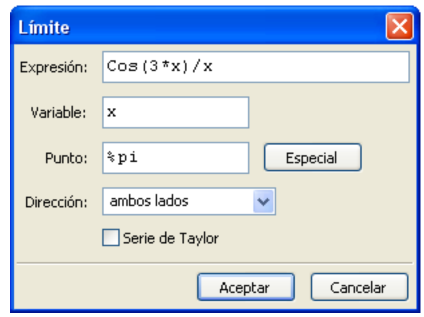
Podríamos buscar más soluciones encontrando otros 2 valores en los que f cambie de signo. Por ejemplo, vemos que entre -2.5 y -2 hay otra raíz:

```
(%i2)  find_root(f(x),x,-2.5,-2);
```

(%o2) -2.308896144806409

2.4 Límites

El cálculo de límites se realiza con la orden `limit`. Con ella podemos calcular límites de funciones o de sucesiones en un número, en $+\infty$ o en $-\infty$. También podemos usar el menú **Análisis→Calcular límite**. Ahí podemos escoger, además de a qué función le estamos calculando el límite, a qué tiende la variable incluyendo los valores especiales como π, e o infinito. Además de esto, también podemos marcar si queremos calcular únicamente el límite por la derecha o por la izquierda en lugar de la opción por defecto que es por ambos lados.



`limit`*(expr,x,a)*	$\lim_{x\to a} expr$
`limit`*(expr,x,a, plus)*	$\lim_{x\to a^+} expr$
`limit`*(expr,x,a, minus)*	$\lim_{x\to a^-} expr$
`tlimit`*(expr,x,a, minus)*	Como `limit` pero calcula el límite con desarrollos de Taylor
`minf`	$-\infty$
`und`	Indefinido
`ind`	Indefinido pero acotado

```
(%i1) f(x):=((x+1)/x)^(x+7);
```

(%o1) $f(x) := \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+7}$

```
(%i2) limit(f(x), x, inf);
```

(%o2) e

```
(%i3) g(x):=abs(x)/x;
```

(%o3) $g(x) := \frac{|x|}{x}$

```
(%i4) limit(g(x), x, 0);
```

(%o4) und

Nos da indeterminado pero acotado. Veamos sus limites laterales

```
(%i5) [limit(g(x), x, 0, plus),limit(g(x), x, 0, minus)];
```

(%o5) $[1, -1]$

Vamos que el límite por la derecha vale 1 y por la izquierda -1.

Supongamos ahora la función:

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2}{2x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{y queremos: } \lim_{x\to 0} f(x)$$

Si definimos la función a trozos con el Maxima, obtenemos:

```
(%i1) f(x):=if x<0 then sin(x^2)/(2*x^2) else (1-cos(x))/x^2;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \mathrm{if} x < 0 \mathrm{then} \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \mathrm{else} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

```
(%i2) limit(f(x), x, 0);
```

(%o2) $\lim_{x\to 0} \mathrm{if} x < 0 \mathrm{then} \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \mathrm{else} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

```
(%i3) limit(f(x), x, 0, minus);
```

(%o3) $\lim_{x\to 0-} \mathrm{if} x < 0 \mathrm{then} \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \mathrm{else} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Como vemos, no es capaz de calcular el límite ni el límite por la izquierda (por la derecha tampoco sabría). Entonces tenemos que hacerlo nosotros con cada trozo:

```
(%i4) limit(sin(x^2)/(2*x^2), x, 0, minus);
```

(%o4) $\frac{1}{2}$

```
(%i5) limit((1-cos(x))/x^2, x, 0, plus);
```

(%o5) $\frac{1}{2}$

Al coincidir los límites laterales, concluimos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

2.5 Continuidad

El estudio de la continuidad de una función es inmediato una vez que sabemos calcular límites. Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in A$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Conocido el valor de la función en el punto, la única dificultad es, por tanto, saber si coincide o no con el valor del límite.
Con respecto a las funciones discontinuas, la gráfica puede darnos una idea del tipo de discontinuidad.

2.6 Ejercicios

1) Defina la función $f(x) := e + x + x^{10}$ y calcular $f(1/2)$ (Sol: $\sqrt{2} + 32 + e$)

2) Construya las funciones compuestas $f \circ g$ en los casos: siguientes:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = 1 - x^2$

b) $f(u) = \dfrac{u-1}{u+1}$; $g(u) = \dfrac{u+1}{1-u}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \operatorname{tg} x$

3) Calcule los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(x+6)\left(\frac{\pi x+2}{4x+1}\right)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} - 2}{x^4}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ con $n \in \mathbb{N}$

4) Estudie la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x * \ln|x|$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

5) Represente en una misma gráfica las funciones seno y coseno en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Utilice las opciones adecuadas para que una de las funciones se represente en azul y otra en rojo y, además, tengan grosores distintos.

6) Sean a y b dos números reales verificando $b < 0 < a$; estudie el comportamiento en cero de la función

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

7) Estudie la continuidad de la función $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ con $x \neq 1$, así como su comportamiento en 1, $+\infty$ y $-\infty$.

8) Represente la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x+1} & \text{si } 0 \le x < 10 \\ \log(1+x^2) & \text{si } x \ge 10 \end{cases}$$

9) Represente la curva $f(x) = \cos(x)^2 - x\ \operatorname{sen}(x)^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y sobre ella 5 puntos cuyo tamaño y color debe elegir ud. ¿Sabría hacer lo mismo con 8 puntos elegidos aleatoriamente?

Sugerencia: Defina la curva como $f(x)$ y consulte la sección 2.2.4 para dibujar puntos. Para los 8 puntos aleatorios use:

```
lista1:makelist([-%pi+2*%pi*random(1.0)],k,1,8); lista2:f(lista1);
```

Práctica 3

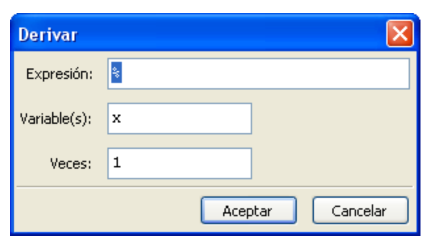
Derivación. Aplicaciones de la derivada. Polinomios de Taylor

3.1 Derivadas

Para calcular la derivada de una función real de variable real, una vez definida, por ejemplo, como $f(x)$, se utiliza el comando `diff` que toma como argumentos la función a derivar, la variable con respecto a la cual hacerlo y, opcionalmente, el orden de derivación.

`diff(`*expr*`,`*variable*`)`	derivada de *expr* respecto de *variable*
`diff(`*expr*`,`*variable*`,`*n*`)`	derivada n-ésima de *expr* respecto de *variable*

A este comando también podemos acceder a través del menú **Análisis**→**Derivar** o a través de la paleta de herramientas. Aparece una ventana de diálogo con varios datos a rellenar; a saber:



a) Expresión. Por defecto, *wxMaxima* rellena este espacio con % para referirse a la salida anterior. Si no es la que nos interesa, la escribimos directamente nosotros.

b) Variable(s). Se refiere a la variable respecto a la cual vamos a derivar.

c) Veces. Se refiere al orden de derivación.

NOTA: Si definimos una función y luego queremos derivarla, debemos hacerlo con `define` y no con := por si queremos luego evaluar la derivada en un punto.

(%i1) `diff(x^2*sin(3*x),x);`

(%o1) $2\,x\sin(3\,x) + 3\,x^2\cos(3\,x)$

```
(%i2) f(x):=(x+sin(x^2))/(2*x+3);
```

(%o2) $\mathrm{f}(x) := \dfrac{x+\sin(x^2)}{2x+3}$

```
(%i3) define(df(x),diff(f(x),x));
```

(%o3) $\mathrm{df}(x) := \dfrac{2x\cos(x^2)+1}{2x+3} - \dfrac{2\,(\sin(x^2)+x)}{(2x+3)^2}$

```
(%i4) df(2);
```

(%o4) $\dfrac{4\cos(4)+1}{7} - \dfrac{2\,(\sin(4)+2)}{49}$

```
(%i5) df(sqrt(%pi));
```

(%o5) $\dfrac{1-2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}+3} - \dfrac{2\sqrt{\pi}}{(2\sqrt{\pi}+3)^2}$

El valor numérico aproximado, será::

```
(%i6) float(%o5);
```

(%o6) -0.47159352189349

Vamos a hacer una derivada de orden 3:

```
(%i7) define(d3f(x),diff(f(x),x,3));
```

(%o7) $\mathrm{d3f}(x) := -\dfrac{6\,(2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2))}{(2x+3)^2} + \dfrac{-12x\sin(x^2)-8x^3\cos(x^2)}{2x+3} - \dfrac{48\,(\sin(x^2)+x)}{(2x+3)^4} + \dfrac{24\,(2x\cos(x^2)+1)}{(2x+3)^3}$

Veamos ahora una función definida por trozos. Como ya habíamos visto, Maxima no se maneja muy bien con esas funciones, así que en un punto de conjunción de trozos, no tendremos más remedio que hacerlo con la fórmula:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{y hallar ese límite por ambos lados}$$

EJERCICIO **3.1** *Sea la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,sen(\frac{1}{x}) & si\ \ x<0 \\ 0 & si\ \ x=0 \\ x\,cos(\frac{1}{x}) & si\ \ x>0 \end{cases}$$

Hallar, si existe, $f'(0)$

Procedemos así:

(%i1) `f1(x):=x^2*sin(1/x);`

(%o1) $\mathrm{f1}\left(x\right) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(%i2) `f2(x):=x*cos(1/x);`

(%o2) $\mathrm{f2}\left(x\right) := x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Derivada por la izquierda:

(%i3) `limit((f1(x)-0)/(x-0),x,0);`

(%o3) 0

Ahora por la derecha:

(%i4) `limit((f2(x)-0)/(x-0),x,0);`

(%o4) ind

Ya sabemos que `ind` significa que no existe ese límite, aunque la función está acotada en sus proximidades. Así que no existe $f'(0)$

3.2 Los operadores comilla y doble comilla

Una comilla (la que hay debajo del signo ?) puesta delante de una expresión, obliga a que ésta no se evalúe y sólo queda indicada (sí puede simplificarse). Con **nouns**(%) se evalúa una expresión que tenía una comilla. Por ejemplo:

(%i1) `f(x):='integrate(x^4+3*x,x);`

(%o1) $\mathrm{f}\left(x\right) := \int x^4 + 3\,x dx$

Vemos que no hace la integral. En cambio dos comillas (la misma que antes dos veces) delante de una expresión obliga a que la expresión se evalúe:

(%i1) `'integrate(x^4+3*x,x)=''integrate(x^4+3*x,x);`

(%o1) $\int x^4 + 3\,x dx = \frac{x^5}{5} + \frac{3\,x^2}{2}$ La expresión de la izquierda no se evalúa por llevar la comilla, mientras que la de la derecha se evalúa por las dobles comillas.

3.3 Aplicaciones de la derivada

3.3.1 Recta tangente y recta normal

Si tenemos una función $f(x)$, derivable en $x = a$, sabemos que las rectas tangente y normal a su gráfica en el punto $(a, f(a)$ vienen dadas, respectivamente por

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad n(x) = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

El último caso, requiere que $f'(a) \neq 0$, en cuyo caso la normal sería $x = a$. Con Maxima, sería elemental obtener ambas rectas.

3.3.2 Extremos relativos

Si tenemos una función $f(x)$, derivable en un intervalo abierto, sabemos que los **puntos críticos** se obtienen resolviendo la ecuación: $f'(x) = 0$. Con los comandos `diff` y alguno de los comandos para resolver ecuaciones, podemos hallar éstos. Para determinar qué tipo de extremos hay en cada punto crítico, podemos seguir alguno de los métodos:

a) Valorar f'(x) en un punto algo a la izquierda del punto crítico estudiado y en un punto algo a la derecha. Entre esos puntos de valoración y el punto crítico, no debe haber ningún otro punto crítico.

- Si f' pasa de ser positiva a ser negativa, existe un **máximo relativo.**
- Si f' pasa de ser negativa a ser positiva, existe un **mínimo relativo.**
- Si f' mantiene el mismo sino, no hay extremo en ese punto.

b) Si existe $f''(x)$, valoramos la misma en el punto crítico.

- Si f'' es positiva en el punto crítico, existe un **mínimo relativo.**
- Si f'' es negativa en el punto crítico, existe un **máximo relativo.**
- Si f'' se anula en el punto crítico, podemos seguir derivando hasta encontrar una derivada que no se anule en el punto. Si esa derivada es de orden impar, no hay extremo. Si es de orden par, hay extremo usando el mismo criterio que para la derivada segunda dicho más arriba.

3.3.3 Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Lo mejor sería que f' fuera continua y que podamos calcular *todos* los puntos críticos. Si hay n puntos críticos, tendremos $n+1$ intervalos separados por los mismos. Entonces valoramos f' en cualquier punto intermedio de cada intervalo. Si f' nos da positiva, entonces f es **creciente** en todo el intervalo, mientras que si es negativa, entonces es **decreciente**.

3.3.4 Intervalos de concavidad y convexidad

Aquí lo mejor sería que f'' fuera continua y que podamos calcular *todos* los puntos solución de $f''(x) = 0$. Haciendo lo mismo que anteriormente pero con la derivada segunda, si ésta fuera positiva, la función sería **convexa** en todo el intervalo, mientras que si es negativa, entonces es **cóncava**. Si en un intervalo pasa de ser cóncava a convexa (o al revés) en el intervalo siguiente, el punto común de separación es un **punto de inflexión**

3.4 Resolución de desigualdades

Tanto para la obtención de intervalos de crecimiento y decrecimiento como para la concavidad y convexidad, también podría ser útil saber resolver inecuaciones, tipo $f'(x) \geq 0$ o $f''(x) \geq 0$. Aparte de lo dicho en el apartado anterior, podemos intentarlo directamente con Maxima. Para ello, empezamos cargando el paquete `fourier_elim`

`fourier_elim` ([f(x)>=0], [x])	Intenta resolver la inecuación $f(x) >= 0$

NOTA: Observe que los argumentos son listas y van entre corchetes. El signo >= que aparece en el comando, puede cambiarse por cualquier otro, como <, <=, et.

(%i1) `load(fourier_elim);`

(%o1) $d : /ARCHIV\ 1/MAXIMA\ 1.1/share/maxima/5.21.1/share...$

(%i2) `f(x):=(2*x^2-x-10)/(x-3);`

(%o2) $\mathrm{f}(x) := \dfrac{2x^2 - x - 10}{x - 3}$

(%i3) `fourier_elim([f(x)<0],[x]);`

(%o3) $[\frac{5}{2} < x, x < 3] or [x < -2]$

(%i4) `g(x):=(x^2-x-3)/(x^2+x-2);`

(%o4) $\mathrm{g}(x) := \dfrac{x^2 - x - 3}{x^2 + x - 2}$

(%i5) `fourier_elim([g(x)<0],[x]);`

(%o5) $[-2 < x, x < 1, x^2 - x - 3 > 0] or [1 < x, -(x^2 - x - 3) > 0] or [x < -2, -(x^2 - x - 3) > 0]$

(%i6) `fourier_elim([f(x)<0],[x]);`

(%o6) $[\frac{5}{2} < x, x < 3] or [x < -2]$

(%i7) `fourier_elim([abs(x-3)>2],[x]);`

(%o7) $[x < 1] or [5 < x]$

De todas formas, no hay que esperar de este paquete grandes cosas. Hay que tener en cuenta que las raíces de una función pueden ser muy complejas de calcular.

3.4.1 Asíntotas

Horizontales Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda_1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lambda_2$,´siendo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, las rectas $y = \lambda_1$ e $y = \lambda_2$ son asíntotas horizontales por la derecha y por la izquierda respectivamente. Normalmente coinciden, pero no siempre es así (ej: $f(x) = e^x$)

Verticales Si en un punto $x = a$ ocurre $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical. En funciones racionales, las raíces del denominador son asíntotas verticales. Siempre conviene calcular los límites laterales anteriores para conocer la posición de las ramas de $f(x)$ respecto de la asíntota.

Oblicuas Si existe una recta $y = mx + b$ tal que $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ o $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-(mx+b)] = 0$ entonces tal recta es una *asíntota oblicua* por la derecha o por la izquierda respectivamente. Normalmente lo es por ambos lados. Para que existan estas asíntotas, deben existir (ser finitos) los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = b \qquad \text{Para la parte derecha}$$

Y los mismos límites pero con $x \to -\infty$ para asíntota por la izquierda.

3.5 Polinomios de Taylor

Si tenemos una función f, derivable hasta el orden n en un punto $x = a$, podemos aproximarla, en las proximidades de a, por un polinomio El criterio con el que elegiremos el polinomio será hacer coincidir las sucesivas derivadas de la función y el polinomio en el punto $x = a$,. Esto es, el polinomio de Taylor de orden n de una función f en un punto a:

$$\begin{aligned} &T(f,a,n)(x) = \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Con Maxima, disponemos de los siguientes comandos para hallar un polinomio de Taylor:

`taylor(f(x),x,a,n)`	Desarrolla el Polinomio de Taylor de orden n en torno al punto $x = a$
`trunc(polinomio de Taylor)`	convierte polinomio de Taylor en un polinomio
`taylorp(polinomio)`	devuelve `true` si el polinomio es un polinomio de Taylor

NOTA: La orden `trunc` parece una redundancia, ya que el polinomio de Taylor ya es un polinomio de por sí. La diferencia es que Maxima no guarda de la misma forma un polinomio de Taylor y un polinomio normal. Si queremos valorar polinomio de Taylor en un punto, tenemos que convertirlo previamente en función con `define`, o mediante `trunc` para convertirlo en un polinomio normal. Aunque, directamente, podemos aplicar lo dicho en 1.5.1.

(%i1) `taylor(cos(x),x,0,6);`

(%o1)/T/ $$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots$$

(%i2) `taylor(log(x),x,1,7);`

(%o2)/T/ $$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^7}{7}+\ldots$$

(%i3) `taylor(cos(x)/x,x,%pi,5);`

(%o3)/T/ $$-\frac{1}{\pi}+\frac{x-\pi}{\pi^2}+\frac{(\pi^2-2)\,(x-\pi)^2}{2\,\pi^3}-\frac{(\pi^2-2)\,(x-\pi)^3}{2\,\pi^4}-\frac{(\pi^4-12\,\pi^2+24)\,(x-\pi)^4}{24\,\pi^5}+\frac{(\pi^4-12\,\pi^2+24)\,(x-\pi)^5}{24\,\pi^6}+\ldots$$

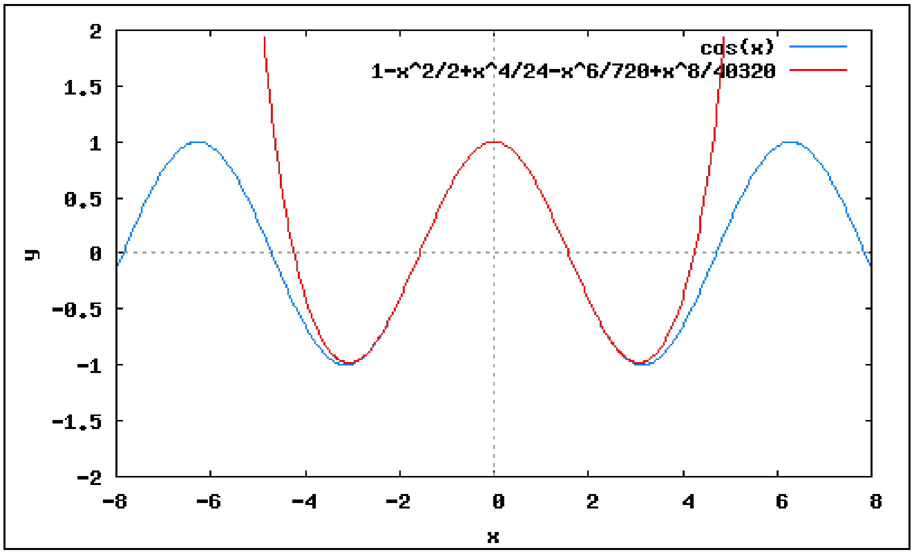
Dibujemos la función $f(x) = \cos(x)$ y su polinomio de Taylor de orden 8 en torno a $x = 0$

(%i1) `f(x):=cos(x);`

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \cos(x)$

(%i2) `plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,8)],[x,-8,8],[y,-2,2]);`

plot2d: some values were clipped.



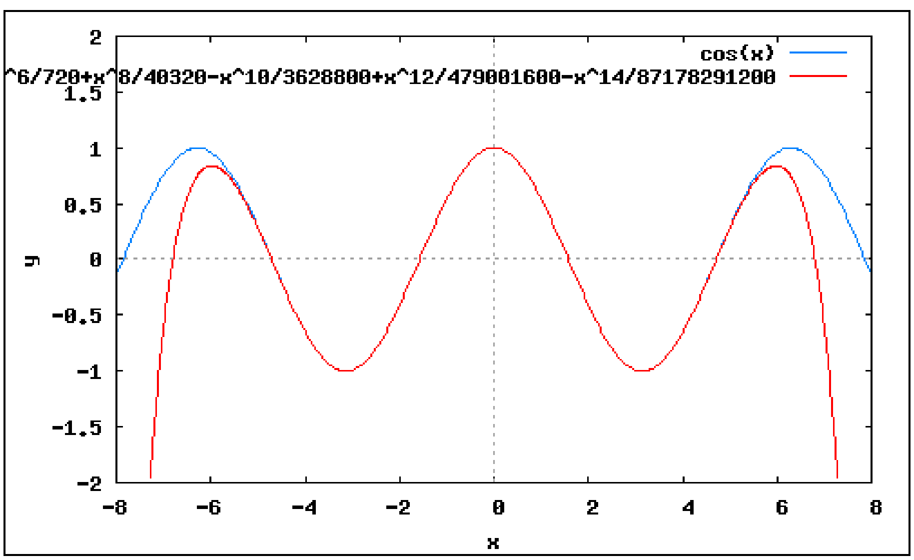
(%t2)

(%o2)

En teoría, un polinomio de Taylor de orden más alto debería aproximar mejor a la función. Vamos ahora a dibujar las gráficas de la función $f(x) = \cos(x)$ y de su polinomio de Taylor de orden 14 en el cero para comprobar que la aproximación es más exacta.

