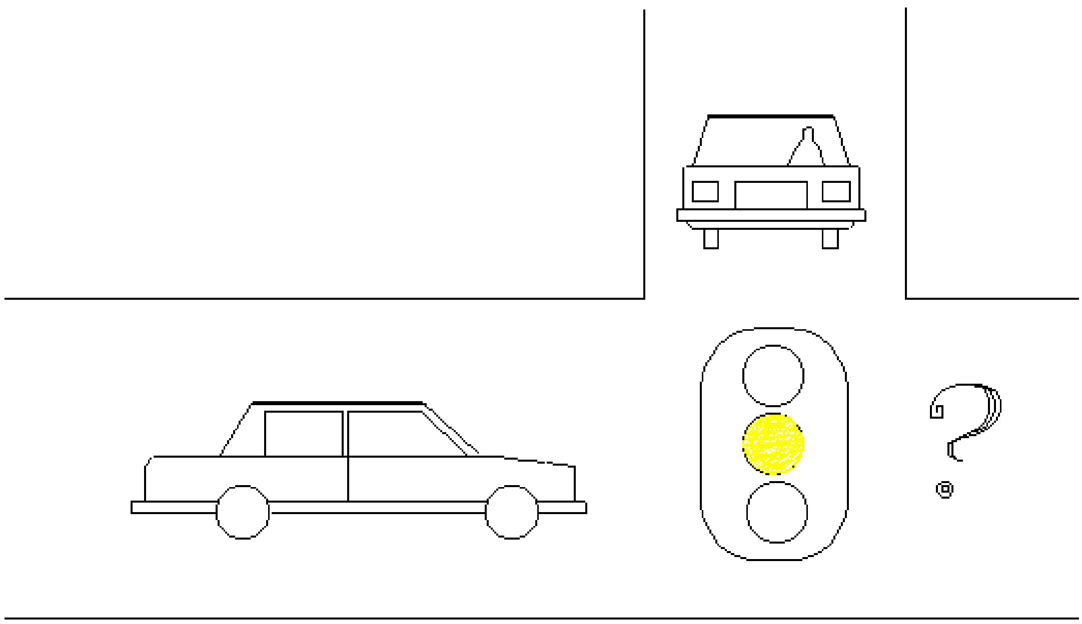
12 SIMULOINTEJA JA KAAVOJA

Tietokone soveltuu hyvin erilaisiin simulointeihin, kunhan tilanne ja vaihtelut pystytään määrittämään. Esimerkiksi liikennevaloja ei voida testailla konkreettisessa risteyksessä. Luvun tavoitteena on johdatella lukija simulointien kehittämisen maailmaan.

12.1 Liikennevalojen ohjaus



Auto on suomalaisten pyhä lehmä. Sitä ei saa naarmuttaa saatikka antaa sen odottaa risteyksessä valojen vaihtumista. Liikennevalot on säädettävä toimimaan siten, etteivät autot joutuisi odottamaan liian kauan valojen vaihtumista. Tämä edellyttää, että esimerkiksi kahden kadun risteyksessä liikennevalot optimoidaan. Ja toisaalta on pidettävä huoli siitä, että autojonot ehtivät purkautua mahdollisimman hyvin sinä aikana, jolloin valo on vihreänä. Koetamme seuraavassa simuloida tällaista valo-ohjattua risteystä. Arvoja voidaan muuttaa myöhemmin vastaamaan esimerkiksi liikennevirtatutkimuksen antamia todellisia arvoja jossakin risteyksessä.

Otamme ensin tutkittavaksi aikajaksoksi 6 sekuntia, eli minuutin aikana on kymmenen jaksoa. Liikennetiheys yksisuuntaisella kadulla A on 6000 +-1200 autoa tunnissa ja toisella yksisuuntaisella kadulla B taas 1800 +-600 autoa tunnissa.

Kymmenen sekunnin aikana risteykseen voi katua A siis saapua autoja seuraavasti yhden minuutin aikana: 6000/60 = 100 autoa ja poikkeama on 1200/60 = 20 autoa. Katua B lähestyy vastaavasti risteystä 2400/60 = 40 autoa ja marginaali on 600/60 = 10 autoa.