```
(%i2)  plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,14)],[x,-8,8],[y,-2,2]);
```

plot2d: some values were clipped.



(%t2)

(%o2)

La diferencia $f(x) - T(x,a,n)$ es un *infinitésimo* de orden superior a $(x-a)^n$ para $x \to a$.

3.6 Algo sobre programación

3.6.1 Operadores lógicos

is(*expresión*)	Le preguntamos a Maxima si *expresión* es verdadero o falso
assume(*expresión*)	Obligamos a Maxima a considerar *assume* como cierto
forget(*expresión*)	anulamos el assume(*expresión*) anterior
random(x)	Número aleatorio entre 0 y x
and	y
or	o

3.6.2 Operadores relacionales

Las partículas que deben ir dentro de un operador lógico, pueden ser:

=	Igualdad en sentido *idéntico*
#	La negación de =
equal(*exp1*, *exp2*)	*exp1* debe ser equivalente a *exp2*
notequal(*exp1*, *exp2*)	la negación de equal
$>$; $>=$; $<$; $<=$	mayor, mayor o igual, menor, menor o igual rspectivamente

```
(%i1)  is(3>2 or 5<6);
```

(%o1) $[true]$

```
(%i2)  is(x^2>0);
```

(%o2) $[unknown]$

Esto se debe a que si $x = 0$ lo anterior no es cierto. Obiguemos a Maxima a no considerar $x = 0$:

(%i3) `assume(notequal(x,0));`

(%o3) [notequal $(x,0)$]

(%i4) `is(x^2>0);`

(%o4) [$true$]

(%i5) `forget(%o2);`

(%o5) [$true$]

En la última entrada anulamos el considerar $x \neq 0$

(%i6) `is((x+1)^2=x^2+2*x+1);`

(%o6) [$false$]

¿Pero cómo? ¿no es cierta esa igualdad? pues sintácticamente, no, pues están escritas de forma distinta. Sin embargo:

(%i7) `is(equal((x+1)^2,x^2+2*x+1));`

(%o7) [$true$]

3.7 Bucles

Vamos a ver unos breves y elementales conceptos de programación que nos serán útiles, tanto en esta práctica como en las posteriores. Los tres bucles principales que veremos (aunque hay más) son:

`if` *condición* `then` *expr1* `else` *expr2*	bucle `if`
`for` *var*:*valor1* `step` *valor2* `thru` *valor3* `do` *expr*	bucle `for`
`while` *cond* `do` *expr*	bucle `while`
`while` *cond* `do` *expr*	bucle `while`
`print(`*expr1*,*expr2*,...`)`	escribe las expresiones en pantalla
`return (`*var*`)`	Para salirse del `do` de un bucle y devuelve el valor de *var*

Una breve explicación de estos bucles:

Bucle if Si se cumple *condición* entonces se valida *expr1*. Si no se cumple, se valida *expr2*. La orden `else` puede omitirse, con lo cual si no se cumple *condición*el bucle no hace nada.

Bucle for Se efectúa *expr* para los valores de *var* que van desde *valor1* hasta *valor3* en incrementos indicados en `step`*valor2*. Si éste se omite, los incrementos valen 1.

Bucle while Se efectúa *expr* mientras *cond* sea cierta. Este bucle necesita darle un incremento en *cond* a la variable de *expr* hasta que no se cumpla *cond*.

Al hacer un bucle, es posible por error caer en un proceso infinito. Lo detenemos pulsando **control-C**. La acción que se sigue por defecto es la detención del cómputo y la impresión de otro prompt.

Bucle que suma los cubos de los 5 primeros números naturales pares:

(%i1) `suma:0;`

(%o1) 0

(%i2) `for k:1 thru 5 do suma:suma+(2*k)^3;`

(%o2) *done*

(%i3) `print("la suma de los cubos de los 5 primeros naturales pares vale ",suma);`

la suma de los cubos de los 5 primeros naturales pares vale 1800

(%o3) 1800

Bucle que determina los valores de $k \in \mathbb{N}$ que cumplen $|k^2+1| < 20$:

```
(%i3) k:1;
```

(%o3) 1

```
(%i4) while abs(k^2+1)<20 do (print(k),k:k+1);
```

1
2
3
4

(%o4) $done$

Un sencillo bucle `if`:

```
(%i6) if 1.43<sqrt(2) then x:0 else x:1;
```

(%o6) 1

```
(%i7) x;
```

(%o7) 1

Veamos ahora un ejemplo de las aproximaciones de Taylor para la función $f(x) = -1+\cos(2x)$ en $x=0$ vamos a tomar las aproximaciones de orden 2, $4, 6$ y 8:

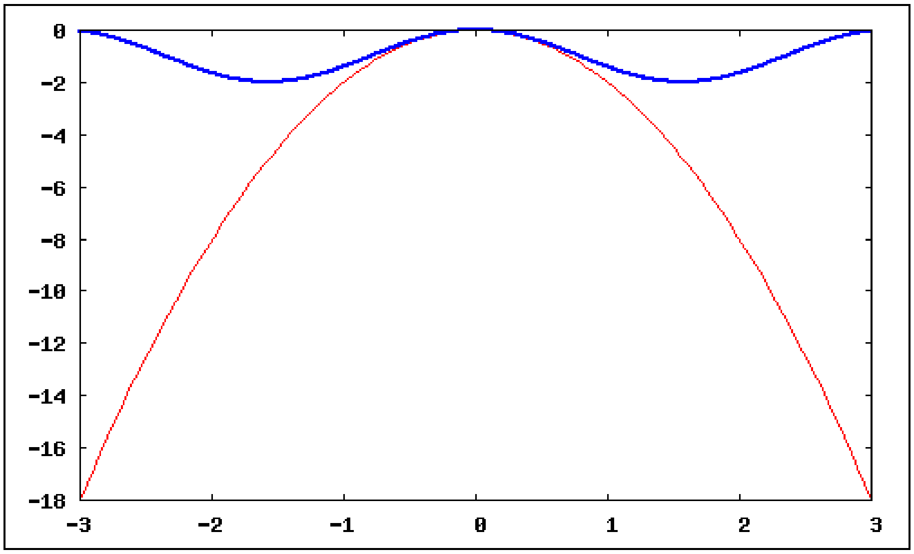
```
(%i1) load(draw);
```

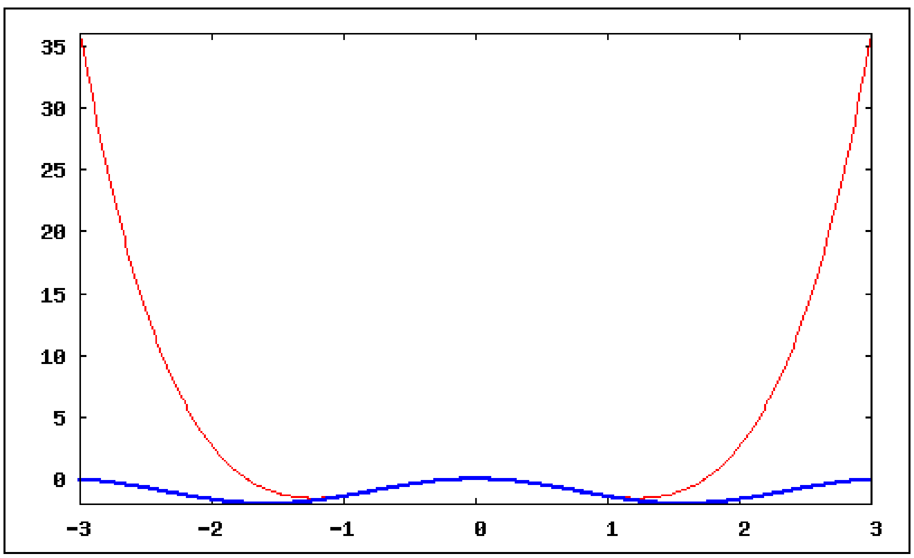
(%o1) $d : /ARCHIV\ 1/MAXIMA\ 1.1/share/maxima/5.21.1/share/draw/draw.lisp$

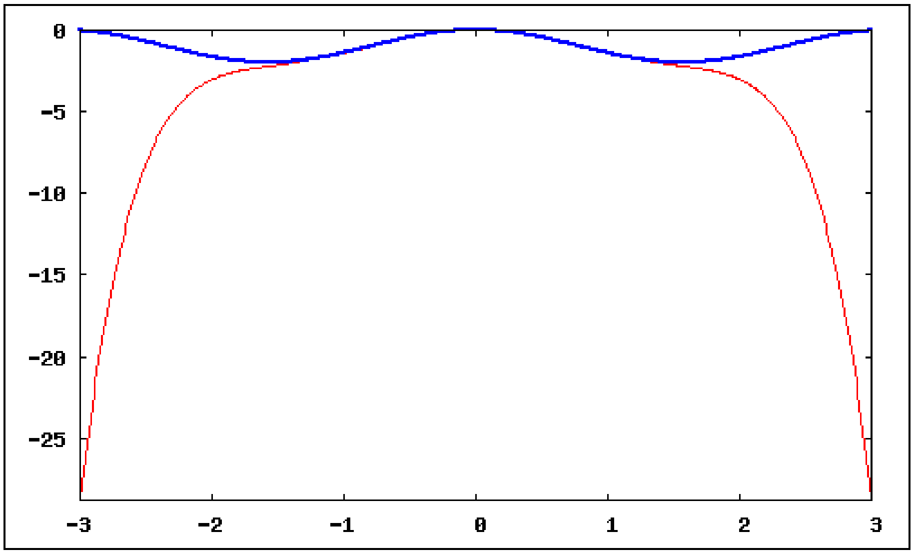
```
(%i2) f(x):=-1+cos(2*x);
```

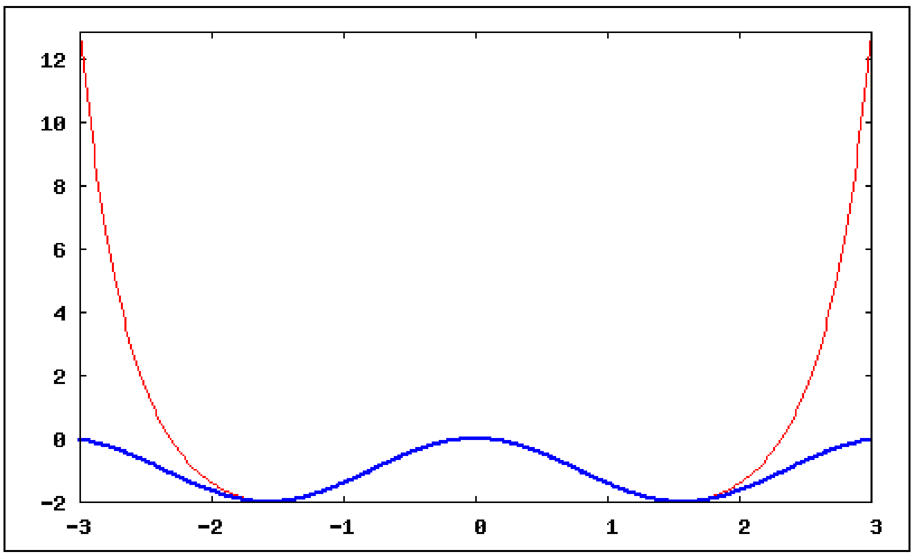
(%o2) $\mathrm{f}(x) := -1+\cos(2\,x)$

```
(%i3) for k:1 step 2 thru 8 do wxdraw2d(
      color=red,
      explicit(taylor(f(x),x,0,k),x,-3,3),
      color=blue,
      line_width=2,
      explicit(f(x),x,-3,3));
```

(%t3) 

(%t4) 

(%t5) 

(%t6) 

(%o6) *done*

EJERCICIO 3.2 *Programe con Maxima lo siguiente: Sea la función* $f(x) = 1 + \cos(x)$ *¿Cuál es el grado mínimo* n *para que el polinomio de Taylor T(x) en torno a* $x = 0$ *cumpla que* $|f(0.3) - T(0.3)| < 0.0001$ *?*

SOLUCIÓN

(%i1)

```
k:1;
```

(%o1) 1

(%i2)

```
f(x):=1+cos(x);
```

(%o2) $\mathrm{f}(x) := 1 + \cos(x)$

(%i3)

```
while abs(f(0.3)-T(0.3))>0.0001 do
(k:k+1,define(T(x),trunc(taylor(f(x),x,0,k))));
```

(%o3) *done*

(%i4)

```
print("El polinomio mínimo es el de grado", k);
```

El polinomio mínimo es el de grado 4

(%o4) 4

3.8 Ejercicios

1) Considere la función definida en los reales no nulos:

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2}) + 3\cos(x) + x$$

a) Compruebe que $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$ para poder extender la definición de f con continuidad a todo $\mathbb{R}$ considerando $f(0) = 3$

b) Comprobar que al intentar calcular $f'(0)$, obtenemos un mensaje de error.

c) A pesar de lo ocurrido en el apartado anterior, compruebe, recurriendo a la definición de derivada, que f es derivable en x = 0 y que el valor de la derivada es 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 1$$

d) Calcule el corte de la gráfica (con **find_root**) de f con el eje de abscisas y dibuje la gráfica de f junto a la tangente en ese punto.

Sugerencia: consulte 3.3.1 para la tangente.

e) Haga lo mismo que en el apartado anterior pero con el corte con el eje de ordenadas (ojo aquí no hay que usar **find_root** ; es más sencillo).

2) Considere la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

a) Calcule los puntos de inflexión y los extremos relativos de f.

b) Calcule los extremos absolutos de f en el intervalo $[-4, 4]$.

3) Considere la función siguiente: $f(x) = \dfrac{x^3 \operatorname{arctg}(x)}{(x-1)^2}$

a) Calcular las asíntotas de f.

b) Calcule dónde se alcanza y cuál es el valor mínimo absoluto de f en todo su dominio.

4) Considere la función $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$.

a) Derive la expresión y observe que la derivada es idénticamente nula. ¿Es constante la función?.

b) Calcule los límites laterales de f en el 0. Pinte la gráfica y observe que es constante en los negativos y constante (distinta de la anterior) en los positivos.

c) Averigüe cuál es el valor de esas contantes y defina nuevamente la función f sin utilizar "arctan": con **if-then-else** (recuerde que es constante a trozos).

5) Considere las dos parábolas siguientes dependientes del parámetro a: $y = x^2 + x + a$, $y = -2x^2 + ax$. Calcule los dos valores de a para los cuales las parábolas son tangentes; con uno de ellos, dibuje ambas parábolas así como su recta tangente común (en su punto de tangencia).

6) Halle los extremos relativos de $f(x) = x\sqrt{1-x}$. Dibuje la gráfica para confirmarlo. ¿qué ocurre en el punto $x = 1$ ¿hay extremo en ese punto?

(Sugerencia: consulte el apartado 3.3.2)

7) Dibuje con `plot2d` la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(3x) - 3\operatorname{sen}(x)$ con $x \in [-5, 5]$. ¿Dónde parece tener extremos? ¿es Maxima capaz de calcularlos?

Sugerencia: Maxima no es capaz de encontrar los puntos críticos. Sin embargo, si en $f'(x)$ damos a expandir(tr) y luego a simplificar(tr) encontramos una sorprendente expresión, que seremos capaces de resolverla sin Maxima, sólo mirando la gráfica.

8) Dibuje la curva $f(x) = 2e^x + e^{-x}$ en color rojo, la tangente en el punto $x = 1$ en color azul y la normal en el mismo punto en color verde.

Sugerencia: cargue el paquete `draw` *y consulte el apartado 3.3.1 para la tangente y normal*

9) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

a) Halle los cortes con el eje OX. *(Sugerencia: resuelva $f(x) = 0$)*

b) Halle las asíntotas verticales, situando las ramas de la gráfica (límites laterales en torno a las mismas.)

(Sugerencia: consulte el apartado 3.4.1)

c) Halle los extremos relativos*(Sugerencia: consulte el apartado 3.3.2)*

d) Halle los intervalos de crecimiento y de crecimiento.
Sugerencia: ordene los puntos críticos $f'(x) = 0$ y los puntos de asíntotas verticales de menor a mayor. Evalúe $f'(x)$ en un punto arbitrario intermedio de cada intervalo para ver en qué intervalos f' es negativa o positiva

e) Confirme los resultado anteriores dibujando, en mismo gráfico, la gráfica de la función en azul y las asíntotas en rojo.

Sugerencia: cargue el paquete `draw`*, 2.2. Ponga un rango de -4 a 4 para las X y -300 a 300 para las Y. Las asíntotas, dibújelas con la orden* `parametric(x de la asíntota,t,t,-300,300)`

10) Halle el polinomio de Taylor $T(f(x), x, 0, 8)$ de la función $f(x) = e^x \operatorname{sen}(x)$.
Calcule en $x = 0.12$ el valor de la función y el de $T(f(x), x, 0, 8)$.
Sugerencia: Consulte la nota del apartado 3.5.

11) Dibuje con draw2d, en una misma ventana, la función $f(x) = x\cos(3x)$ y sus polinomios de Taylor de orden 2, 4 y 6 todos con diferente color, siento el trazo de $f(x)$ el doble de grueso. Elija un rango adecuado para que se vea bien.

Sugerencia: Ver ejemplos en el apartado 3.5.

12) ¿Sería capaz, consultando el ejercicio 3.2, de programar la obtención del polinomio

de Taylor mínimo $T(f(x), x, 0, n)$ para la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ de forma que se cumpla $|f(x) - T(f(x), x, 0, n)| < 0.001$ para *todo punto* del intervalo $[-0.3,\ 0.3]$?

Práctica 4

La integral de Riemann. Integrales impropias

4.1 Cálculo de integrales

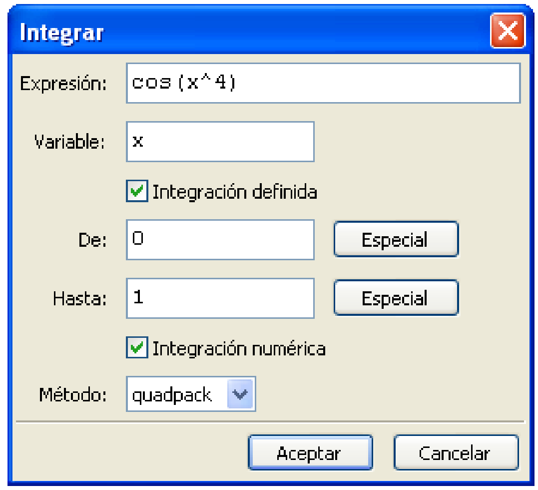
La principal orden de *Maxima* para calcular integrales es `integrate`. Nos va a permitir calcular integrales, tanto definidas como indefinidas, con mucha comodidad. Los principales comandos son:

`integrate(f(x),x)`	Calcula una primitiva de $f(x)$
`integrate(f(x),x,a,b)`	Calcula $\int_a^b f(x)\,dx$

Como siempre, todos estos comandos podemos hacerlos desde el menú del Maxima **Análisis→Integrar**. Aparece una forma donde sólo tenemos que introducir los datos:

FORMA PARA LA INTEGRAL INDEFINIDA Y LA DEFINIDA, RESPECTIVAMENTE

Si Maxima no fuera capaz de calcular una integral definida, siempre podremos calcular una aproximación de su valor. Para ello, activamos la casilla "Integración numérica". Maxima calculará la integral por métodos numéricos con mucha precisión



Calculemos $\int t^3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt$:

(%i1)

```
integrate(t^3*sin(t^2), t);
```

(%o1) $\dfrac{\sin\left(t^2\right) - t^2\cos\left(t^2\right)}{2}$

Calculemos $\int (x+1)^2\,e^{-x}\,dx$:

(%i2)

```
integrate((x+1)^2*%e^(-x),x);
```

(%o2) $\left(-x^2 - 2\,x - 2\right)\,e^{-x} + 2\,\left(-x - 1\right)\,e^{-x} - e^{-x}$

Vayamos ahora con una integral definida: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\,dx$

(%i3)

```
integrate(cos(x)^3, x, %pi/4, %pi/6);
```

(%o3) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\cdot 2^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{11}{24}$

(%i4)

```
ratsimp(%);
```

(%o4) $-\dfrac{5\cdot 2^{\frac{3}{2}} - 11}{24}$

Maxima se permite el lujo de preguntar dudas si la cosa no la ve clara:

(%i5)

```
integrate(x^n, x);
```

Is n+1 zero or nonzero? nonzero;
Debemos contestarle procurando dejar un espacio entre la pregunta y nuestra contestación (y pulsar Control-Enter)

(%o5) $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Y pregunta todo lo que le haga falta:

(%i6)

```
integrate(1/x, x, a, b);
```

Is b-a positive, negative, or zero? positive;
Is b positive, negative, or zero? positive;
Is a positive, negative, or zero? positive;

(%o6) $\log(b) - \log(a)$

NOTA: Los valores que se dan como contestación, permanecen para el resto de la sesión. Si es necesario, hay que quitarlos con la orden `forget(las varibles que sean.)`

4.1.1 Integración numérica

Veamos ahora una integral en la que haya que usar el método numérico: $\int_0^1 e^{x^3+x}\,dx$:

(%i1)

```
integrate(%e^(x^3+x), x, 0, 1);
```

(%o1) $\int_0^1 e^{x^3+x} dx$

Devuelve el mismo resultado. Esto es, no puede calcularla por la regla de Barrow. Activamos entonces la casilla "Integración numérica" y vemos que Maxima nos ofrece dos métodos para hacerlo: **quad_qags** o el método **romberg**. Veamos lo que obtenemos con cada uno:

(%i2)

```
quad_qags(%e^(x^3+x), x, 0, 1);
```

(%o2) $[2.505246759202013, 2.781382634433631410^{-14}, 21, 0]$

(%i3)

```
romberg(%e^(x^3+x), x, 0, 1);
```

(%o3) 2.505246763921738

Vemos salidas diferentes, según hayamos elegido el método **quad_qags** o el método **romberg**. El último nos devuelve el valor de la integral. El primero nos devuelve una lista donde figura: el valor de la integral, el error absoluto estimado de la aproximación, el número de evaluaciones del integrando y el código de error (que puede ir desde 0 hasta 6). Consulte en la ayuda de Maxima para enterarse de estos últimos códigos de error

4.2 Teorema fundamental del Cálculo integral

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se define la función integral de f como $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ con $x \in [a, b]$

- Se demuestra que F es derivable en $[a,b]$ y además $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$
- Podemos ir más lejos y considerar la función $G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$, siendo h y g derivables en $[a, b]$. Por la regla de la cadena, se tiene entonces:
$$G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

Ejemplo 4.1 *Sea* $G(x) = \int_{e^{-x}}^{x^3+x} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$ *. Calcule G'(x)*

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(t):=sin(t^4);
```

(%o1) $f(t) := \sin(t^4)$

(%i2)

```
G(x):='integrate(f(t),t,%e^(-x),x^3+x);
```

(%o2) $G(x) := \int_{e^{-x}}^{x^3+x} f(t)\,dt$

Hemos puesto la comilla simple para que Maxima no intente hacer la integral

(%i3)

```
diff(G(x),x);
```

(%o3) $e^{-x} \sin(e^{-4x}) + (3x^2+1) \sin\left((x^3+x)^4\right)$

Ejemplo 4.2 *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\left(t^{\frac{3}{2}}\right) dt}{3x^5}$

SOLUCIÓN

Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Vamos a resolverlo aplicado L'Hôpital:

(%i1)

```
f(x):='integrate(sin(t^(3/2)),t,0,x^2);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \int_0^{x^2} \sin\left(t^{\frac{3}{2}}\right) dt$

(%i2)

```
define(h(x),diff(f(x),x)/diff(3*x^5,x));
```

(%o2) $\mathrm{h}(x) := \frac{2\sin\left(x^2\,|x|\right)}{15\,x^3}$

(%i3)

```
limit(h(x),x,0,minus);
```

(%o3) $-\frac{2}{15}$

4.3 Aplicaciones de la integral

4.3.1 Cálculo de áreas

- Ya sabemos que si tenemos $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ nos calcula el área comprendida entre la gráfica de $|f(x)|$ y el eje horizontal, correspondiente al intervalo $[a, b]$. Pero también es sabido que las integrales y el valor absoluto de funciones se llevan fatal.

- Así que debemos quitarlo de la integral ¿cómo? pues calculando los sub-intervalos en los que f es positiva y los sub-intervalos en que es negativa.

- Si la función es continua ya sabemos que esto se hace resolviendo $f(x) = 0$ y valorando f en puntos arbitrarios intermedios de cada subintervalo comprendido entre dos raíces consecutivas. Integramos en cada subintervalo y dónde nos dé negativo, le cambiamos el signo. Luego sumamos todas las integrales. La representación gráfica de f puede ayudarnos.

- Para calcular el área entre dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ procedemos de idéntica forma con la función $|f(x) - g(x)$.

NOTA: Otra opción para calcular $\int_a^b |f(x)|\, dx$ es usar el comando:

`load(abs_integrate)`	Carga el paquete `abs_integrate` que permite integrar valores absolutos de funciones. Se puede cargar automáticamente en el archivo `maxima-init.mac`

Ejemplo 4.3 *Hallar el área comprendida entre el eje horizontal y la gráfica de la función:*

$$8\,x^3+6\,x^2-17\,x+6\,;\;\; x\in[-4,\,4]$$

SOLUCIÓN

(%i1)

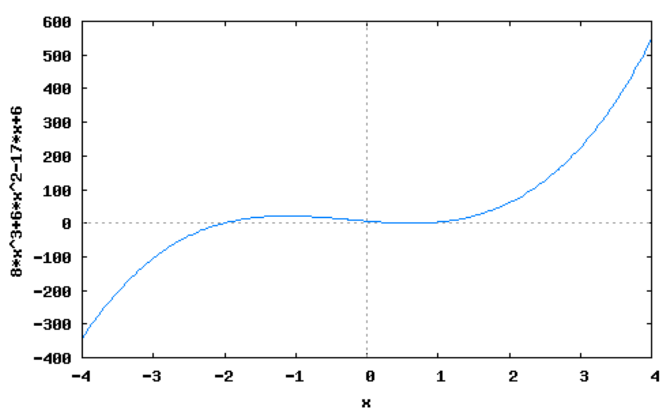
```
f(x):=8*x^3+6*x^2-17*x+6;
```

(%o1) $\mathrm{f}\,(x) := 8\,x^3+6\,x^2+(-17)\,x+6$

Dibujamos la función:

(%i2)

```
wxplot2d([f(x)], [x,-4,4],
 [plot_format, gnuplot])$
```



(%t2)

Parece que hay sólo 2 raíces, una de ellas doble pues parece que la gráfica es tangente en la de la derecha. Sigamos investigando:

(%i3)

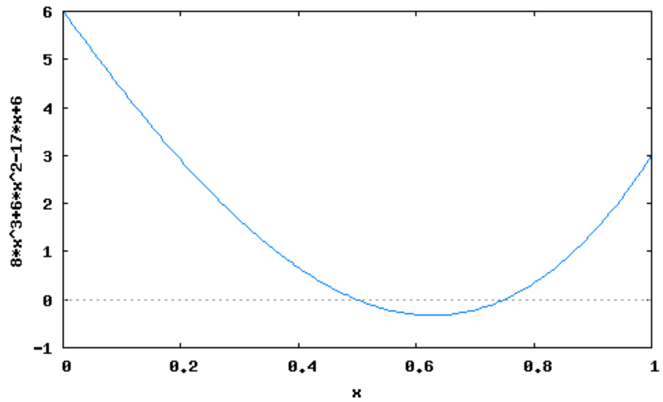
```
solve([f(x)], [x]);
```

(%o3) $[x=-2, x=\frac{1}{2}, x=\frac{3}{4}]$

Pues no, había tres raíces. Vamos a hacer un "zoom" para más de cerca la zona conflictiva:

(%i4)

```
wxplot2d([f(x)], [x,0,1],
[plot_format, gnuplot])$;
```



(%t4)

Ahora sí se ve claro. La función es negativa en $[-4, -2)$ y en $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ y positiva en $(-2, \frac{1}{2})$ y en $(\frac{3}{4}, 4)$. Así que el área será:

(%i10)

```
-integrate(f(x), x, -4, -2)+integrate(f(x), x, -2, 1/2)
-integrate(f(x), x, 1/2, 3/4)+integrate(f(x), x, 3/4,4);
```

(%o10) $\frac{51975}{64}$

Claro está que podíamos ahorrar mucho trabajo (pero sería menos instructivo) con:

(%i1)

```
load(abs_integrate);
```

(%o1) d:/ARCHIV 1/MAXI-MA 1.1/share/maxima/5.21.1/share/contrib/integration/abs_integrate.mac

(%i2)

```
integrate(abs(8*x^3+6*x^2-17*x+6),x,-4,4);
```

(%o2) $\frac{51975}{64}$

Ejemplo 4.4 *Calcule la menor área comprendida entre las gráficas:*

$$y = x^2 \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Solución

Vamos a dibujar ambas gráficas para planear el trabajo:

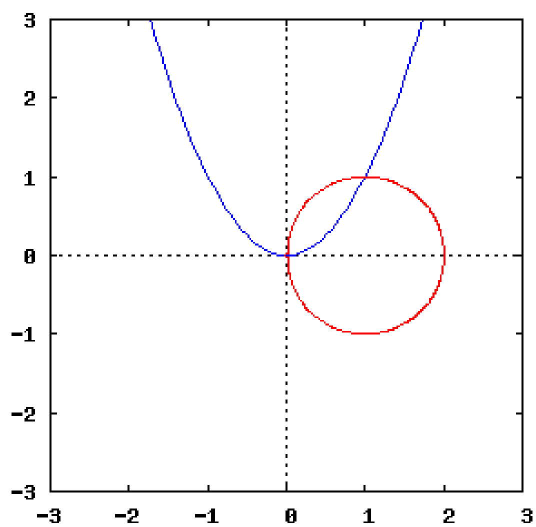
(%i1)

```
load(draw);
```

(%o1) d :
$/ARCHIV\ 1/MAXIMA\ 1.1/share/maxima/5.21.1/share/draw/draw.lisp$

(%i2)

```
wxdraw2d(
xaxis=true,yaxis=true,
color=blue,
explicit(x^2,x,-3,3),
color=red,
implicit((x-1)^2+y^2=1,x,-3,3,y,-3,3),
xrange=[-3,3],yrange=[-3,3],
user_preamble="set size ratio 1"
);
```



(%t2)

(%o2) [gr2d $(explicit, implicit)$]

Bueno, está claro. Calculemos los puntos de intersección de ambas:

(%i3)

```
solve([(x-1)^2+y^2=1,y=x^2],[x,y]);
```

(%o3) $[[x=1,y=1],[x=-\frac{\sqrt{7}\,i+1}{2},y=\frac{\sqrt{7}\,i-3}{2}],[x=\frac{\sqrt{7}\,i-1}{2},y=-\frac{\sqrt{7}\,i+3}{2}],[x=0,y=0]]$

Obviamente, sólo nos quedamos con las reales: $(0,0)$ y $(1,1)$. Despejemos ahora la y en la circunferencia:

(%i4)

```
solve([(x-1)^2+y^2=1],[y]);
```

(%o4) $[y = -\sqrt{2x - x^2}, y = \sqrt{2x - x^2}]$

La que nos interesa a nosotros es la de la parte de arriba, o sea; $y = \sqrt{2x - x^2}$. Ahora está claro que debemos integrar, entre 0 y 1 la parte superior de la circunferencia menos la parábola:

(%i5)

```
integrate(sqrt(2*x-x^2)-x^2, x, 0, 1);
```

(%o5) $\dfrac{3\pi - 4}{12}$

Ejemplo 4.5 *Sea la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{x+3} & si\ \ x < 2 \\ 5 & si\ \ x = 2 \\ \dfrac{2x}{\sqrt{5+3x^2}} & si\ \ x > 2 \end{cases}$ *Calcule* $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$

SOLUCIÓN

Como ya habíamos apuntado en alguna ocasión, lo mejor es tener en cuanta los trozos por nuestra cuenta:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 x^2 e^{x+3}\,dx + \int_2^3 \frac{2x}{\sqrt{5+3x^2}}$$

(%i2)

```
integrate(x^2*%e^(x+3), x, 0, 2)+integrate(2*x*sqrt(5+3*x^2), x, 2, 3);
```

(%o2) $2e^5 - 2e^3 + 2\left(\dfrac{2^{\frac{15}{2}}}{9} - \dfrac{17^{\frac{3}{2}}}{9}\right)$

(%i3)

```
ratsimp(%);
```

(%o3) $\dfrac{18e^5 - 18e^3 - 2\cdot 17^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{17}{2}}}{9}$

NOTA: ¿Y qué ocurre con el punto $x = 2$? Pues ese no influye para nada en la integral. Es conocido que si en una función alteramos su valor en un nº finito de puntos (e incluso un nº infinito numerable), no se altera el valor de su integral definida.

4.3.2 Longitudes de curvas

Si tenemos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable con continuidad en (a, b), la longitud de su gráfica viene dada por la integral:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

El trabajo con Maxima se reduce a calcular la integral que aparece.

Ejemplo 4.6 *Halle la longitud del arco de* $f(x) = 1 - \log(\cos(x))$ *con* $x \in [0\, \frac{\pi}{4}]$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x):=1-log(cos(x));
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := 1 - \log(\cos(x))$

(%i2)

```
diff(f(x),x);
```

(%o2) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(%i3)

```
trigreduce(%);
```

(%o3) $\tan(x)$

(%i4)

```
integrate(sqrt(1+(tan(x))^2), x, 0, %pi/4);
```

(%o4) $\operatorname{asinh}(1)$

4.3.3 Volúmenes de revolución

Si tenemos una función continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ el volumen que genera cuando gira 360^o alrededor del eje horizontal, viene dado por la integral:

$$\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

El trabajo con Maxima se reduce a calcular la integral que aparece.

NOTA: Si el giro es alrededor del eje OY y la parte de gráfica que gira está en el primer cuadrante, el volumen se puede calcular por la fórmula:

$$2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

4.3.4 Áreas de superficies de revolución

Si tenemos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable con continuidad en (a, b), el área de la superficie que genera cuando gira 360^o alrededor del eje horizontal, viene dado por la integral:

$$2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

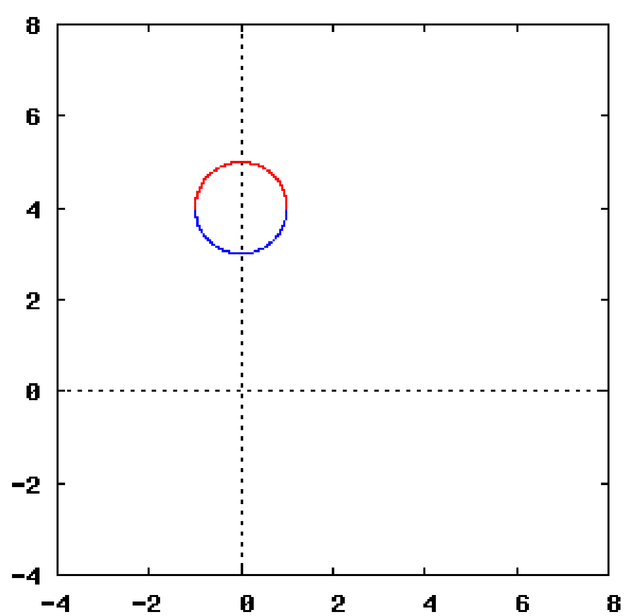
El trabajo con Maxima se reduce a calcular la integral que aparece. Pero aquí hay que hacer un estudio del signo de f, pues aparece un valor absoluto en la integral.

NOTA: Si lo que gira es una región limitada por dos curvas, tanto en el volumen como en el área, debemos considerar la diferencia de los volúmenes o la suma áreas que genera cada función.

Ejemplo 4.7 *Calcule el área de la superficie y el volumen del toro que genera la circunferencia* $(x-4)^2 + y^2 = 1$ *al girar* 360^o *sobre OX.*

SOLUCIÓN

Si nos fijamos, son dos funciones las que giran: la de la parte de arriba y la de abajo:



Vamos a ver quién es una y otra:

(%i1)

```
solve(x^2+(y-4)^2=1,y);
```

(%o1) $[y = 4 - \sqrt{1 - x^2}, y = 4 + \sqrt{1 - x^2}]$

Bien, pues ya sabemos que la de arriba es la del signo $+$ y la de abajo la del $-$

(%i2)

```
f(x):=sqrt(1-x^2)+4;
```

(%o2) $\mathrm{f}(x) := \sqrt{1-x^2}+4$

(%i3)

```
g(x):=4-sqrt(1-x^2);
```

(%o3) $\mathrm{g}(x) := 4-\sqrt{1-x^2}$

Cálculo del área:

(%i4)

```
2*%pi*(integrate(f(x)*sqrt(1+(diff(f(x),x))^2), x, -1, 1)+
integrate(g(x)*sqrt(1+(diff(g(x),x))^2), x, -1, 1));
```

(%o4) $16\,\pi^2$

Cálculo del volumen:

(%i5)

```
%pi*(integrate(f(x)^2, x, -1, 1)-integrate(g(x)^2, x, -1, 1));
```

(%o5) $\pi\left(\frac{2\,(6\,\pi+50)}{3}+\frac{2\,(6\,\pi-50)}{3}\right)$

(%i6)

```
ratsimp(%);
```

(%o6) $8\,\pi^2$

4.4 Integrales impropias

La integral de Riemann exige, entre otras cosas, que la función sea acotada en su intervalo de integración, que también debe ser acotado. Hay otras integrales que no cumplen este requisito: *las integrales impropias*. Básicamente son de tres tipos:

a) Integrales impropias de primera especie o infinitas: Sea $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo $[a, b] \subset [a, \infty)$. El límite:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Se dice que es una integral impropia de primera especie. Es *convergente* o *divergente*, según ese límite exista (valor de la integral) o no.

b) Integrales impropias de segunda especie: a su vez, pueden clasificarse:

- *Impropia en el extremo inferior:* Sea $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo $[x, b] \subset (a, b]$. El límite:

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(x)\,dx = \int_{a^+}^b f(x)\,dx \qquad \text{aunque suele escribirse } \int_a^b f(x)\,dx$$

Se dice que es una integral impropia de 2ª especie. Es *convergete* o *divergente*, según ese límite exista (valor de la integral) o no.

- *Impropia el extremo superior:* Sea $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo $[a, x] \subset [a, b)$. El límite:

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^{b^-} f(x)\,dx \qquad \text{aunque suele escribirse } \int_a^b f(x)\,dx$$

Se dice que es una integral impropia de 2ª especie. Es *convergete* o *divergente*, según ese límite exista (valor de la integral) o no.

- Integrales impropias de tercera especie: Cuando el intervalo de integración sea acotado o no y pueda haber varios puntos (en nº finito) en que f no está definida (puntos impropios), por ejemplo puntos de asíntotas verticales.

- Estas integrales hay que descomponerlas en sumas de integrales de primera y/o de segunda especie (o sea, con un único punto impropio en uno de los extremos de integración). Si todas ellas convergen, la integral impropia converge a la suma de todas ellas. Si hay alguna que diverge, la integral impropia diverge.

Maxima resuelve casi todas las integrales de 1ª y 2ª especie por el método normal (como las integrales de Riemann), aunque sea numéricamente. Pero las de 3ª especie debemos ser nosotros quienes las separemos en sumas de integrales de 1ª y/o 2ª especie, pues podemos encontrarnos con errores.

NOTA: : Existen muchos otros comandos en Maxima para tratar con integrales impropias, cada uno cambia el método para buscar la solución. Nosotros usaremos el habitual `integrate`. Por ello, es conveniente poner la variable **intanalysis:false** para que use el método normal.

Ejemplo 4.8 *Vamos a estudiar con Maxima las llamadas* **p-integrales** *de 2ª especie:*

$$\int_{a^+}^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \qquad\qquad \int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
intanalysis:false;
```

(%o1) $false$

(%i2)

```
integrate(1/(x-a)^p, x, a, b);
```

Is p-1 zero or nonzero? nonzero;
Is p-1.0 positive or negative? positive;
Is b-a positive, negative, or zero? positive;

defint: integral is divergent. – an error. To debug this try: debugmode(true);

▶ Así que ya sabemos: si $p > 1$ la integral diverge. Veamos el caso $p = 1$:

(%i3)

```
integrate(1/(x-a)^p, x, a, b);
```

Is p-1 zero or nonzero? zero;
Is b-a positive, negative, or zero? positive;

defint: integral is divergent. – an error. To debug this try: debugmode(true);

▶ Así que para $p = 1$ también diverge. Por último:

(%i4)

```
integrate(1/(x-a)^p, x, a, b);
```

Is p-1 zero or nonzero? nonzero;
Is p-1.0 positive or negative? negative;

(%o4) $-\dfrac{b-a}{(b-a)^p\, p-(b-a)^p}$

▶ Concluimos que la integral diverge para $p \geq 1$ converge para $p < 1$ al valor $-\dfrac{b-a}{(b-a)^p\, p-(b-a)^p}$

▶ Al mismo resultado llegaríamos con $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^p}\, dx$

▶ Veamos ahora las **p-integrales infinitas**: $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ con $a > 0$

(%i7)

```
assume(a>0);
```

(%o7) $[a > 0]$

(%i8)

```
integrate(1/x^p, x, a, inf);
```

Is p-1 zero or nonzero? noncero;

Is p-1 zero or nonzero? nonzero;
Is p-1.0 positive or negative? positive;

(%o8) $\dfrac{a}{a^p\,p - a^p}$

(%i9)

```
integrate(1/x^p, x, a, inf);
```

Is p-1 zero or nonzero? zero;

defint: integral is divergent. – an error. To debug this try: debugmode(true);

(%i10)

```
integrate(1/x^p, x, a, inf);
```

Is p-1 zero or nonzero? nonzero;
Is p-1.0 positive or negative? negative;

defint: integral is divergent. – an error. To debug this try: debugmode(true);

► Vemos que ahora ocurre lo contrario: divergen si $p \leq 1$ y convergen si $p > 1$ al valor $\dfrac{a}{a^p\,p - a^p}$

Ejemplo 4.9 *Estudie la convergencia de la integral:* $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\,\sqrt[3]{\log(x)}}$ *y calcule su valor en caso de ser convergente*

SOLUCIÓN

Es una integral impropia de segunda especie, con punto impropio en el límite inferior