Kun tutkittava aikajakso on 6 sekuntia eli ajatellaan, että valot vaihtuvat 6 sekunnin välein, niin voidaan laskea, kuinka monta autoa tulee kumpaakin katua pitkin kyseiseen risteykseen 6 sekunnin aikana:

Katu A: Autoja minuutissa: 100 +-20 eli kuuden sekunnin jakson aikana autoja voi tulla 10 +-2 kpl.
Katu B: Autoja minuutissa: 40 +-10 eli jakson aikana voi tulla autoja 4 +-1 kpl.

Emme tiedä siis tarkalleen, kuinka monta autoa risteykseen saapuu kutakin katua 6 sekunnin aikana. Määrä voi olla mikä tahansa edellä mainittujen marginaalien sisällä. Haluaisimme nyt säätää valojaksot siten, että odotusajat jäisivät mahdollisimman lyhyiksi. Olettakaamme, että 6 sekunnin aikana ehtii 5 autoa ylittää risteyksen.

Kuinka valot tulisi laittaa toimimaan, jotta odotusaika minimoituisi? Kuinka 6 sekunnin jaksot on jaettava kahden kadun kesken ?

Käytämme autojen saapumisen simulointiin satunnaislukuja seuraavasti:
Katua A saapuu risteykseen autoja 8...12 kappaletta eli generoimme satunnaislukuja tältä väliltä.
Katua B saapuu autoja 3...5 kappaletta, joten generoimme lukuja tältä väliltä.

Määräämme ensin niiden jaksojen määrän (Na), jolloin kadun A autoille palaa vihreä valo. Jos simuloimme liikennettä 5 minuuttia, on jaksojen kokonaismäärä siis 5 x 10 = 50 kpl. Määrittäkäämme aluksi Na:ksi puolet minuutin jaksoista eli 5 jaksoa.

Simuloimme nyt liikennettä silmukassa.

Liikennevaloristeys:

```
Minuutit = 1...5
Jakso = 1...10
Generoimme satunnaisluvun, joka kuvaa kadun A autojen määrää
Generoimme satunnaisluvun, joka kuvaa kadun B autojen määrää
Jos Na <= Jakso,
niin vihreä palaa kadun A autoille

Muutoin
vihreä palaa kadun B autoille

Seuraamme liikennevirtaa tarkkailemalla

Jos kadun A autojen kokonaismäärä <= 5,
niin kaikki autot ehtivät mennä risteyksen yli vihreiden
valojen palaessa ja kokonaismäärä nollautuu.
Muutoin
vain 5 autoa kaikista ehtii mennä yli, jolloin
kokonaismäärästä vähennetään 5 autoa.
Sama koskee katua B (5 autoa ehtii ylittää kadun vihreän valon
palaessa).
```

Nyt saadaan siis odotusajat esille:
Kadun A autot odottavat ajan (Aika1): Aika1 + autojen kokonaismäärä x 6 sekuntia.
Kadun B autot odottavat ajan (Aika2): Aika2 + autojen kokonaismäärä x 6 sekuntia.
Kokonaisodotusaika = Aika1 + Aika2.
Jakso = Jakso + 1
Minuutit = Minuutit + 1

Algoritmia voi kehittää esimerkiksi siten, että se erottelee ruuhka-ajat, jolloin autojen määrät ovat suurimmillaan. Lisäksi eri kaduille voivat vihreän valon palamisajat olla eri pituiset. Kadun A autoille esimerkiksi 2 x kadun B aika. Myös jaksojen lukumäärää minuuttia kohti voidaan kasvattaa, jolloin valon käyttö tehostuu. Tässä on kuitenkin huomattava, että valojen vaihtuminen vie aikaa sekin.

12.2 Nakkikioskin asiakkaat

Nakkikioskeilla on usein ongelmana se, kuinka paljon asiakkaat joutuvat odottelemaan makkaroitaan. Jos odotusaika kasvaa, asiakas painelee helposti naapurikioskille. Toisaalta nakkikioskin omistajalla on mahdollisuus lisätä työntekijöitä ja palvelutiskejä, mutta milloin asiakkaita olisi niin runsaasti, että lisäinvestoinnit kannattaisivat? Tai kuinka usein asiakas kyllästyy odottamaan?

Pitäisikö tavaravalikoimaa kasvattaa tavaroilla, joita voisi myydä näppärästi nakkikauppojen välillä ja jopa niiden aikana?