(%i4)

```
f(x):=1/(x*(log(x))^(1/3));
```

(%o4) $\mathrm{f}(x) := \dfrac{1}{x\log(x)^{\frac{1}{3}}}$

(%i5)

```
integrate(f(x), x, 1, %e);
```

(%o5) $\dfrac{3}{2}$

Luego es convergente a $\dfrac{3}{2}$

Ejemplo 4.10 *Estudie la convergencia de la integral:* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x^2}$ *y calcule su valor en caso de ser convergente.*

sol Es una integral de 3ª especie, pues tiene puntos impropios en 0 y en 1. Pongámosla como suma de dos de 2ª especie:

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x^2} = \int_0^{1/2} \frac{\log(x)}{1-x^2} + \int_{1/2}^1 \frac{\log(x)}{1-x^2}$$

El punto intermedio elegido para separarlas $x = \frac{1}{2}$ podría ser cualquier otro. El resultado es independiente de ese punto. Ahora calculamos con Maxima ambas integrales:

(%i1)

```
f(x):=log(x)/(1-x^2);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \frac{\log(x)}{1-x^2}$

(%i2)

```
integrate(f(x), x, 0, 1/2);
```

(%o2) $$-\lim_{x\to\infty} -\frac{x\log(e^x+1)}{2} + \frac{li_2(e^x)}{2} - \frac{li_2(-e^x)}{2} + \frac{x\log(1-e^x)}{2} - \\ -\frac{\log(2)\ \log(3) - \log(-1)\ \log(2) - li_2(2) + li_2(-2)}{2}$$

Ante este extraño resultado, probemos con la integración numérica. Activamos la casilla "Integración numérica":

(%i3)

```
quad_qags(f(x), x, 0, 0.5);
```

(%o3) $[-0.89607737190373, 1.7725820811165249\, 10^{-12}, 231, 0]$

Ya sabemos que el primer valor de la lista, es la integral buscada.

(%i4)

```
quad_qags(f(x), x, 0.5, 1);
```

(%o4) $[-0.33762317823244, 3.748370261207734\, 10^{-15}, 21, 0]$

Así que ambas integrales convergen. El valor aproximado de la integral propuesta será:

$$-0.89607737190373 - 0.33762317823244 = -1.23370055013617$$

4.5 Ejercicios

1) Calcule una primitiva de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \cos^5(x)$,
b) $f(x) = 1/(1+x^4)$,
c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,

¿Sabe calcularlas sin usar *Maxima*?

2) Calcule el área entre las curvas:

a) $y = x^4 + x^3 + 16x - 4 \qquad y = x^4 + 6x^2 + 8x - 4$.
b) $y = \sec^2(x)\,, \quad y = \operatorname{tg}^2(x)\,, \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4\,.$

3) Calcule la derivada de la función $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+1} \operatorname{sen}(t)\,dt$.

Sugerencia: vea el apartado 4.2

4) Estudie los extremos relativos de la función $f(x) = \int_0^{(2x-7)^2} (t^3 - 2t)\,dt$

5) Calcule:

a) área limitada por $y = xe^{-x^2}$, el eje OX, la ordenada en el punto $x = 0$ y la ordenada en el máximo.
b) Calcule de forma exacta y aproximada el área y el perímetro de la región limitada por las dos parábolas: $y = x^2 + x + 1\,;\ y = -2x^2 - 2x + 1$
c) área de la figura limitada por la curva $y = x^3 - x^2$ y el eje OX.
d) área comprendida entre la curva $y = \operatorname{tg}(x)$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.
e) área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$
f) las dos áreas en los que la función $f(x) = |x| - x\operatorname{sen}(x)e^x$ divide a la bola unidad $x^2 + y^2 = 1$.

6) Calcule la longitud del arco de curva $y = x^2 + 4$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

7) Sea $f(x) = \cos(x) + e^x$ y P su polinomio de Taylor de orden 5 centrado en el origen. ¿Cuál es la diferencia entre las longitudes de las gráficas de f y de P en el intervalo $[0, 3]$?

8) Calcule el área de la superficie de la figura que se obtiene al girar la función $y = \operatorname{tg}(x), \quad x \in [0, \pi/4]$ alrededor del eje OX.

9) Sea $f(x) = x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 8$. Calcule el volumen al girar dicha función alrededor del eje OX entre los valores donde f alcanza su máximo y su mínimo relativos.

10) Calcule:

a) La integral de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ con $x \in [1, +\infty]$.

b) El volumen y la superficie lateral del sólido obtenido al girar la gráfica de la anterior función respecto del eje OX.

c) Idem a los dos anteriores con $g(x) = \dfrac{1}{x}$ con $x \in [1, +\infty]$.

11) Calcule el área encerrada por la gráfica de $f(x) := \dfrac{2+x^2}{1+4x^2}$ y su asíntota horizontal.

12) Calculr el área de la superficie de revolución engendrada al girar la parabola $y = x^2$ en $0 < x < a$, donde a es un real positivo. Calcular a, de modo aproximado, para que el valor del área sea igual a π.

13) Considere la función $f(x) = x^2 + x + 3$. Calcule una de las rectas tangentes a la parábola $y = f(x)$ que pasan por el origen. Calcule el área limitada por dicha recta tangente, la parábola y el eje de ordenadas. Calcular el perímetro de la mencionada región.

14) Considere las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 3x^{1/4}$. Compruebe que $g(10) - f(10) > 0$ y $g(13) - f(13) < 0$ y utilizarlo para calcular (de modo aproximado con `find_root`) el corte de las gráficas de f y g situado en el intervalo [10,13]. Calcule el volumen de revolución obtenido al girar al rededor del eje OX la región limitada por las gráficas de f y g.

15) Analice la convergencia de las siguientes integrales impropias. Calcule sus valores aproximados en caso de convergencia.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{1-x^3}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^3)^{\frac{1}{2}}}\,dx$

16) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\displaystyle\int_0^x \operatorname{arctg}(t^2)\,dt}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2t+1}\right)dt}$

Práctica 5

Sucesiones y series. Series de potencias

5.1 Sucesiones

Una sucesión es un conjunto ordenado de infinitos números reales. A cada nº natural n se le asocia un único número real a_n, que será una expresión dependiente de n. O sea que podemos considerar que es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

► Una sucesión se suele representar como $\{a_n\}$.

► Maxima calcula límites de sucesiones de igual forma que si fueran funciones. Hay que considerar que siempre la variable $n \to \infty$.

► Para sucesiones podemos aplicar, si fuera necesario, el Teorema de Stolz:

TEOREMA 5.1 (STOLZ) *Supongamos un límite del tipo* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *en que* $\{b_n\}$ *es monótona divergente. Entonces:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lambda \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda}$$

Pudiendo ser λ *finito o infinito.*

► Del teorema anterior se deduce también:

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión de términos positivos y supongamos que* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda$. *Entonces se tiene que:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda}$$

Pudiendo ser λ *finito o infinito.*

EJERCICIO **5.1** *Calcular los siguientes límites:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha + 2^2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \cdots + n^2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{n}}{n^2}$ *b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{2}{n} + \operatorname{sen}\frac{2}{n}\right)^n$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\,\frac{\sqrt[n]{e} - e^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}}{1 - n\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$ *d)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{k}$

SOLUCIÓN

Apartado a)

(%i1)

```
a(n):=sum(k^2*sin(a/k), k, 1, n), simpsum;
```

(%o1) $\mathrm{a}(n) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{a}{k}\right)$

(%i2)

```
b(n):=n^2;
```

(%o2) $\mathrm{b}(n) := n^2$

(%i4)

```
limit(a(n)/b(n),n,inf);
```

(%o4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{a}{k}\right)k^2}{n^2}$

Directamente no sale. Vamos a aplicar el criterio de Stolz:

(%i5)

```
(a(n+1)-a(n))/(b(n+1)-b(n));
```

(%o5) $\displaystyle\frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1}\sin\left(\frac{a}{k}\right)k^2\right) - \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{a}{k}\right)k^2}{(n+1)^2 - n^2}$

Vamos a reducir el numerador. Puede consultarse más adelante en 5.2.3

(%i6)

```
sumcontract(intosum(num(%o5)));
```

(%o6) $(n+1)^2\sin\left(\dfrac{a}{n+1}\right)$

(%i7)

```
%/(b(n+1)-b(n));
```

(%o7) $\dfrac{(n+1)^2 \sin\left(\frac{a}{n+1}\right)}{(n+1)^2 - n^2}$

(%i8)

```
limit(%,n,inf);
```

(%o8) $\dfrac{a}{2}$

Apartado b)

(%i1)

```
limit((cos(2/n)+sin(2/n))^n, n, inf);
```

(%o1) e^2

Apartado c)

(%i1)

```
n*(%e^(1/n)-%e^sin(1/n))/(1-n*sin(1/n));
```

(%o1) $\dfrac{n\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)}{1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right) n}$

(%i2)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o2) 1

Apartado d)

Como es similar al a) vamos a aplicar Stolz directamente:

(%i1)

```
a(n):=sum(sin(%pi/k), k, 1, n), simpsum;
```

(%o1) $\mathrm{a}(n) := \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$

(%i2)

```
b(n):=log(n);
```

(%o2) $\mathrm{b}(n) := \log(n)$

```
(%i3)
a(n+1)-a(n);
```

(%o3) $\left(\sum_{k=1}^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$

```
(%i4)
sumcontract(intosum(%));
```

(%o4) $\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$

```
(%i5)
(%o4)/(b(n+1)-b(n));
```

(%o5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\log(n+1) - \log(n)}$

```
(%i6)
limit(%, n, inf);
```

(%o6) π

5.1.1 Sucesiones recurrentes

Son sucesiones en que cada término está definido en función de términos anteriores. Necesitamos conocer explícitamente alguno de los primeros términos. Por ejemplo:

$$a_1 = 2\,;\;\; a_2 = 3\,;\;\; a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

Cada término, es la media aritmética de los dos anteriores. Para obtener x_n de forma explícita tenemos los comandos:

`load`*(solve_rec)*	Carga el paquete *(solve_rec)* para resolver estas ecuaciones
`solve_rec`*(eqn, var, [init])*	Intenta resolver la ecuación recurrente *eqn* respecto de la variable *var*, siendo *init* las condiciones iniciales (opcional).

EJERCICIO **5.2** *Resuelva la ecuación propuesta anteriormente*

$a_1 = 2\,;\;\; a_2 = 3\,;\;\; a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ *y calcule el octavo término, así como su límite.*

SOLUCIÓN

(%i1)

```
load(solve_rec);
```

(%o1) d:/ARCHIV 1/MAX-IMA 1.1/share/maxima/5.21.1/share/contrib/solve_rec/solve_rec.mac

(%i2)

```
solve_rec(x[n+2]=(x[n]+x[n+1])/2,x[n],x[1]=1,x[2]=2);
```

(%o2) $x_n = \dfrac{2^{2-n}\,(-1)^n}{3} + \dfrac{5}{3}$

(%i3)

```
%,n=8;
```

(%o3) $x_8 = \dfrac{107}{64}$

(%i4)

```
limit(x[n], n, inf);
```

(%o4) $\dfrac{5}{3}$

5.2 Series

Una serie no es más que una sucesión $\{s_n\}$ que se forma a partir de otra sucesión $\{a_n\}$ de la forma siguiente:

$$s_1 = a_1\,;\;\; s_2 = a_1 + a_2\,,\;\; s_3 = a_1 + a_2 + a_3\,; \cdots , s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n$$

Al límite $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ lo representamos por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Si tal límite es un valor finito, diremos que la serie *converge*. En caso contrario, la serie *diverge*.

- La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es *absolutamente convergente* cuando $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. La convergencia absoluta implica la convergencia normal.
- Una condición *necesaria*, pero no suficiente, para que una serie converja es que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

5.2.1 Criterios de convergencia absoluta

Son tests para saber si una serie converge absolutamente o no. Pero no nos dan el valor de la suma. Los más usuales son:

- **Criterio de comparación:** Si tenemos dos series, de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y calculamos el límite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$ resulta:

  a) Si $\lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$ las series tienen el mismo carácter (o ambas convergen o ambas divergen).

  b) Si $\lambda = 0$ sólo podemos deducir que si la serie correspondiente al denominador converge, la de numerador también converge. O el contrarrecíproco.

  c) Si $\lambda = \infty$ sólo podemos deducir que si la serie correspondiente al numerador converge, la de denominador también converge. . O el contrarrecíproco.

Normalmente se comparan con *p-series:* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. Éstas convergen si $p > 1$ y divergen si $p \leq 1$.

- Los restantes criterios son:

Criterio de la raíz	Criterio del la cociente
Calculamos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = \lambda$ • Si $\lambda < 1$ la serie converge absl. • Si $\lambda > 1$ la serie diverge. • Si $\lambda = 1$ el criterio falla.	Calculamos $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = \lambda$ • Si $\lambda < 1$ la serie converge absl. • Si $\lambda > 1$ la serie diverge. • Si $\lambda = 1$ el criterio falla.
Criterio de Raabe	**Criterio del logaritmo**
Calculamos $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert\right) = \lambda$ • Si $\lambda > 1$ la serie converge absl. • Si $\lambda < 1$ la serie no converge absol. • Si $\lambda = 1$ el criterio falla.	Calculamos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-\log \lvert a_n \rvert}{\log(n)} = \lambda$ • Si $\lambda > 1$ la serie converge absl. • Si $\lambda < 1$ la serie no converge absl. • Si $\lambda = 1$ el criterio falla.

EJERCICIO **5.3** *Estudiar el carácter de las siguientes series:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(n+2)\,n!}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\cos\frac{1}{n}-2}$ *e)* $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^n}$ *f)* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)^{2n}}{(n+1)^{2n}}$

SOLUCIÓN

a) Aplicamos el criterio del cociente:

(%i1)

```
a(n):=(n+1)/((n+2)*n!);
```

(%o1) $a(n) := \dfrac{n+1}{(n+2)\; n!}$

(%i2)

```
factorial_expand:true;
```

(%o2) $true$

(%i3)

```
a(n+1)/a(n);
```

(%o3) $\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)^2\; (n+3)}$

(%i4)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o4) 0

Como $0 < 1$ la serie *converge.*

---

b) Comparamos por cociente con la p-serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (que diverge, al ser p=1):

(%i1)

```
sin(1/n)/(1/n);
```

(%o1) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)\; n$

(%i2)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o2) 1

Ambas series tienen el mismo carácter: *divergente*

---

c) Comparamos por cociente con la p-serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (que diverge, al ser p=1):

(%i1)

```
sin(1/sqrt(n)*log(n))/(1/n);
```

(%o1) $n\sin\left(\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right)$

(%i2)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o2) ∞

Luego la serie *diverge.*

---

d) Aplicamos el criterio del logaritmo:

(%i1)

```
-log(n^(cos(1/n)-2))/log(n);
```

(%o1) $2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

(%i2)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o2) 1

Nos sale el caso dudoso. Entonces vamos a comparar por cociente con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

(%i1)

```
(n^(cos(1/n)-2))/(1/n);
```

(%o1) $n^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}$

(%i2)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o2) 1

Ambas tienen el mismo carácter: *divergente*

---

e) Aplicamos el criterio de la raíz:

(%i1)

```
1/(log(n))^n;
```

(%o1) $\frac{1}{\log(n)^n}$

(%i2)

```
limit(%^(1/n), n, inf);
```

(%o2) 0

Como $0 < 1$ la serie es *convergente.*

---

f) Aplicamos el criterio de la raíz:

(%i1)

```
((2*n-1)^(2*n))/((n+1)^(2*n));
```

(%o1) $\dfrac{(2\,n-1)^{2\,n}}{(n+1)^{2\,n}}$

(%i2)

```
limit((%)^(1/n), n, inf);
```

(%o2) 4

Como $4 > 1$ la serie *diverge.*

5.2.2 Series sumables

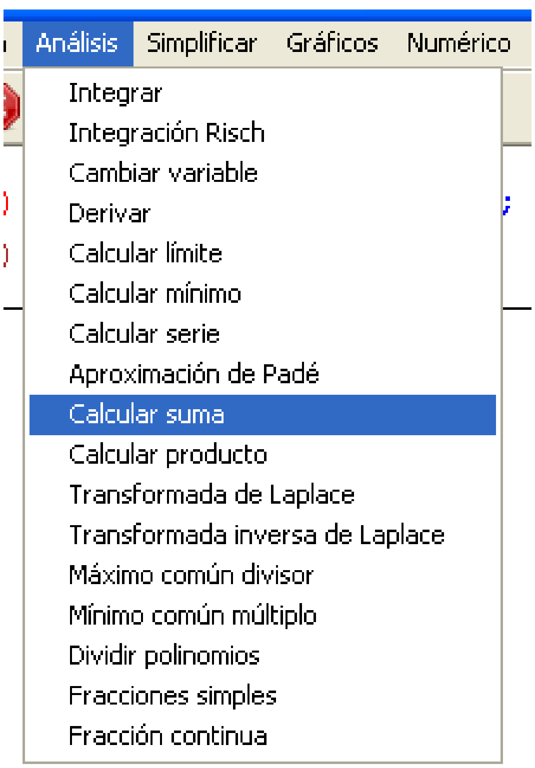
Es posible obtener el valor numérico de la suma de algunas series, entre ellas:

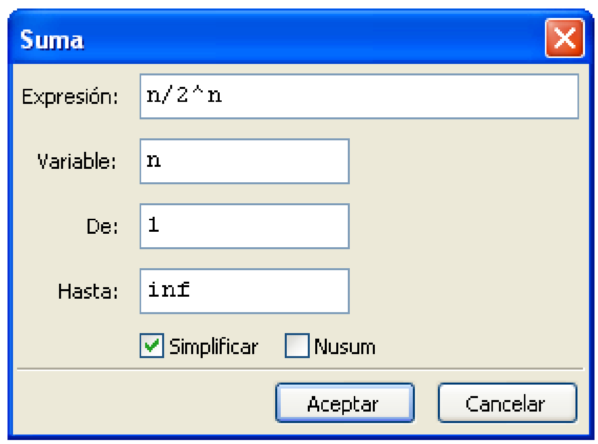
- **Series geométricas:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ con $\lambda \in \mathbb{R}\,;\quad |\lambda| < 1$
- **Series aritmético-geométricas:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(n)\,\lambda^n$ con $\lambda \in \mathbb{R}\,;\quad |\lambda| < 1$ siendo $P(n)$ un polinomio.
- **p-series:** del tipo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p \in \mathbb{N}\,;\ p > 1$
- **Series telescópicas:** dedicamos más adelante una subsección para las mismas.

Para ello, disponemos de los comandos:

`sum`(*expr,n,m,p)*	Suma *expr* usando n como variable, desde el valor m al p (que puede ser ∞). Si no puede sumarla, la expresa con un sumatorio.
`nusum`(*expr,n,m,p)*	Como `sum` pero emplea otro algoritmo más eficaz en expresiones racionales.
`load`(*symply_sum)*	Carga el paquete *symply_sum*, el más potente de Maxima para sumar series. Se puede cargar automáticamente desde el archivo `maxima-init.mac`
`symply_sum`(*serie)*	Suma, si es posible, la serie *serie*, finita o infinita, expresada con un sumatorio

Podemos acceder a los comandos `sum` y `nusum` desde el menú de wxmaxima, yendo a **Análisis–>Calcular suma**





EJERCICIO **5.4** *Calcular las sumas:*

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - n + 2}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
load(simplify_sum);
```

define: warning: redefining the built-in function lcm

(%o1) *d:/ARCHIV 1/MAXIMA 1.1/share/maxima/5.21.1/share/contrib/solve_rec /simplify_sum.mac*

(%i2)

```
sum((n^2+1)/n!, n, 0, inf), simpsum;
```

(%o2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$

(%i3)

```
simplify_sum(%);
```

(%o3) $3\,e$

(%i4)

```
sum((n^2)/3^n, n, 0, inf), simpsum;
```

(%o4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

(%i5)

```
simplify_sum(%);
```

(%o5) $\frac{3}{2}$

(%i6)

```
sum(5/n^4, n, 1, inf), simpsum;
```

(%o6) $\frac{\pi^4}{18}$

(%i7)

```
sum((-1)^(n+1)/n, n, 1, inf), simpsum;
```

(%o7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(%i8)

```
simplify_sum(%);
```

(%o8) $\log(2)$

5.2.3 Series telescópicas

► Son series sumables que Maxima no consigue sumar directamente. Son del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+m} - b_n)$. En general, las descomponemos en diferencia de dos series finitas $\sum_{n=1+m}^{k+m} b_n - \sum_{n=1}^{k} b_n$ y luego aplicamos los comandos:

`sumcontract(intosum(%))` , cuyos significados son:

`intosum`(*expr con sumatorios*)	Introduce las constantes multiplicativas dentro de los sumatorios que figuren en *expr*
`sumcontract`(*suma de sumatorios*)	Los sumandos iguales de cada serie los agrupa en un sólo sumatorio con un rango común.

► Con lo anterior, lo que hacemos es conseguir la suma parcial k-ésima. Por último hallamos el límite para $k \to \infty$

EJERCICIO 5.5 *Calcule* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

SOLUCIÓN

► Con lo anterior, lo que hacemos es conseguir la suma parcial k-ésima. Por último hallamos el límite para $k \to \infty$

(%i1)

```
sum(1/sqrt(n+3)-1/sqrt(n), n, 1, k), simpsum;
```

(%o1) $$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Lo ponemos así:

(%i2)

```
sum(1/sqrt(n), n, 4, k+3)-sum(1/sqrt(n), n, 1, k);
```

(%o2) $$\left(\sum_{n=4}^{k+3} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(%i3)

```
sumcontract(intosum(%));
```

(%o3) $$\frac{1}{\sqrt{k+3}} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

(%i4)

```
limit(%, k, inf);
```

(%o4) $$-\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}$$

5.2.4 Series alternadas

Son series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ o bien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ donde cada $a_n > 0$. Para ver si convergen absolutamente, podemos aplicar cualquiera de los criterios vistos. Pero para la convergencia ordinaria (a veces convergen pero no absolutamente), tenemos el Teorema de Leibniz:

TEOREMA 5.2 *Si en la serie alternada anterior,* $\{a_n\}$ *es monótona decreciente y* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *la serie converge.*

EJERCICIO **5.6** *Estudie la convergencia y convergencia absoluta de* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

SOLUCIÓN

Para la convergencia absoluta, habrá que estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$. Si la comparamos por cociente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (que diverge pues $p = \frac{1}{2} < 1$) obtenemos:

(%i1)

```
(sqrt(n)/(n+100))/(1/sqrt(n));
```

(%o1) $\frac{n}{n+100}$

(%i2)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o2) 1

Las series tienen el mismo caráter. O sea *diverge* y no es absolutamente convegente. Estudiemos ahora la convergencia ordinaria:

(%i1)

```
sqrt(n)/(n+100);
```

(%o1) $\frac{\sqrt{n}}{n+100}$

(%i2)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o2) 0

El término general, en valor absoluto, tiende a 0. Veamos si es monótona decreciente. Si la pasamos a variable real:

(%i1)

```
sqrt(x)/(x+100);
```

(%o1) $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$

(%i2)

```
diff(%,x);
```

(%o2) $\frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+100)} - \frac{\sqrt{x}}{(x+100)^2}$

(%i3)

```
ratsimp(%);
```

(%o3) $-\dfrac{x-100}{\sqrt{x}\,(2x^2+400x+20000)}$

Vemos que si $x > 100$ la derivada es negativa y será monótona decreciente. Luego también lo será con variable natural para $n > 100$ y la serie alternada será *convergente* por el T. de Leibniz.

5.2.5 Productos finitos e infinitos

El concepto es similar a la de series, pero multiplicando los términos en vez de sumalos. Se escribe de la forma $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Para manipular éstos, disponemos de los comandos:

`product`*(expr,n,m,p)*	Multiplica *expr* usando n como variable, desde el valor m al p (que puede ser ∞). Si no puede hacer el producto, la expresa con un sumatorio.
`simplify_product`*(expr)*	Simplifica *expr* que se supone es un cociente de productos con símbolos Π

5.3 Series de potencias

► Una serie de potencias en torno al punto $x = a$, es una serie de la forma:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

$$\text{donde } a_n \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; a \in \mathbb{R}$$

► Como vemos, sus términos son *funciones* del tipo potencial de la variable x y podemos expresarlas con un sumatorio: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n$. Habitualmente, se toma $a = 0$.

► La convergencia de una serie de potencias, dependerá del punto x que tomemos, cobrando gran importancia el llamado **radio de convergencia de la serie**, r, pudiendo demostrase que la serie:

a) Converge absolutamente en el intervalo $(a-r, a+r)$ o sea $|x-a| < r$, llamado **Intervalo de convergencia** de la serie.

b) Diverge en $|x-a| > r$ o sea, en el exterior del intervalo de convergencia

c) En $x = -a$ y $x = a$, no podemos asegurar nada sobre la convergencia.

Dentro del intervalo de convergencia, las series de potencias se pueden derivar e integrar, término a término, de forma indefinida.

5.3.1 Cálculo del radio de convergencia

Se puede calcular mediante $r = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ o también $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

5.4 Desarrollo de una función en series de potencias. Series de Taylor

Si tenemos una función $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, indefinidamente derivable, y $a \in \mathbb{D}$, se llama **Serie de Taylor** de f en torno a $x = a$ a la serie:

$$\begin{aligned} T(f, a, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

► No siempre se cumple $f(x) = T(f, a, x)$, pero en caso de sea así, sólo podrá serlo en el intervalo de convergencia I de la serie, suponiendo que éste esté incluido en $\mathbb{D}$. Entonces se dice que f es *desarrollable en serie de potencias* en I . Se puede demostrar, además, que no existe otra serie de potencias, distinta a la de Taylor, que sea igual a f en I.

Con Maxima, podemos obtener la serie de Taylor de una función, aunque el radio de convergencia tendremos que calcularlo aparte. Para ello, tenemos los comandos:

`powerseries`*(expr, x, a)*	Devuelve la forma general del desarrollo en serie de potencias de *expr* para la variable x alrededor del punto a. Si `powerseries` no es capaz de desarrollar *expr*, la función `taylor` puede calcular los primeros términos de la serie.
`pade`*(expr, n, m)*	Donde *expr* debe ser un pol. de Taylor truncado. Devuelve la lista de todas las funciones racionales que tienen el desarrollo de Taylor dado, en las que la suma de los grados del numerador y denominador es menor o igual que el nivel de truncamiento de la serie de potencias

`niceindicespref`*(lista)*	lista de variables para usar en los sumatorios. Por ejemplo [n,m,i,j,k]. Si sólo se da con un elemento, siempre se usa esa letra para los sumatorios.
`niceindices`(*expr*)	Donde *expr* deberá ser una Serie de Taylor. Cambia las letras de los índices del sumatorio por los indicados en `niceindicespref`.
`sumexpand`, `cauchysum`	Cuando se multiplican sumatorios infinitos, si `sumexpand` vale *true* y `cauchysum` vale *true*, entonces se utilizará el producto de Cauchy en lugar del usual. En el producto de Cauchy el índice de la suma interna es función del índice de la exterior en lugar de variar de forma independiente.

EJERCICIO 5.7 *Hallar el radio de convergencia de las series que tienen de coeficientes el siguiente término general:*

a) $a_n = \dfrac{n^2-n+3}{3^n+2^{-n}+n-1}$ *b)* $a_n = \ln\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2n^2-3}\right)$ *c)* $a_n = \dfrac{1}{2^n-n}$

d) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *e)* $a_n = \dfrac{1}{\ln(n)^2}$

SOLUCIÓN

Apartado a)

(%i2)

```
a(n):=(n^2-n+3)/(3^(n)+2^(-n)+n-1);
```

(%o2) $$a(n) := \frac{n^2-n+3}{3^n+2^{-n}+n-1}$$

(%i3)

```
a(n)/a(n+1);
```

(%o3) $$\frac{(n^2-n+3)\,(3^{n+1}+2^{-n-1}+n)}{\left((n+1)^2-n+2\right)\left(3^n+\frac{1}{2^n}+n-1\right)}$$

(%i4)

```
ratsimp(%);
```

(%o4) $$\frac{(6\,n^2-6\,n+18)\,2^n\,3^n+(2\,n^3-2\,n^2+6\,n)\,2^n+n^2-n+3}{(2\,n^2+2\,n+6)\,2^n\,3^n+(2\,n^3+4\,n-6)\,2^n+2\,n^2+2\,n+6}$$

(%i5)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o5) 3

Apartado b)

(%i1)

```
a(n):=log((n^3+1)/(n^3+2*n^2-3));
```

(%o1) $a(n) := \log\left(\frac{n^3+1}{n^3+2\,n^2-3}\right)$

(%i2)

```
a(n)/a(n+1);
```

(%o2) $\frac{\log\left(\frac{n^3+1}{n^3+2\,n^2-3}\right)}{\log\left(\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3+2\,(n+1)^2-3}\right)}$

(%i3)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o3) 1

Apartado c)

(%i1)

```
a(n):=1/(2^n-n);
```

(%o1) $a(n) := \frac{1}{2^n-n}$

(%i2)

```
a(n)/a(n+1);
```

(%o2) $\frac{2^{n+1}-n-1}{2^n-n}$

(%i3)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o3) 2

Apartado d)

(%i1)

```
a(n):=n!/n^n;
```

(%o1) $\mathrm{a}\left(n\right):=\frac{n!}{n^n}$

(%i2)

```
a(n)/a(n+1);
```

(%o2) $\frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{n^n\;(n+1)!}$

(%i3)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o3) e

Apartado e)

(%i1)

```
a(n):=1/(log(n))^2;
```

(%o1) $\mathrm{a}\left(n\right):=\frac{1}{\log\left(n\right)^2}$

(%i2)

```
a(n)/a(n+1);
```

(%o2) $\frac{\log\left(n+1\right)^2}{\log\left(n\right)^2}$

(%i3)

```
limit(%, n, inf);
```

(%o3) 1

EJERCICIO **5.8** *Calcule la serie de Taylor, en torno al punto a de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\cos(x^2),\ a=0,$ *b)* $f(x)=\log(5+x^2),\ a=0,$ *c)* $f(x)\log(5+x^2),\ a=1,$

d) $\frac{\log(1-x)}{1-x},\ a=0,$ *e)* *f(x)=* $\mathrm{sen}^2(x),\ a=0,$ *f)* $f(x)=\frac{2x-5}{x^2-5x+6},\ a=0,$

SOLUCIÓN

Apartado a)

(%i1)

```
niceindicespref:[n];
```

(%o1) $[n]$

(%i2)

```
powerseries(cos(x^2),x,0);
```

(%o2) $$\sum_{i1=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i1}\,x^{4\,i1}}{(2\,i1)!}$$

(%i3)

```
niceindices(%);
```

(%o3) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,x^{4\,n}}{(2\,n)!}$$

Apartado b)

(%i1)

```
niceindicespref:[n];
```

(%o1) $[n]$

(%i2)

```
powerseries(log(5+x^2),x,0);
```

(%o2) $$2\sum_{i1=0}^{\infty}\frac{5^{-i1-1}\,(-1)^{i1}\,x^{2\,i1+2}}{2\,i1+2}$$

(%i3)

```
niceindices(%);
```

(%o3) $$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{-n-1}\,(-1)^{n}\,x^{2\,n+2}}{2\,n+2}$$

(%i4)

```
ratsimp(%);
```

(%o4) $$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,x^{2\,n+2}}{(10\,n+10)\;5^{n}}$$

Apartado c)

(%i1)

```
niceindicespref:[n];
```

(%o1) $[n]$

(%i2)

```
powerseries(log(5+x^2),x,1);
```

(%o2) $$\sum_{i1=0}^{\infty} -\frac{\left(\sqrt{5}\,i-1\right)^{-i1-1}\,(x-1)^{i1+1}}{i1+1}-\frac{\left(-\sqrt{5}\,i-1\right)^{-i1-1}\,(x-1)^{i1+1}}{i1+1}$$

(%i3)

```
niceindices(%);
```

(%o3) $$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\left(\sqrt{5}\,i-1\right)^{-n-1}\,(x-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{\left(-\sqrt{5}\,i-1\right)^{-n-1}\,(x-1)^{n+1}}{n+1}$$ Nos da un desarrollo con números imaginarios complicado de interpretar. Vamos a sustituirlo por los 8 primeros términos del polinomio de Taylor:

(%i5)

```
taylor(log(5+x^2),x,1,8);
```

(%o5)/T/ $$\log(6)+\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{7\,(x-1)^3}{162}+\frac{(x-1)^4}{648}+\frac{19\,(x-1)^5}{4860}-\frac{11\,(x-1)^6}{8748}-\frac{13\,(x-1)^7}{122472}+\frac{79\,(x-1)^8}{419904}+\ldots$$

(%i1)

```
niceindicespref:[n,m,k];
```

(%o1) $[n,m,k]$

(%i2)

```
powerseries((log(1-x))/(1-x),x,0);
```

(%o2) $$-\left(\sum_{i1=0}^{\infty} x^{i1}\right)\sum_{i1=1}^{\infty}\frac{x^{i1}}{i1}$$

(%i3)

```
niceindices(%);
```

(%o3) $$-\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$$ Nos da el producto de dos series de potencias. Vamos a emplear el producto de Cauchy para anidar los sumatorios:

(%i4)

```
sumexpand: true;
```

(%o4) $true$

(%i5)

```
cauchysum: true;
```

(%o5) $true$

(%i6)

```
s:%o2;
```

(%o6) $$-\left(\sum_{i1=0}^{\infty} x^{i1}\right) \sum_{i1=1}^{\infty} \frac{x^{i1}}{i1}$$

(%i7)

```
''s;
```

(%o7) $$-\sum_{i2=1}^{\infty} \sum_{i3=0}^{i2-1} \frac{x^{i2}}{i2-i3}$$

(%i8)

```
niceindices(%);
```

(%o8) $$-\sum_{m=1}^{\infty} x^m \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{m-n}$$

Apartado e)

(%i1)

```
niceindicespref:[n];
```

(%o1) $[n]$

(%i2)

```
powerseries((sin(x))^2,x,0);
```

(%o2) $$-\frac{\left(\sum_{i1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i1}\, 2^{2\,i1}\, x^{2\,i1}}{(2\,i1)!}\right)-1}{2}$$

(%i3)

```
niceindices(%);
```

(%o3) $$-\frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, 2^{2\,n}\, x^{2\,n}}{(2\,n)!}\right)-1}{2}$$

Apartado f)

(%i1)

```
niceindicespref:[n];
```

(%o1) $[n]$

(%i2)

```
powerseries((2*x-5)/(x^2-5*x+6),x,0);
```

(%o2) $$\sum_{i1=0}^{\infty} \left(-3^{-i1-1} - 2^{-i1-1}\right) x^{i1}$$

(%i3)

```
niceindices(%);
```

(%o3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-3^{-n-1} - 2^{-n-1}\right) x^{n}$$

5.5 Ejercicios

1) Defina una sucesión recurrente tal como se indica: $s[1]:1$; $s[n]:=\sqrt{1+s[n-1]}$

a) Comprobar que funciona la definición con S[10]

b) Aceptando que existe límite, calcúlelo razonando que $L=\sqrt{1+L}$ y resolviendo dicha ecuación (eleve al cuadrado para que no haya problemas): La solución es el número áureo.

c) Cree una lista con los 30 primeros valores de la sucesión y observe que se aproxima, efectivamente, al número áureo.

2) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(3+6+\cdots+3n)$ *Sol:* $\frac{3}{2}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n})$ *Sol:* 3

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}$ *Sol:* $\frac{1}{2}$ d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$ $Sol:\frac{1}{2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}$ $Sol:\frac{b-a}{d-c}$ f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2+n}-1}{\sqrt{n}}$ *Sol:* $\sqrt{2}$

3) Con el paquete `load(solve_rec)` resuelva la ecuación: $x_1=1$; $x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}$ ¿sería capaz de hallar su límite? *Sug.: una vez resuelta, halle el límite de los términos pares y luego , el de los impares ¿qué número aparece como límite?*

4) Para cada $n>1$, se define $b_n=3\,b_{n-1}-2$; $b_1=5.$. Calcule: $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3^n}$

5) Estudie el carácter de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3+\cos\frac{1}{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}}{n^3\ln n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+4)(n+6)\cdots(n+2n)\right)^{-\frac{1}{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n+1)}{(n+1)!\,2^n}$

6) ¿Para qué valores de x, comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ son convergentes las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}^n x \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \operatorname{sen}^n x \quad ?$$

7) Calcule los intervalos de convergencia puntual y absoluta de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n!}x^n$; $\alpha>0$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}x^n$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Log\,(n)}x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)\,3^{2n-1}}$

8) Calcule la suma de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3n^2-n+1)\,2^{-n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)-\cos\left(\frac{2}{n+3}\right)\right)$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

9) Halle las series de Taylor en el punto $x=0$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x^2+1}}$ b) $f(x) = Log\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ c) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$

d) $f(x) = \dfrac{Log\,(1+x)}{1-x}$ e) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-16}$

10) Desarrollar en serie de potencias de $(x-2)$, el polinomio:

$$p(x) = x^3-8x^2+5x+3$$

Práctica 6

Funciones de varias variables. Parte I

6.1 Funciones de varias variable

Podemos clasificarlas en dos grupos:

- **Funciones reales:** cuando las imágenes son números reales, o sea con el esquema: $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- **Funciones vectoriales:** cuando las imágenes son vectores de $\mathbb{R}^m$, o sea con el esquema: $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
- Para definirlas, se hace como para una variable:

Función real de tres variables:

(%i4)

```
f(x,y,z):=cos(x*y)+%e^x*z;
```

(%o4) $\mathrm{f}(x, y, z) := \cos(x\, y) + e^x z$

Función vectorial de dos variables y tres componentes:

(%i5)

```
f(x,y):=[x*y,x^2+y^2,sin(x*y)];
```

(%o5) $\mathrm{f}(x, y) := [x\, y, x^2 + y^2, \sin(x\, y)]$

Evaluación de esta última en el punto $(2, 3)$

(%i6)

```
f(2,3);
```

(%o6) $[6, 13, \sin(6)]$

Acceso a la segunda componente de la función anterior:

(%i8)

```
f(x,y)[2];
```

(%o8) $y^2 + x^2$

► Nos centraremos, sobre todo, en funciones reales de dos o tres variables.

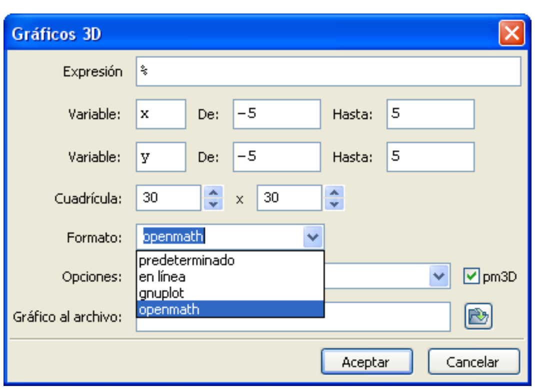
6.1.1 Gráficas de funciones reales de dos variables

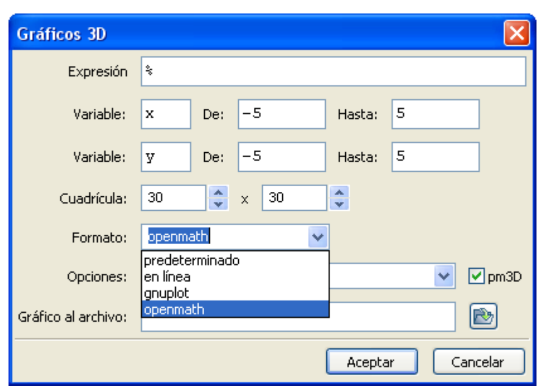
6.1.2 Gráficas con Plot3d

Al igual que para una variable, tenemos dos opciones: `polt3d`, accesible desde el menú **Gráficos–>Gráficos 3D**o la carga del paquete `draw` y usar el comando *draw3d*. Para el `plot3d`, tenemos los comandos:

`plot3d`*(expr, x_range, y_range, ..., options, ...)*	Donde *expr* es una función, *x_range, y_range, ...,* son los rangos de cada variable y *options* las distintas opciones. Cada opción deberá ir en un corchete
`plot3d`*([expr_1, expr_2, expr_3], x_rge, y_rge)*	Para dibujar varias gráficas en una única ventana.
`contour_plot`*(expr, x_range, y_range, options, ...)*	Dibuja las curvas de nivel *expr* en el rectángulo *x_range* por *y_range*. Cualesquiera otros argumentos adicionales se tratan como en plot3d.

En la ventana de gráficos 3D tenemos varias opciones para elegir:





► Con la opción `openmath` podemos girar la gráfica con el ratón.

▶ Otra opción es `[grid, 12, 80]`, que controla el mallado de la gráfica. Para enterarse de más opciones, consulte la ayuda del maxima.