Ajatelkaamme nakkikioskia, jossa on vain yksi myyjä eli kioskin omistaja. Nakin generointi kestää 2 minuuttia, jona aikana ei muita asiakkaita ehdi palvella. Omistaja käy päivätöissä ja hoitaa kioskia vain iltaisin välillä 17.00 - 22.00. Kadulla kävelee tuona aikana keskimäärin 450 henkilöä tunnissa ja pari nakkia maistuisi suunnilleen joka 15. henkilölle. Asiakkaat saapuvat melko sattumanvaraisesti.

Palveltavien asiakkaitten maksimimäärä iltaisin olevana aukioloaikana (5 h) on siis: 5*60/ 2 = 150 asiakasta.

Koska asiakkaat tulevat sattumanvaraisesti kioskille, niin generoidaan satunnaislukuja väliltä asiakkaiden saapumiselle väliltä 0 ... 600. Luvut kuvaavat minuutteja alkaen kellonajasta 17.00. Omistajan kassan mukaan asiakkaita on iltaisin käynyt ainakin 100 kappaletta, joten lukua 110 voidaan aluksi käyttää simuloinnissa. Omistaja haluaisi tietää, olisiko asiakkaita enemmän, jos heitä palveltaisiin nopeammin. Siksi olisi tiedettävä odotusaikoja ensin tällä asiakasmäärällä, myöhemmin asiakasmäärää voisi kasvattaa.

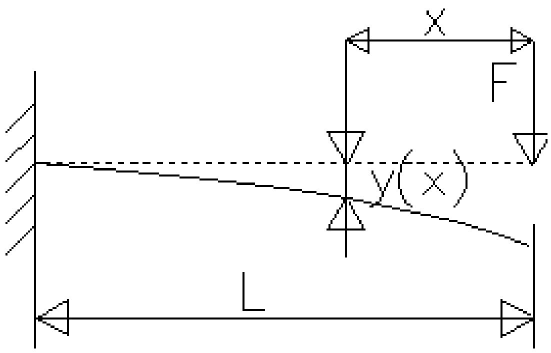
Ensin generoidaan siis satunnaislukuja, jotka kuvaavat 110 asiakkaan tuloaikoja. Seuraavaksi tuloajat asetetaan kasvavaan järjestykseen.

Sitten on vain alettava myydä nakkeja. Ensimmäisen asiakkaan palvelu A_1 alkaa, kun hän on saapunut, eli ajankohtana T_1 ja kestää siis 2 minuuttia. Tämän jälkeen on seurattava muita asiakkaita: milloin he saapuvat ja milloin heitä pystytään palvelemaan. Määräävä tekijä on se, milloin aiemman asiakkaan palvelu päättyy. Voidaan siis sanoa, että seuraavien asiakkaiden palvelu A_i alkaa ajankohtana T_i tai ajankohtana $A_{i-1} + 2$, koska aiemman palvelu voi olla kesken.

Odotusajat voimme laskea seuraavasti: Ensimmäisen asiakkaan odotusaika on nolla. Seuraavien asiakkaiden odotusajat ovat tietenkin palvelun alkamisajan ja saapumisajan erotuksia.

Voimme nyt pyörittää nakkikioskia silmukassa (2 ... 110) ja laskea odotusaikoja. Tulosten perusteella nakkikioskin omistajan tulisi pystyä päättämään esimerkiksi lisäinvestoinneista.

12.3 Taipumaviiva



Kehitämme vielä malliksi algoritmin taipumaviivan laskemiseen. Ottakaamme kohteeksi ulokepalkki, jota rasittaa pistekuormitus F. Olkoon palkkina neliöpalkki, jonka aksiaalinen pintamomentti $I = h^4/12$. Neliöpalkin materiaalina on teräs, jonka kimmokerroin E = 210 GPa eli 210000 N/mm^2.

Ulokepalkin taipuma lasketaan kaavasta:

$$y(x) = FL^3/6EI\ [2 - 3(x/L) + (x/L)^3]$$

Voimme nyt tulostaa palkin taipuman arvoja, kun x kasvaa 50 millimetristä pituuteen L saakka. Askeleena voisi olla 50 millimetriä.