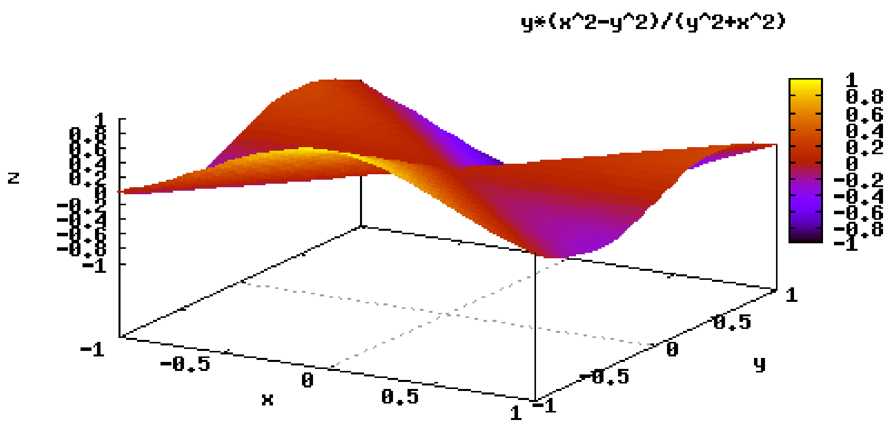
Ejemplo 6.1 (%i1)

```
f(x,y):=y*(x^2-y^2)/(x^2+y^2);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y) := \frac{y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

(%i2)

```
wxplot3d(f(x,y),[x,-1,1],[y,-1,1]);
```



(%t2)

(%o2)

6.1.3 Gráficas con draw3d

Necesitamos cargar el paquete `load(draw)`. Su manejo es muy parecido al draw2d:

`draw3d`*(optiones, graphic_object, ...)* Dibuja superficies

Entre las opciones tenemos, entre otras muchas:
- ▶ `surface_hide`
- ▶ `contour`
- ▶ `contour_levels`
- ▶ `color`
- ▶ `line_width` ▶ `user_preamble`

Describimos brevemente las mismas:
▶ `surface_hide`: valor por defecto: *false*. Si vale *true*, las partes ocultas no se muestran en las superficies de las escenas 3d.

▶ `contour`: sirve para poner líneas de nivel y puede tomar los valores:

- `none:` no se dibujan líneas de nivel.
- `base:` las líneas de nivel se proyectan sobre el plano xy.
- `surface:` las líneas de nivel se dibujan sobre la propia superficie.
- `both:` se dibujan dos conjuntos de líneas de nivel: sobre la superficie y las que se proyectan sobre el plano xy.
- `map:` las líneas de nivel se proyectan sobre el plano xy y el punto de vista del observador se coloca perpendicularmente a él.

► `contour_levels`:A contour_levels se le puede asignar un número natural, una lista de tres números o un conjunto numérico arbitrario:

- Si se le asigna un nº natural n, se dibujarán n líneas de nivel a intervalos iguales. Por defecto, $n = 5$.
- Si se le asigna una lista de tres números `[inf,p,sup]`, las isolíneas se dibujarán desde *inf* hasta *sup* en pasos de amplitud *p*.
- Si se le asigna un conjunto de números *n1, n2, ...*, se dibujarán las isolíneas correspondientes a los niveles *n1, n2, ...*

► `user_preamble` Aquí el valor más interesante es *"set size ratio 1"* para que las unidades iguales en cada eje.

► En cuanto a `color` y `line_width` ya sabemos su significado, pues es el mismo que para 2d.

Entre las graphic_object tenemos las posibilidades:

- `explicit(función,variable1,minval1,maxval1,variable2,minval2,maxval2)`
- `implicit (función,x,xmin,xmax, y,ymin,ymax, z,zmin,zmax)` para superficies en implíctas.
- `parametric (xfun,yfun,zfun,par,parmin,parmax)` para curvas del espacio en paramétricas
- `parametric_surface (xfun,yfun,zfun,par1,par1min,par1max,par2,par2min,par2max)` para superficies en paramétricas.

Cada objeto gráfico puede llevar sus propias opciones.

Ejemplo 6.2

```
(%i1)
f(x,y):=1-(x^2+y^2);
```

(%o1) $f(x, y) := 1 - (x^2 + y^2)$

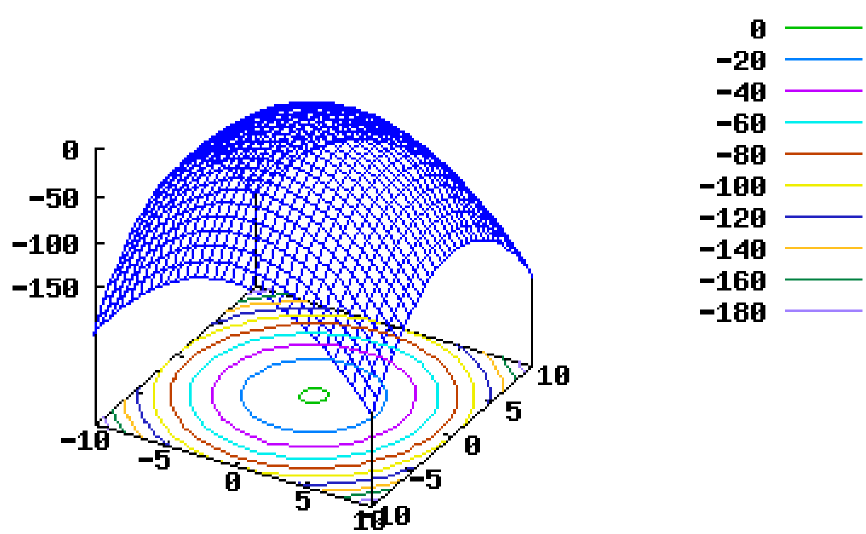
(%i2)

```
load(draw);
```

(%o2) d:/ARCHIV 1/MAXIMA 1.1/share/maxima/5.21.1/share/draw/draw.lisp

(%i3)

```
wxdraw3d(enhanced3d=false,
color=blue,
contour=base,
contour_levels=10,
user_preamble="set size ratio 1",
explicit(f(x,y),x,-10,10,y,-10,10));
```



(%o3) [gr3d ($explicit$)]

6.2 Límites y continuidad

6.2.1 Límites

► Para el caso de límites, nos limitaremos a funciones reales de dos variables. Puesto que las funciones elementales son continuas en sus dominios, en general para hallar un límite sustituimos las variables por los valores a los que tiende. El problema está cuando nos encontremos un caso de indeterminación tipo $\frac{0}{0}$.

► La norma general es para casos $(x, y) \to (0, 0)\, f(x, y)$. De no ser así, si $(x, y) \to (a, b)$, haremos previamente el cambio de variables $u = x - a$; $v = y - b$. Los pasos a seguir son:

a) Hallamos el límite acercándonos al origen por rectas: $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$. Si el resultado depende de la pendiente m, no existe el límite buscado, ya que éste debe ser independiente de cómo nos acerquemos al origen.

b) Si el límite anterior l no depende de m, sólo podemos asegurar que, en caso de existencia, su valor sería l. Sería un candidato al límite.

c) Si tenemos un candidato l al límite intentaremos poner $|f(x,y) - l|$ como producto de un infinitésimo por una función acotada, ya que se sabe que esto da lugar a otro infinitésimo. O sea $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - l| = 0 \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$

d) Para facilitar lo anterior, a veces da buen resultado pasar a polares $x = \rho \cos\theta$; $y = \rho \operatorname{sen}\theta$. Si conseguimos acotar por una función $g(\rho)$ tal que $\lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$, habremos conseguido nuestro objetivo.

e) Si no conseguimos la acotación de los apartados anteriores podemos sospechar de la no existencia del límite y acercarnos al origen por curvas, por ejemplo del tipo $y = x^n$ a ver si obtenemos algún valor distinto al candidato.

6.2.2 Continuidad

Como ya dijimos las funciones elementales, que son las que mayormente manejaremos, son continuas en sus dominios. Sólo en casos de funciones definidas a trozos tendremos que comprobar si $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$ donde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ y es $\boldsymbol{a}$ un punto de la frontera de los dominios de dos trozos diferentes. Para calcular el límite, posiblemente tengamos que usar las técnicas descritas anteriormente.

6.3 Derivadas parciales

Maxima puede calcular las funciones derivadas parciales de cualquier orden. Recuérdese que deben ser funciones elementales definidas en abiertos. Para ello, disponemos de los comandos:

`diff`*(función, x_1, n_1, ..., x_m, n_m)*	Deriva *función* n_1 veces respecto de x_1, n_2 veces respecto de $x_2 \cdots$
`grad`*(función real)*	Calcula el vector gradiente de *función real* en un punto genérico.
`jacobian`*(list func, list de var)*	Calcula la matriz jacobiana *list func* respecto de *list de var*.
`modulo`*(vector)*	Calcula el módulo del vector *vector*, que se introduce como una lista.
`vect_product`*(vector1, vector2)*	Calcula el producto vectorial*vector1* $\times$ vector2, que se introducen como listas de tres componentes. Para vectores del plano, se introduce 0 de tercera componente
`depends` *(list_func, list_var)*	Indica que las funciones *(list_func* dependen de las variables *list_var*. Consulte en la ayuda del Maxima para más opciones de `depends`

Para calcular $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}$ siendo $f(x,y,z) = x\cos(x\,y\,z) - 3\,z^2\cos(x\,z)$:

(%i1)

```
f(x,y,z):=x*cos(x*y*z)-3*z^2*cos(x*z);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y,z) := x\cos(x\,y\,z) - 3\,z^2\cos(x\,z)$

(%i3)

```
diff(f(x,y,z),x,2,y,1,z,2);
```

(%o3) $-x^4\,y^4\,z^3\sin(x\,y\,z) + 24\,x^2\,y^2\,z\sin(x\,y\,z) + 10\,x^3\,y^3\,z^2\cos(x\,y\,z) - 12\,x\,y\cos(x\,y\,z)$

NOTA: El casos "patológicos" de funciones no elementales, como las definidas a trozos, si queremos alguna derivada parcial en un punto de la frontera de dos dominios de trozos diferentes, no hay más remedio que hacer el cálculo mediante las definiciones, que para dos variables son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

EJERCICIO **6.1** *Estudiar la continuidad y derivabilidad en el origen de la función* $f(x, y) = sen(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2)$; $f(0, 0) = 1$

SOLUCIÓN

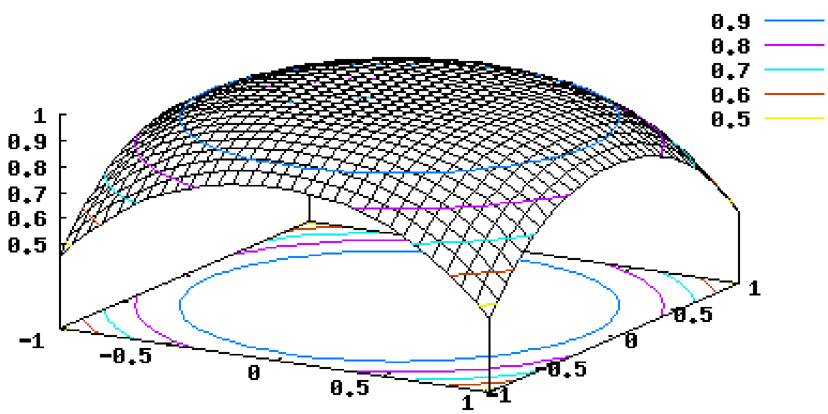
(%i1)

```
f(x,y):=sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x, y) := \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(%i2)

```
wxdraw3d(surface_hide=true,contour=both,explicit(f(x,y),x,-1,1,y,-1,1));
```



(%2)
(%o2) $[\mathrm{gr3d}(explicit)]$

Límites direccionales y radiales:

(%i3)

```
f(x,m*x);
```

(%o3) $\frac{\sin(m^2 x^2 + x^2)}{m^2 x^2 + x^2}$

(%i4)

```
limit(f(x,m*x),x,0);
```

(%o4) 1

Tenemos un candidato a límite: 1. Apliquemos el teorema de polares

(%i5)

```
abs(f(r*cos(t),r*sin(t))-1);
```

(%o6) $\left|\dfrac{\sin\left(r^2\sin(t)^2+r^2\cos(t)^2\right)}{r^2\sin(t)^2+r^2\cos(t)^2}-1\right|$

(%i7)

```
z:trigsimp(%o80);
```

(%o7) $\dfrac{\sin(r^2)-r^2}{r^2}$

(%i8)

```
limit(z,r,0);
```

(%o8) 0

Por tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1=f(0,0)$ y la función es continua en $(0,0)$.

Derivadas parciales:

(%i9)

```
(f(h,0)-1)/h;
```

(%o9) $\dfrac{\frac{\sin(h^2)}{h^2}-1}{h}$

(%i10)

```
(f(0,k)-1)/k;
```

(%o10) $\dfrac{\frac{\sin(k^2)}{k^2}-1}{k}$

(%i11)

```
limit((f(h,0)-1)/h,h,0);
```

(%o11) 0

(%i12)

```
limit((f(0,k)-1)/k,k,0);
```

(%o12) 0

Existen las dos parciales en el origen y ambas valen 0.

EJERCICIO **6.2** *Estudiar la continuidad y derivabilidad en el origen de la función*

$f(x,y) = (xy^2)/(x^2+y^4)$; $f(0,0)=0$

SOLUCIÓN

Límites radiales y direccionales:

(%i1)

```
f(x,m*x);
```

(%o1) $\dfrac{m^2 x^3}{m^4 x^4 + x^2}$

(%i2)

```
limit(f(x,m*x),x,0);
```

(%o2) 0

(%i3)

```
f(r*cos(t),r*sin(t));
```

(%o3) $\dfrac{r^3 \cos(t) \sin(t)^2}{r^4 \sin(t)^4 + r^2 \cos(t)^2}$

(%i4)

```
limit(f(r*cos(t),r*sin(t)),r,0);
```

(%o45) 0

Límite según la trayectoria $x = y^2$

(%i46)

```
f(y^2,y);
```

(%o4) $\dfrac{1}{2}$

(%i5)

```
limit(f(y^2,y),y,0);
```

(%o5) $\dfrac{1}{2}$

Derivadas parciales:

(%i6)

```
(f(h,0)-0)/h;
```

(%o6) 0

(%i7)

```
(f(0,k)-0)/k;
```

(%o7) 0

(%i8)

```
limit((f(h,0)-0)/h,h,0);
```

(%o8) 0

(%i9)

```
limit((f(0,k)-0)/k,k,0);
```

(%o9) 0

No es continua, pues los limites radiales y/o direccionales apuntan al candidato 0 pero el límite según la trayectoria particular nos dió 1/2. Sin embargo sí tiene derivadas parciales, y valen 0.

6.4 Derivadas direccionales

Sea una función real $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\mathbb{D}$ abierto y sea $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un punto de $\mathbb{D}$. Se llama *derivada direccional* de f en el punto $\boldsymbol{a}$ en la dirección del *vector unitario* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ al límite (caso de existir):

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\,\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})}{h}$$

EJERCICIO **6.3** *Calcule la derivada direccional de* $f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(x\,y)} - 2x^2$ *en el punto* $(-2, 1)$ *en la dirección de* $\boldsymbol{v} = (2, 3)$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y):=%e^(sin(x*y))-2*x^2;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x, y) := e^{\sin(x\,y)} - 2\,x^2$

(%i2)

```
a:[-2,1];
```

(%o2) $[-2, 1]$

(%i3)

```
u:[2,3]/modulo([2,3]);
```

(%o3) $[\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}]$

(%i4)

```
(f((a+h*u)[1],(a+h*u)[2])-f(a[1],a[2]))/h;
```

(%o4) $$\frac{e^{\sin\left(\left(\frac{2h}{\sqrt{13}}-2\right)\left(\frac{3h}{\sqrt{13}}+1\right)\right)} - 2\left(\frac{2h}{\sqrt{13}}-2\right)^2 - \frac{1}{e^{\sin(2)}} + 8}{h}$$

(%i5)

```
(f((a+h*u)[1],(a+h*u)[2])-f(a[1],a[2]))/h;
```

(%o5) $$\frac{e^{\sin\left(\left(\frac{2h}{\sqrt{13}}-2\right)\left(\frac{3h}{\sqrt{13}}+1\right)\right)} - 2\left(\frac{2h}{\sqrt{13}}-2\right)^2 - \frac{1}{e^{\sin(2)}} + 8}{h}$$

(%i6)

```
(tlimit(%,h,0));
```

(%o6) $$-\frac{4\sqrt{13}\cos(2) - 16\sqrt{13}\,e^{\sin(2)}}{13\,e^{\sin(2)}}$$

6.5 El vector gradiente

Sea una función real $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\mathbb{D}$ abierto y sea $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un punto de $\mathbb{D}$. Si en ese punto existen todas las derivadas parciales, se llama *vector gradiente* en ese punto, al vector

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)$$

EJERCICIO **6.4** *Halle el vector gradiente de la función* $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + x\,y\,z}{\sqrt{1+z^2\,y^4}}$ *en el punto* $(-2,1,3)$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y,z):=(x^2+x*y*z)/sqrt(1+z^2*y^4);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y,z) := \dfrac{x^2 + x\,y\,z}{\sqrt{1+z^2\,y^4}}$

(%i2)

```
grad(f(x,y,z));
```

(%o2) $\left(\frac{y\,z+2\,x}{\sqrt{y^4\,z^2+1}} \quad \frac{x\,z}{\sqrt{y^4\,z^2+1}}-\frac{2\,y^3\,z^2\,(x\,y\,z+x^2)}{(y^4\,z^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{x\,y}{\sqrt{y^4\,z^2+1}}-\frac{y^4\,z\,(x\,y\,z+x^2)}{(y^4\,z^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)$

(%i3)

```
%,x=-2,y=1,z=3;
```

(%o3) $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \frac{36}{10^{\frac{3}{2}}}-\frac{6}{\sqrt{10}} \quad \frac{6}{10^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$

(%i4)

```
ratsimp(%);
```

(%o4) $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \quad -\frac{6\,\sqrt{10}}{25} \quad -\frac{7}{5\,\sqrt{10}}\right)$

6.6 Funciones diferenciables

Sea $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ abierto y sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{D}$. Diremos que f es *diferenciable* en $\boldsymbol{a}$ si, y sólo si, existe una aplicación lineal:

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{h} & \longrightarrow & L(\boldsymbol{h}) \end{array}$$

de tal forma que se cumpla:

$$\boxed{\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0} \tag{6.1}$$

► Para que f sea diferenciable en $\boldsymbol{a}$, la única aplicación lineal L que puede cumplir (6.1) es:

$$L(\boldsymbol{h}) = h_1 \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} + \cdots + h_n \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}$$

Siendo $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$.

► La mayoría de las funciones elementales son diferenciables en su dominio. Si una función f tiene todas sus funciones derivadas parciales en un entorno de $\boldsymbol{a}$ y son continuas en ese punto, entonces f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$.

► Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, llamaremos $df(\boldsymbol{a})$ a su diferencial en $\boldsymbol{a}$. Tenemos que tener claro que es una *aplicación* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

► Si $\boldsymbol{a}$ es un "punto patológico", en el sentido que ya indicamos otras veces, es posible que haya que calcular el límite (6.1) para ver si f es difereciable. En otro caso, aplicaremos:

$$df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}$$

EJERCICIO **6.5** *Halle la diferencial de la función* $f(x,y) = e^x\,(x\,y^3+3y)$ *en el punto* $(0,\,-2)$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y):=%e^x*(x*y^3+3*y);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y) := e^x\,(x\,y^3+3\,y)$

(%i2)

```
grad(f(x,y));
```

(%o2) $\begin{pmatrix} e^x\,(x\,y^3+3\,y)+e^x\,y^3 & e^x\,(3\,x\,y^2+3) \end{pmatrix}$

Vemos que las 2 componentes son continuas en todo punto y la función es diferenciable en todo punto

(%i3)

```
%,x=0,y=-2;
```

(%o3) $\begin{pmatrix} -14 & 3 \end{pmatrix}$

(%i4)

```
define(df(h,k),%.[h,k]);
```

(%o4) $\mathrm{df}(h,k) := 3\,k-14\,h$

► Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ entonces f es continua en $\boldsymbol{a}$ y admite en ese punto cualquier derivada direccional, siendo además:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{a})) = \nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{u}$ es el vector unitario sobre la dirección. La **derivada máxima** se alcanza cuando $\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección y sentido que $\nabla f(\boldsymbol{a})$.

EJERCICIO **6.6** *Resuelva el ejercicio 6.3 usando la fórmula anterior*

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y):='%e^(sin(x*y))-2*x^2;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y) := {}'e^{\sin(x\,y)}-2\,x^2$

```
(%i2)
grad(f(x,y));
```

(%o2) $\left(y\,e^{\sin(x\,y)}\cos(x\,y) - 4\,x \quad x\,e^{\sin(x\,y)}\cos(x\,y) \right)$

```
(%i3)
%,x=-2,y=1;
```

(%o3) $\left(\frac{\cos(2)}{e^{\sin(2)}} + 8 \quad -\frac{2\cos(2)}{e^{\sin(2)}} \right)$

```
(%i4)
u:[2,3]/modulo([2,3]);
```

(%o4) $[\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}]$

```
(%i5)
Df:%o3.%;
```

(%o5) $\frac{2\left(\frac{\cos(2)}{e^{\sin(2)}} + 8\right)}{\sqrt{13}} - \frac{6\cos(2)}{\sqrt{13}\,e^{\sin(2)}}$

```
(%i6)
radcan(%);
```

(%o6) $-\frac{4\sqrt{13}\cos(2) - 16\sqrt{13}\,e^{\sin(2)}}{13\,e^{\sin(2)}}$

6.7 Plano tangente

Si f es una función real de dos variables, diferenciable en $\boldsymbol{a} = (a, b)$, se llama **plano tangente** a la gráfica de f en el punto $\boldsymbol{a}$ al plano:

$$T(x,y) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (x-a,\, y-b) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

NOTA: Si una superficie viene definida de forma implícita $F(x,y,z) = 0$, entonces el plano tangente en un punto $\boldsymbol{a} = (a,b,c)$ que cumpla la ecuación, se puede poner como:

$$\nabla F(\boldsymbol{a}) \cdot (x-a,\, y-b,\, z-c) = 0$$

EJERCICIO 6.7 *Dibuje la superficie* $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$ *y su plano tangente en el punto* $(1,1)$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y):=1-(x^2+y^2);
```

(%o1) $f(x, y) := 1 - (x^2 + y^2)$

(%i2)

```
grad(f(x,y));
```

(%o2) $\begin{pmatrix} -2x & -2y \end{pmatrix}$

(%i3)

```
%,x=1,y=1;
```

(%o3) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$

(%i4)

```
define(T(x,y),f(1,1)+%o3.[x-1,y-1]);
```

(%o4) $T(x, y) := -2\,(y - 1) - 2\,(x - 1) - 1$

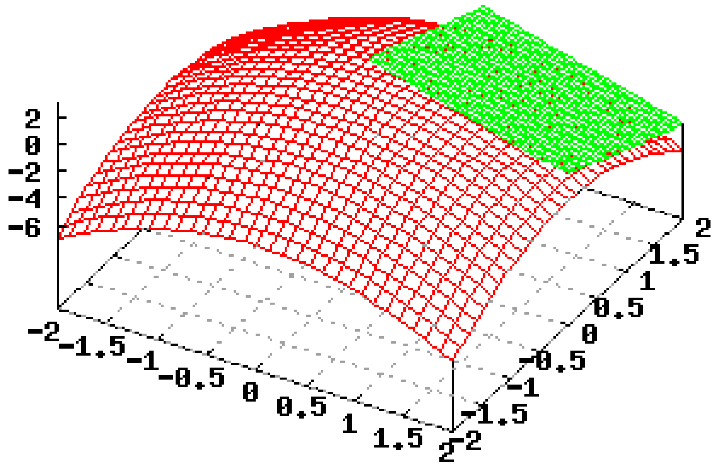
(%i5)

```
load(draw);
```

(%o5) $d :$
$/ARCHIV\ 1/MAXIMA\ 1.1/share/maxima/5.21.1/share/draw/draw.lisp$

(%i6)

```
wxdraw3d(
color=red,
grid = true,
surface_hide= true,
rot_vertical=40,
explicit(f(x,y),x,-2,2,y,-2,2),
color=green,
surface_hide= true,
explicit(T(x,y),x,-0,2,y,0,2),
user_preamble="set size ratio 0.7"
);
```



(%o6) [gr3d $(explicit, explicit)$]

6.8 Funciones vectoriales

Si ahora tenemos una función vectorial $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tenemos los mismos conceptos que para las funciones reales, pero con m componentes. Por ejemplo, las derivadas parciales tendrán m componentes, que serán las derivadas parciales respecto de cada componente. Lo mismo para derivadas direccionales y para la diferencial.