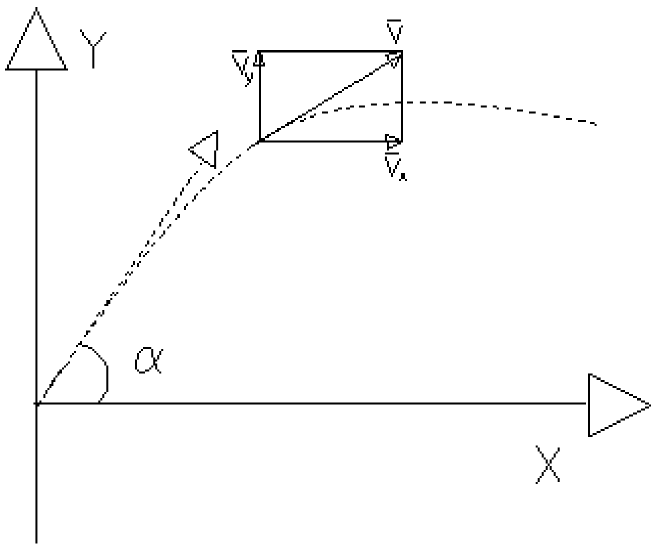
Algoritmi voisi olla vaikkapa seuraavanlainen:

```
Annetaan palkin arvot I ja L sekä arvo E.
Annetaan voima F samassa Newton-kerrannaisyksikössä kuin E:n
arvossakin.
Esitellään lauseke y = FL3/6EI [2 - 3(x/L) +(x/L)3]
Alustetaan silmukka, jossa x = 50 to L
Lasketaan arvoja y:lle
Tulostetaan x ja y.
```

12.4 Keihäänheitto

Keihäänheitto on Suomessa haudanvakava asia. Menestyminen siinä riippuu monesta tekijästä, joista keihään alkuvauhti ja heittokulma ovat (heittokäden kunto vaikuttaa siis ensin mainittuun) niitä tärkeimpiä.
Simuloimme seuraavassa keihäänheittoa olosuhteissa, joissa ilmanvastus oletetaan nollaksi. Toisaalta emme ota huomioon myöskään tuulen vaikutusta, joka sinänsä voi olla pituuteen joko myönteisesti tai kielteisesti vaikuttava. Ajatelkaamme, että tuulen vaikutus kumoaa osan ilmanvastuksen vaikutuksesta. Joka tapauksessa kilpailuissa heitetään useampia heittoja eri olosuhteissa, jotka ovat kaikille kilpailijoille samanlaiset.

Kuvamme havainnollistaa keihäänheittotilannetta:



Olkoon alkunopeus v_0 ja alkukulma α_0.

Keihään paikan hetkellä t saamme kaavasta:

$$x = v_0 \cos\alpha_0 * t$$
$$y = v_0 \sin\alpha_0 * t - 0.5\, gt^2$$

Keihään nopeus ja kulma hetkellä t on taas:

$V_x = v_0 \cos\alpha_0$
$V_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt$
Jolloin radan suuntainen nopeus $V = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2}$
Kulma hetkellä t = arctan V_y / V_x

Keihään nousuaika ja lentoaika saadaan seuraavasti:

Nousuaika = $v_0 \sin\alpha_0/g$
Lentoaika on tietenkin 2 * nousuaika.

Keihään nousukorkeus on:

Nousukorkeus = $v_0^2 \sin^2\alpha_0/2g$

Keihään kantama on:

Kantama = $v_0^2 \sin2\alpha_0/g = v_0^2\, 2\sin\alpha_0 \cos\alpha_0/g$

Keihäänheiton seurannan algoritmi voisi olla seuraavanlainen:

```
Annetaan alkunopeus v0 ja alkukulma alfa0
Lennon kestolle voimme antaa takarajan, esimerkiksi 5 sekuntia
Seurataan keihään lentoa 1/4 sekunnin aika-askelin (T): T = 0...5
Lasketaan ja tulostetaan silmukassa
paikka hetkellä T
nopeus hetkellä T
kulma hetkellä T
Lasketaan lopuksi nousuaika NT, lentoaika LT, nousukorkeus NK ja
kantama K
```

Tilannetta voisi tutkiskella muuttamalla alkunopeutta ja kulmaa. Kun lentoaika on laskettu tarkemmin, voidaan sitä käyttää silmukan takarajana.