► En el momento que no exista alguna derivada o alguna diferencial de alguna componente, no existirá la total.

► El papel que hacía el vector gradiente, lo hace ahora **el jacobiano**: $Jf(\boldsymbol{a})$ que es una matriz que tiene por filas los gradientes de las componentes de f (ver comandos en 6.3). Entonces:

$$df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = Jf(\boldsymbol{a}) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \qquad Df_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = Jf(\boldsymbol{a}) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

EJERCICIO **6.8** *Sea la función vectorial* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ *definida como* $f(x, y) = \left(\frac{x \cos(y)}{5 + y^2}, 2\, e^{x+y}, \frac{x^2\, y}{3 + x^2\, y^2}\right)$ *En el punto* $\boldsymbol{a} = (-1, 5)$ *, calcule:* $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$ *;* $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$ *;* $df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$ *y* $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a})$ *, siendo* $\boldsymbol{u}$ *el vector unitario sobre* $(-2, 3)$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y):=[x*cos(y)/(5+y^2),2*%e^(x+y),x^2*y/(3+x^2*y^2)];
```

(%o1) $f(x,y) := [\frac{x\cos(y)}{5+y^2}, 2e^{x+y}, \frac{x^2 y}{3+x^2y^2}]$

Derivadas parciales:

(%i2)

```
diff(f(x,y),x);
```

(%o2) $[\frac{\cos(y)}{y^2+5}, 2e^{y+x}, \frac{2xy}{x^2y^2+3} - \frac{2x^3y^3}{(x^2y^2+3)^2}]$

(%i3)

```
diff(f(x,y),y);
```

(%o3) $[-\frac{x\sin(y)}{y^2+5} - \frac{2xy\cos(y)}{(y^2+5)^2}, 2e^{y+x}, \frac{x^2}{x^2y^2+3} - \frac{2x^4y^2}{(x^2y^2+3)^2}]$

Derivadas parciales el punto dado:

(%i4)

```
%o2,x=-1,y=5;
```

(%o4) $[\frac{\cos(5)}{30}, 2e^4, -\frac{15}{392}]$

(%i5)

```
%o3,x=-1,y=5;
```

(%o5) $[\frac{\sin(5)}{30} + \frac{\cos(5)}{90}, 2e^4, -\frac{11}{392}]$

Diferencial en el punto dado:

(%i6)

```
jacobian(f(x,y),[x,y]);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} \frac{\cos(y)}{y^2+5} & -\frac{x\sin(y)}{y^2+5} - \frac{2xy\cos(y)}{(y^2+5)^2} \\ 2e^{y+x} & 2e^{y+x} \\ \frac{2xy}{x^2y^2+3} - \frac{2x^3y^3}{(x^2y^2+3)^2} & \frac{x^2}{x^2y^2+3} - \frac{2x^4y^2}{(x^2y^2+3)^2} \end{pmatrix}$

(%i7)

```
%,x=-1,y=5;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} \frac{\cos(5)}{30} & \frac{\sin(5)}{30}+\frac{\cos(5)}{90} \\ 2\,e^4 & 2\,e^4 \\ -\frac{15}{392} & -\frac{11}{392} \end{pmatrix}$

(%i8)

```
define(Df(h,k),%.matrix([h],[k]));
```

(%o8) $\mathrm{Df}\left(h,k\right) := \begin{pmatrix} \left(\frac{\sin(5)}{30}+\frac{\cos(5)}{90}\right)\,k+\frac{\cos(5)\,h}{30} \\ 2\,e^4\,k+2\,e^4\,h \\ -\frac{11\,k}{392}-\frac{15\,h}{392} \end{pmatrix}$

Derivada direccional:

(%i9)

```
u:[-2,3]/modulo([-2,3]);
```

(%o9) $[-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}]$

(%i10)

```
%o7.transpose(%);
```

(%o10) $\begin{pmatrix} \frac{3\left(\frac{\sin(5)}{30}+\frac{\cos(5)}{90}\right)}{\sqrt{13}}-\frac{\cos(5)}{15\,\sqrt{13}} \\ \frac{2\,e^4}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{392\,\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

(%i11)

```
ratsimp(%);
```

(%o11) $\begin{pmatrix} \frac{3\,\sqrt{13}\sin(5)-\sqrt{13}\cos(5)}{390} \\ \frac{2\,e^4}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{392\,\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

6.9 Ejercicios

1º) Sea la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcule las derivadas parciales en $(0,0)$ y estudie la diferenciabilidad en ese punto.

(*Sug: Como el* $(0,0)$ *es un "punto patológico", hay que hacer todo usando las definiciones. Véase 6.3 y 6.6*).

2º) Halle la derivada de la función $f(x,y)=x^2y+y^2-1$ en el punto de la curva $y=-\sqrt{x^2+x-5}$ en el que $y=-1$ y $x>0$, en una dirección tangencial a esa curva en ese punto.

3º) Una función de dos variables, diferenciable, tiene en el punto $(1,2)$ derivadas direccionales con los siguientes valores:

a) $2\sqrt{2}$ en la dirección hacia al punto $(-1,4)$

b) -2 en la dirección al punto $(-2,1)$

Hallar $\nabla f(1,2)$ y la derivada en ese punto en la dirección al punto $(4,6)$

4º) Un cono tiene base de radio r y altura h. Se desea aumentar su volumen variando ligeramente uno de los dos parámetros: radio o altura. Estudiar cual de los dos parámetros interesa variar para que el aumento de volumen sea mayor.

5º) La temperatura de los puntos de un plano viene determinada por la función $T(x,y)=\dfrac{1-x^2-y^2}{2+x^2y^2}$; un insecto que se encuentra en el punto (1,1), ¿hacia qué dirección debe moverse para estar lo más caliente posible?

6º) Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Probar que existe $D_{\boldsymbol{u}}f(0,0)$ para cualquier vector unitario $\boldsymbol{u}$ y hallar el valor de esa derivada direccional.

b) Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

c) Hallar la derivada en el punto $(1,-2)$ en la dirección del vector $(2,3)$.

Sug: Aplique lo indicado en el primer ejercicio

7º) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 - \{ (0,0) \} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, siendo $f = (f_1 , f_2)$ de forma que:

$$f_1(x,y) = e^{x-y}\,(x^2 - 2y^2)\ ;\quad f_2(x,y) = xy\, e^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

a) Hallar, en caso de que existan, las derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$.

b) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(1,-2)$.

c) Calcular la derivada direccional de f en el punto $(1,-2)$, según la dirección y sentido del vector $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

8º) Sea A el área de un triángulo de lados a y b que forman un ángulo de θ radianes. Supongamos que $\theta = \frac{\pi}{6}$, que a aumenta un 4% y que b aumenta un 3%. Utilícese la diferencial para estimar el cambio porcentual de A.

9º) Hallar los planos tangentes a las superficies siguientes, en los puntos indicados:

a) $z = e^{\cos x} \cdot (x + y^3)$ en el punto en que $x = \pi \qquad y = 2$

b) $x^2 - 2xy + z^3 = 0$ en $(-1,-1,1)$.

c) $z = \ln\left(\frac{x}{y+4}\right)$ en en el punto en que $x = -2 \qquad y = -5$

10º) Calcule el plano tangente y la recta normal a cada una de las superficies en el punto P. Haga la gráfica de cada función con su respectivo plano tangente:

a) $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$, $P = (1,-1,4)$.

b) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $P = (1,0,0)$.

c) $z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 = 3$, $P = (1, 1 + \sqrt{e}, 1)$.

11º) Determinar las constantes $a, b,$ y c , tales que la derivada máxima de la función:

$$f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^2$$

en el punto $(1,2,-1)$, se obtenga en la dirección al punto $(1,5,3)$ y su valor sea 20.

12º) Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Se pide:

a) Calcule el gradiente de f en todo punto.

b) Compruebe que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Práctica 7

Funciones de varias variables. Parte II

7.1 La regla de la cadena

- Sea $g : H \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con H abierto, función diferenciable en $\boldsymbol{a} \in H$.
- Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, D abierto y $g(H) \subset D$, diferenciable en $\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a})$.
- Entonces, $f \circ g$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y además:

$$J(f \circ g)(\boldsymbol{a}) = Jf(\boldsymbol{b}) \cdot Jg(\boldsymbol{a})$$

EJERCICIO 7.1 *Sean $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \neq 0\}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por:*

$$g(x, y, z) = \left(\frac{x}{y},\ xyz^2\right) \qquad f(x, y) = (x^4,\ xy^3)$$

Calcular la diferencial de $f \circ g$ en el punto $(1, -2, 2)$ y la derivada direccional en ese punto , según la dirección del vector $\boldsymbol{u} = (1, 3, 1)$.

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y):=[x^4,x*y^3];
```

(%o1) $\mathrm{f}\left(x, y\right) := [x^4, x\,y^3]$

(%i2)

```
g(x,y,z):=[x/y,x*y*z^2];
```

(%o2) $\mathrm{g}\left(x, y, z\right) := [\frac{x}{y}, x\,y\,z^2]$ (%i3)

```
jacobian(f(x,y),[x,y]);
```

(%o3) $\begin{pmatrix} 4\,x^3 & 0 \\ y^3 & 3\,x\,y^2 \end{pmatrix}$

(%i4)

```
jacobian(g(x,y,z),[x,y,z]);
```

(%o4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \\ y\,z^2 & x\,z^2 & 2\,x\,y\,z \end{pmatrix}$

(%i5)

```
g(1,-2,2);
```

(%o5) $[-\frac{1}{2}, -8]$

(%i6)

```
%o4,x=1,y=-2,z=2;
```

(%o6) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

(%i7)

```
%o3,x=-1/2,y=-8;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -512 & -96 \end{pmatrix}$

El jacobiano de $f \circ g$ en el punto dado, será:

(%i8)

```
%o7.%o6;
```

(%o8) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 1024 & -256 & 768 \end{pmatrix}$

La diferencial de $f \circ g$ será:

(%i9)

```
define(dh(h,k,p),%.matrix([h],[k],[p]));
```

(%o9) $\mathrm{dh}\,(h,k,p) := \begin{pmatrix} \frac{k}{8} + \frac{h}{4} \\ 768\,p - 256\,k + 1024\,h \end{pmatrix}$

Y la derivada direccional:

(%i10)

```
u:[1,3,1]/modulo([1,3,1]);
```

(%o10) $\left[\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right]$

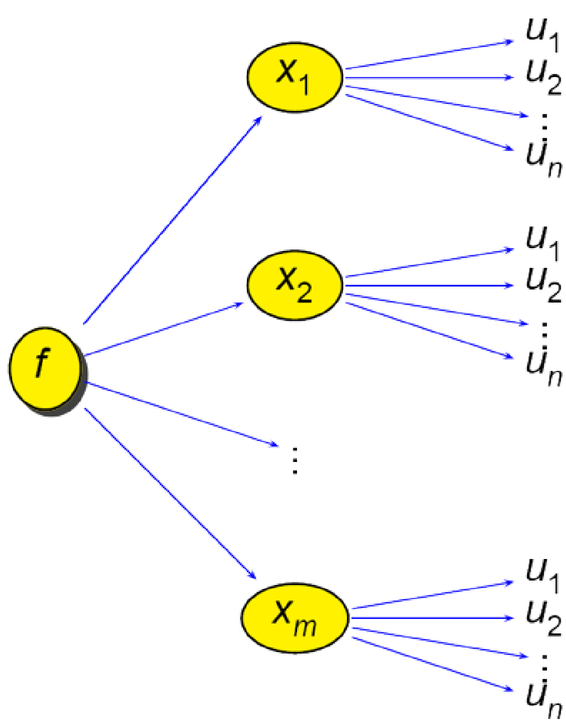
(%i11)

```
Dh:%o8.transpose(%);
```

(%o11) $\begin{pmatrix} \frac{5}{8\sqrt{11}} \\ \frac{1024}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$

7.1.1 Esquemas para la regla de la cadena

Si la función real f depende de las m variables $x_1, x_2, \cdots, x_m$ y la función $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ tiene m componentes de n variables cada una: $u_1, u_2, \cdots, u_n$ la función compuesta se obtiene haciendo $x_1 = g_1$, $x_2 = g_2 \cdots$, $x_m = g_m$. A veces, viene bien un esquema de este tipo:



Se tiene, con abuso de lenguaje, que por ejemplo:

$$\frac{\partial f}{\partial u_3} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_3} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial u_3}$$

¿Cómo se hace esto con Maxima?: simplemente definiendo las expresiones de las variables.

EJERCICIO 7.2 *Sea* $f(x,y,z,u,v) = x\,y + z^2 + u - v^2$; *donde* $x = \operatorname{sen}(u+v)$; $y = u^2 + 3\,v$; $z = -u^2\,v$. *Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial u}$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
x:sin(u+v);
```

(%o1) $\sin(v+u)$

(%i2)

```
y:u^2+3*v;
```

(%o2) $3\,v + u^2$

(%i3)

```
z:-u^2*v;
```

(%o3) $-u^2\,v$

(%i4)

```
f:x*y+z^2+u-v^2;
```

(%o4) $(3\,v + u^2)\,\sin(v+u) + u^4\,v^2 - v^2 + u$

(%i5)

```
diff(f,u);
```

(%o5) $2\,u\sin(v+u) + (3\,v + u^2)\,\cos(v+u) + 4\,u^3\,v^2 + 1$

(%i6)

```
diff(f,v);
```

(%o6) $3\sin(v+u) + (3\,v + u^2)\,\cos(v+u) + 2\,u^4\,v - 2\,v$

7.2 Extremos relativos

Sea $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D abierto y supongamos que f de clase 2 en $\mathbb{D}$ (admite derivadas continuas hasta de 2º orden). Ya sabemos que un **extremo relativo** debe de ser, antes que nada, un **punto crítico**. O sea, un punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{D}$ que sea solución del sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{7.1}$$

► Si $\boldsymbol{a}$ es un punto crítico, para clasificarlo, cobra gran importancia la matriz Hessiana en $\boldsymbol{a}$:

$$H_f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Para este tema, disponemos de los comandos:

`hessiano` (*func_real*)	Calcula el hessiano de la función real *func_real* en un punto genérico
`matrix_fc` (*forma_cuadrt*)	Calcula la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática: *forma_cuadrt*.
`sylvester` (*matr_cuadr*)	Calcula la sucesión de Sylvester de la matriz cuadrada: *matr_cuadr*.

Para clasificar un punto crítico $\boldsymbol{a}$ tenemos dos opciones:

1º) Resolver la ecuación característica. $|H_f(\boldsymbol{a}) - \lambda I|$ donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^n$

a) Si todas las soluciones en λ son positivas, en $\boldsymbol{a}$ hay un **mínimo relativo.**

b) Si todas las soluciones en λ son negativas, en $\boldsymbol{a}$ hay un **máximo relativo.**

c) Si hay raíces positivas y raíces negativas, entonces no hay ni máximo ni mínimo (**punto de silla**)

d) Si hay alguna raíz 0 y las restantes son del mismo signo, el criterio falla.

2º) Usar el criterio de **Silvester**: si llamamos a_{ij} los términos de $A = H_f(\boldsymbol{a})$ construimos la sucesión:

$$1\ ;\ a_{11}\ ;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\ ;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\ ;\ \cdots\ ;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a) Si en la sucesión de Sylvester, todos los términos son positivos, hay un **mínimo relativo** en $\boldsymbol{a}$.

b) Si en la sucesión de Sylvester , todos los términos son no nulos y alternan el signo, hay un **máximo relativo** en $\boldsymbol{a}$.

7.2.1 Extremos para dos variables

Si f sólo tiene dos variables, llamemos $A = H_f(\boldsymbol{a})$ y podemos usar el criterio:

$$
\begin{array}{ll}
|A| > 0 & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) > 0 & \textbf{mínimo relativo} \text{ en } \boldsymbol{a}. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) < 0 & \textbf{máximo relativo} \text{ en } \boldsymbol{a}. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) = 0 & \text{Caso imposible.} \end{array} \right. \\
|A| < 0 & \textbf{punto de silla} \text{ en } \boldsymbol{a}. \\
|A| = 0 & \text{Caso dudoso}
\end{array}
$$

EJERCICIO **7.3** *Localice y clasifique los puntos críticos de* $f(x, y) = 3x - x^3 - 3xy^2$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y):=3*x-x^3-3*x*y^2;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x, y) := 3\,x - x^3 + (-3)\,x\,y^2$

(%i2)

```
algsys([diff(f(x,y),x),diff(f(x,y),y)],[x,y]);
```

(%o2) $[[x = -1, y = 0], [x = 1, y = 0], [x = 0, y = -1], [x = 0, y = 1]]$

Hallamos el hessiano en cada punto

(%i3)

```
hessiano(f(x,y));
```

(%o3) $\begin{pmatrix} -6\,x & -6\,y \\ -6\,y & -6\,x \end{pmatrix}$

Punto (-1,0):

(%i7)

```
%o3,x=-1,y=0;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

(%i5)

```
determinant(%);
```

(%o5) 36

$|A| > 0$ y $a_{11} > 0$ hay un mínimo relativo. Vamos con el punto (1,0):

(%i8)

```
%o3,x=1,y=0;
```

(%o8) $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

(%i9)

```
determinant(%);
```

(%o9) 36

Al ser $|A| > 0$ y $a_{11} < 0$ hay un máximo relativo. Vamos con el punto (0,-1):

(%i10)

```
%o3,x=0,y=-1;
```

(%o10) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

(%i11)

```
determinant(%);
```

(%o11) -36

Al ser $|A| < 0$ hay un punto de silla. Vamos con (0,1):

(%i12)

```
%o3,x=0,y=1;
```

(%o12) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

(%i13)

```
determinant(%);
```

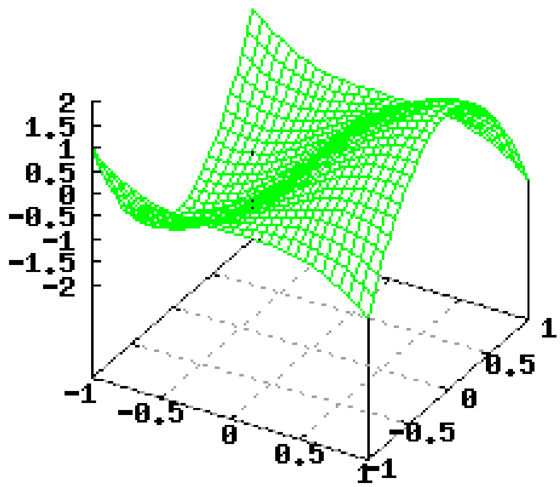
(%o13) -36

Al ser $|A| < 0$ hay un punto de silla.

(%i22)

```
wxdraw3d(
color=green,
grid = true,
surface_hide= true,
rot_vertical=60,
explicit(f(x,y),x,-1,1,y,-1,1),
user_preamble="set size ratio 1"
);
```

(%t22)



(%o22) $[\mathrm{gr3d}\,(explicit)]$

EJERCICIO 7.4 *Halle y clasifique los extremos de* $f(x,y) = x\,y\,e^{-x^2-y^2}$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y):=x*y*%e^(-x^2-y^2);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y) := x\,y\,e^{-x^2-y^2}$

(%i2)

```
algsys([diff(f(x,y),x),diff(f(x,y),y)],[x,y]);
```

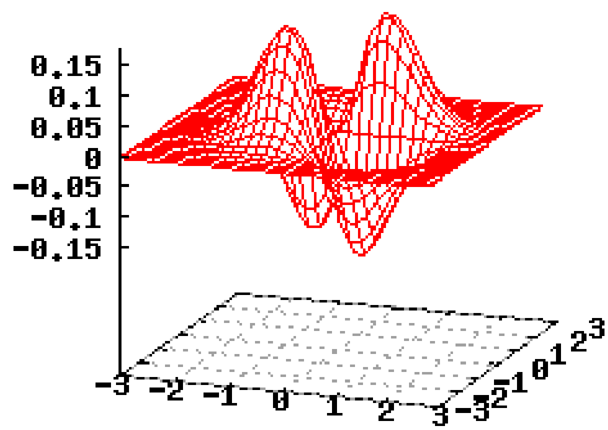
(%o2) $[[x=0,y=0],[x=-\frac{1}{\sqrt{2}},y=-\frac{1}{\sqrt{2}}],[x=\frac{1}{\sqrt{2}},y=-\frac{1}{\sqrt{2}}],[x=-\frac{1}{\sqrt{2}},y=$

$\frac{1}{\sqrt{2}}], [x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}]]$

(%i22)

```
wxdraw3d(
color=green,
grid = true,
surface_hide= true,
rot_vertical=75,
rot_horizontal=20,
explicit(f(x,y),x,-3,3,y,-3,3),
user_preamble="set size ratio 1"
);
```

(%t22)



(%o22) $[\mathrm{gr3d}\,(explicit)]$

(%i4)

```
hessiano(f(x,y));
```

(%o4)

$$\begin{pmatrix} 4x^3 y e^{-y^2-x^2} - 6xy e^{-y^2-x^2} & 4x^2y^2 e^{-y^2-x^2} - 2y^2 e^{-y^2-x^2} - 2x^2 e^{-y^2-x^2} + e^{-y^2-x^2} \\ 4x^2y^2 e^{-y^2-x^2} - 2y^2 e^{-y^2-x^2} - 2x^2 e^{-y^2-x^2} + e^{-y^2-x^2} & 4xy^3 e^{-y^2-x^2} - 6xy e^{-y^2-x^2} \end{pmatrix}$$

(%i5)

```
%,[x=-1/sqrt(2),y=-1/sqrt(2)];
```

(%o5) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{pmatrix}$

(%i6)

```
determinant(%);
```

(%o6) $\frac{4}{e^2}$

En $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ hay un máximo relativo

(%i8)

```
%o4,[x=1/sqrt(2),y=-1/sqrt(2)];
```

(%o8) $\begin{pmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$

(%i9)

```
determinant(%);
```

(%o9) $\frac{4}{e^2}$

En $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ hay un mínimo relativo

(%i10)

```
%o4,[x=-1/sqrt(2),y=1/sqrt(2)];
```

(%o10) $\begin{pmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$

(%i11)

```
determinant(%);
```

(%o11) $\frac{4}{e^2}$

En $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ hay un mínimo relativo

(%i12)

```
%o4,[x=1/sqrt(2),y=1/sqrt(2)];
```

(%o12) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{pmatrix}$

(%i13)

```
determinant(%);
```

(%o13) $\frac{4}{e^2}$

En $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hay un máximo relativo

(%i14)

```
%o4,[x=0,y=0];
```

(%o14) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(%i15)

```
determinant(%);
```

(%o15) -1

En $(0,0)$ hay un punto de silla.

7.3 Extremos condicionados por igualdades

Sea $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D abierto, y supongamos que la variable $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{D}$ la obligamos a cumplir m igualdades (con $m < n$):

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 0\,;\; g_2(\boldsymbol{x}) = 0\,;\; \cdots\,; g_m(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{7.2}$$

Entonces pueden aparecer extremos relativos que no tienen nada que ver con los que había si $\boldsymbol{x}$ se moviera libremente en $\mathbb{D}$. Se dice que son **extremos condicionados** por las restricciones 7.2.

▶ Para calcular los *puntos críticos*, deberemos construir la **función de Lagrange**:

$$F = f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1\, g_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2\, g_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_m\, g_m(\boldsymbol{x})$$

que, como vemos, tiene $n + m$ variables: $x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1 . \lambda_2, \cdots, \lambda_m$

▶ Entonces resolvemos el sistema de $n + m$ ecuaciones y $n + m$ incógnitas:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \qquad g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad g_2(\boldsymbol{x}) = 0 \cdots g_m(\boldsymbol{x}) = 0$$

▶ Los puntos críticos son los $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ solución del sistema anterior. Los $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, que son variables auxiliares, no se consideran. Deberá cumplirse, además que $\nabla g_1(\boldsymbol{a}), \nabla g_2(\boldsymbol{a}), \cdots, \nabla g_m(\boldsymbol{a})$ son linealmente independientes. ▶ Ahora consideramos la forma cuadrática:

$$Q(\boldsymbol{h}) = (h_1\;\; h_2, \;\cdots, \; h_n)\Big(H_F(\boldsymbol{a})\Big)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

junto con las restricciones:

$$dg_1(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = 0 \qquad g_2(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = 0 \qquad \cdots dg_m(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = 0$$

Este último sistema lineal homogéneo tiene m ecuaciones linealmente independientes y n incógnitas. Podrán despejarse n incógnitas en función de las $n-m$ restantes y sustituirlas en 7.3. Quedará otra forma cuadrática pero de dimensión m, en la que hacemos el mismo análisis que para extremos libres.

EJERCICIO **7.5** *Halle los extremos relativos de la función* $2x^2+y^2+\frac{x^2}{2}-x+2y-z$ *con la restricción* $4x^2+2y^2+z^2=4$

SOLUCIÓN

(%i1)

```
f(x,y,z):=2*x^2+y^2+z^2/2-x+2*y-z;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y,z):=2x^2+y^2+\frac{z^2}{2}-x+2y-z$

(%i2)

```
g(x,y,z):=4*x^2+2*y^2+z^2-4;
```

(%o2) $\mathrm{g}(x,y,z):=4x^2+2y^2+z^2-4$

Función de Lagrange:

(%i3)

```
define(F(x,y,z,a),f(x,y,z)+a*g(x,y,z));
```

(%o3) $\mathrm{F}(x,y,z,a):=a\,(z^2+2y^2+4x^2-4)+\frac{z^2}{2}-z+y^2+2y+2x^2-x$

(%i4)

```
algsys([diff(F(x,y,z,a),x),diff(F(x,y,z,a),y),diff(F(x,y,z,a),z),g(x,y,z)],[x,y,z,a])
```

(%o4) $[[x=-\frac{1}{\sqrt{13}},y=\frac{4}{\sqrt{13}},z=-\frac{4}{\sqrt{13}},a=-\frac{\sqrt{13}+4}{8}],[x=\frac{1}{\sqrt{13}},y=-\frac{4}{\sqrt{13}},z=\frac{4}{\sqrt{13}},a=\frac{\sqrt{13}-4}{8}]]$

Veamos para el punto $x=-\frac{1}{\sqrt{13}}$, $y=\frac{4}{\sqrt{13}}$, $z=-\frac{4}{\sqrt{13}}$. En F sustituimos $a=-\frac{\sqrt{13}+4}{8}$

(%i5)

```
define(H(x,y,z),F(x,y,z,-(sqrt(13)+4)/8));
```

(%o5) $\mathrm{H}(x,y,z):=\frac{(-\sqrt{13}-4)\,(z^2+2y^2+4x^2-4)}{8}+\frac{z^2}{2}-z+y^2+2y+2x^2-x$

Ahora hallamos el hessiano de esa función en el punto
$x=\frac{1}{-\sqrt{13}}$; $y=\frac{4}{\sqrt{13}}$; $z=-\frac{4}{\sqrt{13}}$

(%i6)

```
hessiano(H(x,y,z));
```

$$\text{(\%o6)}\quad \begin{pmatrix} -\sqrt{13} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{13}-4}{2}+2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{13}-4}{4}+1 \end{pmatrix}$$

Nos sale independiente de las variables. Así que no hay que sustituir los valores de éstas. La forma cuadrática que se obtiene con esa matriz es:

(%i7)

```
[h,k,p].%o6.transpose([h,k,p]);
```

$$\text{(\%o7)}\quad \left(\frac{-\sqrt{13}-4}{4}+1\right)p^2+\left(\frac{-\sqrt{13}-4}{2}+2\right)k^2-\sqrt{13}\,h^2$$

(%i8)

```
ratsimp(%);
```

$$\text{(\%o8)}\quad -\frac{\sqrt{13}\,p^2+2\sqrt{13}\,k^2+4\sqrt{13}\,h^2}{4}$$

Ahora hallamos la diferencial de g en ese punto:

(%i9)

```
grad(g(x,y,z));
```

$$\text{(\%o9)}\quad \begin{pmatrix} 8x & 4y & 2z \end{pmatrix}$$

(%i10)

```
%,x=-1/sqrt(13),y=4/sqrt(13),z=-4/sqrt(13);
```

$$\text{(\%o10)}\quad \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{13}} & \frac{16}{\sqrt{13}} & -\frac{8}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

(%i11)

```
define(dg(h,k,p),%.transpose([h,k,p]));
```

$$\text{(\%o11)}\quad \mathrm{dg}\,(h,k,p):=-\frac{8\,p}{\sqrt{13}}+\frac{16\,k}{\sqrt{13}}-\frac{8\,h}{\sqrt{13}}$$

Resolvemos $dg(h,k,p)=0$:

(%i12)

```
linsolve([dg(h,k,p)],[h,k,p]);
```

(%o12) $[h = 2k - p]$

Llevamos esos resultados a %o8:

(%i13)

```
%o8,h=2*k-p;
```

(%o13) $$-\frac{\sqrt{13}\,p^2 + 4\sqrt{13}\,(2k-p)^2 + 2\sqrt{13}\,k^2}{4}$$

(%i14)

```
ratsimp(%);
```

(%o14) $$-\frac{5\sqrt{13}\,p^2 - 16\sqrt{13}\,k\,p + 18\sqrt{13}\,k^2}{4}$$

Podemos ponerlo como una forma cuadrática de matriz:

(%i15)

```
A:matrix_fc(%);
```

(%o15) $$\begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{13}}{4} & 2\sqrt{13} \\ 2\sqrt{13} & -\frac{9\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

(%i16)

```
determinant(%);
```

(%o16) $$\frac{169}{8}$$

La sucesión de Sylvester queda +,-,+. Así que hay un máximo en ese punto. Repitamos el proceso con el otro punto $x = \frac{1}{\sqrt{13}}, y = -\frac{4}{\sqrt{13}}, z = \frac{4}{\sqrt{13}}, a = \frac{\sqrt{13}-4}{8}$

(%i5)

```
define(H(x,y,z),F(x,y,z,(sqrt(13)-4)/8));
```

(%o5) $$\mathrm{H}(x,y,z) := \frac{\left(\sqrt{13}-4\right)\left(z^2+2y^2+4x^2-4\right)}{8} + \frac{z^2}{2} - z + y^2 + 2y + 2x^2 - x$$

(%i6)

```
hessiano(H(x,y,z));
```

(%o6) $$\begin{pmatrix} \sqrt{13} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{13}-4}{2}+2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}-4}{4}+1 \end{pmatrix}$$

(%i7)

```
[h,k,p].%.transpose([h,k,p]);
```

(%o7) $\left(\frac{\sqrt{13}-4}{4}+1\right)\,p^2+\left(\frac{\sqrt{13}-4}{2}+2\right)\,k^2+\sqrt{13}\,h^2$

(%i8)

```
ratsimp(%);
```

(%o8) $\frac{\sqrt{13}\,p^2+2\,\sqrt{13}\,k^2+4\,\sqrt{13}\,h^2}{4}$

(%i9)

```
grad(g(x,y,z));
```

(%o9) $\begin{pmatrix}8\,x & 4\,y & 2\,z\end{pmatrix}$

(%i10)

```
%,x=1/sqrt(13),y=-4/sqrt(13),z=4/sqrt(13);
```

(%o10) $\begin{pmatrix}\frac{8}{\sqrt{13}} & -\frac{16}{\sqrt{13}} & \frac{8}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$

(%i11)

```
define(dg(h,k,p),%.transpose([h,k,p]));
```

(%o11) $\mathrm{dg}\left(h,k,p\right):=\frac{8\,p}{\sqrt{13}}-\frac{16\,k}{\sqrt{13}}+\frac{8\,h}{\sqrt{13}}$

(%i12)

```
linsolve([dg(h,k,p)],[h,k,p]);
```

(%o12) $[h=2\,k-p]$

(%i13)

```
%o8,h=2*k-p;
```

(%o13) $\frac{\sqrt{13}\,p^2+4\,\sqrt{13}\,\left(2\,k-p\right)^2+2\,\sqrt{13}\,k^2}{4}$

(%i14)

```
ratsimp(%);
```

(%o14) $\frac{5\,\sqrt{13}\,p^2-16\,\sqrt{13}\,k\,p+18\,\sqrt{13}\,k^2}{4}$

(%i15)

```
A:matrix_fc(%);
```

(%o15) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{13}}{4} & -2\sqrt{13} \\ -2\sqrt{13} & \frac{9\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$

(%i16)

```
determinant(%);
```

(%o16) $\frac{169}{8}$

La sucesión de Sylvester queda +,+,+. Así que hay un mínimo relativo en ese punto.

► En resumen, hay un máximo relativo en $x = -\frac{1}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $z = -\frac{4}{\sqrt{13}}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{1}{\sqrt{13}}$, $y = -\frac{4}{\sqrt{13}}$, $z = \frac{4}{\sqrt{13}}$

7.4 Extremos absolutos en conjuntos compactos

► Si se trata de determinar los extremos absolutos de una función f de clase 1 en el abierto $\mathbb{D}$ con un conjunto de restricciones M que sea *compacto*(cerrado y acotado),el problema se simplifica.

► Sabemos que *una función continua en un compacto, siempre alcanza un valor mínimo y un valor máximo en ese compacto.*

► Con esto, sólo hace falta calcular los puntos críticos que están en M y comprobar en cuáles alcanza f el mínimo y máximo valor, valorando la función en cada punto crítico.

EJERCICIO **7.6** *Halle los extremos absolutos de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ cuando nos movemos por la curva intersección de las superficies: $x^2 + y^2 = 2$; $x + z = 1$*

SOLUCIÓN

La curva es intersección de un plano y un cilindro (elipse) y es, por tanto, compacto. Hallemos los puntos críticos sobre las restricciones.

(%i1)

```
f(x,y,z):=x+y+z;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x, y, z) := x + y + z$

(%i2)

```
g(x,y,z):=x^2+y^2-2;
```

(%o2) $\mathrm{g}\left(x,y,z\right) := x^2 + y^2 - 2$

(%i3)

```
h(x,y,z):=x+z-1;
```

(%o3) $\mathrm{h}\left(x,y,z\right) := x + z - 1$

Función de Lagrange:

(%i4)

```
define(F(x,y,z,a,b),f(x,y,z)+a*g(x,y,z)+b*h(x,y,z));
```

(%o4)
$\mathrm{F}\left(x,y,z,a,b\right) := b\,\left(z + x - 1\right) + z + a\,\left(y^2 + x^2 - 2\right) + y + x$

(%i5)

```
[diff(F(x,y,z,a,b),x),diff(F(x,y,z,a,b),y),diff(F(x,y,z,a,b),z),g(x,y,z),h(x,y,z)];
```

(%o5) $[2\,a\,x + b + 1, 2\,a\,y + 1, b + 1, y^2 + x^2 - 2, z + x - 1]$

(%i6)

```
algsys(%,[x,y,z,a,b]);
```

(%o6) $[[x = 0, y = -\sqrt{2}, z = 1, a = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}, b = -1], [x = 0, y = \sqrt{2}, z = 1, a = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}, b = -1]]$

Ahora sólo tenemos que valorar f en cada punto crítico:

(%i7)

```
f(0,-sqrt(2),1);
```

(%o7) $1 - \sqrt{2}$

(%i8)

```
f(0,sqrt(2),1);
```

(%o8) $\sqrt{2} + 1$

Luego el máximo absoluto se encuentra en $(0, \sqrt{2}, 1)$ y el mínimo absoluto en $(0, -\sqrt{2}, 1)$

7.5 Ejercicios

$1^{\underline{o}}$) Sea $f(x,y) = \ln(1+x^2+2x+y^2)$. Calcule el gradiente, la matriz hessiana de f en un punto genérico y compruebe que es armónica, esto es, que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

$2^{\underline{o}}$) Sean $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0; x > 0\}$, $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \neq 0\}$, $f : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x,y) = \left(x^y,\ x - y^2,\ \frac{x}{y}\right) \qquad g(x,y,z) = \left(x^2y^2 + \frac{xy}{z},\ xy^2z^2\right)$$

Calcular $D_{\boldsymbol{u}}(g \circ f)(1,1)$ en los casos:

a) u es la dirección definida por el vector $(-1,2)$.

b) $\boldsymbol{u} = (-2,1)$

$3^{\underline{o}}$) Sea la función $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donde $\mathbb{D} = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \neq 0\,\}$ definida como

$$f(x,y) = (y^2 - \frac{1}{x^2},\ x + 2y^3)$$

a) Calcule $Jf(1,-2)$; $df(1,-2)(-2,1)$; $D_{(1,3)}f(1,-2)$

b) Si en las variables de f hacemos las sustituciones:

$$x = e^{u-v}$$
$$y = e^{uv}$$

Explique la nueva función que obtenemos y calcule sus derivadas respecto de las variables u y v. Son habituales las expresiones $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$ para referirse a esas derivadas ¿es estrictamente correcta esa notación?

$4^{\underline{o}}$) Sea $f(x,y,u,v,w) = x^3\cos(y) - 3u^2v^2 + 4\,\mathrm{sen}(w)$ donde $x = u\,v\,w$; $y = w^3 - 3$. Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$

$5^{\underline{o}}$) Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase 2 en $\mathbb{R}$, con las siguientes características:

$$f(0,0) = 1 \ ; \ g(0,0) = \sqrt{3} \ ; \ \nabla f(0,0) = (2,-2) \ ; \ \nabla g(0,0) = (1,-1)$$

Y siendo sus matrices hessianas en el origen:

$$H_f(0,0) = \frac{1}{L2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad H_g(0,0) = \frac{1}{L2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

Investigar la posible existencia de un extremo relativo en el punto $(0,0)$, para la función $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x,y) = \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \mathrm{L}\,(1+t^2)\,dt$$

Sugerencia:

(%i2)

```
F(x,y):='integrate(log(1+t^2),t,f(x,y),g(x,y));
```

(%o2) $$\mathrm{F}(x,y) := \int_{\mathrm{f}(x,y)}^{\mathrm{g}(x,y)} \log(1+t^2)\,dt$$

(%i3)

```
diff(F(x,y),x);
```

(%o3) $$\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{g}(x,y)^2+1\right)-\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{f}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{f}(x,y)^2+1\right)$$

(%i4)

```
diff(F(x,y),y);
```

(%o4) $$\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{g}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{g}(x,y)^2+1\right)-\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{f}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{f}(x,y)^2+1\right)$$

Con estos datos, sustituya $(x,y) = (0,0)$ (a mano) y compruebe que es un punto crítico

(%i5)

```
diff(F(x,y),x,2);
```

(%o5) $$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{g}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{g}(x,y)^2+1\right)+\frac{2\,\mathrm{g}(x,y)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}(x,y)\right)^2}{\mathrm{g}(x,y)^2+1}-$$
$$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{f}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{f}(x,y)^2+1\right)-\frac{2\,\mathrm{f}(x,y)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{f}(x,y)\right)^2}{\mathrm{f}(x,y)^2+1}$$

(%i6)

```
diff(F(x,y),y,2);
```

(%o6) $$\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{g}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{g}(x,y)^2+1\right)+\frac{2\,\mathrm{g}(x,y)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{g}(x,y)\right)^2}{\mathrm{g}(x,y)^2+1}-$$
$$\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{f}(x,y)^2+1\right)-\frac{2\,\mathrm{f}(x,y)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{f}(x,y)\right)^2}{\mathrm{f}(x,y)^2+1}$$

(%i7)

```
diff(F(x,y),x,1,y,1);
```

(%o7) $$\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,\mathrm{g}(x,y)\right)\log\left(\mathrm{g}(x,y)^2+1\right)+\frac{2\,\mathrm{g}(x,y)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}(x,y)\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{g}(x,y)\right)}{\mathrm{g}(x,y)^2+1}-$$

$$\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,\mathrm{f}\,(x,y)\right)\log\left(\mathrm{f}\,(x,y)^2+1\right)-\frac{2\,\mathrm{f}\,(x,y)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{f}\,(x,y)\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{f}\,(x,y)\right)}{\mathrm{f}\,(x,y)^2+1}$$

Con estos datos, sustituya $(x,y)=(0,0)$ (a mano) y calcule el hessiano de $F(x,y)$ en ese punto.

6º) Halle los extremos relativos de la función:

$$f(x,y,z)=(\,2x-y+3z\,)\cdot e^{-(\,x^2+y^2+z^2\,)}$$

7º) Una función real f, de clase 2 y cuatro variables, tiene nulas todas las parciales en el origen y la matriz hessiana en ese punto es: $\begin{pmatrix}-1&3&-5&0\\3&-2&4&-3\\-5&4&2&1\\0&-3&1&3\end{pmatrix}$ ¿Podemos afirmar que f tiene un extremo relativo en el origen?

8º) Halle los extremos relativos de la función
$f(x,y,z)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}z-\operatorname{sen}(x+y+z)$

9º) Halle los extremos relativos de la función:

$$f(x,y,z)=\left(\,x-2y-3z+1\,\right)^2+y^2-\frac{1}{2}z^2\ \ ;\ \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Para los puntos :

$$z^2=2x^2+2y^2+1$$

10º) Diseñar una lata cilíndrica (con tapa y todo) para contener V litros de líquido, usando la mínima cantidad posible de material.

11º) Se considera la familia de elipses:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

que pasan por el punto $(1,1)$. Calcular la elipse de la familia que encierra un área mínima.

12º) Dada la función $f:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=4x^2+9y^2-x^2y^2$ siendo $\mathbb{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq 4\}$. Se pide calcule los extremos absolutos de la función en su dominio $\mathbb{D}$.

Sugerencia: halle los extremos normales y considere sólo los que caen dentro del círculo. Luego halle los extremos sobre el borde por el método de Lagrange. ¡No clasifique los puntos! (gran pérdida de tiempo). Como $\mathbb{D}$ es un compacto, sólo valore f en cada punto crítico para ver dónde se encuentran el máximo y el mínimo absolutos.

13º) Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y,z) = x^2 + z^2 + \frac{1}{2}\left[\,(x+z-8)^2 + (y+1)^2\,\right]$$

Halle los puntos extremos absolutos de f, cuando restringimos el dominio al conjunto:

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 9 \right\}$$

Sugerencia: considere la sugerencia del ejercicio anterior