Voimme pohtia hieman, millaisiin karkeisiin alkunopeuksiin ihminen voisi päästä. Ihmisen antama nopeus keihäälle aikaansaadaan noin 2 metrin kiihdytyksen aikana, johon nopeuteen antaa lisänsä keihäänheittäjän alkuvauhti, karkeasti noin 10 km/h.

Arvioikaamme, että keihään alkunopeus on noin 110 km/h. Alkukulma vaihtelee tietenkin riippuen keihäänheittäjän tekniikan stabiiliudesta.
Jos alkunopeus pysyttelee suunnilleen nopeudessa 110 km/h, voimme kokeilla algoritmia alkukulmilla 30, 35, 40, 45 ja 50 astetta.

Erityisesti meitä kiinnostaa kantama, joka saatiin siis kaavasta:

$$\text{Kantama} = v_0^2 \sin 2\alpha_0/g = v_0^2\, 2\sin\alpha_0 \cos\alpha_0/g$$

Saamme kantamaksi eri lähtökulmille seuraavia arvoja:
Muutamme ensin nopeuden yksiköksi m/s, jolloin alkunopeudeksi saamme 30,6 m/s.
Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}80665\ m/s^2$.

Nyt siis:

$$v_0^2 = 933{,}642\ m^2/s^2$$
$$g = 9{,}80665\ m/s^2$$

Alkukulma on 30 astetta: kantama = 82,5 m
Alkukulma on 35 astetta: kantama = 89,4 m
Alkukulma on 40 astetta: kantama = 93,8 m
Alkukulma on 45 astetta: kantama = 95,2 m
Alkukulma on 50 astetta: kantama = 93,8 m

Näemme, että kulmalla on suuri vaikutus. Toinen tärkeä tekijä on lähtönopeus, joka vielä korotetaan toiseen potenssiin. Lukijakin lienee huomannut, että nykyajan keihäänheittäjät eivät ole niinkään väkivahvoja jurrikoita, vaan pikemminkin laajaulotteisia ja nopeita veikkoja.

Tällainen simulointi soveltuu siis kilpailutilanteeseen, jossa kaikilla on samanlaiset olosuhteet eli ilmanvastus (ja tuulen vaikutus) aiheuttaa kaikkien tuloksiin tietyn siirtymän. Tällainen siirtymä on tietenkin sitä suurempi, mitä suurempi on keihään nopeus ja heiton pituus. Ilmanvastuksen vaikutus esitetään yleensä vaikutuskertoimella k, jonka yksikkö on 1/m. Kerroin k tulee siis nopeuden kertoimeksi ja se hidastaa siis keihään nopeutta. Kertoimen suuruusluokka on $n \times 10^{-5}$. 10^{-6} (keihäs on melko suoraviivainen). Käytännössä keihäs ei siis lennä kovinkaan symmetristä rataa, vaan ilmanvastuksesta ja tuulesta johtuen rata on ballistinen.

Mielenkiintoista olisi vielä tutkia erikseen putoamiskiihtyvyyden g-muutoksen vaikutusta, sehän vaihtelee hieman eri puolilla maapalloa johtuen maapallon pyörimisliikkeestä, sen epähomogeenisuudesta ja epä-pallomaisuudesta. Tarkkoja arvoja eri leveysasteilla on mahdollista laskea kansainvälisestä putoamiskiihtyvyyden kaavasta. Esimerkiksi Helsingissä $g = 9{,}8194\ m/s^2$ ja Oulussa taas $g = 9{,}8230\ m/s^2$

sekä päiväntasaajalla g = 9,7805 m/s^2
Vaikuttaako siis muuttuva g:n arvo yksittäisiin heittoihin ja kuinka paljon?
Oletetaan, että hra Ratu heittää keihästä Oulussa ja hra Selenius taas päiväntasaajalla. Kaikki heittäjien muut parametrit ovat samoja: v_0 = 30,6 m/s ja heittokulma 40 astetta.

Saamme nyt seuraavat kantamat:

1. Hra Ratu Oulussa: 93,88 m
2. Hra Selenius päiväntasaajalla: 94,28 m

Absoluuttinen ero on siis 0,4 m (noin 1/2 %). Vaikutus on siis melkoisen pieni.